

別紙 4

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

主 論 文 の 要 旨

論文題目 Operad Structures in Geometric Quantization of the Moduli Space of Spatial Polygons

(空間多角形のモジュライ空間の幾何学的量子化に現れるオペラッド構造)

氏 名 高橋 雄也

論 文 内 容 の 要 旨

幾何学的量子化とは、シンプレクティック幾何学の言葉で量子化を定式化する数学的な試みの一つであり、その最初のステップは、シンプレクティック多様体 (M, ω) に対して量子ヒルベルト空間と呼ばれる、ある種のベクトル空間 \mathcal{H} を構成することである。これを実行するためにはシンプレクティック構造 ω の定めるコホモロジー類が整数係数である必要があり、このとき前量子化束と呼ばれる、第一 Chern 類がコホモロジー類 $[\omega]$ となる M 上の複素直線束 L をとることができる。量子ヒルベルト空間 \mathcal{H} は、この前量子化束 L の切断全体の空間を、偏極という追加のデータを用いて「半分に割る」ことで定義される。偏極の中でも特に (M, ω) のケーラー構造から定まるケーラー偏極と、(特異)ラグランジュファイバー束 $\pi: (M, \omega) \rightarrow B$ から定まる実偏極という2つのタイプが知られており、それぞれに対応する量子ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\text{K\"ah}}$ と \mathcal{H}_{re} は、 L の正則切断全体と、 π の Bohr-Sommerfeld 軌道と呼ばれるファイバーに値が集中する L の切断全体である。このように量子ヒルベルト空間の構成には偏極を指定しなければならないが、物理学の観点からは、得られる量子ヒルベルト空間は偏極に依らないと考えられている。このような見地から特に $\dim \mathcal{H}_{\text{K\"ah}} = \dim \mathcal{H}_{\text{re}}$ の成立が期待され、いくつかの例ではこれが実際に確認されている。典型例はトーリック多様体で、複素旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系 (Guillemin-Sternberg, 1983), Riemann 面上の $SU(2)$ -平坦束のモジュライ空間上の Goldman 系 (Jeffrey-Weitsman, 1992) といった「トーリックに近い」多様体の場合でも成立が知られている。特にこれらの例で等式 $\dim \mathcal{H}_{\text{K\"ah}} = \dim \mathcal{H}_{\text{re}}$ は前量子化束の正則切断の空間の次元=モーメント写像の像に含まれる格子点の個数(*)として書き表すことができる。

本論文では、空間多角形のモジュライ空間と呼ばれる「トーリックに近い」多様体の場合において、この等式（*）が成り立つかどうかを考察する．ここで空間多角形のモジュライ空間は、辺の数 n とその長さ $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ を指定した上で、商空間 $\mathcal{M}(r) = \{(u_1, \dots, u_n) \in S^2(r_1) \times \dots \times S^2(r_n) | u_1 + \dots + u_n = 0\} / \text{SO}(3)$ として定義される（ここで各 $S^2(r_i)$ は半径 r_i の2次元球面、商は $\text{SO}(3)$ の対角作用に関するものとする）．各 $S^2(r_i)$ を積分値が $2r_i$ となる面積要素によりケーラー多様体とみなすと、辺の長さ r が $\pm r_1 \pm \dots \pm r_n \neq 0$ を満たすときこの空間 $\mathcal{M}(r)$ は複素 $n-3$ 次元のケーラー多様体となる．加えて整数性条件 $r \in \mathbb{Z}_{>0}^n$ の下ではその上に、各 $S^2(r_i) \cong \mathbb{P}^1$ 上の次数 $2r_i$ の直線束から定まる前量子化束 $\mathcal{L}(r) \rightarrow \mathcal{M}(r)$ も構成できる．一方で Kapovich-Millson(1996)によって、 n 角形の三角形分割 T を決めるごとに bending 系と呼ばれる、 $n-3$ 本の対角線の長さを与える関数からなる完全可積分系 $\pi_T^r: \mathcal{M}(r) \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$ が導入されている．以上からモジュライ空間 $\mathcal{M}(r)$ は、ケーラー・実偏極両方を備えたシンプレクティック多様体となっている．

空間多角形のモジュライ空間における等式（*）は、 $n \geq 5$ が奇数で $r = (1, \dots, 1)$ かつ T がある特殊な場合に、神山(2000)によって最初に証明された．その証明方法は、右辺の格子点の個数に関する漸化式を導出した後、左辺も同じ漸化式の解となることを確認するというものである．

この格子点の数に関する神山の漸化式は、多角形の三角形分割をその双対グラフである3価根付き平面木と同一視することで、平面木の接木で統率された数の関係式として一般化することができる．本論文ではこの関係式を、 $W(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ というあるオペラッドを考えることで、3価根付き平面木のなすオペラッド(RibTree^3)から $W(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ へのオペラッドの射 f_{re} として記述した．さらに左辺の正則切断全体の空間の次元が満たす関係式も、内頂点がただ一つの根付き木のなすオペラッド(Corolla)から $W(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ へのオペラッドの射 $f_{\text{K\"ah}}$ として独立に導出し、これら二つのオペラッドの射 f_{re} と $f_{\text{K\"ah}}$ の関係を調べることで、神山(2000)の結果を一般の r と任意の T に拡張した．

主定理 空間多角形のモジュライ空間のケーラー偏極と実偏極に対して、ある非自明なオペラッドの射 $f_{\text{K\"ah}}: \text{Corolla} \rightarrow W(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ と $f_{\text{re}}: \text{RibTree}^3 \rightarrow W(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ をそれぞれ付随させることができる．さらに f_{re} は、自然な射 $\text{cont}: \text{RibTree}^3 \rightarrow \text{Corolla}$ による $f_{\text{K\"ah}}$ の引き戻しと一致する．

この定理の系として、一般的な状況での空間多角形のモジュライ空間における等式（*）が得られる．

系 $\pm r_1 \pm \dots \pm r_n \neq 0$ なる任意の $r \in \mathbb{Z}_{>0}^n$ と任意の n 角形の三角形分割(葉の数が $n-1$ 個の3価根付き平面木) T に対して、 $\dim H^0(\mathcal{M}(r), \mathcal{O}_{\mathcal{L}(r)}) = \# \text{Im}(\pi_T^r) \cap \mathbb{Z}^{n-3}$ が成り立つ．

オペラッドは、その表現を考えることが様々な代数構造を記述する上で有用であるとしていろいろな分野で用いられている言語であるが、本論文の主定理のように、現象をオペラッドの射の対応関係として理解するということは、少なくとも幾何学的量子化の文脈ではなされていないように思われる．