別紙4

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　A weak limit theorem for anisotropic quantum walks on lattices

（格子上の異方的量子ウォークの弱収束定理）

氏　　名　三村　一平

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は大きく分けて2つの内容から成る．1つは六角格子, 正方格子, 三角格子グラフ上の量子ウォークの弱収束定理についてであり, もう1つはその量子ウォークを記述するユニタリー作用素の本質的スペクトルについてである．

量子ウォークは状態のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の正規化されたベクトルと, 時間発展の作用素 U により記述される．この U はシフト作用素 S とコイン作用素 C の積により定義される．前者は与えられているグラフから決定する作用素であり, 後者はコイン写像と呼ばれるユニタリー行列値写像による掛け算作用素である．一次元格子 $\mathbb{Z}$ 上の量子ウォークを考えるとき, 状態空間は $\mathcal{H}=\ell_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^2)$ が取られ, コイン写像は $\mathbb{Z}$ から2次ユニタリー群 $U(2)$ への写像から取られる．ここで "2" は $\mathbb{Z}$ が2次の正則グラフであることによる．量子ウォーカーの初期状態 $\Psi^0\in\mathcal{H}$ $(\|\Psi^0\|=1)$ が与えられたとき, それが時刻 $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ で場所 $n\in\mathbb{Z}$ に存在する確率は

$$\mathbb{P}(X_t=n)=\|(U^t\Psi^0)(n)\|^2_{\mathbb{C}^2}$$

で定義される．ここで X_t は時刻 t における量子ウォーカーの位置を表す $\mathbb{Z}$-値の確率変数である．Suzuki はコイン写像 $C_\bullet:\mathbb{Z}\to U(2)$ が次の短距離型の条件を満たすときに, 確率変数 X_t/t の分布がある確率測度に弱収束することを示した．

$$C_n=C_\infty+O(|n|^{-1-\varepsilon})\quad\text{as}\quad |n|\to\infty\quad\text{for some } C_\infty\in U(2),\ \varepsilon>0.$$

これは散乱理論における波動作用素が存在する十分条件になっている．その後, Richard-Suzuki-Tiedra de Aldecoa らは, コイン写像が短距離型で, 次のような無限遠における異方性が認められる場合にも X_t/t の分布が弱収束することを示し, Suzuki の結果を拡張した．

$$C_n=\begin{cases}C_\infty+O(|n|^{-1-\varepsilon}) & \text{as}\quad n\to\infty\\ C_{-\infty}+O(|n|^{-1-\varepsilon}) & \text{as}\quad n\to-\infty\end{cases}\quad\text{for some } C_{\pm\infty}\in U(2),\ \varepsilon>0.$$

本論文の1つ目の主定理は, 六角格子, 正方格子, 三角格子上のある種の異方的なコイン写像から定まる量子ウォークに対する弱収束定理についてである. Γ を六角格子, 正方格子, 三角格子のいずれかとし, d をその次数とする. グラフの変形により, Γ の頂点集合は $\mathbb{Z}^2$ とみなせ, それに伴い, 状態空間は $\mathcal{H}_\Gamma = \ell_2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^d)$ であり, コイン写像は $\mathbb{Z}^2$ から $U(d)$ への写像である. さて, $\mathbb{Z}^2$ のうち, 成分の和が偶数, 奇数となる点全体の集合をそれぞれ $\mathbb{Z}^2_e$, $\mathbb{Z}^2_o$ と表す. それぞれの一点コンパクト化を $\mathbb{Z}^2_e \cup \{\infty_e\}$, $\mathbb{Z}^2_o \cup \{\infty_o\}$ とすると, その非交和 $\mathbb{Z}^2 \cup \{\infty_e, \infty_o\}$ は $\mathbb{Z}^2$ のコンパクト化である. 本論文でコイン写像 $C_\bullet : \mathbb{Z}^2 \to U(d)$ が異方的であるとは, それが $\mathbb{Z}^2 \cup \{\infty_e, \infty_o\}$ 上の写像として連続的に拡張可能であることと定義する. 主定理の1つは, このようなコイン写像 $C_\bullet$ が短距離型であるとき, つまり, $C_e, C_o \in U(d)$ と $\varepsilon > 0$ があって,

$$C_{(n,m)} = \begin{cases} C_e + O(\|(n,m)\|_1^{-2-\varepsilon}) & \text{as} \quad \mathbb{Z}^2_e \ni (n,m) \to \infty_e \\ C_o + O(\|(n,m)\|_1^{-2-\varepsilon}) & \text{as} \quad \mathbb{Z}^2_o \ni (n,m) \to \infty_o \end{cases}$$

を満たすとき, 確率変数 X_t/t の分布が次のような確率測度に弱収束するというものである:

$$\mu = \|\Pi_{\mathrm{pp}}(U)\Psi^0\|^2_{\mathcal{H}_\Gamma} \delta_{(0,0)} + \|(E_{V_1^\Gamma} \otimes E_{V_2^\Gamma})(\cdot)(\Omega_+^\Gamma)^* J_\Gamma \Psi^0\|^2_{\mathcal{H}_\Gamma \oplus \mathcal{H}_\Gamma}.$$

ここでは J_Γ が $\mathcal{H}_\Gamma$ から $\mathcal{H}_\Gamma \oplus \mathcal{H}_\Gamma$ へのユニタリー作用素であることのみを注意しておく.

Richard-Suzuki-Tiedra de Aldecoa らは先の論文で, $\mathbb{Z}$ 上の量子ウォークの時間発展作用素 U の本質的スペクトルを決定している. 本論文の2つ目の主定理は, Γ 上の量子ウォークの発展作用素 U が異方的なコイン写像 (短距離型までは仮定しない) から定まるとき, その本質的スペクトルが以下のように与えられるというものである:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(U) = \bigcup_{(\theta,\varphi)\in[0,2\pi)^2} \sigma(\widehat{U}_\infty(\theta,\varphi))$$

ここで $\widehat{U}_\infty(\theta,\varphi)$ は $2d$ 次ユニタリー行列である.

本論文の最終章では, 特に Γ として, 正方格子, 三角格子の場合に話を限定し, 主定理を再提示している. この場合, もしコイン写像が等方的であれば, つまり, 無限遠点 ∞_e, ∞_o における $C_\bullet$ の値が等しければ, 上の2つの主定理はもう少し単純な形で述べることができるからである. 弱収束定理に関しては, ユニタリー作用素 J_Γ を使用するすることなく弱極限 μ を表すことができ, 本質的スペクトルに関しては, このときの $\widehat{U}_\infty(\theta,\varphi)$ に相当するユニタリー行列のサイズが d となる. 正方, 三角格子と六角格子とのグラフの性質の差がこのような違いを生んでいる.