別紙４

報告番号	※　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Higher dimensional case of sharper estimates of Ohsawa–Takegoshi L^2-extension theorem
（大沢-竹腰 L^2 拡張定理の精密な評価の高次元化）

氏　　名　菊池　翔太

論　文　内　容　の　要　旨

大沢–竹腰 L^2 拡張定理とは, 与えられた擬凸領域 Ω, Ω の閉部分多様体 V と Ω 上の多重劣調和関数 φ に対して, V 上の正則関数 f を Ω 上の正則関数 F に $||F||^2_{\Omega,\varphi} \leq C||f||^2_{V,\varphi}$ という L^2 評価付きで拡張するものである. ここで C は Ω と V にのみ依存した正定数, $||\cdot||_\varphi$ は重み φ に関する L^2 ノルムである. 大沢–竹腰 L^2 拡張定理とその一般化されたものは, 複素幾何学や代数幾何学の研究の中で広く応用されている. 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の Green 関数とは, Laplace 方程式の基本解である. つまり, 与えられた点で対数的極を持つ負値劣調和関数たちの各点における上限を取ったものである. Green 関数とその一般化されたものは, 定義域の情報を多く持つことから, 複素解析の分野において多くの研究が行われている. 大沢–竹腰 L^2 拡張定理と Green 関数は, 吹田予想と呼ばれる Bergman 核と Green 関数から定義される対数容量との間にある関係を通して深く関わりあっている.

近年 Błocki, Guan–Zhou と Berndtsson–Lempert によって, 最良評価の大沢–竹腰 L^2 拡張定理が証明された. つまり L^2 評価式の中に現われる定数 C を最良の形で決定したのである. 特に Berndtsson–Lempert は次のような関数 G の存在を仮定している: Ω 上の負値多重劣調和関数であり,

$$\log d_V^2(z) - B(z) \leq G(z) \leq \log d_V^2(z) + A(z) \tag{1.1}$$

を満たすものである. ここで $d_V(z)$ は $z \in \Omega$ と V との間の距離, A と B は Ω 上の連続関数である. また Ω 上の連続関数 $B(z)$ は以下のように L^2 評価式の中に現われる:

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \leq \sigma_k \int_V |f|^2 e^{-\varphi + kB}.$$

ここで σ_k は $\mathbb{C}^k$ の中の単位球の体積である. (1.1) を満たす負値多重劣調和関数を V に極を持つ Ω 上の Green 型関数と呼ぶ. ここで Green 型関数が存在するような領域 Ω と閉部分多様体 V の組 (Ω, V) の幾何学的な特徴付けが明らかになっていないという問題点がある.

その後に Hosono によって, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上において L^2 評価式の中に現われる定数 C を重み φ に依存させることで, Berndtsson–Lempert によって得られた L^2 評価式より精密な L^2 評価式を得ることに成功した. 手法は次のようなものである: まず与えられた, 0 を含む領域

$\Omega \subset \mathbb{C}$ と $\varphi(0)=0$ となる Ω 上の劣調和関数 φ に対して, $\mathbb{C}^2$ 上の擬凸領域 $\tilde{\Omega} := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z \in \Omega, |w|^2 < e^{-\varphi(z)}\}$ を定義する. $\tilde{\Omega}$ と $\tilde{V} := \{z=0\}$ に対して, 複素 Monge–Ampère 方程式に対する Dirichlet 問題の解を用いて, $\tilde{V}$ に極を持つ $\tilde{\Omega}$ 上の Green 型関数を構成する. $\tilde{\Omega}$, $\tilde{V}$ と $\tilde{G}$ に対して, Berndtsson–Lempert の結果を用いて精密な L^2 評価式を得るというものである. この結果を sharper estimates と呼ぶことにする.

本論文では, $\mathbb{C}^n$ 上の擬凸領域と幾つかの条件を課した擬凸領域上の閉部分多様体に対して, Hosono の sharper estimates を一般化した. 先ほど述べたように, 与えられた $\mathbb{C}^n$ 上の領域とその閉部分多様体に対して, Green 型関数を構成することは難しい. その理由の一つとして, 一般に閉部分多様体との距離関数の対数を取ったものが多重劣調和となるかどうか分からないことが挙げられる. この点に着目して, まず初めに Berndtsson–Lempert 型 L^2 拡張定理を解析的部分集合上に極を持つ多重複素 Green 関数を用いて改良した. 解析的部分集合上に極を持つ多重複素 Green 関数 G とは, 各点の周りで解析的部分集合から定まるイデアル層の元の組 ψ を用いて $G(z) \leq \log|\psi| + \text{定数}$ が成立する負値多重劣調和関数を各点に対して上限を取ったものである. いま Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の擬凸領域, V を余次元 k の閉部分多様体とする. ここで閉部分多様体 V が有界な global generator $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ を持つ場合を考える. つまり各 ψ_i は Ω 上の有界な正則関数であり, $V = \{\psi_1 = \ldots = \psi_k = 0\}$ となるということである. このとき V に極を持つ Ω 上の多重複素 Green 関数 $G_{\Omega,V}$ が存在することが知られている. さらに Ω 上の連続関数 $B(z)$ が存在して, $\log|\psi| - B(z) \leq G_{\Omega,V}(z)$ が成立すると仮定する. また V は部分多様体であるので, 各点に対して, 適当に座標を選ぶことで ψ のヤコビアンは 0 でないように出来る. ここで ψ のヤコビアンの絶対値は V の周りで一様に下に有界であることを仮定する. これらの仮定は結論の L^2 評価式を決定するために必要なものである. この仮定の下で, Berndtsson–Lempert 型 L^2 拡張定理を改良した. 次に改良した Berndtsson–Lempert 型 L^2 拡張定理が成立する仮定の下で, 以下のような準備を行う. 与えられた擬凸領域 Ω と多重劣調和関数 φ に対して, $\mathbb{C}^{n+k}$ 上の擬凸領域 $\tilde{\Omega}$ を

$$\tilde{\Omega} := \{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+k} : z \in \Omega, |w|^2 < e^{-\frac{\varphi(z)}{k}}\}$$

と定義する. $\tilde{\Omega}$ の中の閉部分多様体 $\tilde{V}$ を $\tilde{\psi}_i(z,w) := \psi(z)$ という $\tilde{\Omega}$ 上の正則関数を用いて, $\tilde{V} := \{\tilde{\psi}_1 = \ldots = \tilde{\psi}_k = 0\}$ で定義する. $\tilde{\Omega}$ と $\tilde{V}$ に対して, 複素 Monge–Ampère 方程式に対する Dirichlet 問題の解を用いて, $\tilde{V}$ に極を持つ $\tilde{\Omega}$ 上の多重複素 Green 関数 $G_{\tilde{\Omega},\tilde{V}}$ を構成する. このとき $\tilde{\Omega}$, $\tilde{V}$ と $G_{\tilde{\Omega},\tilde{V}}$ に対して, 改良した Berndtsson–Lempert 型 L^2 拡張定理を用いることで, Hosono の sharper estimates の一般化を示した. さらに sharper estimates の一般化の応用として, $\mathbb{C}^n$ の中の単位球 $\mathbb{B}^n$, その閉部分多様体 $V = \{z_1 = \ldots = z_k = 0\} = \{z' = 0\}$ と V に関して radial な多重劣調和関数 $\varphi(z) = \varphi(|z'|)$ に対して, V 上の正則関数 f の L^2 最小な拡張を決定した. さらに東川擬計量を用いた sharper estimates の一般化についての考察も行った. 東川擬計量 $A_{\Omega,w}(X)$ とは, 一点 $w \in \Omega$ に極を持つ多重複素 Green 関数 $g_{\Omega,w}$ に対して, $A_{\Omega,w}(X) := \limsup_{\lambda \to 0}(g_{\Omega,w}(w + \lambda X) - \log|\lambda|)$ で定義されるものである. ここで $0 \neq X \in \mathbb{C}^n$ である. Hosono は東川擬計量を用いて, Berndtsson–Lempert 型 L^2 拡張定理を改良した. これは一点からの拡張定理であることを注意しておく. この Hosono 型 L^2 拡張定理に対して, sharper estimates を実現することが目標である. このとき $\mathbb{C}^{2n}$ 上の擬凸領域とその余次元 n の部分多様体 $\{z_1 = \ldots = z_n = 0\}$ に対して, Hosono 型 L^2 拡張定理の一般化に相当するものが必要になる. 故により一般な場合として, $\mathbb{C}^n$ 上の擬凸領域 Ω とその閉部分多様体 $V = \{z_1 = \ldots = z_k = 0\}$ に対して, 東川擬計量の一般化を

$$A_{\Omega,V,w}(X) := \lim_{\lambda \to 0}(G_{\Omega,V}(\lambda X, w) - \log|\lambda|)$$

と定義し, Hosono 型 L^2 拡張定理の一般化を示した. ここで $(0,\ldots,0,w) \in V$, $0 \neq X \in \mathbb{C}^k$ である. 加えて具体例において東川擬計量を用いた sharper estimates が成立することを示した.