論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　第　　　号

氏　　　　名　　遠藤　健太

論　文　題　目

On the effective problem of the universality theorem and the denseness problem for zeta and L-functions

（ゼータ関数及び L-関数の普遍性定理の定量的評価と稠密性定理について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
古　庄　英　和

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松　本　耕　二

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
宇　澤　　達

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　特任准教授　Ph.D.
Bachmann Henrik

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

ゼータ関数や L 関数の値分布論において、種々の稠密性定理や普遍性定理はその中核となるものである。遠藤氏の学位論文はこの重要なテーマに切り込んだものである。氏の論文は３つの部分からなり、第１章は序論で、第２章と第３章でそれぞれ稠密性と普遍性に関する主結果が証明される。第２章と第３章は思想的には関連し、技術的にも似通った部分があるが、基本的には独立した内容である。

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の稠密性については、$1/2 < \sigma < 1$ であれば

$$\{\zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

が複素平面 $\mathbb{C}$ 上で稠密となることは古くから知られているが、臨界線 $\Re s = 1/2$ 上での $\zeta(s)$ の値の集合

$$\{\zeta(1/2 + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

が $\mathbb{C}$ 上で稠密になるか、という問題は今日でも未解決である。遠藤氏はこの問題に着目した。この問題そのものの解決は（Riemann 予想を仮定してさえ）極めて困難だと思われるので、遠藤氏はそれよりはアプローチしやすい問題としてその対数の積分を考察し、Riemann 予想を仮定すれば、

$$\left\{ \int_0^t \log \zeta(1/2 + i\tau) d\tau \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

が $\mathbb{C}$ で稠密であることを証明した。さらに、二回以上反復積分した場合の値の稠密性が、Riemann 予想と同値であることを証明した。この種の定理はそれまで誰も考えてもいなかった方向での著しい結果であり、その独創性は高く評価できる。

この研究は井上翔太氏との共同研究で、論文は Forum Math. 誌に掲載予定である。主定理の証明は、井上氏が別の論文で証明した、$\log \zeta(s)$ の反復積分に関するある種の近似定理が出発点となっているが、その近似定理から主結果を導く過程では遠藤氏が主たる貢献者であることを、予備審査セミナーにおいて確認した。その部分の議論は Voronin が定量的オメガ評価に関する仕事の中で用いたアイデアに基づくものである。

遠藤氏の第二の主結果は、「弱い普遍性」の定量化に関するものである。普遍性というのはロシアの数学者 Voronin が $\zeta(s)$ の場合に最初に発見したもので、大雑把に言えば、帯領域 $1/2 < \Re s < 1$ 内の勝手なコンパクト集合 K とその上の非零正則関数 $f(s)$ を与えると、$\zeta(s)$ の適当な虚部方向への平行移動 $\zeta(s + i\tau)$ が $f(s)$ を K 内で一様近似する、というものであって、その後、多くの一般化、アナロジーなどが証明されてきている。しかし、証明の一部に non-effective な議論を使うため、普遍性定理の定量化は困難で、大きな未解決問題として残されている。

他方、上述した古典的な $\zeta(s)$ の稠密性定理を一般化した、高次元の稠密性定理として、

$$\{(\zeta(\sigma + it), \zeta'(\sigma + it), \ldots, \zeta^{(n-1)}(\sigma + it)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$(1/2 < \sigma < 1)$ が $\mathbb{C}^n$ で稠密、という結果も知られている。Matsumoto は、これを用いれば普遍性定理のある意味での「弱い」version が導けることを注意した。そして Garunkštis, Laurinčikas, Matsumoto, J.& R. Steuding の５人は、この「弱い」形のものであれば定量化が可能であることを見出した。

論文審査の結果の要旨

遠藤氏は、$\zeta(s)$ についてだけ示されていたこの定量的結果を、一挙に一般の Selberg クラスの L 関数にまで拡張した。ただし素数定理型の漸近式や零点密度評価に関する若干の（自然な）仮定は追加する必要がある。この一般化の実行に際しては $\zeta(s)$ の場合には現れてこなかった係数和の扱いなどの難しさが生じ、当然ながら $\zeta(s)$ の場合の議論の単純な拡張だけで成し遂げることはできない。遠藤氏はこの難点を、稠密性の結果の証明においても用いた Voronin の定量的オメガ評価のテクニックに加えて、Laurinčikas–Matsumoto の正密度法のアイデアなども援用しながら、相当に複雑精緻な議論を展開して突破しており、大変優れた力量を感じさせる。

以上のように、遠藤氏の学位論文はゼータ関数の値分布論への極めて意義ある貢献であり、学位論文として十分な内容を持つものである。2021 年 2 月 26 日に行われた公開学位審査会においても、遠藤氏の問題意識、本学位論文の主要結果とその意義、問題解決への基本的アプローチなどが明快に示され、学位審査委員からの質問にも的確に応答がなされた。

以上のことから、学位審査委員会は申請者が博士（数理学）の学位を授与される資格を有すると判断する。