論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　第　　号

氏　　名　　髙橋　雄也

論　文　題　目

Operad Structures in Geometric Quantization of the Moduli Space of Spatial Polygons

(空間多角形のモジュライ空間の幾何学的量子化に現れるオペラッド構造)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
金銅　誠之

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太田　啓史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
石井　亮

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授
博士（数理科学）
松尾　信一郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文の研究対象はシンプレクティック多様体の一つ空間多角形のモジュライ空間で, Deligne–Mostow が扱った複素射影直線上の点の配置空間とも考えられる基本的なものである．整数 $n \geq 3$ および $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}) \in (\mathbf{Z}_{>0})^n$ を固定するとき，辺の長さが $\mathbf{r}$ で与えられる空間 n 角形のモジュライ空間は

$$\mathcal{M}(\mathbf{r}) = \{(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S^2(r_0) \times S^2(r_1) \times \cdots \times S^2(r_{n-1}) \ : \ u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = 0\}/\mathrm{SO}(3)$$

で与えられる．ここで $S^2(r_i)$ は半径 r_i の 2 次元球面，SO(3) は対角作用とする．条件 $\pm r_0 \pm r_1 \pm \cdots \pm r_{n-1} \neq 0$ の下，$\mathcal{M}(\mathbf{r})$ は $n-3$ 次元のケーラー多様体となるが，正則直線束 $\mathcal{L}(\mathbf{r}) \to \mathcal{M}(\mathbf{r})$ で第一 Chern 類 $c_1(\mathcal{L}(\mathbf{r}))$ が $\mathcal{M}(r)$ のケーラー類 $[\omega]$ に一致するものが存在する．一方，Kapovich–Millson は n 角形の三角形分割 T に対し，$n-3$ 本の対角線の長さを用いて完全可積分系構造 $\pi_T^{\mathbf{r}} : \mathcal{M}(\mathbf{r}) \to \mathbf{R}^{n-3}$ を得ている．この 2 つの構造の関係を調べることが本論文の主題である．

この問題の背景にはシンプレクティック多様体 (M, ω) で ω が定めるコホモロジー類が整数係数であるものに対し，量子ヒルベルト空間を対応させる幾何学的量子化がある．量子ヒルベルト空間の構成方法としては，M 上の正則直線束 L でその第一 Chern 類が ω で与えられるものを考えるケーラー偏極を用いるものと，(M, ω) 上のラグランジアンファイバー構造から定まる実偏極を用いる方法が知られている．物理学からの要請として空間の同型類は偏極の取り方に依らず特に空間の次元が一致することが期待されている．実際に次元の一致が確かめられているのは，トーリック多様体や，Guillemin–Sternberg による複素旗多様体, Jeffrey–Weitsman によるコンパクト Riemann 面上の平坦 $SU(2)$ 束のモジュライ空間などトーリック多様体に近いもので，多くはない．上述の $\mathcal{M}(\mathbf{r})$ に関しては，神山が $n \geq 5$ が奇数，かつ $\mathbf{r} = (1, 1, \ldots, 1)$ で T が特別な場合に等号 $\dim H^0(\mathcal{M}(\mathbf{r}), \mathcal{O}(\mathcal{L}(\mathbf{r}))) = \#(\mathrm{Im}(\pi_T^{\mathbf{r}}) \cap \mathbf{Z}^{n-3})$ が成り立つことを示している．左辺がケーラー偏極から得られる空間の，右辺が実偏極から得られる空間の次元である．神山の証明方法は両辺が共にある漸化式を満たすことに基づく．

本申請論文の主結果は，任意の $n \geq 4$ かつ $\pm r_0 \pm r_1 \pm \cdots \pm r_{n-1} \neq 0$ を満たす任意の $\mathbf{r}$ と任意の T に対し神山の結果を拡張するものである．申請者のアイデアは，合成可能な写像の族から成るオペラッドの概念で問題を捉え直した点である．可縮な 1 次元 CW 複体を tree と呼ぶ．まず trivalent rooted ribbon tree のなすオペラッド $\mathrm{RibTree}^3$，内頂点がただ一つの rooted ribbon tree のなすオペラッド Corolla，およびある性質を満たす写像 $\mathbf{Z}_{\geq 0}^n \to \mathbf{Z}_{\geq 0}$ $(n \geq 1)$ のなすオペラッド $W(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ を用意する．この時自然なオペラッドの射 $\mathrm{cont} : \mathrm{RibTree}^3 \to \mathrm{Corolla}$ が存在する．そこで SO(3) の既約表現の重複度を用いてオペラッドの射 $f_{\mathrm{Kah}} : \mathrm{Corolla} \to W(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ を定義し，Borel-Weil の定理を適用することで $\dim H^0(\mathcal{M}(\mathbf{r}), \mathcal{O}(\mathcal{L}(\mathbf{r})))$ を f_{Kah} の言葉で記述する．一方で，$\mathbf{r}$ に関する trivalent rooted ribbon $(n-1)$-tree T のラベル付けの集合 $\mathcal{D}(T, r)$ を導入し，T の双対である空間 n 角形の三角形分割を用いて $\mathcal{D}(T, \mathbf{r})$ と集合 $\mathrm{Im}(\pi_T^{\mathbf{r}}) \cap \mathbf{Z}^{n-3}$ の間に全単射を構成する．ここで $\mathcal{D}(T, \mathbf{r})$ の導入は Jeffrey–Weitsman による境界付き Riemann 面のパンツ分解のラベル付けをヒントにしている．さらに $\mathcal{D}(T, \mathbf{r})$ を用いてオペラッドの射 $f_{\mathrm{re}} : \mathrm{RibTree}^3 \to W(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ を定義し，$f_{\mathrm{re}} = f_{\mathrm{Kah}} \circ \mathrm{cont}$ を示すことで，ケーラー偏極と実偏極に付随する空間の関係をオペラッド間の射の関係として確立する．その系として次元の等式 $\dim H^0(\mathcal{M}(\mathbf{r}), \mathcal{O}(\mathcal{L}(\mathbf{r}))) = \#(\mathrm{Im}(\pi_T^{\mathbf{r}}) \cap \mathbf{Z}^{n-3})$ が直ちに得られる．

以上が主結果の概要である．特別な例を対象にした論文ではあるが，等式の成り立つ先行研究が少ない中，神山の結果を完全に一般の形で拡張したことは評価できる．特にオペラッドの概念を用いた証明のアイデアは当該研究では初めてであり，素晴らしい．令和 4 年 2 月 4 日に行われた学位審査公開セミナーにおいても，申請者は講演・質疑応答を通して学位を授与されるに相応しい学識を示した．以上のことから学位審査委員会は申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．