別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Computation of the index of some meromorphic functions of degree 3 on tori（トーラス上のある３次有理型関数の指数の計算）

氏　　　名　薩仁胡

論　文　内　容　の　要　旨

コンパクトなリーマン面上の非定数有理型関数 g の指数とはこのリーマン面上の共形的計量 $ds^2 := \lambda d\zeta d\bar{\zeta}$ によるラプラシアン Δ_g を局所的座標 ζ を用いて $\Delta_g := \frac{4}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}$ と定義する時, 微分作用素 $L_g := -\Delta_g - |dG|^2$(ここで, $G\colon M \to S^2$ は g に対応する正則写像）の負の固有値の個数として定義される不変量である．有理型関数の指数は全曲率が有限な完備極小曲面の指数（モース指数）と密接に関係している．Osserman[9] は $\mathbb{R}^3$ の完備向きつけられた極小曲面の全曲率が有限であるならば, この極小曲面がコンパクトなリーマン面から有限個の点を除いたものにリーマンとして一緒になり, この極小曲面で定義されたガウス写像はコンパクトなリーマン面に定義された有理型関数に拡張されることを証明した．Fischer-Colbrie[3] と Gulliver-Lawson[4], [5] は $\mathbb{R}^3$ の完備向きつけられた極小曲面の index が有限であるの必要十分条件は全曲率が有限であることを証明した．これは index の定性的研究である．Fischer-Colbrie は $\mathbb{R}^3$ の完備向きつけられた極小曲面の全曲率が有限であるならば, index はこの極小曲面の拡張ガウス写像の index と一致することも証明した．Tysk[10] は $\mathbb{R}^3$ の完備向きつけられた極小曲面の index は全曲率のある定数倍によって上からおさえることを証明した．これは index と全曲率の関係に関する最初の定量的な研究である．index の下界の研究は Choe[1] と Nayatani[8] によって行われた．Nayatani[7] はコンパクトなリーマン面 M から単位球面 S^2 上の任意の有理型関数 g に随伴する微分作用素 L_g の index と nullity について, それらが g のある変形 g_t (t は正の実数) のもとで, どのように変化するかを研究した．彼はコスタ曲面のガウス写像 g を考え, t が十分小さいときの g_t の index とすべての t に対する g_t の nullity を計算

した．さらに，t を大きくしたときの index の変化を調べ，そのことの結果として，コスタ曲面の index が 5 であることを証明した．

本研究ではコンパクトなリーマン面 M から $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への非定数有理型関数 g の指数 $\mathrm{Ind}(g)$ を研究する． L_g の固有値 0 の重複度を g の退化次数 $\mathrm{Nul}(g)$ という． $\mathrm{Nul}(g)$ を計算するために実ベクトル空間として $H(g)$ を導入する． $H(g)$ の次元から $\mathrm{Nul}(g) - 3 = \dim_{\mathbb{R}} H(g)$ より，$\mathrm{Nul}(g)$ が計算できる．複素ベクトル空間

$$\widehat{H}(g) = \Big\{ f\omega \mid f : M \colon \widehat{\mathbb{C}} \text{ is a meromorphic function}, \\ D(f) + \widetilde{B}(g) \geqslant 0, \mathrm{Res}_{p_i}(f\omega) = 0, i = 1, \cdots, \mu \Big\}$$

を導入する． ここで，ω は M 上で固定された正則 1-形式である． $D(f)$ は f の divisor で，$P(g)$ を g の極 divisor，$B(g)$ を g の ramification divisor であるとき，$\widetilde{B}(g)$ は $\widetilde{B}(g) = B(g) - 2P(g)$ で定義される g の divisor である． $p_i (i = 1, \cdots, \mu)$ は g の ramification point である．次に実ベクトル空間

$$H(g) = \Big\{ f\omega \mid f : M_a \colon \widehat{\mathbb{C}} \text{ is a meromorphic function}, \\ D(f) + \widetilde{B}(g) \geqslant 0, \mathrm{Res}_{p_i}(f\omega) = 0, i = 1, \cdots, \mu, \\ \mathrm{Re} \int_\alpha ((1 - g^2), i(1 + g)^2), 2g)(f\omega) = 0, \forall\alpha \text{ closed curve} \Big\}$$

を導入する．$H(g)$ は $\widehat{H}(g)$ の実部分空間である．

トーラスに同相なリーマン面の 1 径数族

$$M_a = \left\{ (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}}^2 \mid w^2 = z(z - a)\left(z + \frac{1}{a}\right) \right\}, \ a \geqslant 1$$

を作る．ここで z は 2 次の有理型関数であり，w は 3 次の有理型関数である．まず，$\widehat{H}(w)$ を決定する．次に正の実数 t に対して $g = tw$ として $H(tw)$ の次元が 1 以上になるような t を求めるとちょうど $t = t_1(a), t_2(a) (t_1(a) \neq t_2(a))$ の二つの値が存在することが分かった．それから，$\mathrm{Nul}(tw)$ を求める，a, t を動かす時，$\mathrm{Ind}(tw)$ が変われば，そこで $\mathrm{Nul}(tw)$ も変わることを利用して，(数値的に評価可能な）a_0 が存在して，$1 \leqslant a \leqslant a_0$ の範囲で，全ての $t > 0$ に対して，$\mathrm{Ind}(tw)$ を求めた．