別紙４

報告番号	※　　　　　　　　　　　第

主　論　文　の　要　旨

論文題目 The role of forward self-similar solutions in the Cauchy problem for semi-linear heat equations with exponential nonlinearity
(指数増大な非線形項を持つ半線形熱方程式の自己相似解の役割について)

氏　　名 鄭　大樹

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では指数増大な非線形項を持つ半線形熱方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = e^u, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

について考察する．ここで $N \geq 1$ とし, u_0 は $\mathbb{R}^N$ 上の連続関数とする．特に解の爆発問題を扱い, 熱方程式の特殊解とされる自己相似解を用いた手法で考察する．自然界の様々な現象は非線形偏微分方程式で記述することにより, 数学的な取り扱いが可能となる．多くの自然現象を扱うためには様々な非線形現象を考察する必要があるが, これは非線形項を取り替えることに対応しているため様々な非線形項において方程式を考察することが求められる．半線形熱方程式は主要部 (時間微分と空間微分がする現れる) が線形である時間発展する方程式の基礎であり, 熱伝導や拡散, 生物増殖などの自然現象を記述する．方程式に初期条件を与えると解が定まるが, 時間無限大まで存在する (大域解) か否かが現象の理解や数値解析の観点から重要である．大域解でないとき, 有限時刻で解のノルム (熱量, 最大値, エネルギーなど) が無限大に発散する現象が起こる．この現象は解の爆発と呼ばれ, 固体燃料の発火現象などを表している．大域解の存在に関する結果はべき乗型半線形熱方程式いわゆる藤田型方程式:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

において, 考察されており様々な結果が存在する. ここで $N \geq 1, p > 1$ とし, u_0 は $\mathbb{R}^N$ 上の有界な連続関数とする. 大域解の存在には初期値の空間無限大での挙動と指数 p が重要な役割を果たしていることが知られている. 特に, Fujita(1966) により発見された藤田指数 $p_F = 1 + 2/N$ は大域解の存在を示す臨界指数であり, 実際, $p < p_F$ のとき, 0 でない正の初期値を持つ解は有限時刻で爆発し, $p > p_F$ のとき, 小さい初期値に対して大域解の存在が示されている. 定常解は大域解の一つであるが藤田型方程式においてはソボレフ指数 $p_S = \dfrac{N+2}{N-2}(N \geq 3)$ より大きい p に対して定常解が存在することが知られている. また, 球対称定常解の構造に関するジョゼフ-ルンドグレンの臨海指数: $p_{JL} = 1 + \dfrac{4}{N - 4 - 2\sqrt{N-1}}$ $(N \geq 11)$ などがある.
自己相似解はスケール変換不変な解のことでべき乗型半線形熱方程式いわゆる藤田型方程式の場合, $p_F < p < p_{JL}$ に対して, 自己相似解がセパレータ (爆発解と大域解を隔てる解) となっていることが Naito(2012) によって示されている. この結果は指数をソボレフ指数から藤田指数にまで拡張することで定常解以外のセパレータの存在を示すことができた. 本論文ではこの結果の指数版に相当する結果を得られたことを報告する.
以下, 本論文の構成及び各章の概略について述べる. 本論文は 4 章からなる. 第 1 章では, 研究の背景, 藤田方程式に対しての自己相似解に関する結果, 本論文における主結果の概略から構成される. 本論文の主結果では指数増大な非線形項を持つ半線形熱方程式に対して, 自己相似解に相当する解を考え, その解がセパレータであることを示す. 証明のアイデアとなるものは非線形項の指数部分をべき乗型で近似することにより, 藤田型方程式で得られている様々な結果をそのまま適用する. これは指数関数の関係式を用いた近似方程式:

$$u_t^{(n)} - \Delta u^{(n)} = \left(1 + \frac{u^{(n)}}{n}\right)^n \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty),$$

を考えることによりベキ乗型方程式で近似され, 近似の仕方から自己相似性が保たれ, 自己相似解を用いた議論が可能となる. 第 2 章では, 指数増大型方程式をべき乗型方程式で近似できることを正当化する. 証明の方法は積分方程式に書き直すことで, n によらない一様評価を導くことにより, アスコリ・アルツェラの定理を用いて広義一様収束解を構成することで得られる. 第 3 章では, 自己相似解のプロファイル関数の性質を述べる. その中でも無限大の挙動 $\lim_{r\to\infty}(2\log r + \varphi(r)) = L$ がとなるプロファイル解の集合 S_L を考えこの集合における最小解の存在を示す. これは, 第 2 章で得られた近似解をもとに S_L の近似解を構成し, その最小解の極限を考えることで構成される. これによりプロファイル関数の様々な性質を示すことができる. 第 4 章では, 主結果の証明を行う. 主結果では $3 \leq N \leq 9$ において, S_L が 2 つ以上の元を持つ (S_L が最小解以外の解を持つ) 場合において前方自己相似解より上回る初期値を持つ解は有限時刻で爆発し, 下回る初期値を持つ解は大域解となるというものである. 証明の方針は, 優解, 劣解の概念を導入し, 自己相似解と初期関数の間に優解, 劣解を具体的に構成することで大域性, 爆発性を示す.