別紙４

報告番号	※　　　　　　　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Global existence of solutions for semilinear damped wave equations with variable coefficients
(変数係数をもつ半線型消散波動方程式における解の時間大域的存在)

氏　　名　玉田　優太

論　文　内　容　の　要　旨

本学位申請論文では, 変数係数 b とべき乗型非線型項 $|u|^p$ をもつ消散波動方程式のコーシー問題

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_t u - \nabla \cdot (b(x)\nabla u) = |u|^p, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \ \partial_t u(0,x) = u_1(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

に対する議論を行う．変数係数をもつ消散波動方程式は不均一なガスへの進行波を考えた際に現れる偏微分方程式であり, $u(t,x)$ は時刻 t における位置 x の波の変位, $b(x)$ は位置 x におけるガスの体積弾性率に対応する．

$b(x) \equiv 1$ の場合, 藤田臨界指数と呼ばれる数 $1+2/n$ より p が大きければ小さい初期値に対して解が時間大域的に存在することが Todorova-Yordanov(2001) によって証明されている．Todorova-Yoranov は重み付きエネルギー法と呼ばれる方法を導入することで解の重み付きのエネルギー評価を得ることに成功し, この評価が時間大域的に存在することを保証をしている．しかし, エネルギー評価を得る過程で消散波動方程式の解のもつ有限伝播性を用いるため, 初期値の台に対してコンパクト性を仮定している．後に, この仮定は Ikehata-Tanizawa(2005) により一般の空間次元に対して外されている．加えて, Todorova-Yoradanov は $1 < p < 1+2/n$ ならば, 任意の非自明な初期値に対して方程式の解が有限時刻で爆発することも示している．$p = 1+2/n$ では, Zhang(2001) が, 任意の非自明な初期値に対して解が有限時刻で爆発することを証明している．Todorova-Yoradanov, Zhang の研究から, 定数係数の消散波動方程式のべき乗型非線型問題において, 小さい初期値に対する時間大域解の存在, 非存在を分ける臨界指数が藤田臨界指数であることが判明し

た．また, 藤田臨界指数は熱方程式のべき乗型非線型項問題において, 小さい初期値に対する時間大域解の存在, 非存在を分ける臨界指数であることが Fujita(1966) によって示されている．

変数係数 a, b をもつ消散波動方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 + a(x)\partial_t u - \nabla \cdot (b(x)\nabla u) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

では, Radu-Todorova-Yordanov(2010) が方程式の解に対する重み付きエネルギーの評価を与えた．変数係数をもつ消散波動方程式のべき乗型非線型項問題では, Lei-Yang(2018) が Radu-Todorova-Yordanov の方法を踏襲することにより, $a(x) \sim a_0, b(x) \sim b_0\ (x \gg 1)$ という仮定のもとで, $1 + 2/n < p$ ならば小さい初期値に対して方程式の解が時間大域的に存在することを証明している．Radu-Todorova-Yoradanov, Lei-Yang は重み付きエネルギー法を用いて証明する際に, 変数係数の消散波動方程式の構造から現れる偏微分不等式に対して, いくつかの条件を満たすような解が存在することを仮定し, その解を重み関数に用いている．

本学位申請論文では重み付きエネルギー法を用いることで, 上記の変数係数をもつ消散波動方程式のべき乗型非線型項問題が「$a(x) \equiv 1$ かつ b は空間次元 2 以上の場合は球対称」という仮定のもとで, $1 + 2/n < p$ ならば, 小さい初期値に対して方程式の解が時間大域的に存在することを示す．重み付きエネルギー法では, Nishihara-Wakasugi(2015) で使用された重み関数を変数係数に対応した形で構成したものを用いる．Nishihara-Wakasugi は, Ikehata-Tanizawa において用いられた熱核の逆数に近い形の重み関数にパラメータを入れることにより, 連立系の定数係数消散波動方程式のべき乗型非線型項問題において $1+2/n < p$ に相当する状態ならば, 小さい初期値に対して解が時間大域的に存在することを示している．本学位申請論文での研究成果を Lei-Yang(2018) と比較すると, Lei-Yang では球対称性を必要としないものの遠方での挙動に制限があるため変数係数の値が遠方で振動しているものは議論の対象から外れるが, 本学位申請論文では球対称性を仮定するものの遠方で振動していても大域解の存在の証明が可能である．特に, 空間 1 次元の場合は球対称性の仮定も必要なくなるため非常に広い範囲の変数係数 b を対象に大域解の存在の証明を行うことができる．本学位申請論文で行われている時間大域解の存在についての議論は, $1 + 4/n \le p$ ならば b の値域について上下の有界性を仮定するだけでよい．しかし, $1 + 2/n < p < 1 + 4/n$ ならば b に対して上下の有界性に加えて $\max b(x)/\min b(x) - 1 < 2(p-1-2/n)/(1+4/n-p)$ も仮定する必要がある．これらの仮定は定数係数の場合は自然に満たされていることに注意

する．時間大域解の存在を証明するために変数係数 b に必要となる上記の仮定は，$1+4/n$ が b に対して上下の有界性より多くの仮定を必要とするか，しないかを分けている臨界指数である可能性を示唆している．Lei-Yang では言及されていないものの彼らの証明においても，b の値域に対して上下の有界のみを仮定し時間大域解の存在が保証される p の範囲を調べると $1+4/n$ が現れることを補足しておく．