# 論文審査の結果の要旨および担当者

| 報告番号 | ※　　　　　第　　　　　号 |
|---|---|

氏　　　　名　　齋藤 耕太

論　文　題　目

Arithmetic progressions of Piatetski-Shapiro sequences and related problems　(Piatetski-Shapiro 列からなる等差数列と関連する問題)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
古庄　英和

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松本　耕二

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　Dr.rer.nat.
Jaerisch, Johannes

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
中島　誠

# 論文審査の結果の要旨

齋藤氏の学位論文は 6 章からなる。1 章は序論、2 章は必要な諸概念等の導入と説明に充てられ、3 章から 5 章までが本論で、最後に今後の課題について 6 章で簡単に触れて締めくくられている。

本論である 3 章から 5 章は、それぞれが彼の論文 1 編に対応している。3 章は吉田裕哉氏との共著 (J. Number Theory **222** (2021))、4 章は松坂俊輝氏との共著 (Acta Arith., to appear) 、5 章は齋藤氏の単著論文 (Acta Arith., to appear) に基づく内容である。これらはそれぞれ独立した研究であるが、そこで一貫して追求されているのは、Piatetski-Shapiro 列に含まれる等差数列の存在問題である。そこでまず、この問題の背景から説明する。

自然数の集合 $\mathbb{N}$ の部分集合 $A$ が与えられた時、$A$ にはどれくらいの長さの等差数列が含まれ得るか、という問題は整数論の古典的な大問題の一つである。知られている顕著な結果としては、$A$ が $\mathbb{N}$ の中で正の密度を持てば $A$ は任意に長い等差数列を含む、という Szemerédi の定理 (1975) や、素数全体の集合は任意に長い等差数列を含む、という Green-Tao の定理 (2003) であろう。齋藤氏は学部学生時代からこの問題に強い関心を持ち、フラクタル幾何学の立場に立って、すでに修士の頃にいくつかの論文を書いている。それは弱等差数列についての Fraser-Yu の結果の高次元化、Assouad 次元の評価、素数分布論への応用などの内容で、氏の修士論文にまとめられており、また個々の内容はいくつかの雑誌に掲載されている。

博士後期課程に進んでからも、齋藤氏の問題意識はこの周辺にあるが、後期課程に入ってから特に集中的に氏が研究を進めたのが、Piatetski-Shapiro 列、すなわち $\alpha$ を 1 より大きい実数として、$n^\alpha$ の整数部分 $[n^\alpha]$ からなる数列 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ における等差数列の存在問題である。以下、この数列を $\mathrm{PS}(\alpha)$ と記すことにする。Piatetski-Shapiro の名を冠するのは、$\mathrm{PS}(\alpha)$ に含まれる素数の分布について彼が研究を始めたことに由来する。

Piatetski-Shapiro 列については Szemerédi の定理は使えないが、しかし $1 < \alpha < 2$ の場合には、$\mathrm{PS}(\alpha)$ は任意の長さの等差数列を含むこと、より正確に言うと、任意の $k \geq 3$ と $r > 0$ に対し、$[n^\alpha], [(n+r)^\alpha], \ldots, [(n+(k-1)r)^\alpha]$ が等差数列になるような $n$ が無限個存在することが知られていた。本論文 3 章における主要結果は、そのような $n$ の密度が $1/(k-1)$ であることを証明したことである。証明は一様分布論に基づき、初等的ではあるがかなり長い巧妙な計算を必要とする。また、「等差数列」を「多項式列」に取り替えた一般化や、Piatetski-Shapiro 列における $n^\alpha$ を $n^\alpha \log n$ $(1 < \alpha < 2)$ や $n^2/\log n$ などの数列に取り替えた場合、また discrepancy の評価など、関連する諸問題もかなり徹底的に論じられている。

さて上記は $1 < \alpha < 2$ における結果であったが、$\alpha$ が 2 を超えると、状況は大きく変わってくる。まず $\alpha$ が 3 以上の整数の場合、Darmon と Merel (1997) は、$\mathrm{PS}(\alpha)$ が長さ 3 の等差数列を全く含まないことを示した。つまり $1 < \alpha < 2$ の場合のような「任意に長い等差数列の存在」は少なくともこの場合には成り立たない。齋藤氏自身、そのような存在定理の成り立つ $\alpha$ の上限は 2 であろう、と予想を提示している。しかし一方で齋藤氏は、数値計算により、$\mathrm{PS}(2.2)$ が長さ 4 の等差数列を含むことを見つけているので、$\alpha$ が整数でない場合の状況は混沌としている、と言って良

# 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

い。こうした中で、本論文 4 章の主結果は、$2 < s < t$ を満たす任意の実数 $s, t$ に対し、$s \leq \alpha \leq t$ で $\mathrm{PS}(\alpha)$ が無限に多くの長さ 3 の等差数列を含むものが非可算個存在する、という定理である。これは $\alpha > 2$ という未開拓領域における初の本格的成果、と言っても過言ではない。証明はフラクタル幾何学によるもので、$ax + by = z$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$, $x, y, z \in \mathrm{PS}(\alpha)$ が無限個の解を持つような $\alpha \in [s, t]$ の集合の Hausdorff 次元が正であることを示すことで定理の証明を与えている。

5 章の結果は完全 Euler 直方体に関するものである。平方数 $k, l, m$ で、$k + l, l + m, k+m, k+m+l$ も全て平方数 (つまり $\mathrm{PS}(2)$ の元) であるようなものが (言い換えれば辺も対角線も全て整数であるような直方体が) 存在するか、と言うのは Euler 以来の未解決問題であるが、齋藤氏は $1 < \alpha < 2$ であれば、$k, l, m, k+l, l+m, k+m, k+m+l$ が全て $\mathrm{PS}(\alpha)$ に含まれるような自然数の組 $(k, l, m)$ が無限個存在することを証明した。この証明も、付随するある集合の Hausdorff 次元が正であることに帰着することでなされる。そしてその Hausdorff 次元に関する結果自体も、Glasscock の最近の結果 (2017, 2020) の定量的精密化を与えるものである。

また本論文の 3 章と 4 章は共著論文に基づくものであるが、そのどちらに対しても、本質的に重要な、証明の根幹をなす部分は齋藤氏の貢献であることを確認した。すなわち、3 章においては上記の形の主結果の定式化と証明は齋藤氏によるもので、共著者は一般化の部分を担当した。また 4 章に関しては出発点となるアイデアを共著者が提供したが、それに続くアイデアと、それらのアイデアを証明にまとめ上げる作業はすべて齋藤氏に負うものである。

このように、齋藤氏の学位論文は Piatetski-Shapiro 列における等差数列の存在問題への優れた寄与であり、学位論文にふさわしい内容を持つものである。令和 3 年 8 月 12 日に行われた学位審査セミナーにおいても、齋藤氏の問題意識と本論文における諸定理の証明の基本的道筋、そしてそれらの結果の意義などが明快に示され、審査委員からの質問にも的確に応答がなされた。

以上のことから、学位審査委員会は齋藤耕太氏の論文が学位論文として十分な価値を有するものと認める。