論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　第　　　　号

氏　　　名　　薩仁胡

論　文　題　目

Computation of the index of some meromorphic functions of degree 3 on tori

（トーラス上のある 3 次有理型関数の指数の計算）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小　林　亮　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
納　谷　　信

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
白　水　徹　也

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
川　村　友　美

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

閉リーマン面上の非定数有理関数 $g : X \to \mathbb{P}^1$ に対し，その指数（resp. 退化次数）という概念が，共形計量を任意にとることによって $L := -\triangle - |dg|^2$ という作用素の負の固有値（resp. ゼロ固有値）の重複度込みの個数により定義される．この定義は共形計量のとり方によらない (X, g) の不変量である．全曲率が有限な完備極小曲面の共形構造は閉リーマンから有限個の点を除いた有限穴あきリーマン面のそれであり，有界全曲率のもとではガウス写像は穴を超えて有理型関数に拡張することが Huber, Osserman によって知られている．従って有限全曲率のもとでは完備極小曲面のガウス写像の指数が定義され「モース指数（変分法の概念）」と「ガウス写像の指数」の２通りの指数の概念が定義される．これらの間の関係を問うことは自然な問題であるが，Fisher-Colbrie による基本定理によって，有限全曲率の極小曲面のモース指数とガウス写像の指数は一致する（有限全曲率の完備極小曲面の指数と呼ぶ）．これが，閉リーマン面上の有理型関数の指数を計算することの意義である．X を閉リーマン面，$g : X \to \mathbb{P}^1$ を有理型関数とする．X の共形計量として $ds^2 = g^* ds^2_{\mathrm{FS}}$ をとるという設定では L は $L_g = -\triangle_g - 2$ となる（X を「分岐つき球面幾何」と思う）．納谷は，g の指数と退化次数が g の変形に対しどう応答するかという問題を考察することによって Costa 曲面と呼ばれる 3 点穴あきトーラスの共形構造を持つ有限全曲率完備極小曲面の指数を決定した．この決定では，Costa 曲面が高い対称性を有することが本質的である．詳しくいうと，変形 $g_t = t\wp'$（t は実数）に対して周期条件を解くことによって 2 通りの t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ を決定し，$t_1\wp'$, $t_2\wp'$ では指数が 5 であり，$t_2\wp'$ が Costa 曲面のガウス写像であることから，Costa 曲面の指数を決定した．

以上の背景のもと，申請者が考えた問題は「Costa 曲面（のコンパクト化）$X_1 : w^2 = z(z^2 - 1)$ を $X_a : w^2 = z(z - a)(z + 1/a)$（$a$ は実数）に変形したときに納谷の結果がどうなるか」という問題である．この問題に対し，申請者の出した答は次である：

（定理）数値的に評価可能な $a_0 > 0$ が在って，次が成り立つ：$a \in [1, a_0]$ のとき，$t_1(a) < t_2(a)$ で次の性質を持つものが存在する：$t\wp'$ の指数は $0 < t \leq t_1(a)$ および $t_2(a) \leq t$ では 5 であり，$t_1(a) < t < t_2(a)$ では 6 である．

この定理の証明のポイントは二つある．一つ目は納谷の方法と同様の道筋に沿って周期条件を解くところである．周期条件を解くことは極小曲面論における最大の難関である．この問題を扱うために小谷・江尻，Montiel-Ros が導入したアイディアが基本的である．Ker(L) を正則なデータ（ある種の極小曲面の Weierstrass データ）に周期条件を含めた実ベクトル空間 $H(g)$ によって記述し，退化次数の計算を $\dim_{\mathbb{R}} H(w)$ の計算に帰着させるというアイ

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

ディアである．$H(g)$ の決定においては周期条件を解くことが中心的問題である．有理型関数の変形 tw に対して周期条件がいつ満たされるかを知りたいので $w = \wp'$ だから $H(tw)$ を考えることになる．周期条件の解があることは $\dim_{\mathbb{R}} H(tw) > 0$ を意味する． 申請者は，$a \in [1, a_0]$ のとき $\dim_{\mathbb{R}} H(tw) > 0$ が成り立つような t が 2 つあることを 10 ページにわたる楕円積分の計算によって示した．この計算を実行する Lemma4.4 が，申請者が本論文で成し遂げた最も大きな成果である．もう一つのポイントは，周期条件を解いた結果から定理の結論（指数の決定）を導くことである．この部分には納谷の問題との概念的な違いが現れる．なぜなら，納谷の問題では $a = 1$ に固定されている（その代わり Costa 曲面の高い対称性が使える）．しかし，申請者の設定では $a \neq 1$ のときが問題になる．そして，$a \neq 1$ に対応する有理型関数では Costa 曲面のガウス写像のような高い対称性が失われる．

この困難を克服するために，申請者は a を止めたまま議論するのではなく，a が変化することによって生じるリーマン面の変形を考えて，指数が変化するとき退化次数も変化することに着目して，納谷によって結果が（対称性の議論を使うことによって）わかっている $a = 1$ の場合に連続的につなげることによって，結論を導いた．

申請者は概念的な思考に弱いところがあるが，計算力はある．本論文においても, 申請者による主要な貢献は, 退化次数の決定に関わる決して自明でない計算をやり遂げたという点である

以上のような状況のもと，審査委員会の結論は以下のようなものである．

● 退化次数の決定に関わる周期積分の計算をやり遂げたこと, また, 本論文に必要な計算手法を修得して使いこなせるまでになった（多方面にわたる）努力を評価する．

● Costa 曲面の共形構造を X_1 から X_a に変形したら納谷の結果がどうなるか，という問題に対し決定的な結論を出したことによって，有理型関数の指数について非常に少ない計算例を一つ新たに加え，この分野に幾ばくかの貢献をなしたことを評価する．[1]

● 申請者は 2021 年 3 月 11 日の学位審査セミナーで問題の背景，設定，証明の概略，結果の意義をよく整理して分かりやすく報告した．審査委員会は，本論文の長い計算が実際に本人によるものであることを確認した．

以上の 3 点を根拠にして，本論文は学位論文に値するという結論に至った．

審査委員会
川村友美，小林亮一 (委員長)，白水徹也，納谷信 (指導教員)

[1] なお，$(X_a, t_2 w)$ は Costa 曲面のように興味深い極小曲面の Gauss 写像かどうかは不明だが，穴あきリーマン面上の任意の有理型関数は何らかの完備極小曲面の Gauss 写像になることが知られているから，その指数を計算していることになる．一方で，退化次数 ≥ 4 の場合，$N(g)$ の元に対応して g を Gauss 写像にもつ「エンドが全て平面に漸近的」な完備極小曲面が存在するので，その指数を決定しているとは言える．Costa 曲面の場合にも同じ Gauss 写像を持つそのような完備極小曲面が存在するが，これはカテノイドに漸近的なエンドを持つ Costa 曲面とは異なる．