論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

氏　　　　　名　　　鄭　大樹

論　文　題　目

The role of forward self-similar solutions in the Cauchy problem for semi-linear heat equations with exponential nonlinearity

（指数増大な非線形項を持つ半線形熱方程式の自己相似解の役割について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
大平　徹

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D
杉本　充

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
加藤　淳

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
寺澤　祐高

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

自然現象を扱うためには様々な非線形現象を考察する必要があり，非線形偏微分方程式による記述は一つの有力な手段である．この論文においては，このうち次のような半線形熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

を主題としている．ここで $N \geq 1$ で u_0 は連続な初期関数である．

この方程式は，熱伝導や拡散，生物増殖などの自然現象を記述する際に登場し，さらに一般の現象に対応するには様々な非線形項 $f(u)$ に対して考察することが求められる．この方程式の特徴のひとつとして，非線形項や初期値 u_0 の与え方次第で，解が時間無限大まで存在したり（大域解），有限時刻で解のノルム (熱量, 最大値, エネルギーなど) が無限大に発散したり（解の爆発）する現象が知られており，この大域解と解の爆発の境界を探求することに多くの研究者の関心が集まっている．また，これらに対する理論的な解析は，上記の現象の理解や数値解析の観点からも重要である．

この方面における研究として，1966 年の藤田宏による以下のべき乗型半線形熱方程式（今日では藤田型方程式と呼ばれている）

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2}$$

に関する考察が最も基本的である．具体的には藤田指数と呼ばれる $p_F := (N+2)/N$ が解の性質を特徴づける重要な指標であり，実際にもし $1 < p \leq p_F$ であれば非自明解は必ず爆発し，$p_F < p$ であれば初期値が十分に小さく遠方で十分に早く減衰するならば大域解が存在することが知られている．また，その後 1992 年には Lee-Ni により，この大域解の存在のための初期値の減衰度のボーダーは $-2/(p-1)$ であることが突き止められている．実はこの $-2/(p-1)$ という減衰度は，方程式 (2) の球対称な自己相似解の減衰度と一致することが知られている．$u(x,t)$ が (2) の解ならば，そのスケール変換された函数 $u_\lambda(x,t) := \lambda^{2/(p-1)}u(\lambda x, \lambda^2 t)$ も (2) の解となることが簡単に確かめられるが，自己相似解とはこの二つの関数が恒等的等しくなる解のことであり，ある意味で非線形構造を的確に特徴づけるものとなっている．この事実をふまえて，2012 年に内藤雄基は爆発解と大域解を隔てる解（セパレータ）を，この自己相似解を用いて構成することに成功している．正確には，初期値がある時刻におけるセパレータより大きければ爆発し，小さければ大域解が存在することが述べられており，解の様相をより詳しく捉えることを可能ならしめる結果となっている．

以上の先行研究を背景として，申請者の鄭大樹氏はこの論文において指数増大な非線形項を持つ半線形熱方程式

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = e^u, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3}$$

を考察し，主結果としてこの方程式に関するセパレータを構成している．方程式 (3) は方程式 (2) とは異なりスケール変換による不変性を有しておらず，したがって自己相似の概念も通常の意味では存在し得ないのでセパレータの構成法はおのず非自明である．これに関して，藤嶋陽平は 2018 年に方程式 (3) に対する自己相似解の類似を提唱し，それを用いればセパレータが構成されることを予想していたが，この予想は未解決のままとなっていた．鄭氏の本論文における主結果は，この予想に対する完全な解決を与える意義深いものである．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

この問題の解決のために鄭氏のとった方法論は，他の関連研究には見られない独創的なものである．それは，指数関数のべき近似

$$e^u = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n;$$

を用いることで、近似方程式

$$u_t^{(n)} - \Delta u^{(n)} = \left(1+\frac{u^{(n)}}{n}\right)^n \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,\infty). \tag{4}$$

を考察する道筋をとることにより藤田型方程式に帰着するものであり，これにより藤田型方程式で得られている様々な結果をそのまま適用することが可能になる．特にその自己相似解の極限として，藤嶋氏が提唱した (3) に対する自己相似解の類似物を理解することができる．これらの正当化は，(4) を積分方程式に書き直すことにより，アスコリ・アルツェラの定理を用いて広義一様収束解を構成することでなされるが，これも鄭氏により独自に組み上げられた論法となっている．

以上のように，鄭氏の論文は半線形熱方程式の初期値問題に関する新しい知見を与えたものであり，学位論文としては十分な内容を持つものであると判断できる．２０２２年２月８日に行われた学位審査公開セミナーにおいても, 申請者は先行研究の内容を丁寧に説明した上で, 自身の研究成果と意義が非専門家にも伝わるように講演を行った. また, 質問に対しても丁寧・明快に回答し, 学位を授与されるに相応しい学識を示した. 以上によって, 学位審査委員会は申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する.