論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

氏　　　　　名　　丸山　修平

論　文　題　目

On the descendibility and extendability of homogeneous quasimorphisms
(擬準同型の降下及び拡張可能性について)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士(数理科学)
太田　啓史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D
森吉　仁志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士(理学)
糸　健太郎

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
高橋　亮

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

多様体の同相群やある種の幾何構造を保つ自己同型群はしばしば完全群になるため，その群から $\mathbb{R}$ への群準同型射の代わりに群準同型射の条件を緩めた擬準同型射 (quasimorphism) を考察することがある．擬準同型射の存在自体非自明であり，それによって様々な数学が展開される．例えば，古典的な Poincaré の translation 数は普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{Homeo}_+}(S^1)$ 上の擬準同型射と捉えられ，力学系等の観点から詳しい研究がある．近年では，シンプレクティック多様体 (M,ω) の自己同型群 $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ とその重要な正規部分群であるハミルトン同相群 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ との差異を調べるために，$\mathrm{Ham}(M,\omega)$ 上で知られている擬準同型射が $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ 上に拡張できるか否か（曲面の場合：川崎-木村）等の研究もある．

本論文ではある種の斉次性を有する斉次擬準同型射について，次の 2 つの問題を解明することが動機である．群の完全系列 $1 \to K \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{p} G \to 1$ に対し，

問題 1 Γ 上の斉次擬準同型射は，いつ G 上の斉次擬準同型射に落ちるか．

問題 2 K 上の斉次擬準同型射は，いつ Γ 上の斉次擬準同型射に拡張できるか．

本論文では群コホモロジー及び有界コホモロジーを用いた代数的議論によりいくつかの結果を与える．群 Γ 上の斉次擬準同型射のなすベクトル空間を $Q(\Gamma)$ と書くと，上記群の完全系列は $0 \to Q(G) \xrightarrow{p^*} Q(\Gamma) \xrightarrow{i^*} Q(K)^\Gamma$ （$=\Gamma$ 共役不変な K 上の斉次擬準同型射の空間）なるベクトル空間の完全系列を導く．

問題 1 は川崎盛通氏との共同研究である．

$$\mathcal{ND} := Q(\Gamma)/(p^*Q(G) + H^1(\Gamma;\mathbb{R}))$$

とおくと $H^1(\Gamma;\mathbb{R})$ は Γ から $\mathbb{R}$ への群準同型射全体ゆえ，問題 1 では $\mathcal{ND}$ を考察すればよい．以下 G を連結な位相群とし，その普遍被覆 $\widetilde{G} \xrightarrow{p} G$ による完全系列

$$1 \to \pi_1(G) \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{1}$$

を考える．擬準同型射と準同型射の差を用いて $Q(\widetilde{G}) \to H^2(G)$ なる写像 (defect 写像) が定まるが，

定理 1 (**川崎-丸山**) この写像の下で $\mathcal{ND}$ は $\mathrm{Im}(B\iota)^* \cap \mathrm{Im}(c_G)$ とベクトル空間として同型．

ここで，G に離散位相を入れたものを G^δ とし恒等写像 $\iota : G^\delta \to G$ が引き起こす分類空間のコホモロジー間の写像を $(B\iota)^* : H^2_{\mathrm{top}}(BG) \to H^2_{\mathrm{top}}(BG^\delta) \cong H^2(G)$ と書き（$H^2(G)$ は $\mathbb{R}$ 係数の G の群コホモロジー），G の有界コホモロジーからの比較写像を $c_G : H^2_b(G) \to H^2(G)$ と書いた．この定理の応用として，$G = \mathrm{Ham}(S^2 \times S^2, \omega \oplus \lambda\omega)(1 < \lambda \leq 2)$ の場合に Ostrover(2006) により $\mathcal{ND}$ の非自明な元の存在が知られているが，上の同型よりその有界性が従う．また標準的な接触構造 ξ をもった S^3 の接触変換群を $G = \mathrm{Cont}_0(S^3, \xi)$ とすると，Fraser-Polterovich-Rosen(2018) により $Q(\widetilde{\mathrm{Cont}_0}(S^3,\xi)) = 0$ が知られており，一方 Eliashberg(1992) の結果から $H^2(B\mathrm{Cont}_0(S^3,\xi))$ の非自明な元の存在がわかるが，上の定理からその非有界性が従う．定理 1 の証明は (1) に付随する群コホモロジーの完全系列（7 項完全系列）を見ることでなされる．川崎氏は有界コホモロジーとの関係から defect 写像と $\mathrm{Im}(c_G)$ との関係を考察していたが，そこに群コホモロジー部分（$\mathrm{Im}(B\iota)^*$ 部分）を導入した点が申請者の寄与である．

問題 2 は川崎盛通，木村満晃，松下尚弘，見村万佐人氏との共同研究である．先の記号の下で

$$\mathcal{NE} := Q(K)^\Gamma/(i^*Q(\Gamma) + H^1(K;\mathbb{R})^\Gamma)$$

とおく．

定理 2 (**川崎-木村-丸山-松下-見村**) $H^2_b(G) = H^3_b(G) = 0$ ならば，次の完全系列が存在する．

$$0 \to \mathcal{NE} \to \mathrm{Ker}\ i^* \cap \mathrm{Im}\ (c_\Gamma) \to H^1(\Gamma; H^1(K)).$$

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

証明では有界コホモロジーだけでなく再び (1) に付随する群コホモロジーの完全系列（7 項完全系列）を見る必要があり，ここに申請者の寄与がある．この定理の応用として $\mathcal{NE}$ が非自明となる具体例を与え，その時その次元を求めている．即ち，

定理 3 (川崎-木村-丸山-松下-見村) Σ_g を種数 $g \geq 2$ のリーマン面とする．

(1) $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g), K = [\Gamma, \Gamma]$ のとき，$\dim \mathcal{NE} = 1$.

(2) $f \in \mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)$ に対し，f による写像トーラスを X_f とする．f が擬 Anosov でかつ Torelli 群の元ならば，$\Gamma = \pi_1(X_f), K = [\Gamma, \Gamma]$ のとき，$\dim \mathcal{NE} = 2g + 1$.

f が擬 Anosov なら X_f には双曲構造が入る．双曲多様体の基本群 Γ の場合に比較写像 $c_\Gamma : H_b^*(\Gamma) \to H^*(\Gamma)$, $(* \geq 2)$ の全射性 (Gromov) や双曲性に基づくコホモロジーの消滅などを用いて代数的に計算される．いくつかの技術的に強い仮定が満たされる群ではあるが，$\mathcal{NE}$ が非自明になる具体例を見出したことは評価できる．一方，その結果の幾何学的意味や解釈は不明であり，今後の研究に期待する．

得られた応用が元々の動機と必ずしも合致しない点はあるが，当該研究において一定の成果であると評価する．2 つとも共同研究による成果であるが，その中で申請者の寄与は上述の通り主結果の像の「半分」を記述するために群コホモロジーに関わる写像も合わせて考察した点であり，主結果を得るために必要な部分である．また，参考論文として 3 本の単著論文が学術雑誌に出版あるいは accept をもらっていることから，研究遂行力は問題ないと判断する．

以上のように得られた結果は当該研究に意義があると考えられる．本論文に関する公開審査会を 2021 年 8 月 2 日に行ったが (新型コロナウイルス感染予防のため Zoom による)，質問に対する応対も適切であり申請者が博士の学位を取得するに足る学識を有することを確認した．以上により，本学位審査委員会は申請者に博士（数理学）の学位が授与される資格があると判断する．