報告番号	※　　　　　　第　　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目 On the descendibility and extendability of homogeneous quasimorphisms

（擬準同型の降下及び拡張可能性について）

氏名　丸山修平

論　文　内　容　の　要　旨

本学位論文では斉次擬準同型(homogeneous quasimorphism)の descending problem 及び extending problem を扱う．群 G 上の実数値関数 $\mu : G \to \mathbb{R}$ が(斉次)擬準同型とは, $\mu(gh) - \mu(g) - \mu(h)$ の絶対値が一様に有界であり，さらに G の巡回部分群上で準同型となるときをいう(以下では単に擬準同型と呼ぶ)．定義から準同型は擬準同型であり，よって準同型を自明な擬準同型と呼ぶ．G 上の擬準同型全体のなすベクトル空間を $Q(G)$ で表す．擬準同型の descending problem とは，群の間の全射 $p : \Gamma \to G$ に対し，Γ 上の擬準同型が G 上のものの引き戻しとなるかを問うものである．擬準同型の extending problem とは，群 Γ とその正規部分群 K との組 (Γ, K) に対し，K 上の擬準同型が Γ 上に拡張できるかを問うものである．

本学位論文は，準備のための Chapter 1, descending problem を扱う Chapter 2，及び extending problem を扱う Chapter 3 の三つの Chapter からなる．

Chapter 2 では，主に連結な位相群 G の普遍被覆 $p : G^{\sim} \to G$ に対する descending problem を扱う．$Q(G^{\sim})$ には次の二つの部分空間がある：自明な擬準同型(つまり準同型)のなす空間 $H^1(G^{\sim})$, G に descend する擬準同型のなす空間 $p^*Q(G^{\sim})$．ここで次の商空間 ND を考える：

$$ND = Q(G^{\sim})/(p^*Q(G) + H^1(G^{\sim})).$$

この商空間 ND において非自明な擬準同型というのはつまり，準同型で調整しても G に descend しない $G^{\sim}$ 上の擬準同型である．

Chapter 2 の主定理は，この商空間 ND の幾何的な意味を与えるものである．定理を述べるために記号の準備をする．G に離散位相を入れた離散群を G^{δ} で表すと，恒等写像 $\iota : G^{\delta} \to G$ はコホモロジーの間の準同型$(B\iota)^* : H^2_{top}(BG) \to H^2(G)$ を誘導する．

ここで $H^2_{top}(BG)$ は分類空間 BG のコホモロジーであり, $H^2(G)$ は G の群コホモロジーである. またコホモロジーはすべて実数係数である. $H^2_b(G)$ で G の 2 次有界コホモロジーを表し, $c_G: H^2_b(G) \to H^2(G)$ を比較写像とする. このとき, 写像 $(B\iota)^*: H^2_{top}(BG) \to H^2(G)$ の像と, 比較写像の像との共通部分は葉層 G 束の普遍有界特性類の空間とみなすことができる.

定理 商空間 ND と, 写像$(B\iota)^*: H^2_{top}(BG) \to H^2(G)$ の像と比較写像の像との共通部分とは線形同型である.

この定理の系として例えば, ある symplectic fibration や contact fibration の primary obstruction class についての(非)有界性が得られる.

Chapter 3 では extending problem を扱う. 群 Γ とその正規部分群 K に対し, 包含写像 i は準同型 $i^*: Q(\Gamma) \to Q(K)^\Gamma$ を誘導する. ここで $Q(K)^\Gamma$ は K 上の Γ 共役不変擬準同型のなす空間である. $Q(K)^\Gamma$ には次の二つの部分空間がある: 自明な Γ 共役不変擬準同型(つまり Γ 不変準同型)のなす空間 $H^1(K)^\Gamma$, Γ に extend する擬準同型のなす空間 $i^*Q(\Gamma)$. ここで次の商空間 NE を考える:

$$NE = Q(K)^\Gamma / (i^* Q(\Gamma) + H^1(K)^\Gamma).$$

有限生成群 Γ とその正規部分群 K に対し, この商空間 NE が非自明となる例はこれまで知られていなかった. Chapter 3 の主定理は, NE が非自明となるような組 (Γ, K)をたくさん与える.

定理 種数 2 以上の曲面群 Γ とその交換子部分群に対し, NE の次元は 1 である.
定理 種数 2 以上のトレリ群内の擬アノソフ写像類をモノドロミーとする mapping torus の基本群 Γ とその交換子部分群に対し, NE の次元は 2g+1 となる.