論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　　玉田　優太

論　文　題　目

Global existence of solutions for semilinear damped wave equations with variable coefficients

（変数係数をもつ半線型消散波動方程式における解の時間大域的存在）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
菱田　俊明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
杉本　充

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
中島　誠

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
寺澤　祐高

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本学位申請論文は, 変数係数の単独非線型消散波動方程式

$$\partial_t^2 u + \partial_t u - \mathrm{div}\ \big(b(x)\nabla u\big) = |u|^p \tag{1}$$

の初期値問題の時間大域解の存在とその長時間挙動を $\mathbb{R}^n$ 上で考察したものである. 波の伝播する媒質が一様でない場合を想定して, 係数 $b(x) > 0$ が定数でない場合に関心がある. 小さい振幅の解の時間大域的存在と有限時間爆発, これらの異なる現象は線型方程式の解の時間減衰構造と非線型性の相互作用の結果であり, それらが釣り合う非線型性の冪 $p_c \in (1, \infty)$ を見いだすことは偏微分方程式論の基本的な問題に位置づけられる. 期待される結果は, $p > p_c$ に対する小さな時間大域解の存在, および初期関数がたとえ小さくともその積分量が正である場合に $p \in (1, p_c)$ (あるいは $p \in (1, p_c]$) に対する解の有限時間爆発である. これらが実現されるときの冪 p_c を臨界指数と呼ぶ. 解のエネルギーを消散させせる項 $\partial_t u$ は解の爆発を抑制するので, 臨界指数は消散項を伴わない波動方程式の臨界指数 (Strauss 指数) に比べて小さい. 解の正則性の観点では消散項を双曲型方程式からの摂動とみなせるが, 解の長時間挙動が論点であるときは消散項は主要部であることが微分作用素 $\partial_t^2 + \partial_t - \Delta$ の基本解から読み取れ, 少なくとも定数係数であれば解の特異性を制御できる程度に初期関数が滑らかである限り, 線型方程式の解の長時間での漸近展開の主要項は拡散方程式の解となることが明らかにされている. このことは $b(x) \equiv 1$ であるときの方程式 (1) に対する臨界指数が非線型拡散方程式 $\partial_t u - \Delta u = u^p$ の正値解に対する臨界指数 $p_c = 1 + \frac{2}{n}$ と同じであることを示唆しているが, 実際に Todorova-Yordanov (2001) の先駆的な研究によって証明された. この拡散方程式は Fujita (1966) によって導入されたもので, 比較原理が成り立つ放物型方程式のクラスに多くの重要な知見をもたらしたことで知られ, 臨界指数 $p_c = 1 + \frac{2}{n}$ は藤田指数と呼ばれる. 変数係数であっても, その係数 $b(x)$ が有界かつ非退化であれば定数係数の場合と同様な結果が期待されるが, 線型方程式の基本解は明示的には表示されず, そのパラメトリクスの構成, および長時間挙動を引き出すスペクトル解析は困難をきわめる. このような状況においては, L^2 エネルギー法を基軸として進むことが偏微分方程式論での常套手段であるが, エネルギー法によって鋭い結果を導くには, 方程式の構造を見抜く洞察を要する. 消散波動方程式に対しても, エネルギー法で用いる荷重の取り方について, Todorova-Yordanov (2001) の研究以来, 初期関数の台の非有界性を許す, 連立方程式を扱う, 変数係数にまで射程をひろげる等, 目的に応じた工夫と改良の蓄積がある. 以上の背景のもと, 本論文で得られた成果の概要は以下の通りである.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

係数 $b(x) > 0$ について, 適当な滑らかさと若干の技術的な条件のほかに, 有界, 非退化かつ球対称とし, 非線型性の冪 p は時間局所解の存在が確保される程度に大きすぎないとして, $p > 1 + \frac{2}{n}$ ならば, 空間無限遠で指数減衰する小さな初期関数に対して時間大域解が一意的に存在し, その荷重 L^2 ノルムの時間減衰率は 2 階放物型方程式の解の典型的な減衰率にほぼ近いものである, というのが主定理の主張である. 解の漸近形も考慮しつつ, 局所解の存在定理に基づいて解の所要の a priori 評価を導くために, 解のエネルギー評価が閉じるような適切な荷重を見いだすことが証明の鍵であり, 申請者の独創もその荷重の取り方にある. Lei-Yang (2018) による先行研究では, 変数係数の線型方程式を解析した Radu-Todorova-Yordanov (2010) と同様に, 変数係数であってもエネルギー法が機能するような荷重の存在自体を仮定しており, どのような係数 $b(x)$ が実際に仮定をみたすのかは十分には調べられていない. 申請者は係数 $b(x)$ を球対称関数に限定するものの, それを活かして荷重を明示的に構成するとともに, Nishihara-Wakasugi (2015) を踏襲して荷重にパラメータを導入し, それの操作を通して時間減衰率を最適な減衰率から多少ゆずることによって, 藤田指数より大きい冪 p に対して解の a priori 評価を確立することに成功した. この議論を許す係数 $b(x)$ として提示されたクラスは Lei-Yang によってカバーされない関数も含む. 申請者が示した定理は, 変数係数であっても臨界指数が藤田指数となる係数 $b(x)$ のクラスの理解へ向けての意義深い一歩として評価され, 今後の研究の展開が期待される.

以上のように, 本論文の成果は非線型消散波動方程式の臨界指数についての展望を与え, 得られた知見は当分野の発展に寄与している. 本論文に関する公開審査会を 2022 年 2 月 7 日に行い, 申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した. よって, 学位審査委員会は, 申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する.