

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 菊池 翔太

論 文 題 目

Higher dimensional case of sharper estimates of Ohsawa–Takegoshi  
 $L^2$ -extension theorem

(大沢-竹腰  $L^2$  拡張定理の精密な評価の高次元化)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
納 谷 信

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
小 林 亮 一

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (数理科学)  
太 田 啓 史

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (数理科学)  
松 尾 信 一 郎

## 論文審査の結果の要旨

本論文の主題は、大沢-竹腰  $L^2$  拡張定理の精密化に関わる。  $L^2$  拡張定理とは、  $\mathbb{C}^n$  内の有界な擬凸領域  $\Omega$  とその閉複素部分多様体  $V$ 、および  $\Omega$  上の多重劣調和関数  $\varphi$  (重み関数とよばれる) が与えられたときに、  $V$  上の任意の正則関数  $f$  の  $\Omega$  上の正則関数  $F$  への拡張で  $L^2$  評価式

$$\int_{\Omega} |F|^2 e^{-\varphi} \leq C \int_V |f|^2 e^{-\varphi}$$

をみたすものが存在する、という主張である。ここで、  $C$  は  $\Omega$  と  $V$  のみに依る ( $\varphi$  には依らない) 正定数である。この結果は 1987 年に出版され、その後、この結果自身およびその一般化は、多変数複素解析はもとより、複素幾何学や代数幾何学にも応用されてきた。

近年、 Berndtsson-Lempert, Blocki, Guan-Zhou によって、  $L^2$  拡張定理における定数  $C$  の最良値が決定されるという大きな進展があり、「最良  $L^2$  拡張定理」が確立された。実際、  $V$  の余次元を  $k$  とすると、  $C$  の最良値は  $k$  次元単位球体の体積と一致する。最良  $L^2$  拡張定理においては、  $C$  を最良にすることの反作用として、  $L^2$  評価式の右辺の積分が大きくなる (評価の精度が落ちる) ことが Berndtsson-Lempert によって観察された。そして、その度合いは  $V$  に極をもつ Green 型関数とよばれる多重劣調和関数と  $V$  への対数距離の間のずれによって評価される。このずれの記述が後述する東川擬距離の定義と同様のパターンであることに注目したことから、申請者の研究が始まった。

より最近になり、細野は、  $\Omega$  が  $\mathbb{C}$  内の有界領域で  $V$  が 1 点の場合に、  $L^2$  拡張定理における定数  $C$  が重み関数  $\varphi$  に依存することを許容すると、  $C$  は最良定数  $\pi$  よりもさらに小さくできることを示した。

本論文の主結果は、細野のこの結果の高次元化、すなわち、  $\mathbb{C}^n$  内の有界な擬凸領域とその閉複素部分多様体  $V$  の場合への一般化である。その際の問題点として、  $\Omega$  の点と閉複素部分多様体  $V$  の間の対数距離が一般には多重劣調和にならないため、高次元化に必要な Green 型関数の構成が困難であるという事情がある。そこで申請者は、Green 型関数の代わりに多重複素 Green 関数とよばれる関数を用いることにより、この困難を回避するという着想を得た。この点は、本論文において独創的な部分と評価される。このアイデアにより、申請者はまず Berndtsson-Lempert 型の最良  $L^2$  拡張定理の類似を定式化した (主結果 1)。そして、それに対して細野の議論を適用することにより、細野の結果を高次元化することができた (主結果 2)。

申請者はこの主結果の応用として、  $\Omega$  が球体、  $V$  が平坦かつ  $\varphi$  が動径的な場合に、  $V$  上の正則関数の  $L^2$  最小拡張の存在を示している。

別の観点として、細野は、  $V$  が 1 点の場合に、東川擬距離を用いて最良  $L^2$  拡張定理をよりシャープにできることを考察した。申請者は、細野の考察を  $V$  が正次元で平坦な場合に拡張した。そのために、  $V$  に極をもつ多重複素 Green 関数に対して東川擬距離の類似を定式化している (主結果 3)。また、応用として、最良  $L^2$  拡張定理よりもシャープな  $L^2$  評価式が得られる例を与えた。このように、問題を多角的に考察している点や、一般論にとどまらず具体例で計算を実行して定理の意義を確認している点も本論文の価値を高めている。

申請者は、  $L^2$  拡張定理に関する近年の進展を習得し、その上で細野の結果の高次元化という問題を設定して解答を与えたものであり、  $L^2$  拡張定理という主題に一定の貢献をなしたものと認められる。証明および結果の正否の観点からも問題点は見当たらなかった。また、本論文に関する公開審査会を 2021 年 2 月 19 日に行い、申請者が博士の学位を取得するに十分な学識を有することを確認した。

以上に鑑みて、学位審査委員会は、菊池氏の論文は博士 (数理学) の学位を授与するにふさわしい価値を有するものと認める。