論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　　三村　一平

論　文　題　目

A weak limit theorem for anisotropic quantum walks on lattices

（格子上の異方的量子ウォークの弱収束定理）

論文審査担当者

主　査　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
永尾　太郎

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D
森吉　仁志

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（情報理工学）
Le Gall, François

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
南　和彦

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

量子ウォーク (quantum walk) は、量子力学の法則にしたがう粒子 (量子ウォーカー) の運動を記述する数理モデルであり、Feynman and Hibbs(1965) による経路積分の本などの物理学の文献に、その導入がみられる。特に、Grover(1996) による高速量子検索のアルゴリズムとの関係が指摘されたことにより、注目されている。また、近年は数学的側面の研究もさかんであり、先駆的な結果の一つとしては、1 次元直線上の量子ウォーカーの分布の長時間極限に対して、Konno(2002) が弱収束定理を証明したことが挙げられる。

本論文においては、2 次元面上の量子ウォークについて考察がなされ、弱収束定理が証明されている。時刻 t は離散的で整数値をとるとし、量子ウォーカーは六角格子、正方格子または三角格子の頂点上にあり、時刻が 1 進むごとに隣接する頂点上に移動する。格子の各頂点は位置座標 $x = (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ によって指定できる。量子ウォーカーの状態の Hilbert 空間を $\mathcal{H}$ としよう。時刻 t における量子ウォーカーの状態 $\Psi^t \in \mathcal{H}$ は

$$\Psi^t = U^t \Psi^0$$

と表される。ただし、U は時間発展作用素 ($\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素) で、$\Psi^0 \in \mathcal{H}$ は $t = 0$ における量子ウォーカーの初期状態である。格子の次数を d とするとき、位置座標 x における確率振幅 $\Psi^t(x)$ を d 次の複素ベクトルとみなすことができる。このとき、時刻 t における量子ウォーカーの位置 X_t の分布は、

$$P(X_t = x) = \parallel \Psi^t(x) \parallel^2_{\mathbb{C}^d}, \quad x \in \mathbb{Z}^2$$

によって表される。本論文における弱収束定理とは、長時間極限 ($t \to \infty$) における X_t/t の分布の弱収束を示すものである。

量子ウォーカーの時間発展作用素 U は、位置座標 x において $U(x) = SC(x)$ の形をとる。S はシフト作用素、$C(x)$ はコイン作用素とよばれ、格子の次数を d とするとき、いずれも d 次のユニタリ行列とみなすことができる。S は隣接する頂点への量子ウォーカーの移動を表し、 $C(x)$ は各頂点上での散乱を表す。$C(x)$ は一般には位置座標 x に依存するが、遠方 (すなわち $|n| + |m| \to \infty$ の極限) では十分速く極限行列 C_∞ に収束することが仮定されている。本論文では、六角格子の場合に、 頂点を辺の出る向きにしたがって 2 種類に分類している。そして、それぞれの種類の頂点のコイン作用素を $C^e(x)$、$C^o(x)$ として、それぞれが遠方で異なる極限行列 C^e_∞、 C^o_∞ に収束する場合 (異方的な場合) への一般化が行われている。

本論文の構成は以下の通りである。序文で量子ウォークと弱収束定理の概説および主結果の紹介がなされた後、1 節で技術的な準備がなされ、2 節では格子上の量子ウォークが定義される。3 節では、異方的な場合について、主結果である弱収束定理 (Theorem 3.4.3) が証明される。Theorem 3.4.3 は以

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

下のように主張する: 極限行列 C^e_∞ および C^o_∞ が条件 (Assumption 3.2.3) をみたす場合には、X_t/t の分布は確率測度

$$\mu = \| \Pi_{\mathrm{pp}}(U)\Psi^0 \|^2_{\mathcal{H}} \delta_{(0,0)} + \| (E_{V_1} \otimes E_{V_2})(\cdot)(\Omega_+)^* J\Psi^0 \|^2_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$$

に弱収束する。ただし、$\Pi_{\mathrm{pp}}(U)$ は U のすべての固有空間の直和への射影、$\delta_{(0,0)}$ は原点における Dirac 測度、 V_1 と V_2 は漸近速度作用素、$E_{V_j}(\cdot)$ は V_j のスペクトル測度 $(j = 1, 2)$、 $(\Omega_+)^*$ は波動作用素 Ω_+ の随伴作用素、J は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ へのユニタリ作用素である。続いて、4 節では、時間発展作用素 U の本質的スペクトルを決定する議論がなされている。さらに、5 節では、コイン作用素の極限行列が 1 つしかない場合 (等方的な場合) の結果がまとめられている。

Konno(2002) の弱収束定理は、コイン作用素が x に依存しない (一様な) 1 次元量子ウォークに対するものである。Suzuki(2016) は、Konno の結果をコイン作用素が x に依存する (非一様な) 場合に一般化した。本論文の主結果 (Theorem 3.4.3) は、Suzuki の結果の 2 次元版の形をしている。2 次元の量子ウォークに対する弱収束定理の先行研究としては、Watabe, Kobayashi, Katori and Konno (2008) が知られている。その研究では、Grover のアルゴリズムに関係する場合を含む正方格子上の量子ウォークが扱われている。しかし、その場合には Assumption 3.2.3 が成り立たず、本論文の結果が適用されないことが、予備審査の過程において確認された。一方、Assumption 3.2.3 をみたし、かつコイン作用素の極限行列が単位行列にならない場合が別に存在することも、予備審査の過程において確認された。

以上のように、本論文は、2 次元面上の量子ウォークについて、独自の適用範囲をもつ新しい知見を与えるものであり、学位論文として十分な内容をもつものであると認められる。2022 年 2 月 22 日に開かれた学位審査セミナーでは、学位申請者による本論文の解説と、質疑応答を行った。解説はよく準備され要点を押さえたものであり、質問に対する回答も、博士の学位を取得するに足る水準に達していたと認められる。以上のことから、学位審査委員会は、学位申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する。