別紙４

| 報告番号 | ※　　　第　　　号 |
| --- | --- |

# 主　論　文　の　要　旨

論 文 題 目　Attainability of a stationary Navier-Stokes flow around a moving rigid body

(運動する剛体周りの定常 Navier-Stokes 流の attainability)

氏　　　名　髙橋　知希

## 論　文　内　容　の　要　旨

本論文では運動する剛体周りでの非圧縮粘性流の長時間挙動を考察する．そのような非圧縮粘性流体の運動は数学的には Navier-Stokes 方程式の外部問題として定式化される．剛体の運動は回転と並進により記述されるが，本論文では並進のみする場合と回転のみする場合の二通りを考える．剛体の運動状態の流れへの寄与を偏微分方程式論の立場で精密に解析することが目的である．剛体が並進する場合は古くから盛んに研究されており，3 次元の場合に，1960 年代の Finn による一連の研究において，航跡のような剛体後方に放物型に広がる領域 (伴流領域) の内外で異なる減衰構造を持つ定常解が捉えられている．Finn はこのような解を physically reasonable solution と名づけ，それと関連して，1965 年に Finn の starting problem と呼ばれる非定常解の長時間挙動に関する問題を提唱した．ここで Finn の starting problem とは，剛体と外部の流体が初期時刻で静止しているとし，剛体が徐々に並進速度を加速させて，ある時刻以降は等速直線運動するとき，流体の運動は時間無限大で定常解に収束するかを問う問題である．Finn の starting problem を最初に扱った Heywood (1972) にならい，もしも定常解に収束するならば，その定常解は attainable であるという．一般に定常解は $L^2$ 空間に属さないため，$L^2$ エネルギー法で取り組んだ Heywood による研究では解決に至らず，長年未解決な問題であった．剛体の運動だけから引き起こされる流れの時間発展を調べるべく，流体の初期速度を零とするために，定常解からの摂動が一般に $L^2$ 空間の軌道とならないことは starting problem 特有の難しさの一つであり，摂動を捉える空間の選択に自由度のある安定性問題 ($L^2$ 安定性も考察可能であること) と対照的である．Starting problem のいま一つの困難は，方程式が非自励系となることである．このことは特に剛体が回転する場合に重要な論点となる．さて，並進する場合の starting problem は，Kato (1984) による時間大域解の $L^q$ での構成法と Kobayashi-Shibata (1998) による Oseen 半群の $L^q$-$L^r$ 評価を用いることにより，最終的な一様並進速度が小さい場合に Galdi-Heywood-Shibata (1997) によって肯定的に解決された．しかし，彼らによる時間 $t \to \infty$ での定常解への収束率は最良

ではなく，収束率が定まる機構は明らかにされていない．また，そのような機構，特に定常解の安定性問題における定常解への収束率と異なる収束率の決まり方は，空間次元を一般とすることによって一層明瞭となるが，空間次元 $n \geq 4$ に対しては定常解自体についての知見が乏しい．さらに，剛体が回転する場合には回転運動が引き起こす解の諸性質の複雑な様相ゆえに困難をきわめ，定常解の $L^q$ での安定性は 2009 年に Hishida-Shibata により解決されたが，starting problem に対しては，今なお部分的な解答すら与えられていない．本論文はこれらの論点も含めて Finn の starting problem をより深く理解するために，$n(\geq 3)$ 次元における並進の starting problem と 3 次元回転の starting problem という二つの問題を考察し，得られた結果についてまとめたものである．

本論文ではまず，Finn の starting problem を 3 以上の一般次元で考察するため，収束先となる定常解を一般次元で考える．3 次元の場合には 1933 年の Leray に始まり上記で述べた Finn による研究を含む多くの研究がなされているが，一般次元で取り扱っている先行研究は少なく，特に空間遠方での最良な可積分性を持つ定常解を構成している先行研究は見当たらない．そこで申請者は Galdi (1992) による線形化方程式 (Oseen 方程式) に対する $L^q$ 理論に着目し，最良な可積分性を持つ小さな一意定常解を構成した．ここで最良な可積分性とは，定常解の空間無限遠方での漸近形となる Oseen 基本解の可積分性を指す．先行研究の多くが定常解の各点評価を導出しているが，本研究では可積分性に着目することにより，3 次元の場合であっても先行研究に比べて見通しの良い簡潔な証明によって定常解を構成する．

次に Finn の starting problem を考え，構成した定常解が attainable であることを示す．このことにより，Galdi-Heywood-Shibata (1997) の結果を 3 以上の一般次元に拡張する．Enomoto-Shibata (2005) による一般次元での Oseen 半群の $L^q$-$L^r$ 評価を用いれば，定常解 $u_s$ に $t \to \infty$ で $\|u(t) - u_s\|_{L^r} = O(t^{-1/2+n/(2r)})$(ただし $r \geq n$) の意味で収束する時間大域解 $u(t)$ を構成できる．得られた収束率は Oseen 半群の $L^n$-$L^r$ 評価から定まる収束率であり，$n = 3$ の時は Galdi-Heywood-Shibata によるものと一致しているが，最良ではない．そこで，本論文では定常解 $u_s$ がある $q < n$ に対して $L^q$ に属することに着目し，より良い長時間挙動 $\|u(t) - u_s\|_{L^r} = O(t^{-1/2+n/(2r)-\rho_1/2})$ を導出する．ただし，$\rho_1$ は正の実数で $u_s \in L^{n/(1+\rho_1)}$ となるものである．すなわち，3 次元の場合も含め，定常解の可積分性から定まる新たな収束率を導出することにより，Galdi-Heywood-Shibata の結果を改良する．また $\rho_1$ は，$n/(1+\rho_1)$ が定常解の最良な可積分性にいくらでも近づくように選べるため，Oseen 半群の $L^q$-$L^r$ 評価の観点から最良な収束率である．証明の最も重要なステップは $L^n$ 評価 $\|u(t) - u_s\|_{L^n} = O(t^{-\rho_1/2})$ の導出である．この収束が得られれば他のノルムの漸近挙動も従う．$L^n$ 評価を導出するため，まず，少し遅い収束 $\|u(t) - u_s\|_{L^n} = O(t^{-\rho/2})$ を求める．ただし，$\rho$ は 1 よりも小さいある正の実数である．このとき $L^n$ ノルム以外のノルムに関する評価も良くなるため，再び $L^n$ ノルムを考察することでさらに良い解の評価を得る．この操作を繰り返すことで目的の収束率を導く．ただし，4 次元以上の場合にはこのような議論だけでは目的の収束率が得られない．この困難を克服するために $n$ よりも低い指数 $q_0$ を適切に選んだ上で $L^{q_0}$ 評価を導出し，これを援用したことも本論文のアイディアである．

最後にFinnのstarting problemと同様の問題を回転運動の場合に考える．回転のみする場合，定常解の最良な空間漸近挙動はスケール臨界な減衰度$O(1/|x|)$であることが知られており，並進運動の場合のようにLebesgue空間の枠組みで議論することは困難である．そこでYamazaki (2000) に従い，Lebesgue空間よりも広い弱Lebesgue空間の枠組みで解析する．また，半群を用いて並進運動の場合と同様に議論することは出来ない．実際，回転のみする場合にも対応する半群の$L^q$-$L^r$評価がHishida-Shibata (2009) により得られているが，半群を用いてstarting problemを解こうとした場合，方程式に非有界係数を伴う非自励線形項が現れ，立ち行かない．このように並進の場合と比べて剛体が回転するときには非自励系であることによる本質的な難しさが際立つ．そこで，本論文では半群ではなく発展作用素を用いることでこの困難を解消する．発展作用素の考察においては，回転運動が引き起こす方程式の双曲型の側面のために対応する半群が解析半群ではないという難しさを伴い，これは関数解析的なレベルでの解の正則性に関する著しい特徴である．しかし，Hansel-Rhandi (2014) は発展作用素の構成に成功し，その後Hishida (2018,2020) によりその発展作用素の$L^q$-$L^r$減衰評価が導出された．本論文では発展作用素の評価とYamazakiの方法を基に，有限時間後の剛体の回転角速度が小さい場合に定常解へ収束する非定常解を構成した後，構成した非定常解の$L^\infty$評価も導出する．この定理はいかなる意味においても回転の場合のstarting problemに対する初めての成果である．本論文で$L^\infty$評価を導出する手法は，スケール臨界な減衰度$O(1/|x|)$を持つ定常解の安定性を剛体が並進運動する場合に論じたKoba (2017) の手法を改良したものである．実際，Kobaでは Oseen半群$T(t)$の$L^1$-$L^r$評価に加え，Oseen半群とFujita-Kato射影作用素$P$，発散作用素divの合成作用素$T(t)P\mathrm{div}$の$L^q$-$L^r$評価も併用したが，本論文では共役発展作用素に対する$L^1$-$L^r$評価を求め，それのみを用いて$L^\infty$評価を導出する．