論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　　HUANG　Shan-chi

論　文　題　目

On Soliton Solutions of the Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations from the Perspective of Integrable Systems

(可積分系の視点に基づく反自己双対ヤン・ミルズ方程式のソリトン解について)

論文審査担当者

主　査　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
菅野　浩明

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　講師　博士(理学)
浜中　真志

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
岡田　聡一

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
粟田　英資

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

4 次元ゲージ理論における反自己双対 Yang-Mills 方程式の厳密解については, これまで素粒子論・幾何学・可積分系など, 多様な立場から活発な研究が展開されてきた. 特に インスタントンと呼ばれる 4 次元空間内の（孤立）点に局在した厳密解については ADHM 構成法などを用いた精密な議論が可能であり, 重要な結果が多く得られている. また, 反自己双対 Yang-Mills 方程式は Lax 表示が可能であるという点から, 高次元における数少ない可積分方程式の例と考えられており, 次元還元により様々な低次元のソリトン方程式が得られることが知られている. したがって反自己双対 Yang-Mills 方程式の厳密解の構成は, 普遍グラスマン多様体を用いて低次元ソリトン方程式の可積分性を明快に説明した佐藤理論の高次元化という課題の解決に向けた重要なステップと位置付けられる.

本申請論文で構成されている厳密解はインスタントン解とは異なり余次元 1 の超平面に局在するものである. このような解は, これまで, ほとんど議論されてこなかった. その理由の一つとしては素朴に構成した解の作用密度が恒等的に 0 となってしまうことが挙げられる. これに対して, 本論文で得られた新しい厳密解は 3 次元超平面の法線方向の座標に非自明に依存する作用密度を持っている. ただし作用密度を全空間で積分すると 0 であり, インスタントン数（第 2 Chern 数）は自明であることが分かる.

本論文で扱うのは, ゲージ場の曲率に対するオリジナルな反自己双対 Yang-Mills 方程式ではなく, 空間およびゲージ群を複素化して得られる複素化された反自己双対 Yang-Mills 方程式と等価な Yang 方程式 (1977)

$$\partial_{\tilde{z}}(J^{-1}\partial_z J) - \partial_{\tilde{w}}(J^{-1}\partial_w J) = 0, \qquad (z, w, \tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathbb{C}^4$$

である. ここで（ゲージ群が $GL(N, \mathbb{C})$ ならば）J は N 次正則行列である. Nimmo-Gilson-Ohta (2000) は Lax 表示に現れるスペクトル変数を行列に格上げすることにより, 線形 Lax 系の解にある種の変換（Darboux 変換）を施すことにより, 非線形方程式の厳密解を得る方法を提唱した. 論文では $N = 2$ および $N = 3$ の場合に, この Darboux 変換の方法を Yang 方程式の Lax 表示に対して適用することにより, 余次元 1 の超平面に局在する厳密解を得ている（この解を本論文では 1 ソリトン解と呼んでいる）. さらに Lax 系の n 個の線形独立な解を用意して n 回 Darboux 変換を施して “n ソリトン解” が構成できる. ここで注目すべき点は, いずれの場合も解が Wronski 行列の準行列式を用いて簡明に表示できることであり, 以下に述べる作用密度を含めて具体的な計算は準行列式に対する各種の公式を駆使することで遂行されている. これは KP 方程式系の τ 関数が Wronski 行列の行列式を用いて表示できることの一般化となっている.

次に本論文では得られた 1 ソリトン解に対して全空間での作用密度を明示的に計算して, 適切な計量をもつ実 4 次元空間上で作用密度が実数値となることを示した. 上に述べたように Yang 方程式を考える際に時空とゲージ群は複素化されている. ゲージ群を複素化しているので, 一般に作用密度は複素数値となっていることに注意が必要である. また多重ソリトン解に対しては, 漸近領域での作用密度の振る舞いを決定してソリトンが局在する n 個の超平面配位のズレが生じることを明らかにした. これは低次元ソリトン解の散乱過程における位相のズレの類似とみなすことができ, ソリトン解という解釈の妥当性を支持するものである. なお, 計量を超双曲型 $(+, +, -, -)$ とすれば, ゲージ群が $U(2)$ となる解も構成されており, これは応用の面で有用と期待される.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は主に指導教員との共同研究による副論文に基づくものであるが, ソリトン解の作用密度の具体的な計算とそれによる解のソリトン的な性質の解明については申請者の寄与が大きいことを確認している．また申請論文では副論文の結果の改良や副論文以後に得られた結果も加えられている．以上の点から本論文は 4 次元反自己双対 Yang-Mills 方程式の新しいタイプの厳密解の構成と作用密度分布の計算により, 可積分系理論の高次元化に関する研究の新たな方向性を示すものである．本論文に関する公開審査会を 2021 年 12 月 3 日に行った．公開審査会では可積分系から見た研究の学術的背景とともに, Darboux 変換を用いた解の構成法, 実数値となる作用密度の計算，多重ソリトン解の漸近的振る舞いなどが分かりやすく説明された．質問に対する受け答えも特に問題はなく，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．