令和３年度　博士学位論文

流れ場に対するフィードバック制御則の
機械学習を用いた設計

Design of Feedback Control Laws for Flow Fields Using Machine Learning Techniques

令和４年２月18日提出

名古屋大学 大学院工学研究科 航空宇宙工学専攻
飛行・制御講座 制御システム工学研究グループ

佐々木 康雄

学位審査委員

主査　原　　進 教授

副査　長田 孝二 教授

坂本　　登 教授

椿野 大輔 講師

目次

第 1 章

序論

1.1 流れ場に対するフィードバック制御則設計の目的

流れ場は非常に多くの工学的な課題と関連がある．例えば，航空機の最大揚力の向上や自動車の空気抵抗の抑制，エンジン内での空燃混合の促進，パイプラインでの圧力損失の削減などは流れ場と切り離すことができない課題である．このような課題を解決するために，さまざまな戦略で流れ場を自在に変化させようとする試みがなされてきた．

流れ場を変化させる戦略は，アクチュエータとセンサの使用の有無によって三つに大別することができる．最もよく実践されている戦略は，アクチュエータを使わない受動的な手法である．受動的な戦略は，物体形状の最適化やボルテックスジェネレータやタービュレータと呼ばれる突起物の設置，流れ場への潤滑剤の添加などを含む．また，船の揺動防止のための固定式フィンスタビライザの設置も受動的な戦略の一つである．フィンスタビライザを設置すると，船が横揺れしたときにフィンに横揺れと反対方向のトルクを発生させる揚力が働き，船の横方向の動安定性を高めることができる．また，よく実践されているもう一つの戦略は，センサは用いないがアクチュエータを用いる開ループ制御手法である．開ループ制御では，アクチュエータへの指令値を変化させることで，流れ場の変化をある程度調整することができる．開ループ制御手法として，航空機のフラップやスラットなどの高揚力装置の操作やエンジンでの燃料混合のためのジェット噴射などが挙げられる．第三の戦略は，センサとアクチュエータを用いるフィードバック (閉ループ) 制御手法である．フィードバック制御は，センサで得られる流れ場の物理量の情報に基づいてアクチュエータへの指令値を定める制御手法である．図 1.1 にフィードバック制御の概念図を示す．フィードバック制御は，他の二つの戦略と異なり，これまでは制御系の実現性の問題から実践されてこなかった．しかし，応答性の良い流体駆動デバイス [1–3] の登場や小型計算機の高速化によって，近年では流れ場に対するフィードバック制御系の構築が現実味を帯びつつある．実際，流れ場のフィードバック制

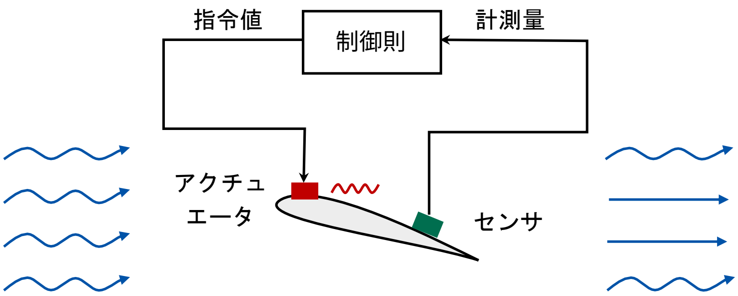


図 1.1: フィードバック制御の概念図

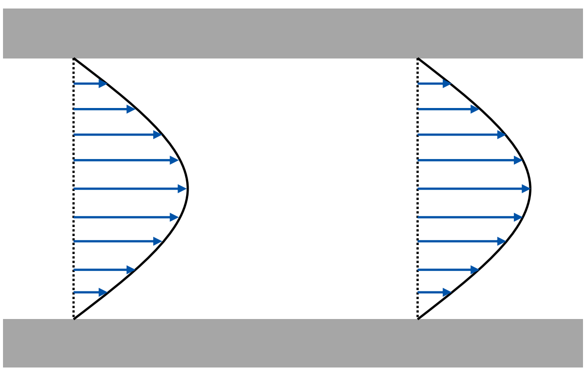
御に関する実験が 2000 年以降では非常に増えてきている (例えば，[4–19]).

流れ場のフィードバック制御には主に二つの利点が期待できる．一つ目の利点は，流れ場を所望の状態へと遷移できる可能性があることである．この利点を具体的に説明するために，2 次元チャンネル流れを考える．2 次元チャンネル流れは，管内の流れの 2 次元モデルである．このチャンネル流れは，図 1.2(a) に示すような層流の平衡点 (定常解) を持つことがよく知られている．この平衡点では，各点において流速の方向が一定であり，流速は定常な放物型の分布を持つ．この平衡点は Reynolds 数が低い場合には安定であるが，Reynolds 数がある値 (臨界 Reynolds 数) を超えると不安定になる．したがって，特に無制御のもとでは高 Reynolds 数のチャンネル流れは，非定常な乱流となる．乱流流れは平衡点の定常流れと比較して，流体に加わる摩擦抵抗が大きい．これは流体を輸送する上で問題となる．実はこのチャンネル流れに対しては，ある仮定のもとで平衡点を安定化するフィードバック制御が存在する [20]．このフィードバック制御を適用することで，流れ場を摩擦抵抗の小さい層流の平衡点へと遷移させることができる．このような流れ場の平衡点などへの状態の遷移によって，乱流の層流化のほかに，渦放出や剥離の抑制が可能である．二つ目の利点は，アクチュエータに投入するエネルギを抑えられることである．これは，流れ場のフィードバック制御では，センサで得られる流れ場の物理量に応じてアクチュエータへの指令値を調整できるためである．特に，無入力の平衡点への安定化フィードバック制御では，ほとんどアクチュエータにエネルギを投入することなく，流れ場の状態を所望の平衡点に維持することができる．これは，平衡点の近傍では状態を平衡点から遠ざけようとする力が弱いため，小さな制御量でも平衡点の近傍に状態を維持することができると考えられるからである．

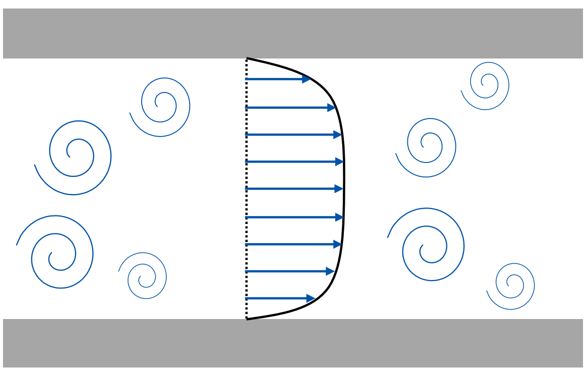
上述したフィードバック制御の利点を得るためには，センサ量からアクチュエータの指令値を決定する制御則を適切に設計しなければならない．たとえ優れたセンサやアクチュエータを用いたとしても，フィードバック制御則の設計が不適切であれば，流れ場をむしろ乱すことすらあり得る．そのため，流れ場に対するフィードバック制御則をどのように設計するのかというテーマは非常に重要である．

1.2　流れ場に対する制御則設計の先行研究

本研究では，流れ場の厳密なモデルに基づくモデル予測制御に着目した制御則設計法を提案する．流れ場に対するフィードバック制御則の設計は，その重要性のため，長年研究されてきたテーマである．本節では流れ場に対する制御則設計に関する先行研究を振り返り，流れ場の厳密なモデルに基づくモデル予測



(a) 定常流れ (平衡点)



(b) 乱流流れ

図 1.2: 2 次元チャンネル流れ．乱流流れは非定常な流れである．乱流流れは時間平均では壁面において定常流れよりも急峻な速度勾配を持つ．このため，乱流流れは定常流れに比べて流体に加わる摩擦抵抗が大きい．

制御の立ち位置を明らかにする．以下では，制御則設計法をモデルフリー手法，低次元モデルに基づく手法，フルオーダモデルに基づく手法の三つに分類して紹介する．

1.2.1　モデルフリー設計法

モデルフリー設計法は，流れ場のダイナミクスを事前にモデル化することなしに制御則を設計する手法を指す．例えば, PID 制御則 [5,19,21–24] や計測量に基づいて条件付を行う切り替え制御則 [4,7,8,15,25] が流れ場の制御ではよく用いられる．また，現在の計測量と過去の計測量の差分をフィードバックさせる遅延フィードバック制御 [13] も提案されている．

モデルフリー制御則は試行錯誤的に決定されることも少なくないが，試行錯誤ではなく，自動的に決定する手法も適用されている．極値探索制御 [10–12, 14, 26–28] では，評価関数の正弦波に対する応答から制御則のパラメータをオンラインで最適化することができる．また，Gautier らは遺伝的プログラミングによって制御則の関数形を定める手法を提案した [29]．最近では，モデルフリー強化学習による繰り返し学習によって制御則を最適化する研究が盛んに行われている [16, 17, 30, 31]．制御則を自動的に決定するようなモデルフリー制御手法では，評価関数の最小 (最大) 化に基づいて制御則が更新される．これを説明するために，極値探索制御を例に挙げる．図 1.3 に極値探索制御を流れ場に適用したときの制御系を示す．図中の評価関数値とパラメータには例えばそれぞれ，抗力係数と PID ゲインなどが想定される．極値探索制御の目的は，評価関数を最小化するような制御パラメータをオンラインで見つけることである．極値探索制御の制御系には，流れ場と制御則という通常の閉ループ系の構成要素のほかに，極値探索則の構成要素がある．この極値探索則は流れ場から得られた評価関数応答に基づいて制御則のパラメータを更新する．このとき制御則のパラメータは，将来的に評価関数値が小さくなるように決定される．このため，評価関数値は徐々に減少していき，最終的に最小値に到達すると期待できる．

モデルフリー設計法は流れ場の事前のモデル化を必要としないため，実システムへの実装のハードルが少ないことが利点としてあげられる．実際，上に記した参考文献の半数以上は，実験での流れ場のフィードバック制御の結果を示している．しかし，モデルフリー設計法は後に説明するモデルベースト設計法と比べて，ノミナルシステムに対して設計される制御則の性能が低くなりやすいという課題を持つ．標準的な PID 制御則などは，パラメータが少なく，大きな制御効果を発揮できるだけの十分な自由度を持たない．逆にパラメータの多いモデルフリー制御則では，数値最適化において不適切な局所最適解に陥りやすいなど，パラメータ選択に課題がある．

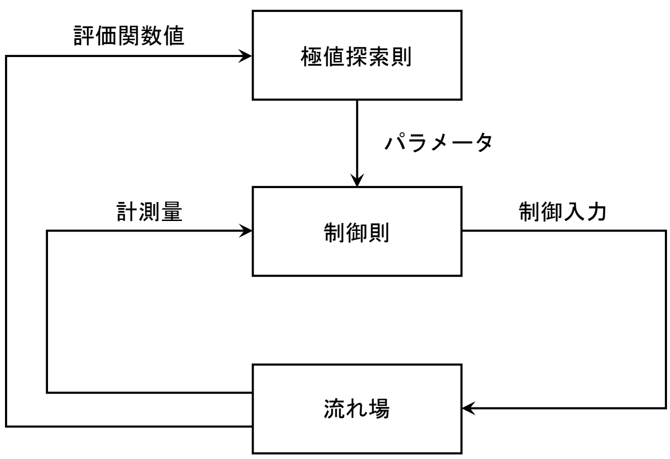


図 1.3: 極値探索制御を流れ場に適用したときの制御系

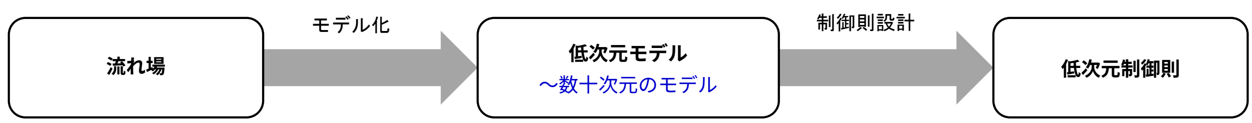
1.2.2　低次元モデルに基づく設計法

流れ場のダイナミクスは厳密には Navier-Stokes 方程式によって記述される．Navier-Stokes 方程式は非線形な偏微分方程式であり，粗いスケールで空間離散化したとしても，一般的には 10^4 次元以上の常微分方程式となる．このため，(離散化) Navier-Stokes 方程式に対して制御則を設計することは容易ではない．こうした事情から，流れ場に対するモデルベーストな制御則設計では，Navier-Stokes 方程式よりも，せいぜい数十次元程度の低次元なモデルがよく用いられる．図 1.4(a) に低次元モデルに基づく制御則設計の手順を示す．いったん低次元モデルが得られれば，現代制御論やポスト現代制御論に基づくさまざまな設計法を用いることができる．

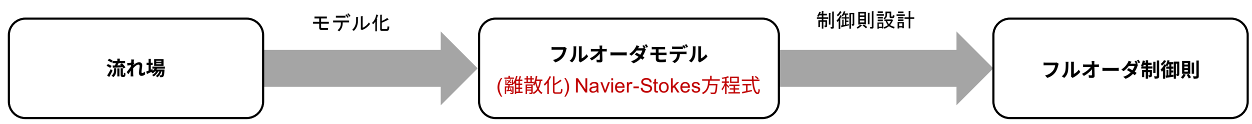
流れ場に対する低次元モデルの導出には，データ駆動の手法を用いるのが一般的である．こうしたデータ駆動の低次元化手法では，流れ場に関する時系列に適合するように低次元モデルが導出される．特に低次元モデルの導出には，固有直交分解 (POD) [32] や Balanced POD [33]，ERA (Eigensystem Realization Algorithm) [34]，動的モード分解 [35] がよく用いられる．

データを利用した低次元化の考え方を POD を例にとって説明する．POD を用いることで，無限次元のベクトル空間とみなされる流速分布の集まりから，数十次元程度の低次元な部分空間を見つけ出すことができる．無限次元のベクトル空間上での流れ場の状態方程式は Navier-Stokes 方程式で記述されるが，これを POD で導出される低次元な部分空間に射影することによって，低次元な状態方程式を求めることができる．POD によって見つけ出される低次元な部分空間は，流速分布のデータが精度良く復元できるように決定される．ここでは簡単に，図 1.5 に示すような 2 次元ベクトル $X \in \mathbb{R}^2$ のデータから 1 次元の低次元量 $x \in \mathbb{R}$ を導出する例を考える．この例では，2 次元の状態方程式にしたがう有限個の時系列 (図 1.5 の青点) が与えられている．2 次元ベクトル $X \in \mathbb{R}^2$ の集まりであるベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の 1 次元の部分空間（つまり直線）は無数に存在する．POD ではこのような部分空間のうち，時系列を射影したときの誤差が最も小さくなるような部分空間 (図 1.5 の赤線) を選ぶ．これは，時系列との距離が最も小さくなるような部分空間を求めるとも言い換えることができる．この部分空間上に射影された点は 1 次元の座標 x によって書き表すことができる．そこで，X の運動を表す 2 次元の状態方程式のかわりに，射影された座標 x の運動を表す 1 次元の状態方程式でシステムを記述する．もし，X の時系列と導出された部分空間が近ければ，1 次元の状態方程式でも X の運動を表すことができると期待される．

流れ場の低次元モデルに基づく制御則設計法では，線形制御理論が適用されることが少なくない．これは，ダイナミクスの非線形性が弱い流れに対しては線形制御理論で得られる制御則でも十分な性能が得られるためである．例えば，臨界 Reynolds 数付近の流れではダイナミクスの非線形性が弱く，線形制御



(a) 低次元モデルに基づく制御則設計法



(b) フルオーダモデルに基づく制御則設計法

図 1.4: 流れ場に対するモデルベースト制御則設計

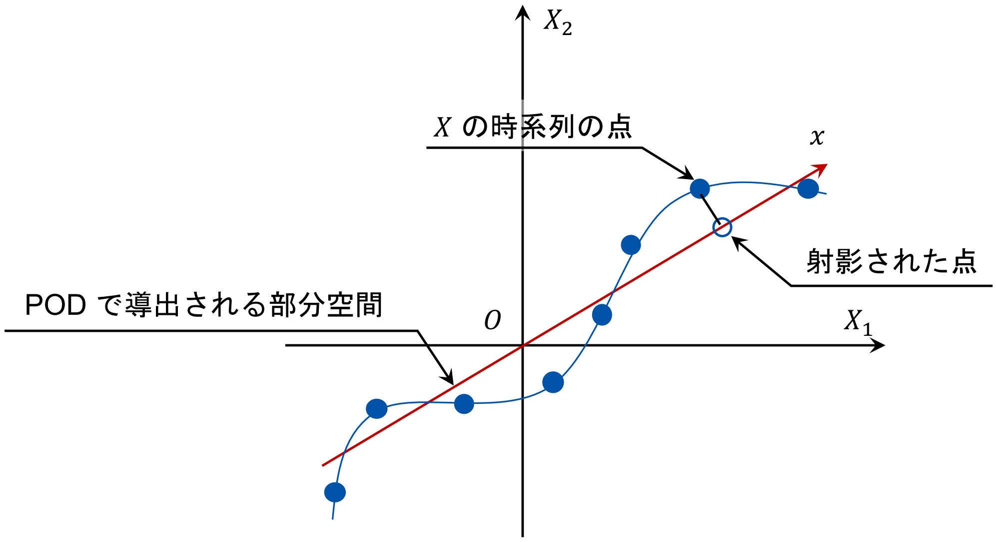


図 1.5: POD による 2 次元の時系列の低次元化の概念図

則で流れ場を安定化できる場合がある．低次元モデルに対して適用されてきた線形制御手法には，LQR (Linear Quadratic Regulator) [36–38] や LQG (Linear Quadratic Gaussian) [39–42]，H_2 制御 [43]，H_∞ 制御 [44, 45]，線形モデル予測制御 [42, 46] などがある．

流れ場のダイナミクスの非線形性に対処するために，非線形な低次元モデルに基づく制御則も設計されている (例えば，[47, 48])．Aleksić-Roeßner らは Reynolds 数 $Re = 100$ の円柱まわり流れの非線形低次元モデルに基づいて制御則を設計し，その非線形な制御則が線形モデルに対して設計される制御則よりも良い性能を持つことを数値実験で示した [49]．表 1.1 に流れ場の低次元モデルに基づく制御則設計を行なった研究をまとめた．

表 1.1: 流れ場の低次元モデルに基づく制御則設計の研究

線形制御	**非線形制御**
LQR [36–38]	
LQG [39–42]	幾何学的制御 [47]
H_2 制御 [43]	バックステッピング法, 非線形モデル予測制御 [49]
H_∞ 制御 [44, 45]	スライディングモード制御 [48]
線形モデル予測制御 [42, 46]	

繰り返しになるが，低次元モデルに基づく設計法の利点は制御理論に基づくさまざまな設計法を用いることができる点である．流体のダイナミクスを正確に記述するような低次元モデルが得られれば，性能の良い制御則を設計することができる．また，モデルが低次元であるため，設計される制御則の計算コストが低いことも，この設計法の利点である．制御則の計算コストが低いため，実システムへの実装が比較的現実的である．モデルフリー制御則ほどではないが，低次元モデルに基づく制御則もいくつかの実験において実システムへ実装されている [37, 50]．

このように低次元モデルに基づく設計法はいくつかの利点を持つが，考慮されていない残差システムの影響で制御則が意図しない挙動をとってしまう場合がある．ここで，残差システムとは流れ場の入出力の関係のうち，低次元モデルで考慮されていない残りの入出力関係を表すシステムのことである．残差シス

テムが制御系にもたらす影響を調べるために，図 1.6 のように流れ場のシステムが低次元モデルと残差システムとに分離できる場合を考える．この制御系では，出力フィードバック制御則によって計算された制御入力が低次元モデルと残差システムのそれぞれに印加される．そして，それぞれのシステムからの出力の和が計測される．残差システムと制御則とが及ぼし合う影響に着目する．制御則から計算された制御入力は残差システムを通して出力に影響を及ぼす．この影響は制御スピルオーバと呼ばれる．また，残差システムからの出力は制御則を通して制御入力に影響を与える．この影響は観測スピルオーバと呼ばれる．この二つのスピルオーバは全体の閉ループにおいて干渉し合う．このために，低次元モデルと制御則からなる閉ループ系が安定であったとしても，全体のシステムは不安定になり得る．また，図 1.6 では簡単のために全体のシステムが二つのシステムに分離できる場合を考えたが，流れ場ダイナミクスの非線形性が無視できない場合には，全体のシステムを分離できるような低次元モデルを導出することは困難である．この場合，残差システムの状態と低次元モデルの状態は相互に作用する．この二つのシステム間における相互作用も全体のシステムの安定性に影響を与える．

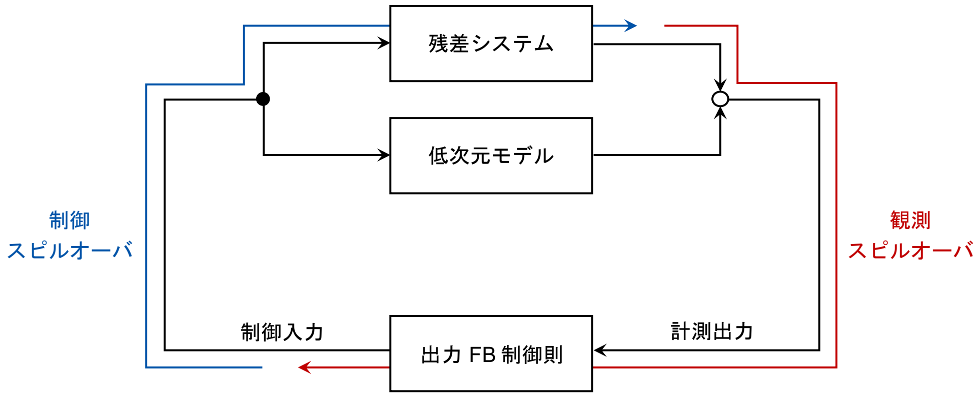


図 1.6: スピルオーバの概要

上記のような残差システムが流れ場の制御系に与える影響を抑えるために，主に二つの戦略が考えられる．一つは，H_∞ 制御則などのロバストな制御則を設計することである．この戦略では，残差システムによる影響を外乱とみなし，外乱が存在するもとでも安定性が保証できるような制御則が設計される．もう一つの戦略は，閉ループ制御下での低次元モデルのモデルの精度を高めることである．低次元モデルが流れ場の入出力関係を正確に記述できていれば，残差システムにおける状態や出力が小さくなるため，結果的に残差システムによる影響を抑えることができる．データ駆動による低次元モデルの導出では，モデルの精度を高めるために，どのようなデータを用いるのかが重要となる．とりわけ制御則設計のための低次元モデルの導出には，閉ループ制御下でのモデルの精度が高めるために，閉ループ制御下での流れ場の時系列が求められる．このために，低次元モデルの導出と制御則設計，流れ場の閉ループ系の時系列の取得という三つの手順を繰り返す手法が提案されている [51–53]．このように残差システムの影響を抑える手法がいくつか提案されているが，ロバスト設計法では制御則のノミナルモデルに対する性能が悪化するおそれがあり，モデル化と制御則設計を反復する手法では反復が収束する保証がないなど，低次元モデルに基づく制御則設計において残差システムの影響抑制は依然として重要な課題である．

1.2.3　フルオーダモデルに基づく設計法

Navier-Stokes 方程式やそれを離散化して得られる方程式をフルオーダモデルと呼ぶことにする．図 1.4(b) にフルオーダモデルに基づく制御則設計の手順を示す．空間離散化を伴わないフルオーダモデル

に基づいて設計される制御則では，残差システムが存在しないので，スピルオーバの影響を受けない．また，空間離散化を伴う場合でも十分に細かく離散化することでスピルオーバの影響を受けづらくなり，高い性能が期待できる．Semeraro らはフルオーダモデルに基づく制御則が低次元モデルに基づく制御則よりも良い性能を示すケースがあることを数値実験で示している [54]．

偏微分方程式に対して閉形式の制御則が設計可能な手法としてバックステッピング法が知られている．Vazquez らと Cochran らは，それぞれ 2 次元と 3 次元のチャンネル内の線形化 Navier-Stokes システムの平衡点を指数安定化する制御則をバックステッピング法によって設計した [20, 55]．このように，バックステッピング法を用いることで強力な制御則を設計できる可能性がある．しかし，彼らの研究ではチャンネル流れに特有の幾何的な特徴を利用しており，その他の流れに対してバックステッピング法によって制御則が設計された例はない．

フルオーダ制御則の設計を容易にするために，線形化 Navier-Stokes 方程式を離散化して得られる方程式が用いられることも少なくない．ただし，この場合には状態方程式の高次元性のために，低次元なモデルに対して利用される数値解法が利用できない場合がある．これを説明するために，LQR を例に挙げる．LQR では代数 Riccati 方程式を解くことによって最適なゲインが求められる．一般的にこの Riccati 方程式は Hamilton 行列を Schur 分解することによって数値的に解かれる．しかし，流れ場のフルオーダモデルでは状態ベクトルの次元が 10^4 を超える場合が多い．一般的な Riccati 方程式の数値解法はこうした高次元のモデルに対しては，計算コストが高すぎて適用することができない．このように，離散化によって得られるフルオーダモデルに基づく制御則設計では，システムの高次元性に由来する計算コストに対処しなければならない．このため，高次元なシステムに対しても適用可能な特殊な数値解法が利用される (例えば，[54, 56–58])．

ダイナミクスの非線形性が強い流れに対しては，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御が有効である．図 1.7 に非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御の概要を示す．モデル予測制御では，非線形 Navier-Stokes 方程式を拘束条件とする最適制御問題を各時刻で解くことで制御入力を決定する．制御則は閉形式とならないが，厳密なモデルに基づく最適制御則であるので，高い性能が期待できる．Bewley らは 3 次元チャンネル流れの層流化のために，モデル予測制御を設計した [59]．設計されたモデル予測制御は流れ場を層流化し，低次元モデルに基づく制御則よりも摩擦抗力を大幅に低減できることを示した．

このようにフルオーダモデルに基づく設計法では，正確なモデルを用いているために，高い性能を持つ制御則が得られる．しかし，フルオーダの制御則は高い性能を持つにも関わらず，実験などで実システムへと実装された例はない．実システムへと実装されない要因の一つは，フルオーダ制御則のオンラインでの計算コストの高さであると考えられる．フルオーダ制御則ではベースとなるモデルが複雑であるため

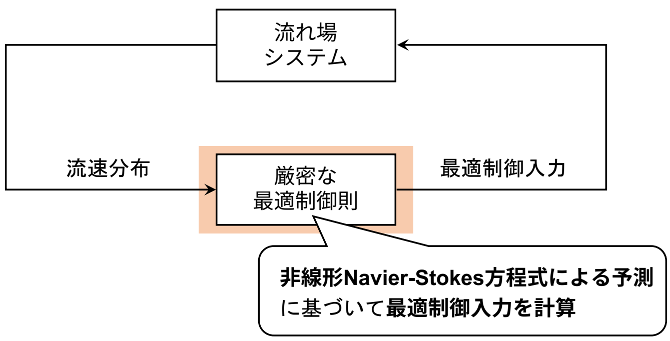


図 1.7: 非線形 Navier-Stokes 方程式に基づく流れ場のモデル予測制御

に，制御則も複雑となる．結果として，高性能な計算機を用いても制御入力の計算に時間がかかり，実時間での制御が困難となる．

1.2.4　制御則とモデルとの関係

以上の議論をまとめると，流れ場のモデルが複雑であるほど，設計される制御則の性能が高い傾向にある．しかしながら，モデルが複雑であると，制御則のオンラインでの計算コストが高くなる傾向にある．表 1.2 にモデルの複雑さに対する制御則の性能と計算コストの関係をまとめた．

非線形 Navier-Stokes 方程式に基づいて設計されるモデル予測制御は上述の傾向が顕著に現れる．すなわち，基礎モデルが精緻であるためにモデル予測制御は非線形な流れ場に対して高い性能を発揮するが，オンラインでの計算コストが非常に高い．計算コストが高いのは，各時刻において非線形 Navier-Stokes 方程式とその随伴方程式の数値積分を繰り返さなければならないからである．例えば円柱まわり流れに対するモデル予測制御では，一般的なワークステーションを用いても，各時刻あたりで 6 分もの計算時間がかかるという報告がある [60]．このように，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づいて設計されるモデル予測制御は計算コストが高く，実システムへ実装することが困難である．

表 1.2: モデルの複雑さに対する制御則の性能と計算コストの関係

モデルの複雑さ	制御則の性能	制御則の計算コスト
モデルフリー	低い	低い
↕	↕	↕
Navier-Stokes 方程式	高い	高い

1.3　本研究の概要

本研究では，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御に着目した制御則設計法を提案する．このモデル予測制御は，ダイナミクスの非線形性が強い流れに対して高い性能を発揮することを前節で述べた．発達した乱流や渦放出を伴う流れではダイナミクスの非線形性を無視することはできないので，モデル予測制御はこうした流れ場に対する有力な制御手法であると考えられる．しかしながら，現実のシステムへ実装するうえで二つの課題を抱えている．本研究では，これらの課題を解決する．

1.3.1　計算コストの低減

非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御はオンラインでの計算コストが非常に高い．これは最適制御入力を求めるために，非線形 Navier-Stokes 方程式を繰り返し数値積分する必要があるからである．制御則を実システムに実装するためには，制御サンプリング周期の間に制御入力の計算を終えなければならない．しかし，制御サンプリング周期の間に非線形 Navier-Stokes 方程式を反復的に解くことは困難である．このため，こうしたモデル予測制御のオンラインでの計算コストを低減しなければ，実システムに制御則を組み込むことができない．

非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御の先駆的な研究を行なった Bewley らは，モデル予測制御のオンラインでの計算コストの高さについて触れ，モデル予測制御の制御結果から計算コストの

低い実用的な制御戦略を見出す重要性について主張した [59]．しかしながら，これまでにモデル予測制御の制御結果から計算コストの低い制御則が導出された例はない．計算コストの低い制御則が導出されない要因の一つは，解析しなければならないデータの膨大さにあると考えられる．モデル予測制御の制御結果から計算コストの低い制御則を導出するためには，流速分布の時系列と制御入力の時系列の関係を解析しなければならない．しかし流速分布の時系列は膨大なデータ量を持ち，流速分布と制御入力の関係に関する知見を見出すことは容易ではない．

本研究では，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御の制御結果から計算コストの低い制御則を設計するための手法を提案する．提案手法の概要を図 1.8 に示す．提案手法では，膨大な量のデータに対しても適用可能な Gauss 過程回帰を用いることでモデル予測制御の最適制御則を近似する．近似によって得られる制御則は陽的な形式で書き表されるため，オンラインでの計算コストが低い．

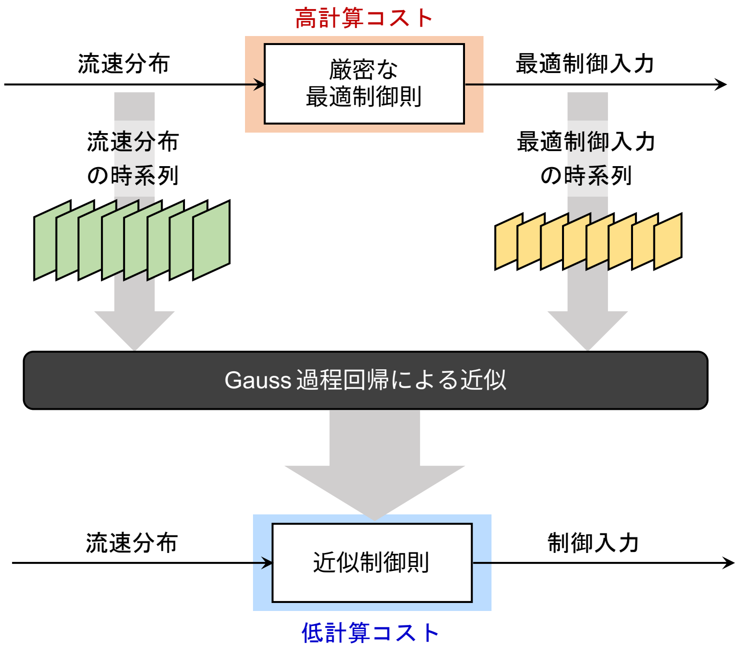


図 1.8: モデル予測制御の計算コスト低減のための提案手法

1.3.2　計測ノイズが存在するもとでの状態推定

モデル予測制御は状態フィードバック制御である．したがって，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御では，制御入力の計算に状態量である流速分布の情報がオンラインで必要となる．実験室系で流速分布を計測する手法として，粒子画像流速測定法 (PIV) がよく知られている．しかしながら，PIV によって実験室外で流速分布を計測することは一般的に困難である．このため，モデル予測制御を実装するためには，センサで計測される流れ場の局所的な物理量から流速分布を推定する必要性がある．

このとき，計測ノイズを考慮して流速分布を推定しなければならない．センサから得られる出力には計測ノイズが含まれる．計測ノイズは流れ場と制御則からなる閉ループ系を乱す要因となる．適切に計測ノイズに対処しなければ，系全体が意図しない挙動をとる恐れがある．

中村らは，モデル予測制御の最適制御則に使用するための流速分布を計測量から推定するために，あるオブザーバを用いた [61]．このオブザーバは，非線形 Navier-Stokes 方程式に計測量の誤差フィードバック項を加えることで構成される．このオブザーバと最適制御則からなる出力フィードバック制御則によっ

て，円柱の後方の流速が計測量である場合に，円柱まわり流れの渦放出が抑制されることが数値的に示された．しかし，計測ではノイズによる影響が不可避であるが，この研究では計測ノイズが存在しないもとでの制御問題を扱っている．

本研究では図 1.9 に示すように，最適制御則に与える流速分布を推定するために，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくアンサンブルカルマンフィルタ (EnKF) [62] を用いることを提案する．EnKF は確率フィルタであるため，計測ノイズのモデルを状態推定に取り入れることができ，計測ノイズが状態推定にもたらす影響を抑えることができる．このため，計測ノイズが存在しても流れ場の精度の良い状態推定ができると期待される．

厳密なモデルに基づく EnKF と最適制御則からなる出力フィードバック制御則もやはり計算コストが高いという課題を持つ．そこで，この出力フィードバック制御則をオンラインで直接使用することは想定せずに，オフラインで計算コストの低い制御則を設計するためのデータを生成するために用いる．生成されたデータから，厳密なモデルに基づく出力フィードバック制御則を模倣する低次元な制御則を導出する．この低次元な制御則は低次元モデルに基づいて設計されるが，提案手法は従来の低次元モデルに基づく設計法とは，モデルを導出する際に用いるデータが異なる．従来の低次元モデルに基づく設計法では，流れ場に開ループ制御を適用した際に得られる時系列や流れ場に低次元制御則を適用した際に得られる時系列が使用される．一方で本研究では，厳密なモデルに基づく出力フィードバック制御則を適用した際に得られる時系列を使用する．このような時系列から導出されるモデルは，厳密なモデルに基づく出力フィードバック制御則を模倣するという観点において，適切なモデルであると期待される．

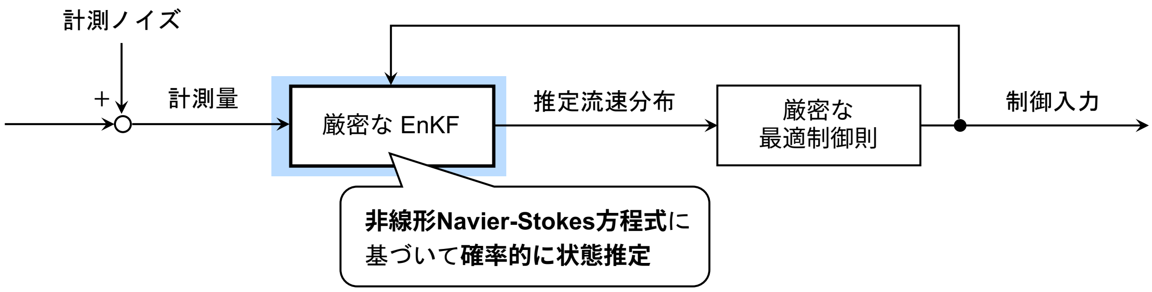


図 1.9: 提案する出力フィードバック制御則の構成

1.3.3　本論文の構成

本論文では，提案手法の有効性を検証するためのベンチマーク問題として，Reynolds 数 $Re = 100$ の円柱まわり流れの制御問題を扱う．$Re = 100$ の円柱まわり流れは，流れ場制御の研究でよくベンチマーク問題で扱われる [22, 44, 56, 63–65]．このため，ほかの制御手法による結果との比較が行いやすく，また流れ場の安定性などの特徴がよく知られている．$Re = 100$ の円柱まわり流れの平衡点は不安定であり，無制御のもとでは周期的な渦放出が生じる．ベンチマーク問題における制御目標は，流れ場の状態を平衡点に近づけ，渦放出を抑制することである．流れ場を制御するために，円柱の表面に設置された噴出口から出る噴流の強さを操作する．提案手法によって設計された制御則にしたがって噴流の強さを操作することで，状態を平衡点に近づけられることを確認する．

本論文の構成を図 1.10 に示す．第 2 章では，制御問題を設定し，円柱まわり流れの特性を確認する．第 3 章と第 4 章では状態フィードバック制御問題を扱う．つまり，流れ場の状態が完全に計測できるという仮定のもとで噴流の強さを決定する．第 3 章では，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づいてモデル予測

制御を設計し，モデル予測制御によって渦放出が抑制されることを確認する．第 4 章では，第 3 章で設計したモデル予測制御を Gauss 過程回帰によって近似する手法を提案する．そして，近似された制御則の設計点における性能やロバスト性を調査する．第 5 章と第 6 章では，計測ノイズが加えられた表面圧力を計測量とする場合の出力フィードバック制御問題を扱う．第 5 章では非線形 Navier-Stokes 方程式に基づいて設計された EnKF と最適制御則を合成することで，出力フィードバック制御則を構成する．この厳密モデルに基づく出力フィードバック制御則によって，計測ノイズが加えられた表面圧力の情報のみから，渦放出を抑制するような噴流の操作ができることを確認する．第 6 章では，厳密なモデルに基づく出力フィードバック制御則を模倣する低次元制御則を設計する手法を提案する．この手法によって設計された低次元制御則が，ベンチマーク問題において厳密な制御則とほぼ同程度の性能を持つことを数値実験で確認する．第 7 章で結論を述べる．

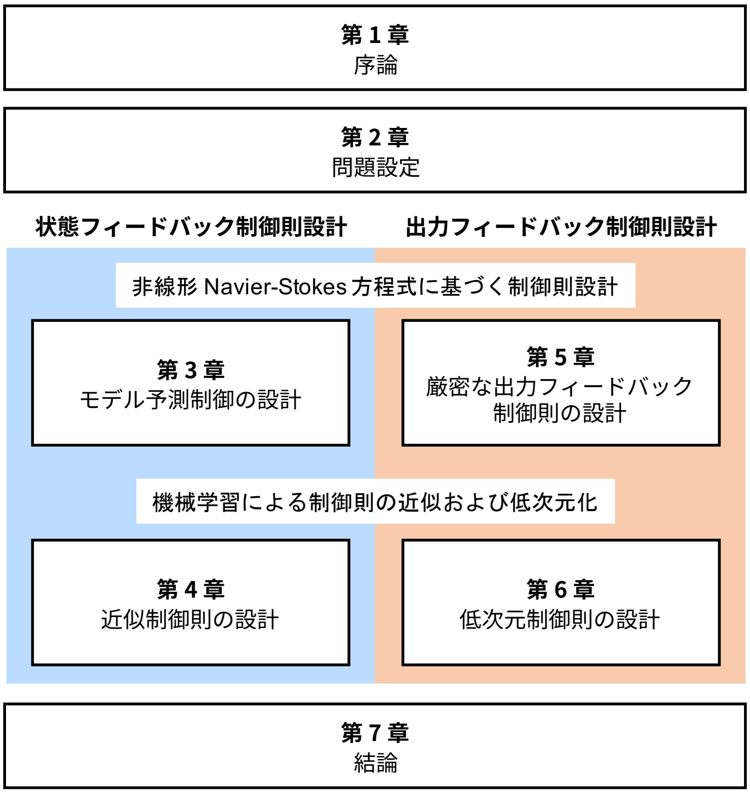


図 1.10:　本論文の構成

第 2 章

制御対象

この章では，ベンチマーク問題の設定と制御対象の数値解析を行う．まず，2.1 節で問題設定を行う．続いて，2.2 節で流れ場の数値計算手法について説明する．2.3 節では，Reynolds 数 $Re = 100$ での 2 次元円柱まわり流れの無制御時における数値実験を行い，流れ場の挙動を確認する．2.4 節では，流れ場の平衡点を数値的に求め，平衡点が不安定であることを確認する．

2.1 問題設定

図 2.1 に制御する流れ場の概略を示す．図 2.1(a) に示す円環 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内の非圧縮性 Newton 流体を考える．このとき，領域 Ω 内でつぎの Navier-Stokes 方程式と連続式が成り立つ．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top\right) = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u}, \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \tag{2.2}$$

ここで，$\mathbf{u}(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$ は流速ベクトル，$p(\xi, t) \in \mathbb{R}$ は圧力，$\xi \in \Omega$ は空間変数，$t \in [0, \infty)$ は時間変数である．これらの変数はすべて流入速度 u_∞ [m/s] と密度 ρ_∞ [kg/m^3]，円柱の直径 D_c [m] によって無次元化されている．このとき，流速 $\mathbf{u}$ と圧力 p, 空間変数 ξ, 時間変数 t はそれぞれ，代表値 u_∞ [m/s] と $\rho_\infty u_\infty^2$ [kg/(m $\cdot$ s^2)] D_c [m] D_c/u_∞ [s] で正規化されている．以降では，変数もしくは数値に単位が添えられていない場合には，上記の代表値で正規化された無次元量を表すこととする．Reynolds 数 $Re > 0$ は粘性係数 μ_∞ [kg $\cdot$ m/s] の逆数の無次元量であり，つぎの関係が成り立つ．

$$Re = \frac{\rho_\infty\, u_\infty\, D_\mathrm{c}}{\mu_\infty} \tag{2.3}$$

Reynolds 数 Re は非圧縮 Newton 流体の流れを特徴づけるパラメータである．圧力 p はつぎの圧力方程式によって定まる．

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot \nabla \cdot \left(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top\right) \quad \text{in } \Omega \times [0, \infty) \tag{2.4}$$

圧力方程式 (2.4) から p は $\mathbf{u}$ の従属変数であるので，流速 $\mathbf{u}$ だけをこのシステムの状態変数とみなすことができる．非圧縮流れにおいて圧力 p は定数部分に自由度を持つ．このような自由度を持つと圧力が一意に定まらないために，やや扱いにくい．このため，円柱の前縁において圧力が 0 であるとする．この仮定は流れ場のダイナミクスに影響を与えない．

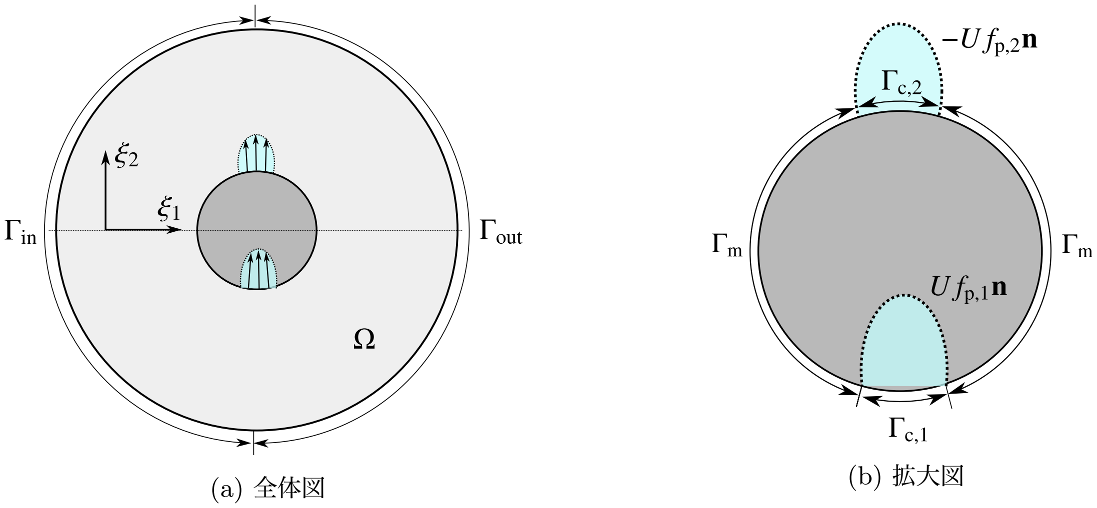


図 2.1: 流れ場の概略図

この流れ場では，流体が図 2.1(a) 中の外部境界の左部分 Γ_{in} から Ω に流入し，右部分 Γ_{out} から流出する．流入境界 Γ_{in} では次式で表されるように，流速ベクトルが一定であるとする．

$$\mathbf{u} = [1,\, 0]^{\mathsf{T}}, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{in}} \times [0, \infty). \tag{2.5}$$

境界 Γ_{in} において流速の大きさが 1 であるのは，流入速度によって流速が正規化されているからである．流出境界 Γ_{out} ではつぎの斉次ノイマン境界条件を課す．

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{out}} \times [0, \infty) \tag{2.6}$$

ここで，$\mathbf{n}(\xi) \in \mathbb{R}^2$ は境界上の外向きの単位法線ベクトルである．

円柱表面は制御のための噴流が噴出する部分 $\Gamma_{\mathrm{c},1}$, $\Gamma_{\mathrm{c},2} \subset \mathbb{R}^2$ とセンサが配置される部分 $\Gamma_{\mathrm{m}} \subset \mathbb{R}^2$ に分割される．境界 Γ_{m} では物体表面において一般的なつぎの境界条件を課す．

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{m}} \times [0, \infty) \tag{2.7}$$

一方，二つの噴出口 $\Gamma_{\mathrm{c},1}$ と $\Gamma_{\mathrm{c},2}$ ではつぎの条件を流速に課す．

$$\mathbf{u}(\xi,\, t) = U(t) f_{\mathrm{p},1}(\xi) \mathbf{n}(\xi), \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{c},1} \times [0, \infty) \tag{2.8}$$

$$\mathbf{u}(\xi,\, t) = -U(t) f_{\mathrm{p},2}(\xi) \mathbf{n}(\xi), \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{c},2} \times [0, \infty) \tag{2.9}$$

ここで，$U(t) \in \mathbb{R}$ は噴流の空間平均流速であり，$f_{\mathrm{p},1}(\xi)$, $f_{\mathrm{p},2}(\xi) \in \mathbb{R}$ は噴流の正規化された速度分布を表す．式 (2.8) と (2.9) は，二つの噴出口 $\Gamma_{\mathrm{c},1}$ と $\Gamma_{\mathrm{c},2}$ のうち一方の噴出口で流体が吐き出されているとき，もう一方では流体が吸い込まれることを意味する．そして，二つの噴出口における空間平均流速の大きさは等しく $U(t)$ である．

離散時間で制御入力を決定する制御則を設計するために，操作量 U をつぎのように変化させる．

$$\dot{U}(t) = V_n, \quad t_n < t < t_{n+1},\, n = 0, 1, \ldots \tag{2.10}$$

ここで，$t_n = n\Delta t$ はサンプリング時刻であり，一定の間隔 $\Delta t > 0$ をもつ．加速度 $V_n \in \mathbb{R}$ は制御入力として扱われ，サンプリング時刻ごとに制御則によって計算される．

境界 Γ_m では $N_y(\in\mathbb{N})$ 個のセンサが配置され，各地点で圧力が計測される．各地点 $\xi_{i,\mathrm{m}}\in\Gamma_\mathrm{m}$ においてサンプリング時刻 t_n で計測される値 $y_{i,n}\in\mathbb{R}$ はつぎのように表される．

$$y_{i,n}=p(\xi_{i,\mathrm{m}},t_n)+v_{i,n},\quad i=1,2,\dots,N_y,\, n=1,2,\dots \tag{2.11}$$

ここで，計測ノイズ $v_{i,n}\in\mathbb{R}$ は独立同分布で平均 0 かつ標準偏差 σ_m の Gauss 分布にしたがう．

初期条件は，適当な初期流速 $\mathbf{u}_0:\Omega\to\mathbb{R}^2$ によって，つぎのように与えられる．

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0,\quad \text{on } \Omega\times\{t=0\} \tag{2.12}$$

この制御問題における目標を，わずかな制御量で流れ場の状態を平衡点に近づけることと定める．流れ場の状態を平衡点に近づけることによって，円柱にかかる抗力を低減することができることが以降の数値解析で確かめられる．

以上のような問題設定は Min らの研究 [65] における問題設定と似ている．彼らは我々と同様に，円柱表面の圧力を観測出力，円柱表面の流速を制御入力とする円柱まわり流れの制御問題を考えた．そして，準最適制御則を設計し，その制御則によって流れ場の渦放出を抑制できることを数値実験で示した．我々の制御問題と彼らの制御問題の違いの一つは，噴流に関する制約の考慮である．Min らの研究では，円柱表面から噴出する噴流の質量流束に関する制約がない．一方で，本研究では円柱表面から噴出する二つの噴流の質量流束を正味で 0 とする制約を課している．この制約によって，渦放出の抑制のために，上下の噴出口で流体を吸い込み続けるという簡単な戦略をとることができなくなる．さらに，本研究では計測ノイズの考慮をしている．こうしたノイズ付きの計測や噴流の制約によって，制御器が流れ場の状態を平衡点に近づけることが困難になっている．

2.2　数値計算手法

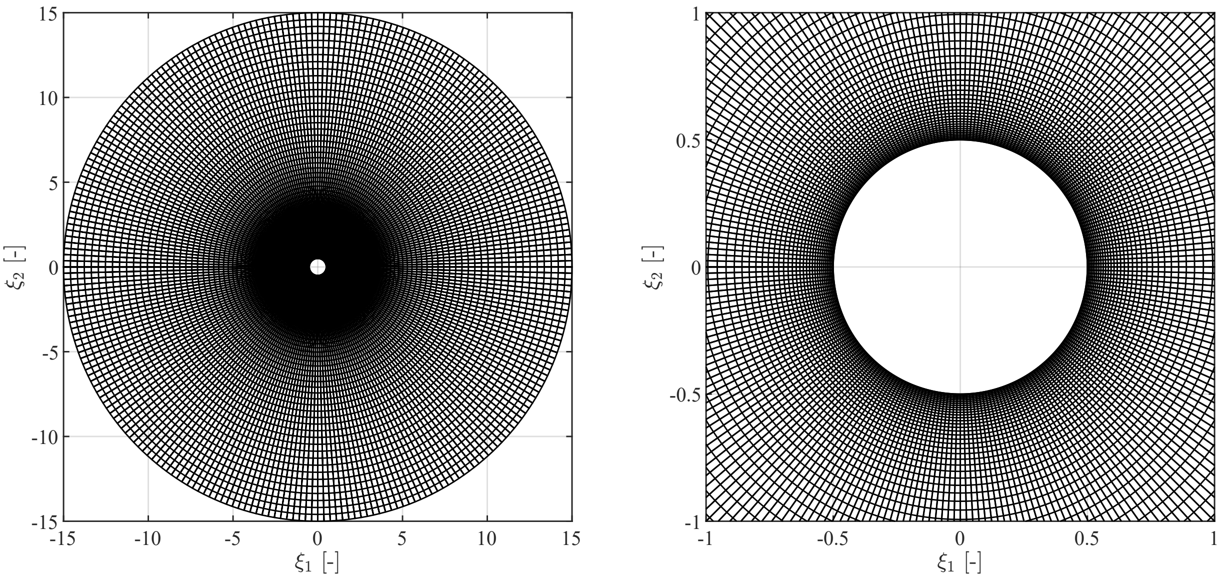
有限差分法によって流れ場の時間発展を計算する．計算格子は図 2.2 に示す O 型格子である．半径方向に 90 個，周方向に 256 個の格子がある．図に示すように回転方向には等間隔格子，半径方向には円柱に近づくにつれて徐々に格子幅が小さくなる不等間隔格子を用いている．不等間隔格子の生成には Vinokur による伸縮関数 [66] を利用した方法を用いた．この格子生成法では，両端の格子幅と格子数を指定する．指定したパラメータに無理がなければ，指定した両端の格子幅と大まかに一致し，格子幅が緩やかに変化する格子が得られる．本研究では，内円に接する格子の幅に 5.00×10^{-3}，外円に接する格子の幅に 4.00×10^{-1} を指定した．このとき，伸縮関数は関数 tanh と同じような形状を持つ．格子形成法によって得られた格子では，内円に接する格子の幅は 5.18×10^{-3} で，外円に接する格子の幅は 4.03×10^{-1} であった．不等間隔格子の生成法の詳細については，Appendix A を参照されたい．

円柱表面に接する格子の幅の目標値を 5.00×10^{-3} としたのは，藤井が提案する経験的な格子幅の決定法 [67, p. 180] に基づく．この方法では，平板流れの 99% 境界層厚さ $\delta_{99\%}$

$$\delta_{99\%}=\frac{5.0}{\sqrt{Re}} \tag{2.13}$$

の 1/50 以下に最小格子幅を設定する．本研究では，上式において $Re=100$ としたときの境界層厚さ $\delta_{99\%}=0.5$ の 1/100 の格子幅を設定した．生成された格子では，円柱表面の境界層が最も薄くなっている箇所においても，境界層内に 10 点以上の格子点が含まれることを確認している．

チェッカーボード様の誤差が生じるのを防ぐために，流速と圧力はスタッガード格子配置によって離散化する．また，連続式 (2.2) の誤差の時間発展を防ぐために，圧力方程式 (2.4) に連続式の誤差フィード



(a) 全体図　　(b) 拡大図

図 2.2: 計算格子

バック項を加えて圧力を求める．空間離散化は 2 次精度中心差分で行う．時間発展には低容量 3 次精度 Runge-Kutta 法 [68] を用いる．時間刻みは $\Delta t_{\mathrm{C}} = 0.015$ とした．低容量 3 次精度 Runge-Kutta 法は 3 段 Runge-Kutta 法に分類され，時間刻み $\Delta t_{\mathrm{C}} = 0.015$ を異なる幅を持つ三つの区間に分割して数値積分を行う．したがって，1 段あたりの時間刻みは平均で $\Delta t_{\mathrm{C}}/3 = 0.005$ である．

圧力方程式および Navier-Stokes 方程式の離散化方程式は陰形式となる．Navier-Stokes 方程式は SOR (Successive Over Relaxation) 法を用いて解く．圧力方程式は，円周方向に Fourier 変換した後，LU (Lower Upper) 分解により解く．

2.3　無制御時の数値実験

無制御 ($U \equiv 0$) 時の $Re = 100$ の円柱周り流れの挙動を数値実験で確認する．特に，適当な初期値を与えてから，十分に時間が経過したあとでの流れ場の応答を調べる．

図 2.3 にある時刻における渦度 $\nabla \times \mathbf{u}$ の分布を示す．青い塗りつぶしが時計回りの渦，赤い塗りつぶしは反時計回りの渦を表す．円柱の背後で複数の渦が非対称に並んでおり，渦放出が確認できる．図 2.4 に揚力係数を示した．渦放出のため，揚力係数が振動していることがわかる．この振動の振幅は 0.349 で代表時間幅 D_{C}/u_∞[s] で無次元化された周期は 5.86 である．この揚力振動の周期は渦放出の周期と一致する．したがって，振動の無次元化された周期の逆数である Strouhal 数は 0.171 である．ここで，Strouhal 数 St は流れの周波数 f_* [Hz] の無次元化量であり，つぎの関係が成り立つ．

$$St = \frac{u_\infty f_*}{D_{\mathrm{C}}} \tag{2.14}$$

また，図 2.5 に抗力係数の時間履歴を示す．抗力係数も渦放出のため振動しており，その周期は渦放出の周期の半分である．抗力係数の時間平均値は 1.38 である．

上述の Strouhal 数や抗力係数はほかの実験結果と大まかに一致している．Reynolds 数 100 の円柱流れでは，渦放出の Strouhal 数は 0.17，円柱の抗力係数は 1.4 程度であることが知られている [69]．また，2 次元円柱周り流れの数値実験では，例えば Strouhal 数 0.164，抗力係数 1.33 とする結果がある [64]．

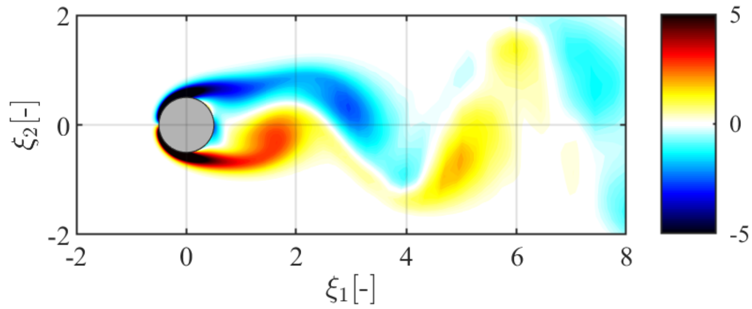


図 2.3: 無制御時の渦度分布

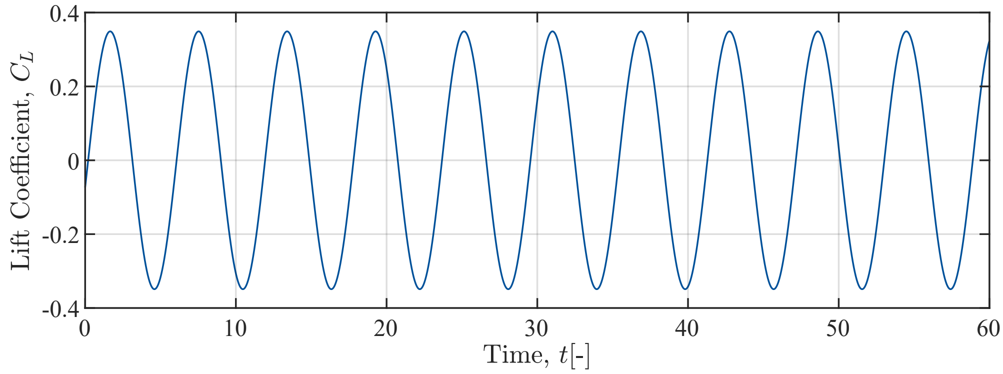


図 2.4: 無制御時の揚力係数の時間履歴

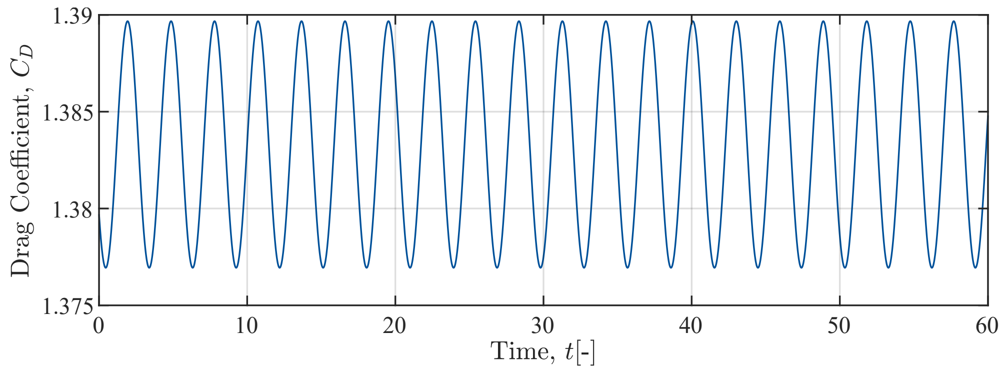


図 2.5: 無制御時の抗力係数の時間履歴

このように，本論文の数値実験で得られる無制御時の結果は，ほかの実験結果と適合しており，妥当な数値実験になっていると判断できる．

流れ場が周期的に変動していることを定量的に確認するために，つぎの指標を導入する．

$$R(t_1, t_2) = \|\mathbf{u}(\cdot, t_1) - \mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{L_2} \tag{2.15}$$

ここで，$\|\cdot\|_{L_2}$ は Ω 上で定義された L_2 ノルムであり，任意の関数 $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対して，次式のように定義される．

$$\|\mathbf{v}\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{v}^{\mathsf{T}}(\xi)\mathbf{v}(\xi) d\xi} \tag{2.16}$$

指標 $R(t_1, t_2)$ は，二つの時刻 t_1 と t_2 における状態の距離を表す．この指標を用いることで，ある時刻における解と別の時刻における解との距離を評価することができる．

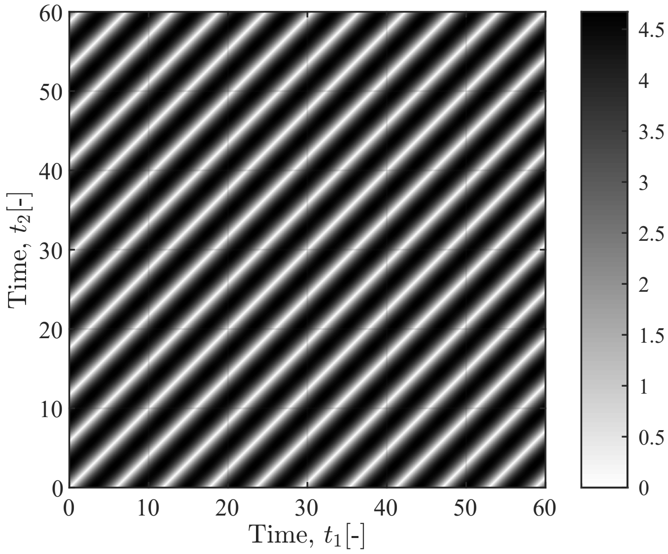


図 2.6:　無制御時の解軌道に対する指標 $R(t_1, t_2)$ の分布

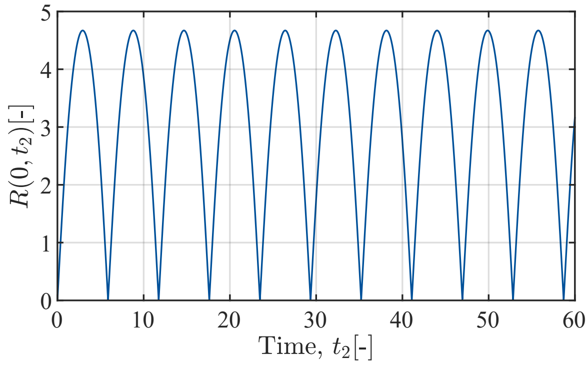


図 2.7:　指標 $R(0, t_2)$ の時間履歴

図 2.6 に指標 $R(t_1, t_2)$ の分布を示す．色の薄い箇所 (t_1, t_2) は二つの時刻における状態の距離が近いことを表し，色の濃い箇所は距離が遠いことを表す．図を俯瞰してみれば，色の薄い領域が直線的に一定の間隔で現れていることがわかる．これは周期的な運動の特徴である．いま，時刻 $t_1 = 0$ と固定し，直線 $t_1 = 0$ 上での指標 $R(t_1, t_2)$ の変動を見る．すると，図 2.7 に示すように，$R(t_1, t_2)$ は周期的に 0 に近づいていることがわかる．これは状態が初期状態 $\mathbf{u}(\cdot, 0)$ に周期的に近づいていることを意味する．同様の議論が各時刻 t_1 について成り立ち，状態がある時刻での状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_1)$ に周期的に接近する．そして，色の薄い領域が直線的に一定の間隔で現れていることから，状態が接近する周期は時刻 t_1 によらず一定である．

2.4　円柱まわり流れの平衡点

我々の制御問題の目標は，流れ場の状態を平衡点に近づけることであった．円柱まわり流れの平衡点は $Re > 47$ において，不安定であることが知られている．この節では，$Re = 100$ の流れ場の平衡点を数値的に求め，その平衡点が不安定であることを数値的に確認する．

流れ場の平衡点 $\mathbf{u}_\mathrm{e} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は，Navier-Stokes 方程式 (2.1) の流速の時間偏導関数を 0 とした $\mathbf{u}$ に関する方程式

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\mathsf{T}\right) + \nabla p - \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \tag{2.17}$$

の解である．多くの流れ場において，この方程式の解を解析的に求めることは困難である．そのため，流れ場の平衡点は一般には Newton-Raphson 法のような求解法を用いて数値的に求められる（例えば，文献 [36]）．本研究ではこのような求解法は使用せずに，円柱まわり流れの平衡点に関する特性を利用して，簡便な手法で平衡点を求める．

円柱まわり流れの平衡点は主流方向に対して対称な流速分布であることが経験的に知られている．そこで，つぎのように Navier-Stokes 方程式に流れ場の非対称性を修正するような誤差フィードバック項を付加する．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top\right) = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u} - \kappa_1(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathrm{rev}), \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \tag{2.18}$$

ここで，$\kappa_1 > 0$ は適当な正のパラメータであり，$\mathbf{u}_{\mathrm{rev}}(\xi,t) := [u_1([\xi_1,-\xi_2]^\top,t),-u_2([\xi_1,-\xi_2]^\top,t)]^\top$ は $\xi_2 = 0$ まわりで流速分布 $\mathbf{u}(\cdot,t)$ を反転させて得られる流速である．流れ場が上下対称であるとき，$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{rev}}$ であり，誤差フィードバック項は 0 である．Navier-Stokes 方程式 (2.18) を用いて流れ場を時間発展させることで，流れ場が上下対称の状態へと近づき，最終的に平衡点へと到達すると期待できる．

ゲイン $\kappa_1 = 1$ として上述の誤差フィードバックによって平衡点を求めた．数値的に求められた平衡点の方程式 (2.17) に関する誤差

$$\left\| \nabla \cdot \left(\mathbf{u}_{\mathrm{e}}\, \mathbf{u}_{\mathrm{e}}^\top \right) + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathrm{e}} \right\|_{L_2} \tag{2.19}$$

は 6.7×10^{-14} と，非常に小さな値である．このことから，数値的には妥当な平衡点が求められていると判断される．

図 2.8 に得られた平衡点 $\mathbf{u}_{\mathrm{e}}$ の渦度分布を示す．円柱の後背に 2 対の大きな上下対称の渦が観察される．またこの平衡点では，2.3 節で見た周期流れでの抗力係数よりも抗力係数が小さい．周期流れでの抗力係数の時間平均値は 1.38 であったが，定常流れ（平衡点）での抗力係数は 1.11 である．こうした低 Reynolds 数の円柱まわりの周期流れが定常流れへと遷移することで抗力係数が減少することは文献 [70] でも観察されている．$Re = 100$ の流れ場での，こうした抗力係数の低下の大部分は，圧力抗力の低下によるものである．周期流れでの抗力係数の時間平均値 1.38 のうち，圧力抗力による寄与が 1.03，摩擦抗力による寄与が 0.35 である．一方で，定常流れ（平衡点）での抗力係数 1.11 のうち，圧力抗力による寄与が 0.81，摩擦抗力による寄与が 0.30 である．平衡点と周期流れを比較すると，摩擦抗力にも差があるが，圧力抗力の差のほうが大きいことがわかる．そこで，円柱表面での圧力を確認する．図 2.9 には，青線で周期流れでの圧力係数の時間平均を，赤線で定常流れでの圧力係数で図示している．横軸の角度 θ [deg] は円柱表面上の位置を表し，$\theta = \pm 180$ [deg] で円柱の前縁，$\theta = 0$ [deg] で円柱の後縁を指す．定常

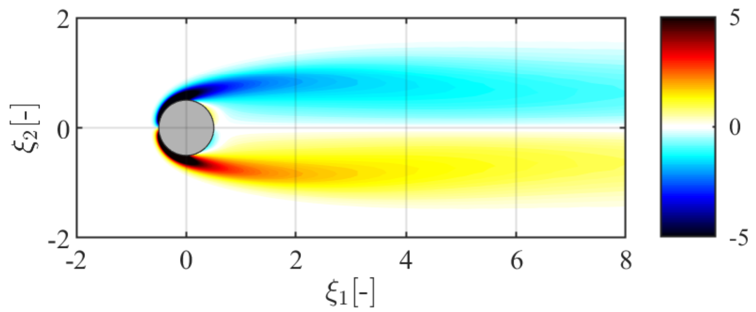


図 2.8:　平衡点の渦度分布

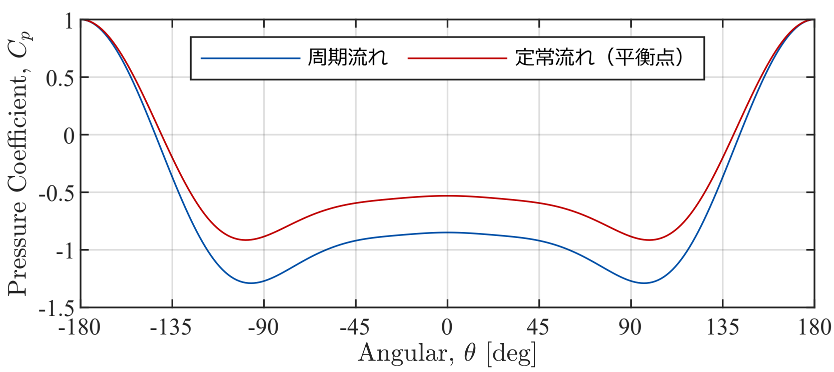


図 2.9:　円柱表面での圧力係数 C_p．青線は周期流れでの圧力係数の時間平均を，赤線は定常流れでの圧力係数を表す．横軸の角度 θ は円柱表面上の位置を表し，$\theta = \pm 180$ [deg] で円柱の前縁を指す．

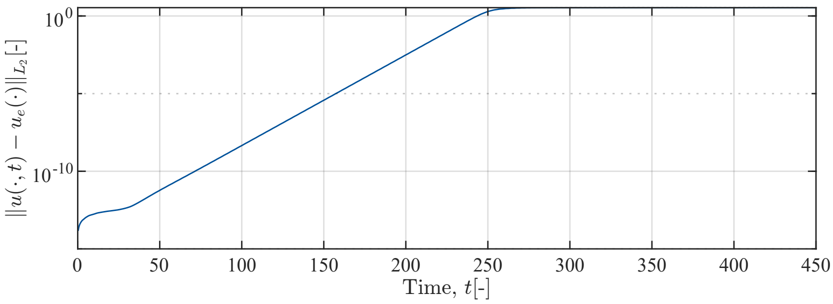


図 2.10:　平衡点を初期状態としたときの $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ の時間履歴

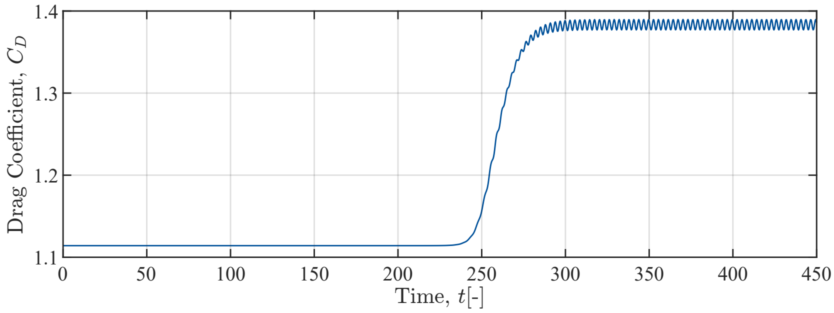


図 2.11:　平衡点を初期状態としたときの抗力係数の時間履歴

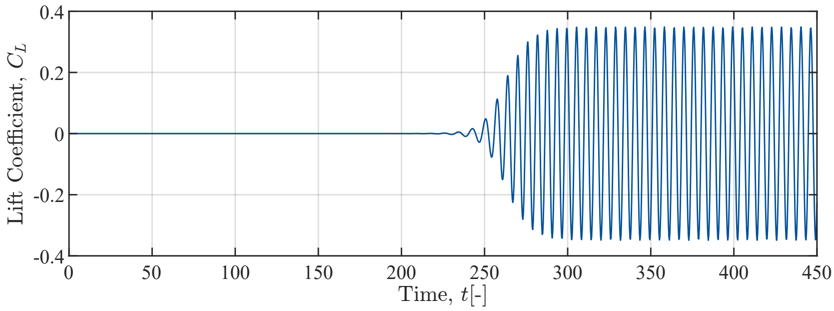


図 2.12:　平衡点を初期状態としたときの揚力係数の時間履歴

流れ（平衡点）では周期流れと比較して，前縁 ($\theta = \pm 180$ [deg]) から後縁 ($\theta = 0$ [deg]) にかけて圧力の低下が小さいことがわかる．このために，平衡点での圧力抗力のほうが小さい．以上のように，平衡点では，無制御時に安定して存在する周期流れと比較して抗力係数が小さい．したがって，制御によって流れ場を不安定平衡点に近づけることによって，円柱の抗力を低減することができると考えられる．

つぎに，平衡点の安定性を調べるために，数値的に求められた平衡点を初期値とする流れ場の数値実験を行う．数値的に求められた平衡点が式 (2.17) を満たしていれば，流れ場が変動することはない．しかし，実際には誤差があるので流れ場は変動する．

図 2.10 に状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ の時間履歴を示す．図から，ある時刻までは状態と平衡点との距離が指数関数的に増加していることがわかる．そして，時刻 $t = 250$ 程度から距離の増加が緩やかになり，最終的に距離は 3.43 を中心に振動する．このような挙動は非線形システムに特有のものである．線形システムにおいて平衡点が不安定であるならば，平衡点との距離は指数関数的に増加し続け，いずれ発散してしまう．Navier-Stokes 方程式の非線形な要素のおかげで，そのような状態の発散が妨げられていると考えられる．

数値的に求められた平衡点を初期値とした場合に，状態と平衡点との距離が増加することから，真の平衡点の吸引領域は非常に小さいか存在しないと推測される．この数値実験の結果だけでは平衡点が不安定

であるとは厳密に判定することはできないが，実用的には平衡点が不安定であると判断しても差し支えない．より厳密な安定性判別の方法として，Navier-Stokes 方程式を平衡点まわりで線形化した有限次元近似システムの A 行列を調べる方法がある．線形化システムの A 行列が実部が正の固有値を持つことがわかれば，安定性に関する定理 [71, 定理 4.9, p. 81] から，離散化した非線形 Navier-Stokes 方程式の平衡点は不安定であると判断することができる．この A 行列は大規模な疎行列となるため，一般的に用いられる固有値の数値解法を用いることはできない．このため，大規模な疎行列に特化した数値解法を使用する必要がある．円柱まわり流れの平衡点の安定性解析を行った研究 [72] では，Implicit Restart Arnoldi 法 [73] を用いることで，線形化した有限次元近似システムの A 行列の固有値を調べている．この研究では，$40 \leq Re \leq 75$ の領域での固有値が調べられており，臨界 Reynolds 数が 46.8 であり，それ以上の Reynolds 数では平衡点が不安定となることが示唆されている．

図 2.11 と 2.12 に，それぞれ抗力係数と揚力係数の時間履歴を示す．状態と平衡点との距離が増加するにつれて，抗力係数は増加し，揚力係数の振動は大きくなる．最終的な抗力係数と揚力係数の振動の振幅は，前節における周期運動する流れ場中のものと一致する．

2.5　まとめ

本章ではベンチマーク問題を設定した．ベンチマーク問題では円柱まわり流れを制御する．円柱から噴出される二つの噴流の平均流速を操作量として扱う．出力フィードバック制御問題では，計測ノイズが加えられた表面圧力を計測量とする．制御目標はわずかな操作量で流れ場の状態を平衡点に近づけることである．

$Re = 100$ の円柱まわり流れの平衡点が不安定であることを数値的に確認した．この不安定な平衡点に流れ場の状態を近づけることで，円柱の抗力を低減することができる．また，$Re = 100$ の円柱まわり流れでは無制御時において状態である流速分布が周期的に振動することを確認した．この周期的に振動する状態の集合は，第 4 章と第 6 章において流れ場の初期値集合として用いる．

$Re = 100$ の円柱まわり流れの平衡点は円柱の抗力係数が低いという好ましい特徴を持つ．しかし，一般の流れ場においては平衡点に近づけることによって抗力を減らすことができるとは限らない．このため，特に目標値制御の枠組みでは，目標値として好ましい特徴を持つような流速分布を定めることが重要である．

本研究の 2 次元の数値モデルで得られた $Re = 100$ で無制御時の抗力係数や Strouhal 数は，ほかの数値計算結果や実験結果と概ね一致することを確認した．実際の実験結果は当然，3 次元の円柱まわり流れの結果であるが，2 次元モデルでも妥当な指標が計算できるのは，$Re = 100$ 程度では 2 次元的な渦構造しか現れないためだと考えられる．$Re = 100$ 程度の領域における 2 次元数値モデルと 3 次元数値モデルで得られる抗力係数などの指標の一致性については，文献 [74] で報告されている．しかし，$Re > 190$ の領域では流れ方向の渦度を持つ 3 次元的な渦構造が現れるため [75]，2 次元モデルでは流れ場を正確に表現することができない．また，Re が 100 程度であっても噴流が噴出されている場合には，噴流によって 3 次元の渦構造が誘起される可能性がある．このため，本章での 2 次元の数式モデルおよび数値モデルにはモデル化誤差があることに留意しなければならない．次章以降で提案する制御則設計法を 2 次元モデルから 3 次元モデルで記述される流れ場へと拡張することは理論的には容易である．しかしながら，3 次元モデルでは数値計算に使用する格子が増加するために，制御則を導出するためのデータの取得に必要な計算量が増える．データ取得の計算量の課題については，第 7 で述べる．

第 3 章

流れ場に対するモデル予測制御

本章では，流れ場の厳密なモデルに対してモデル予測制御を設計する．そして数値実験でモデル予測制御によって，わずかな制御量で状態を平衡点に近づけるという制御目標が達成されることを確認する．まず，3.1 節において，有限次元システムに対するモデル予測制御について説明する．つづいて，3.2 節において，円柱まわり流れに対して，厳密なモデルに基づくモデル予測制御を設計する．3.3 節では，設計したモデル予測制御による流れ場制御の数値実験を行う．

3.1　有限次元システムに対するモデル予測制御

流れ場に対するモデル予測制御の適用は少し煩雑である．そこで，本節ではモデル予測制御の概念を理解するために，有限次元システムに対するモデル予測制御について説明する．

3.1.1　モデル予測制御の概要

つぎのような有限次元システムを考える．

$$\dot{x}(t) = f(x(t), V_n), \quad t \in (t_n, t_{n+1}), n = 0, 1, \dots \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0 \tag{3.2}$$

ここで，$t \in [0, \infty)$ は時刻，$x(t) \in \mathbb{R}^r$ は状態ベクトル，$V_n \in \mathbb{R}$ は制御入力，$x_0 \in \mathbb{R}^r$ は初期状態である．ベクトル値関数 $f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ は C^1 級であるとする．式 (3.1) は状態方程式で，式 (3.2) は初期条件を表す．このシステムは，各サンプリング時刻 $t_n = n\Delta t$ において，制御入力 V_n が決定されるサンプル値システムである．本論文で考慮する流れ場システムもサンプル値システムであることから，有限次元システムにおいてもこのようなサンプル値システムを考えている．

モデル予測制御では，ある時刻に与えられた状態から，モデルに基づいて状態遷移を予測する．いま，ある時刻 t_n において，状態 $x(t_n)$ が得られたとする．このとき，システム (3.1)–(3.2) と同じような形式を持つ，つぎのような仮想的なシステムを導入する．

$$\dot{\tilde{x}}(\tau) = f(\tilde{x}(\tau), \tilde{V}_n), \quad \tau \in (t_{\tilde{n}}, t_{\tilde{n}+1}), \tilde{n} = n, n+1, \dots, n + N_{\mathrm{p}} - 1 \tag{3.3}$$

$$\tilde{x}(t_n) = x(t_n) \tag{3.4}$$

ここで，$\tau \in [t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}]$，$x(\tau) \in \mathbb{R}^r$，$\tilde{V}_{\tilde{n}} \in \mathbb{R}$ はそれぞれ仮想システムにおける時刻，状態，制御入力である．正の整数 N_{p} は状態遷移を予測する区間 $[t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}]$ の幅を定める設計パラメータである．この仮想システムでは時刻 t_n における実際の状態 $x(t_n)$ が初期状態として与えられ，状態方程式 (3.3) にし

たがって，時刻 t_n から t_{n+N_p} まで状態が遷移する．ここで，仮想システムの状態方程式 (3.3) とシステムの状態方程式 (3.1) は同一である．したがって，ある制御入力列 $(V_{\tilde{n}})_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} = (\tilde{V}_{\tilde{n}})_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}$ のもとで，各時刻 $t = \tau \in [t_n,\, t_{n+N_\mathrm{p}}]$ において，$x(t) = \tilde{x}(\tau)$ が成り立つ．いいかえれば，同一の制御入力列 $(V_{\tilde{n}})_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}$ と $(\tilde{V}_{\tilde{n}})_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}$ をそれぞれシステム (3.1)–(3.2) と仮想システム (3.3)–(3.4) に印加したときの，システムの状態軌道 $(x(t) \mid t \in [t_n,\, t_{n+N_\mathrm{p}}])$ と仮想システムの状態軌道 $(\tilde{x}(\tau) \mid \tau \in [t_n,\, t_{n+N_\mathrm{p}}])$ は一致する．このように，制御器の内部で仮想システム (3.3)–(3.4) を導入することで，現時刻での状態 $x(t_n)$ から未来の状態遷移を予測することができる．

モデル予測制御では，上述のような状態遷移の予測に基づいて，システムが最も望ましい挙動をとるような制御入力列を求める．システムの挙動の望ましさは評価関数によって定量的に評価される．ここでは，つぎのような評価関数を考える．

$$J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n)) = \varphi_1(\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})) + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \varphi_2(\tilde{x}(\tau))d\tau + \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} \varphi_3(\tilde{V}_{\tilde{n}}) \tag{3.5}$$

ここで，$\tilde{\mathbf{V}} \coloneqq (\tilde{V}_{\tilde{n}})_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}$ であり，スカラ関数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ は C^1 級であるとする．式 (3.5) 中の状態 $\tilde{x}(\tau)$ は，初期状態 $x(t_n)$ と制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ のもとで，仮想システム (3.3)–(3.4) によって予測される値である．モデル予測制御ではこの評価関数が最も小さくなるような制御入力列を計算する．

評価関数は，制御目標に応じて任意に設定される．例えば，ある平衡点 $x_\mathrm{e} \in \mathbb{R}^r$ への状態遷移問題を考える．小さな制御量で平衡点へ状態を近づけたい場合には，つぎのように評価関数を設定することが考えられる．

$$J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n)) = \frac{q_\mathrm{T}}{2} \left\| \tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}}) - x_\mathrm{e} \right\|^2 + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \frac{q}{2} \left\| \tilde{x}(\tau) - x_\mathrm{e} \right\|^2 d\tau + \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} \frac{1}{2}\tilde{V}_{\tilde{n}}^2 \tag{3.6}$$

ここで，q_T, q は各項の重みを調整する正のスカラである．式 (3.6) の第 1 項は時刻 t_{n+N_p} における状態と平衡点との距離，第 2 項は区間 $[t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}]$ における状態と平衡点との距離，第 3 項は制御入力列の大きさを評価している．そして，式 (3.6) の各項は非負であるから，各項の上界は評価関数の値 $J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n))$ で与えられる．したがって，この評価関数を最小化するような制御入力列は，できるだけ小さな制御量で状態を平衡点に近づけるという望ましい挙動を達成することができると期待できる．

モデル予測制御では，評価関数を最小化する最適制御入力列のうち，最初の 1 要素のみを制御対象に印加する．すなわち，最適制御入力列を $\tilde{\mathbf{V}}^\mathrm{opt} = (\tilde{V}_{\tilde{n}}^\mathrm{opt})_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}$ と表すと，システム (3.1)–(3.2) に印加される制御入力は $V_n = \tilde{V}_n^\mathrm{opt}$ である．

このように，各時刻 t_n において，評価関数 $J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n))$ を最小化する最適制御入力の一部分が制御対象に印加される．評価関数は各時刻での状態 $x(t_n)$ に依存しているため，最小化によって得られるモデル予測制御の制御入力も状態に依存すると考えられる．したがって，モデル予測制御は通常では状態フィードバック制御である．

以上まとめると，モデル予測制御ではつぎのような手順でシステムを制御する．

1. 時刻 t_n, $(n = 0, 1, \dots)$ において状態 $x(t_n)$ を取得する．
2. 評価関数 $J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n))$ を最小化する最適制御入力列 $(\tilde{V}_{\tilde{n}}^\mathrm{opt})_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}$ を計算する．
3. 最適制御入力列の最初の 1 要素を制御対象に印加する．すなわち，$V_n = \tilde{V}_n^\mathrm{opt}$.

ステップ 2 がモデル予測制御の制御則に相当する部分である．一般に評価関数を最小化するような最適制御入力列を求めることはできないので，数値的に最適制御入力列を求める必要がある．

3.1.2 随伴方程式の導出

評価関数 (3.5) の式中の状態 $\tilde{x}(\tau)$ は，初期状態 $x(t_n)$ と制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ のもとで，仮想システム (3.3)–(3.4) によって予測される値であった．評価関数 (3.5) を最小化するような最適制御入力列は，つぎの最適化問題の解であるとも解釈できる．

$$\underset{\tilde{\mathbf{V}},\,\tilde{x}}{\text{minimize}} \left(\varphi_1(\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})) + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \varphi_2(\tilde{x}(\tau))d\tau + \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} \varphi_3(\tilde{V}_{\tilde{n}}) \right) \tag{3.7}$$

subject to

$$\dot{\tilde{x}}(\tau) = f(\tilde{x}(\tau), \tilde{V}_n), \quad \tau \in (t_{\tilde{n}},\, t_{\tilde{n}+1}),\, \tilde{n} = n, n+1, \ldots, n+N_\mathrm{p}-1 \tag{3.8}$$

$$\tilde{x}(t_n) = x(t_n) \tag{3.9}$$

この最適化問題では，システムの状態方程式 (3.8) および初期条件 (3.9) が拘束条件としてみなされる．このように状態方程式を拘束条件に持ち，最適制御入力列を求める問題は一般に最適制御問題と呼ばれる．

最適制御問題を解くための代表的な方法として，動的計画法がある．動的計画法では，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を解くことで，最適制御入力と状態との関係を求めることができる．このように，動的計画法は最適制御則が陽な形式で求められるという利点をもつ．しかし，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式は偏微分方程式であり，これを解くためには非常に多くの計算量を必要とする．高次元システムに対しては，この計算コストのために，動的計画法を適用することは困難である．特に本研究では流れ場に対してモデル予測制御を適用するが，数値計算のために流れ場の状態方程式を空間離散化すると非常に高次元のシステムとなる．そのため，動的計画法は流れ場の最適制御問題を解くためには扱いづらい．

そこで，本研究では最適制御問題を解くために勾配法を用いる．勾配法の枠組みでは，動的計画法のように陽に最適制御則を求めることはできず，各状態に対して逐次的に最適制御入力を計算しなければならない．このため，モデル予測制御の最適化手法として用いる場合には，勾配法には制御則のオンラインでの計算コストが高くなりやすいという欠点がある．しかし，時間を幾分かければ，各状態に対して最適制御入力を求めることができる．このように，動的計画法では扱いづらい高次元なシステムに対しても，勾配法によって最適制御入力を求めることができる．

勾配法を実装するためには，評価関数の制御入力列に関する勾配を求める必要がある．ところで，変分法を用いると評価関数が最適となるための必要条件を求めることができる．この変分法による必要条件の導出の際に，副次的に評価関数の各変数に関する勾配が導出される．そこで，この小節では，最適制御問題 (3.7)–(3.9) の必要条件を変分法による導出と並行して，評価関数の各変数に関する勾配を導出する．

変分法では Lagrange 関数の停留条件によって，最適化のための必要条件が導出される．最適制御問題 (3.7)–(3.9) に対する Lagrange 関数はつぎのように定義される．

$$\begin{aligned} L[\tilde{x}, \tilde{\mathbf{V}}] = {} & \varphi_1(t_{n+N_\mathrm{p}}) + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \varphi_2(\tilde{x}(\tau))d\tau + \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} \varphi_3(\tilde{V}_{\tilde{n}}) \\ & + \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} \int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}} \left(\dot{\tilde{x}}(\tau) - f(\tilde{x}(\tau), \tilde{V}_{\tilde{n}}) \right)^\mathsf{T} \lambda(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{3.10}$$

ここで，$\lambda : [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \to \mathbb{R}^r$ は随伴変数と呼ばれる関数である．式 (3.10) のように，最適制御問題の Lagrange 関数は評価関数に随伴変数と状態方程式との内積を足し合わせたものである．

式 (3.10) の $L[\tilde{x}, \tilde{u}]$ は，Lagrange 関数 L が状態 $\tilde{x}$ と制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ に関する汎関数であることを明示的に表している．ここでは，Lagrange 関数の第 1 変分を導入するために，状態と制御入力列に関する摂

動を考える．ある正数 ϵ に対して，状態 $\tilde{x}$ と制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ に対する摂動をそれぞれ，$\epsilon\,\delta\tilde{x}$ と $\epsilon\,\delta\tilde{\mathbf{V}}$ とおく．ただし，関数 $\delta\tilde{x}:[t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}]\to\mathbb{R}^r$ とベクトル $\delta\tilde{\mathbf{V}}\in\mathbb{R}^{N_\mathrm{p}}$ は，$\tilde{x}+\epsilon\,\delta\tilde{x}$ と $\tilde{\mathbf{V}}+\epsilon\,\delta\tilde{\mathbf{V}}$ が状態方程式 (3.8) と初期条件 (3.9) を満たすようにとられる．したがって，特に状態の摂動の初期値に関してつぎの条件が成り立つ．

$$\delta\tilde{x}(t_n) = 0 \tag{3.11}$$

摂動を用いて，Lagrange 関数の第 1 変分はつぎのように定義される．

$$\delta L[\phi,\delta\phi] \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(L[\phi+\epsilon\,\delta\phi]-L[\phi]\right) \tag{3.12}$$

ここで，$\phi \coloneqq (\tilde{x},\tilde{\mathbf{V}})$，$\delta\phi \coloneqq (\delta\tilde{x},\delta\tilde{\mathbf{V}})$ とした．システム (3.8)–(3.9) のもとで，状態 $\tilde{x}$ と制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ が評価関数 (3.5) を最小化するとき，つぎの停留条件が成り立つことが知られている．

$$\delta L[\phi,\delta\phi] = 0 \tag{3.13}$$

第 1 変分 $\delta L[\phi,\delta\phi]$ を具体的に計算することで，停留条件 (3.13) から有用な条件を導出することができる．このために，式 (3.10) を式 (3.13) に代入して，$\delta\tilde{x}$ と $\delta\tilde{u}$ に関してつぎのように整理する．

$$\begin{aligned}
\delta L[\phi,\delta\phi] = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Bigg[&\varphi_1\left(\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})+\epsilon\,\delta\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})\right)-\varphi_1\left(\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})\right)\\
&+\int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}}\varphi_2\left(\tilde{x}(\tau)+\epsilon\,\delta\tilde{x}(\tau)\right)-\varphi_2\left(\tilde{x}(\tau)\right)d\tau\\
&+\sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}\left\{\varphi_3(\tilde{V}_{\tilde{n}}+\epsilon\,\delta\tilde{V}_{\tilde{n}})-\varphi_3(\tilde{V}_{\tilde{n}})\right\}\\
&+\sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}}\left(\epsilon\,\delta\dot{\tilde{x}}(\tau)-f(\tilde{x}(\tau)+\epsilon\,\delta\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}}+\epsilon\,\delta\tilde{V}_{\tilde{n}})+f(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\right)^{\mathsf{T}}\lambda(\tau)d\tau\Bigg]\\
=&\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tilde{x}}\left(\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})\right)\delta\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})+\int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tilde{x}}\left(\tilde{x}(\tau)\right)\delta\tilde{x}(\tau)d\tau+\sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\tilde{V}}(\tilde{V}_{\tilde{n}})\delta\tilde{V}_{\tilde{n}}\\
&+\sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}}\left(\delta\dot{\tilde{x}}(\tau)-\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\delta\tilde{x}(\tau)-\frac{\partial f}{\partial\tilde{V}}(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\delta\tilde{V}_{\tilde{n}}\right)^{\mathsf{T}}\lambda(\tau)d\tau\\
=&\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tilde{x}}\left(\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})\right)\delta\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})+\int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tilde{x}}\left(\tilde{x}(\tau)\right)\delta\tilde{x}(\tau)d\tau+\sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\tilde{V}}(\tilde{V}_{\tilde{n}})\delta\tilde{V}_{\tilde{n}}\\
&+\sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}\Bigg\{\left[\delta\tilde{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\lambda(\tau)\right]_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}}-\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}}\Bigg(\delta\tilde{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\dot{\lambda}(\tau)+\delta\tilde{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\right)^{\mathsf{T}}(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\,\lambda(\tau)\\
&\qquad+\delta\tilde{V}_{\tilde{n}}^{\mathsf{T}}(\tau)\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{V}}\right)^{\mathsf{T}}(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\,\lambda(\tau)\Bigg)\Bigg\}d\tau\\
=&\sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}}\delta\tilde{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\left(-\dot{\lambda}(\tau)-\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\right)^{\mathsf{T}}(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\,\lambda(\tau)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}(\tau))\right)d\tau\\
&+\delta\tilde{x}^{\mathsf{T}}(t_{n+N_\mathrm{p}})\left(\lambda(t_{n+N_\mathrm{p}})+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tilde{x}}\right)^{\mathsf{T}}\left(\tilde{x}(t_{n+N_\mathrm{p}})\right)\right)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_{\mathrm{p}}-1}\delta\tilde{V}_{\tilde{n}}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial\tilde{V}}(\tilde{V}_{\tilde{n}})-\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{V}}\right)^{\mathsf{T}}(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\,\lambda(\tau)d\tau\right\} \tag{3.14}$$

と変形できる．ここで，第 2 式から第 3 式への変形では，合成関数の微分に関する公式を用いた．第 3 式から第 4 式への変形では，$\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}}\delta\dot{\tilde{x}}^{\mathsf{T}}(\tau)\,\lambda(\tau)d\tau$ に部分積分を用いた．第 4 式から第 5 式への変形では，初期条件 (3.11) を用いて式を整理した．ここで，関数 $\delta\tilde{x}$ とベクトル $\delta\tilde{\mathbf{V}}$ を任意にとることができると仮定すると，$\delta L[\phi,\delta\phi]=0$ となるためには，次式が成り立つ必要がある．

$$-\dot{\lambda}(\tau)-\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\right)^{\mathsf{T}}(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\,\lambda(\tau)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}(\tau))=0,\quad \tau\in(t_{\tilde{n}},\,t_{\tilde{n}+1}),$$
$$\tilde{n}=n,n+1,\ldots,n+N_{\mathrm{p}}-1 \tag{3.15}$$

$$\lambda(t_{n+N_{\mathrm{p}}})+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tilde{x}}\right)^{\mathsf{T}}\Big(\tilde{x}(t_{n+N_{\mathrm{p}}})\Big)=0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\tilde{V}}(\tilde{V}_{\tilde{n}})-\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{V}}\right)^{\mathsf{T}}(\tilde{x}(\tau),\tilde{V}_{\tilde{n}})\,\lambda(\tau)d\tau=0,\quad \tilde{n}=n,n+1,\ldots,n+N_{\mathrm{p}}-1 \tag{3.17}$$

式 (3.15) は随伴方程式，式 (3.16) は随伴変数に関する終端条件式，式 (3.17) は最適性の条件式と呼ばれる．また，式 (3.15)–(3.16) をまとめて随伴方程式ということもある．

以上まとめると，システム (3.8), (3.9) のもとで評価関数 (3.7) が最小となるための必要条件は，式 (3.15)–(3.17) が成り立つことである．より正確にいえば，$(\tilde{x},\tilde{\mathbf{V}})$ が最適制御問題 (3.7)–(3.9) の最適解であれば，ある $\lambda:[t_n,t_{n+N_{\mathrm{p}}}]\to\mathbb{R}^r$ が存在して，随伴方程式 (3.15)–(3.17) を満たす．

我々は随伴方程式の導出過程において，関数 $\delta\tilde{x}$ とベクトル $\delta\tilde{\mathbf{V}}$ を任意にとることができると仮定をした．制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ の許容領域は $\mathbb{R}^{N_{\mathrm{p}}}$ であるため，$\delta\tilde{\mathbf{V}}$ を任意にとることができるという仮定は妥当なものである．しかし，状態 $\tilde{x}$ は状態方程式によって拘束されるので，必ずしも $\delta\tilde{x}$ を任意にとることができない．例えば，システムが線形で不可制御であるとすると，不可制御部分空間の内部に $\delta\tilde{x}$ をとることができない．

実は $\delta\tilde{x}$ を任意にとることができなくても，解 $(\tilde{x},\tilde{\mathbf{V}})$ が最適であるとき，随伴方程式 (3.15)–(3.17) を満たすような λ が存在する．これは，大雑把にはつぎのように説明される．まず，式 (3.14) は区分的に C^1 級の任意の λ に対して成り立つ．つぎに，微分方程式 (3.15)–(3.16) を考える．最適解 $(\tilde{x},\tilde{\mathbf{V}})$ が与えられたもとで，式 (3.15) は線形微分方程式であり，その係数は区間 $[t_n,t_{n+N_{\mathrm{p}}}]$ において時刻 τ に関して区分的に連続である．したがって，微分方程式 (3.15)–(3.16) の解 λ が存在し，λ は区分的に C^1 級の関数である．この解 λ が最適性の条件式 (3.17) をも満たすことを示せばよい．最適性の条件式 (3.17) が満たされないと仮定する．このとき，Lagrange 関数の定義式 (3.10) と第 1 変分に関する式 (3.14) から，最適制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ よりも小さな評価関数値を与える制御入力列が存在することを示すことができる．これは矛盾しているため，最適解 $(\tilde{x},\tilde{\mathbf{V}})$ のもとで，微分方程式 (3.15)–(3.16) を満たすような λ は，最適性の条件式 (3.17) をも満たす．随伴方程式の厳密な導出については，文献 [76] を参照されたい．そこでは，一般的な変分問題に対して成り立つ諸定理を最適制御問題に適用することで随伴方程式が導出される．

解 $(\tilde{x},\tilde{\mathbf{V}})$ が拘束条件 (3.8)–(3.9) を満たし，ある $\lambda:[t_n,t_{n+N_{\mathrm{p}}}]\to\mathbb{R}^r$ が存在して，随伴方程式 (3.15)–(3.17) を満たすならば，$(\tilde{x},\tilde{\mathbf{V}})$ を停留解という．最適解であれば停留解でもあるので，停留解は最適解の候補と考えることができる．しかし，停留解は最適化のための必要条件を満たすが，最適解であるとは限らないし，局所最適解ですらない場合もある．停留解が局所最適解であるための十分条件を与えるために，Lagrange 関数の第 2 変分を利用する方法がある [77, pp. 107–111]．

上述のように，数値的に求めれれた停留解が最適解であることを別途示す必要がある．しかし，停留解

が最適解であることを示すことは一般的に容易ではない．そのため，これらを示すことなく，モデル予測制御を実装する場合も少なくない．本論文もこれにならい，流れ場に対するモデル予測制御を実装する．

最適性の条件式 (3.17) の左辺は，拘束条件が成り立つもとでの評価関数の $\tilde{V}_{\bar{n}}$ に関する勾配に相当する量になっている．勾配法では，最適性の条件式 (3.17) の左辺による評価を利用して，評価関数を逐次的に減少させる．

3.1.3　勾配法による数値最適化

勾配法は評価関数の勾配の情報を利用して，評価関数の最適化を行う数値解法である．勾配法は，双対共役法や Newton 法，準 Newton 法などさまざまな数値解法を含む．ここでは，最も簡単な勾配法である最急降下法を説明する．

モデル予測制御では各時刻において，ある固定された状態 $x(t_n)$ のもとで，評価関数 $J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n))$ が制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ に関して最小化される．そこで，以下では表記の便宜上，評価関数を $J(\tilde{\mathbf{V}})$ で表す．

最急降下法では，評価関数の勾配の情報を利用して逐次的に候補解を改善する．いま，反復回数が i のときの制御入力列の候補解 $\tilde{\mathbf{V}}^{(i)}$ と表す．このとき，つぎの候補解 $\tilde{\mathbf{V}}^{(i+1)}$ は次式のように計算される．

$$\tilde{\mathbf{V}}^{(i+1)} = \tilde{\mathbf{V}}^{(i)} - \alpha^{(i)} J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)}) \tag{3.18}$$

ここで，$J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{p}}}$ は評価関数 $J(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})$ の勾配である．また，$\alpha^{(i)}$ はある正数であり，次式を満たすように選択される．

$$J(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)} - \alpha^{(i)} J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})) < J(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)}) \tag{3.19}$$

式 (3.19) を満たすような正数 $\alpha^{(i)}$ が存在すれば，評価関数 $J(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})$ は反復回数 i に関して単調減少である．

以上より，最適制御問題 (3.7)–(3.9) に対する最急降下法のアルゴリズムはつぎのようにまとめられる．

1. $i = 0$．$\tilde{\mathbf{V}}^{(0)}$ を適当に定める．
2. 評価関数の勾配 $J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})$ を計算する．もし，$\|J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})\|$ が十分小さければ，反復を終了する．
3. 式 (3.19) を満たすような正数 $\alpha^{(i)}$ を求め，更新則 (3.18) にしたがって $\tilde{\mathbf{V}}^{(i+1)}$ を計算する．
4. $i = i + 1$ として，ステップ 2 へ戻る．

ステップ 2 のように最急降下法では評価関数の勾配が十分小さくなった時点で反復を終了する．

ステップ 3 における正数 $\alpha^{(i)}$ は，式 (3.19) よりもさらに厳しい Wolfe 条件を満たすように定められる場合が多い．探索方向ベクトルを $p^{(i)} := -J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})$ とおくと，Wolfe 条件はつぎのように書き表される．

$$J(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)} + \alpha^{(i)} p^{(i)}) < J(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)}) + \kappa_1 \alpha^{(i)} J_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\mathsf{T}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})\, p^{(i)} \tag{3.20}$$

$$J_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\mathsf{T}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)} + \alpha^{(i)} p^{(i)})\, p^{(i)} > \kappa_2 J_{\tilde{\mathbf{V}}}^{\mathsf{T}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})\, p^{(i)} \tag{3.21}$$

ここで, $\kappa_1 \in (0, 1)$ および $\kappa_2 \in (\kappa_1, 1)$ は定数パラメータである．ある最適化問題においては, Wolfe 条件を満たすように $\alpha^{(i)}$ を選ぶことで, 候補解列が最適解に収束することを示すことができる [78, pp. 37–41].

3.1.4　評価関数の勾配

最急降下法の最適制御問題 (3.7)–(3.9) への適用を考える．最急降下法を適用するためには，評価関数 $J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n))$ の勾配を計算する必要がある．この評価関数の勾配に相当するものは，最適性の条件式 (3.17) の左辺である．以下に評価関数の勾配の計算方法を記す．

1. 制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ のもとで区間 $[t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}]$ にわたって状態方程式 (3.8)–(3.9) を解くことで，状態 $\tilde{x}(\cdot; \tilde{\mathbf{V}})$ を求める．
2. 状態 $\tilde{x}(\cdot; \tilde{\mathbf{V}})$ と制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ のもとで区間 $[t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}]$ にわたって随伴方程式 (3.15)–(3.16) を解くことで，随伴変数 $\lambda(\cdot; \tilde{\mathbf{V}})$ を求める．
3. 制御入力列 $\tilde{\mathbf{V}}$ と状態 $\tilde{x}(\cdot; \tilde{\mathbf{V}})$，随伴変数 $\lambda(\cdot; \tilde{\mathbf{V}})$ のもとで，最適性の条件式 (3.17) の左辺を計算する．このように計算された最適性の条件式の左辺が評価関数 $J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n))$ の勾配である．

上記のような手順で計算される最適性の条件式 (3.17) の左辺を $J_{\tilde{V}_{\tilde{n}}}(\tilde{\mathbf{V}})$ とおく．そして，これを要素に持つベクトル $J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}) = [J_{\tilde{V}_n}(\tilde{\mathbf{V}}), \ldots, J_{\tilde{V}_{n+N_\mathrm{p}-1}}(\tilde{\mathbf{V}})]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N_\mathrm{p}}$ を構成する．

最急降下法では，$\|J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)})\|$ が十分小さくなることが反復終了の条件であった．最適制御問題において $J_{\tilde{\mathbf{V}}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(i)}) = 0$ であれば, 最適性の条件式 (3.17) が満たされる．このとき, $(\tilde{x}^{(i)}(\cdot; \tilde{\mathbf{V}}^{(i)}), \tilde{\mathbf{V}}^{(i)}, \lambda^{(i)}(\cdot; \tilde{\mathbf{V}}^{(i)}))$ は状態方程式 (3.8)–(3.9) および随伴方程式 (3.15)–(3.16) を満たすので，$(\tilde{x}^{(i)}(\cdot; \tilde{\mathbf{V}}^{(i)}), \tilde{\mathbf{V}}^{(i)})$ は停留解である．したがって，この最急降下法における反復が終了すれば，停留解に近い解が得られると期待できる．

3.2 円柱周り流れに対するモデル予測制御の設計

本論文における制御対象である円柱周りの流れにモデル予測制御を適用する．円柱周りの流れは，空間的に分布した要素からなる無限次元システムである．しかし，モデル予測制御の設計の基本的な考え方は有限次元システムに適用する場合と変わらない．すなわち，制御目標を達成するように評価関数を設計し，最適制御問題を定式化する．

なお，前節では制御則内部で想定しているシステムと実際のシステムが異なることを強調するために，上付きのチルダを用いて制御則内部と実際のシステムの変数を区別した．本節では変数表記の煩雑さを避けるためにこのような区別をしない．

3.2.1 評価関数の設定

我々の制御目標は，できるだけ小さな制御量で流れ場を平衡点に近づけることであった．そこで，つぎのような評価関数を設定する．

$$J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n)) = \frac{q_1}{2} \left\|\mathbf{u}(\cdot, t_{n+N_\mathrm{p}}) - \mathbf{u}_\mathrm{e}\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} U^2(\tau) d\tau + \frac{q_2}{2} \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} V_{\tilde{n}}^2 \tag{3.22}$$

ここで，$\mathbf{V} = [V_n, \ldots, V_{n+N_\mathrm{p}-1}]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N_\mathrm{p}}$ は最適化されるべき制御入力列で，$q_1, q_2 > 0$ は各項の重みを調整するパラメータである．評価関数 $J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ は，時刻 t_n において観測された状態が $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ であるときに，制御入力列 $\mathbf{V}$ のもとで予測される状態遷移 $(\mathbf{u}(\cdot, \tau) \mid \tau \in [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}])$ に基づいて評価される．モデル予測制御において評価関数 (3.22) の各項の果たす役割を説明する．まず，第 1 項における状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_{n+N_\mathrm{p}})$ は，時刻 t_n において観測された状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ から予測される時間 $N_\mathrm{p}\Delta t$ 後での状態を表す．また，Ω 上で定義された 2 変数の差の L_2 ノルムは 2 変数間の距離とみなすことができる．したがって第 1 項は，時刻 t_n からホライズン長さ $N_\mathrm{p}\Delta t$ だけ先の状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_{n+N_\mathrm{p}})$ と平衡点 $\mathbf{u}_\mathrm{e}$ との距離を表す．ゆえに，評価関数 (3.22) の最小化に基づくモデル予測制御では，第 1 項は $N_\mathrm{p}\Delta t$ だけ未来の状態を平衡点に近づける役割がある．第 2 項は区間 $[t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}]$ において放出される運動量に比例した無次元量を表す．これは，流体密度と噴流の噴出口の幅が一定であり，U が無次元化された噴流流速であったためである．したがってモデル予測制御では，第 2 項は噴流の運動量を抑える役割を持つ．第 3 項は区間 $[t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}]$

における噴流の加速度 $\dot{U}$ の大きさを測る．これは，式 (2.10) から制御入力 $V_{\tilde{n}}$ が区間 $[t_{\tilde{n}}, t_{\tilde{n}+1}]$ において噴流の加速度 $\dot{U}$ に一致するためである．以上から，評価関数 $J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ を最小化するような最適制御入力列は，できるだけ小さな運動量で噴流の急変を抑えながら，状態を平衡点に近づけることができると期待される．

流れ場に対するモデル予測制御では，つぎのような手順で制御入力が流れ場に印加される．

1. 時刻 t_n, $(n = 0, 1, \dots)$ において状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ を取得する．
2. 評価関数 $J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ を最小化する制御入力列 $(V_{\tilde{n}}^{\mathrm{opt}})_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1}$ を計算する．
3. 最適制御入力列の最初の 1 要素を流れ場に印加する．すなわち，$V_n = V_n^{\mathrm{opt}}$．

モデル予測制御において制御対象に印加される制御入力は，評価関数 $J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ を最小化する制御入力列の最初の 1 要素である．評価関数 $J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ は状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ に依存するため，この評価関数を最小化する制御入力列もまた状態依存である．したがって，流れ場に対するモデル予測制御で決定される制御入力は状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ に依存すると考えられる．

3.2.2　最適制御問題

流れ場に対するモデル予測制御における最適制御問題を定式化する．評価関数 (3.22) の状態 $\mathbf{u}(\cdot, \tau)$ は，初期状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ と制御入力列 $\mathbf{V}$ のもとで，予測される値であった．予測に用いられるモデルは前章の式 (2.1)–(2.10) である．したがって，評価関数 (3.22) を最小化する制御入力列は，つぎの最適制御問題の解であると解釈される．

$$\underset{\mathbf{V}, \mathbf{u}, p, U}{\mathrm{minimize}}\, J[\mathbf{V}, \mathbf{u}, p, U] \tag{3.23}$$

subject to

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\top\right) = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u}, \quad \text{in } \Omega \times (t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}) \tag{3.24}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega \times (t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}) \tag{3.25}$$

$$\mathbf{u} = [1,\, 0]^\mathsf{T}, \quad \text{on } \Gamma_\mathrm{in} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.26}$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \Gamma_\mathrm{out} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.27}$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \Gamma_\mathrm{m} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.28}$$

$$\mathbf{u} = U\, f_{\mathrm{p},1}\mathbf{n}, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{c},1} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}], \tag{3.29}$$

$$\mathbf{u} = -U\, f_{\mathrm{p},2}\mathbf{n}, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{c},2} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.30}$$

$$\dot{U} = V_n, \quad t_n < \tau < t_{n+1},\, n = 0, 1, \dots \tag{3.31}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\cdot, t_n), \quad \text{on } \Omega \times \{\tau = t_n\} \tag{3.32}$$

ここで，$J[\mathbf{V}, \mathbf{u}, p, U]$ は評価関数 $J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ と同一のものであるが，$\mathbf{V}$ と $\mathbf{u}$，p，U の汎関数であることを強調するために，このように表記した．圧力方程式 (2.4) が陽に拘束条件として書き表されていないのは，ほかの拘束条件から求められる冗長な方程式であるためである．

最適制御問題 (3.23)–(3.32) は非線形偏微分方程式を拘束条件に含む最適化問題である．この最適制御問題の最適解を解析的に求めることは困難である．しかしながら，停留解を数値的に求めることはできる．

3.2.3 随伴方程式の導出

変分法を用いて，流れ場に対する最適制御問題の随伴方程式を導出する．随伴方程式の導出過程で求められる，Lagrange 関数の制御入力に関する偏導関数は数値最適化に利用される．

流れ場に対する最適制御問題 (3.23)–(3.32) の Lagrange 関数はつぎのように定義される．

$$L[\mathbf{V}, \mathbf{u}, p, U] \coloneqq J[\mathbf{V}, \mathbf{u}, p, U] + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \int_\Omega \left[\left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}\, \mathbf{u}^\top \right) + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right\}^\mathsf{T} \mathbf{u}_\mathrm{a} + \nabla \cdot \mathbf{u}\, p_a \right] d\xi\, d\tau + \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{U} - V_{\tilde{n}})\, U_\mathrm{a} d\tau \tag{3.33}$$

ここで，$\mathbf{u}_\mathrm{a} : \Omega \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \to \mathbb{R}^2$ と $p_a : \Omega \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \to \mathbb{R}$，$U_\mathrm{a} : [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \to \mathbb{R}$ は随伴変数である．Lagrange 関数 (3.33) は，評価関数に Navier-Stokes 方程式と連続式，噴流速度の時間発展式の定数倍を足し合わせた形式をとっている．

Lagrange 関数 $L[\mathbf{V}, \mathbf{u}, p, U]$ の第 1 変分を導入するために，各変数の摂動を考える．ある正数 ϵ に対して，変数 $\mathbf{V}, \mathbf{u}, p, U$ のそれぞれの摂動を $\epsilon\, \delta\mathbf{V}, \epsilon\, \delta\mathbf{u}, \epsilon\, \delta p, \epsilon\, \delta U$ とおく．ただし，各変数 $\delta\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_\mathrm{p}}$, $\delta\mathbf{u} : \Omega \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \to \mathbb{R}^2$, $\delta p : \Omega \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \to \mathbb{R}$, $\delta U : [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \to \mathbb{R}$ は拘束条件 (3.24)–(3.32) を満たすようにとられる．したがって，これらの変数に関して，特につぎの境界条件が成り立つ．

$$\delta\mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \Gamma_\mathrm{in} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.34}$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\, \delta\mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \Gamma_\mathrm{out} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.35}$$

$$\delta\mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \Gamma_\mathrm{m} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.36}$$

$$\delta\mathbf{u} = \delta U\, f_{\mathrm{p},1} \mathbf{n}, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{c},1} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.37}$$

$$\delta\mathbf{u} = -\delta U\, f_{\mathrm{p},2} \mathbf{n}, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{c},2} \times [t_n, t_{n+N_\mathrm{p}}] \tag{3.38}$$

$$\delta\mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \Omega \times \{\tau = t_n\} \tag{3.39}$$

これらの摂動を用いて，Lagrange 関数の第 1 変分 $\delta L[\phi, \delta\phi]$ はつぎのように定義される．

$$\delta L[\phi, \delta\phi] \coloneqq \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(L[\phi + \epsilon\, \delta\phi] - L[\phi] \right) \tag{3.40}$$

ここで，表記の簡略化のために，$\phi \coloneqq (\mathbf{V}, \mathbf{u}, p, U)$, $\delta\phi \coloneqq (\delta\mathbf{V}, \delta\mathbf{u}, \delta p, \delta U)$ とおいた．有限次元システムの最適制御問題に対して Lagrange 関数の第 1 変分を導出したときと同様に $\delta L[\phi, \delta\phi]$ を計算する．式 (3.40) に (3.33) を代入して，境界条件 (3.34)–(3.39) や部分積分の公式を利用して整理すると次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\delta L[\phi, \delta\phi] \\
&= - \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \int_\Omega \left\{ \delta\mathbf{u}^\mathsf{T} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{a}}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \left(\nabla \mathbf{u}_\mathrm{a} + \nabla \mathbf{u}_\mathrm{a}^\mathsf{T} \right) + \nabla p_\mathrm{a} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_\mathrm{a} \right) + \delta p \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_\mathrm{a} \right) \right\} d\xi\, d\tau \\
&\quad - \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \int_{\partial\Omega - \Gamma_\mathrm{out}} \frac{1}{Re} (\mathbf{n} \cdot \nabla \delta\mathbf{u})^\mathsf{T}\, \mathbf{u}_\mathrm{a}\, d\xi\, d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \int_{\partial\Omega} \delta p \left(\mathbf{u}_\mathrm{a}^\mathsf{T} \mathbf{n} \right) d\xi\, d\tau \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \int_{\Gamma_\mathrm{out}} \delta\mathbf{u}^\mathsf{T} \left\{ \mathbf{u}_\mathrm{a}\, \mathbf{u}^\mathsf{T} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}_\mathrm{a} + \left(\mathbf{u}_\mathrm{a}^\mathsf{T} \mathbf{u} + p_\mathrm{a} \right) I_2 \right\} \mathbf{n}\, d\xi\, d\tau \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \delta U \left[\int_{\Gamma_{\mathrm{c},1}} f_{\mathrm{p},1} \left\{ 2U\, f_{\mathrm{p},1} \mathbf{u}_\mathrm{a}^\mathsf{T} \mathbf{n} + \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_\mathrm{a}\, \mathbf{n} + p_\mathrm{a} \right\} d\xi \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad - \int_{\Gamma_{\mathrm{c},2}} f_{\mathrm{p},2} \left\{ -2U\, f_{\mathrm{p},2} \mathbf{u}_{\mathrm{a}}^{\mathsf{T}} \mathbf{n} + \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{n} + p_{\mathrm{a}} \right\} d\xi - (\dot{U}_{\mathrm{a}} - U) \Bigg] d\tau \\
&+ \int_{\Omega} \left[\delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \left\{ \mathbf{u}_{\mathrm{a}} + q_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}) \right\} \right]_{\tau = t_{n+N_{\mathrm{p}}}} d\xi + \left[\delta U\, U_{\mathrm{a}} \right]_{\tau = t_{n+N_{\mathrm{p}}}} \\
&+ \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_{\mathrm{p}}-1} \delta V_{\tilde{n}} \left(q_1 V_{\tilde{n}} - \int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}} U_{\mathrm{a}}\, d\tau \right)
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

式 (3.41) の詳細な式変形については Appendix B を参照されたい．

組 ϕ が最適制御問題の最適解であるとき，停留条件

$$
\delta L[\phi, \delta\phi] = 0 \tag{3.42}
$$

が各 $\delta\phi$ に対して成り立つ．いま，$\delta\phi$ を任意にとり得ると仮定すると，ϕ が最適解であるためには次式が成り立つ必要がある．

$$
-\left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{a}}}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \left(\nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}}^{\mathsf{T}} \right) + \nabla p_{\mathrm{a}} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \right) = 0, \quad \text{in } \Omega \times (t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}) \tag{3.43}
$$

$$
-\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{a}} = 0, \quad \text{in } \Omega \times [t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}] \tag{3.44}
$$

$$
\mathbf{u}_{\mathrm{a}} = 0, \quad \text{on } (\partial\Omega - \Gamma_{\mathrm{out}}) \times [t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}] \tag{3.45}
$$

$$
\left\{ \mathbf{u}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{u}^{\mathsf{T}} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}} + (\mathbf{u}_{\mathrm{a}}^{\mathsf{T}} \mathbf{u} + p_{\mathrm{a}})\, I_2 \right\} \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{out}} \times [t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}] \tag{3.46}
$$

$$
\mathbf{u}_{\mathrm{a}}^{\mathsf{T}} \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{out}} \times [t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}] \tag{3.47}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\dot{U}_{\mathrm{a}} + U + \int_{\Gamma_{\mathrm{c},1}} f_{\mathrm{p},1} \left(\frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{n} + p_{\mathrm{a}} \right) d\xi \\
&\qquad - \int_{\Gamma_{\mathrm{c},2}} f_{\mathrm{p},2} \left(\frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{n} + p_{\mathrm{a}} \right) d\xi = 0, \quad \text{on } (t_n,\, t_{n+N_{\mathrm{p}}})
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

$$
\mathbf{u}_{\mathrm{a}} + q_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}) = 0, \quad \text{on } \Omega \times \{ \tau = t_{n+N_{\mathrm{p}}} \} \tag{3.49}
$$

$$
U_{\mathrm{a}} = 0, \quad \text{at } \tau = t_{n+N_{\mathrm{p}}} \tag{3.50}
$$

$$
q_2 V_{\tilde{n}} - \int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}} U_{\mathrm{a}}\, d\tau = 0, \quad \tilde{n} = n,\, \ldots,\, n + N_{\mathrm{p}} - 1 \tag{3.51}
$$

式 (3.43) は随伴変数 $\mathbf{u}_{\mathrm{a}}$ に関する時間発展方程式，式 (3.44) は連続式，式 (3.45)–(3.47) は境界条件，式 (3.49) は終端条件である．式 (3.48) は随伴変数 U_{a} に関する時間発展方程式，式 (3.50) は終端条件である．随伴変数 p_{a} に関する時間発展方程式は陽には現れず，流れ場における圧力 p と同様の役割を果たすものと考えられる．式 (3.51) は最適性の条件式であり，この式の右辺が制約のもとでの評価関数の勾配に相当するものである．

3.2.4　評価関数の勾配

変分法を適用するために評価関数 $J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ の勾配を数値的に計算する．流れ場に対する評価関数の勾配は，有限次元システムにおける計算と同様に計算される．つぎのような手順で評価関数 $J(\mathbf{V}, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ の勾配が計算される．

1. 制御入力列 $\mathbf{V}$ のもとで状態方程式 (3.24)–(3.32) を解くことで，状態 $\mathbf{u}(\cdot, \cdot; \mathbf{V}) : \Omega \times [t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}] \to \mathbb{R}^2$ を求める．

2. 状態 $\mathbf{u}(\cdot, \cdot; \mathbf{V})$ と制御入力列 $\mathbf{V}$ のもとで随伴方程式 (3.43)–(3.50) を解くことで，随伴変数 $\mathbf{u}_{\mathrm{a}}(\cdot, \cdot; \mathbf{V}) : \Omega \times [t_n, t_{n+N_{\mathrm{p}}}] \to \mathbb{R}^2$ を求める．
3. 制御入力列 $\mathbf{V}$ と状態 $\mathbf{u}(\cdot, \cdot; \mathbf{V})$，随伴変数 $\mathbf{u}_{\mathrm{a}}(\cdot, \cdot; \mathbf{V})$ のもとで，最適性の条件式 (3.51) の左辺 $J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{p}}}$ を計算する．このように計算された $J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V})$ が評価関数 $J(\tilde{\mathbf{V}}, x(t_n))$ の勾配である．

ステップ 1 と 2 の状態方程式と随伴方程式の数値積分には，前章で述べた非圧縮性流れに対する数値解法を用いる．

3.2.5　流れ場に対する最適制御問題の数値解法

前節では最急勾配法を説明した．最急勾配法では候補解列の最適解への収束が遅いことが知られている．流れ場に対する最適制御問題では評価関数の勾配の計算に要する計算コストが高く，収束速度の遅い最急降下法を適用することはあまり適切ではない．そこで，流れ場に対する最適制御問題の数値最適化には準 Newton 法を使用する．

連続的 2 階微分可能な凸関数の最適化問題において，最急降下法では候補解列が最適解に 1 次収束するが，準 Newton 法では最適解に超 1 次収束することが知られている [78, pp. 156–160]．したがって，準 Newton 法を用いることで，最急降下法よりも速く最適解ないし停留解を求められると期待される．なお，Newton 法では候補解列が最適解に 2 次収束するため，準 Newton 法の収束速度は Newton 法のそれと比べて劣る．しかしながら，準 Newton 法では評価関数の Hesse 行列を直接計算する必要がないという利点を持つ．Newton 法では評価関数の Hesse 行列の計算が必要になる．Navier-Stokes 方程式などの制約が成り立つもとで，評価関数の Hesse 行列を計算することは困難である．

準 Newton 法では，評価関数の勾配と Hesse 行列の逆行列の推定値に基づいて候補解を更新する．反復回数が i のときの制御入力列の候補解を $\mathbf{V}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{p}}}$，Hesse 行列の逆行列の推定値を $H^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{p}} \times N_{\mathrm{p}}}$ とおく．このとき，準 Newton 法では，つぎの反復 $i+1$ での制御入力列の候補解を次式のように定める．

$$\mathbf{V}^{(i+1)} = \mathbf{V}^{(i)} - \alpha^{(i)} H^{(i)} J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i)}) \tag{3.52}$$

ただし，$\alpha^{(i)}$ はつぎの条件が成り立つように決められる．

$$J(\mathbf{V}^{(i)} - \alpha^{(i)} H^{(i)} J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i)})) < J(\mathbf{V}^{(i)}) \tag{3.53}$$

ここで，モデル予測制御の各時刻 t_n の最適化において $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ は固定であるため，評価関数の引数から $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ を省略している．式 (3.52) は，$H^{(i)}$ が Hesse 行列の逆行列に一致すれば，Newton 法の候補解の更新則と一致する．式 (3.53) を満たすような $\alpha^{(i)}$ が存在すれば，$J(\mathbf{V}^{(i)})$ は i に関して単調減少となる．特に，$H^{(i)}$ が正定であれば，式 (3.53) を満たすような $\alpha^{(i)}$ の存在を保証できる．

準 Newton 法では，評価関数の勾配に基づいて Hesse 行列の逆行列を推定する．Hesse 行列の逆行列の推定には Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) 則を用いる．いま，$\delta \mathbf{V}_i \coloneqq \mathbf{V}^{(i+1)} - \mathbf{V}^{(i)}$，$\delta J_{\mathbf{V},\, i} \coloneqq J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i+1)}) - J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i)})$ とおくと，BFGS 則はつぎのように書き表される．

$$H^{(i+1)} = \left(I_{N_{\mathrm{p}}} - \frac{\delta J_{\mathbf{V},\, i}\, \delta \mathbf{V}_i^{\mathsf{T}}}{\delta \mathbf{V}_i^{\mathsf{T}}\, \delta J_{\mathbf{V},\, i}} \right)^{\mathsf{T}} H^{(i)} \left(I_{N_{\mathrm{p}}} - \frac{\delta J_{\mathbf{V},\, i}\, \delta \mathbf{V}_i^{\mathsf{T}}}{\delta \mathbf{V}_i^{\mathsf{T}}\, \delta J_{\mathbf{V},\, i}} \right) + \frac{\delta \mathbf{V}_i^{\mathsf{T}}\, \delta \mathbf{V}_i^{\mathsf{T}}}{\delta \mathbf{V}_i^{\mathsf{T}}\, \delta J_{\mathbf{V},\, i}} \tag{3.54}$$

BFGS 則では，$\alpha^{(i)}$ が Wolfe 条件を満たすとき，$H^{(i)}$ が正定であれば $H^{(i+1)}$ もまた正定である．そこで，各 i に対して $H^{(i)}$ の正定性を保つために，$\alpha^{(i)}$ が Wolfe 条件を満たす場合には BFGS 則 (3.54) で $H^{(i+1)}$ を計算し，Wolfe 条件を満たさない場合には $H^{(i+1)} = H^{(i)}$ とする．

以上より，準 Newton 法を用いた流れ場に対する最適制御問題の最適化アルゴリズムはつぎのようにまとめられる．

1. $i = 0$．$\mathbf{V}^{(0)}$ と $H^{(0)}$ を適当に定める．
2. 評価関数の勾配 $J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i)})$ を計算する．もし，$\|J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i)})\|$ が十分小さければ，反復を終了する．
3. 式 (3.53) を満たすような正数 $\alpha^{(i)}$ を求め，更新則 (3.52) にしたがって $\mathbf{V}^{(i+1)}$ を計算する．
4. 評価関数の勾配 $J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i+1)})$ を計算する．もし，$\|J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i+1)})\|$ が十分小さければ，反復を終了する．
5. 正数 $\alpha^{(i)}$ が Wolfe 条件を満たすのであれば，BFGS 則 (3.54) で $H^{(i+1)}$ を計算し，Wolfe 条件を満たさないのであれば，$H^{(i+1)} = H^{(i)}$ とする．
6. $i = i + 1$ として，ステップ 3 へ戻る．

上記のアルゴリズムでは，勾配のノルム $\|J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i)})\|$ が十分小さければ，解が停留解の近傍に到達したとみなして反復を終了する．仮に $J_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{(i)}) = 0$ になった以降も反復を続けたとしても，式 (3.52) より，$\mathbf{V}^{(i+1)} = \mathbf{V}^{(i)}$ であるので，解は更新されない．

以上で円柱まわり流れにモデル予測制御を適用するための準備が整った．

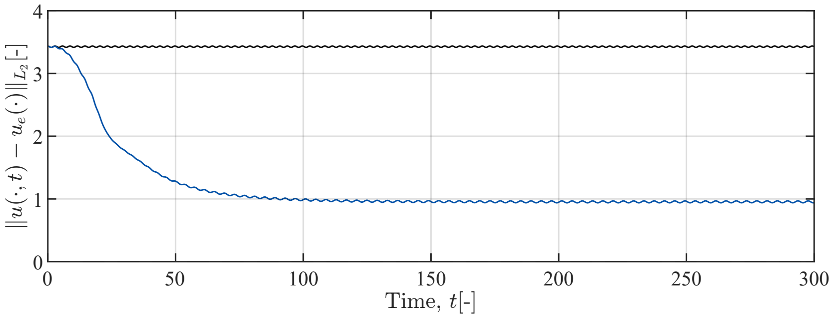
3.3　モデル予測制御の適用

本節では，数値実験において $Re = 100$ の円柱まわり流れにモデル予測制御を適用する．厳密な物理モデルに対して設計されたモデル予測制御によって，わずかな制御量で平衡点に近づけるという制御目標が達成されることを確認する．モデル予測制御は状態フィードバックであるため，この数値実験では状態である流速分布 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ が制御決定において利用可能であるとする．

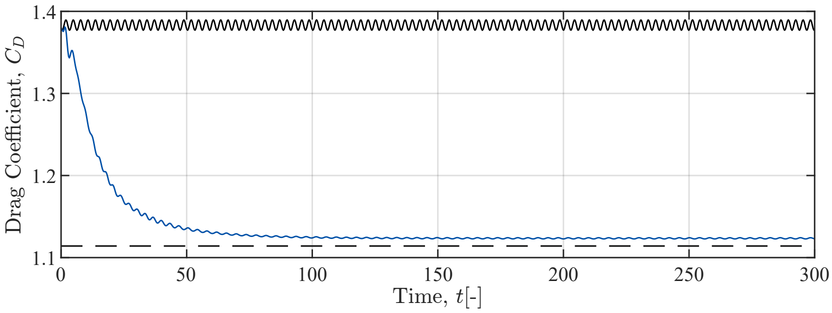
表 3.1 に制御系と制御器に関するパラメータを示す．噴出口の幅 $|\Gamma_{\mathrm{c},1}|$ と $|\Gamma_{\mathrm{c},2}|$ は等しく 0.258 である．この大きさは，円柱の直径のおよそ 1/4 である．この噴出口の幅は，噴流による円柱まわり流れの制御を扱った先行研究 [22, 65] での噴出口の幅と同程度の大きさを持つ．噴出口がこの程度の大きさの幅を持つとき，噴流による後流のわずかな偏向という巨視的な効果が渦放出の抑制制御に利用することができると考えられる．実際，上記の先行研究で設計された制御則において計算された噴流速度の時系列は，後流の振動の周期と同程度の周期で変動する．噴流の噴出口 $\Gamma_{\mathrm{c},1}$, $\Gamma_{\mathrm{c},2}$ における流速分布 $f_{\mathrm{p},1}$, $f_{\mathrm{p},2}$ には，2 次元チャンネル流れの停留解と同じ放物型の流速分布を与える．したがって，この噴流は噴出口において乱れを含まない．また，操作量 U は噴出口での噴流の平均流速を表すため，噴流の出口分布 $f_{\mathrm{p},1}$, $f_{\mathrm{p},2}$ は噴出口 $\Gamma_{\mathrm{c},1}$, $\Gamma_{\mathrm{c},2}$ において正規化されている．制御決定が行われる時間間隔は $\Delta t = 0.3$ である．これは

表 3.1: 制御系とモデル予測制御器に関するパラメータ

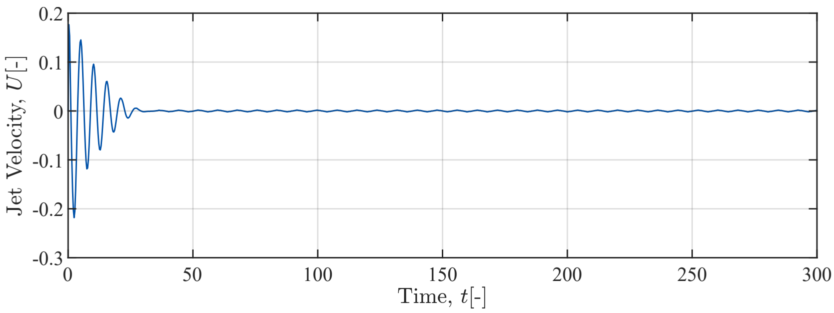
パラメータ	**数値**
Reynolds 数 Re	100
噴出口の幅 $\|\Gamma_{\mathrm{c},1}\|$, $\|\Gamma_{\mathrm{c},2}\|$	0.258
サンプリング周期 Δt	0.3
重み係数 q_1, q_2	0.2, 0.01
予測ホライズン長さ $t_{n+N_\mathrm{p}} - t_n = N_\mathrm{p}\Delta t$	6



(a) 状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$



(b) 抗力係数



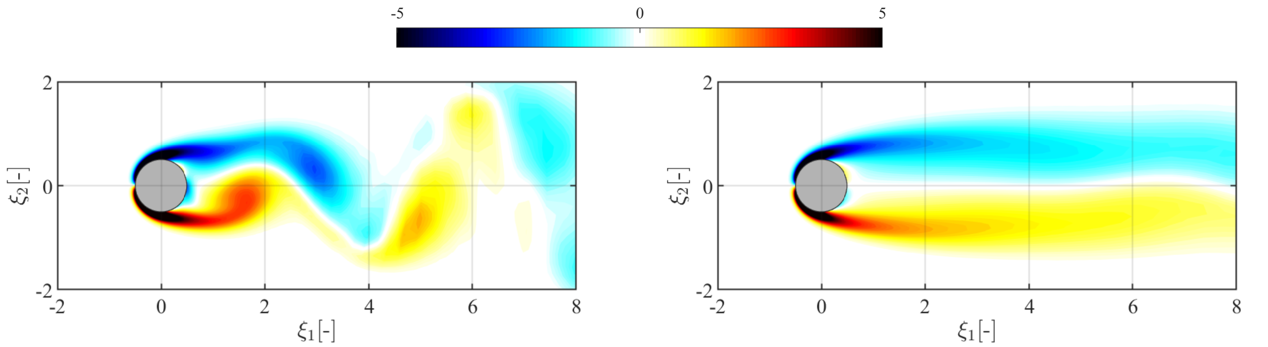
(c) 噴流速度

図 3.1:　モデル予測制御を適用したときの各変数の時系列．モデル予測制御を適用したときの結果を青線で示している．また，いくつかの図には比較のために，黒の実線で無制御時における結果を，黒の破線で平衡点における数値を表している．

渦放出の周期の 1/20 程度の時間である．予測ホライズン長さ $N_\mathrm{p}\Delta t$ は渦放出の周期とほぼ同じ 6 とした．準 Newton 法の反復終了条件には $\|J_\mathbf{V}(\mathbf{V}^{(i)})\|/\sqrt{N_\mathrm{p}} < 10^{-3}$ を用いる．

図 3.1(a) にモデル予測制御を流れ場に適用した際の状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ の時系列を青線で示している．比較のために，無制御時の結果を黒線で示している．モデル予測制御を適用したことによって，流れ場の状態が平衡点に近づいていることが読み取れる．時刻 $t = 100$ 程度で平衡点との距離の減少が鈍化して，平衡点との距離が 1 をわずかに下回った辺りで振動している．したがって，状態の平衡点への漸近までは達成できていない．

図 3.1(b) の青線で示すように，モデル予測制御によって円柱の抗力係数は大幅に減少した．図 3.1(b) の黒の実線で示す無制御時の抗力係数と比較して，18.8% 程度の減少した．このように抗力が減少するのは，流れ場の流速分布が円柱の抗力係数が小さい平衡点に近づいたためであると考えられる．図 3.1(b) の黒の破線で示す平衡点の抗力係数と，モデル予測制御を適用した際の抗力係数の差はわずかに 9.4×10^{-3} である．したがって，状態を平衡点に完全に一致させなくとも，抗力係数を平衡点の抗力係数の近くまで減少させることができることがわかる．



(a) $t = 0$　　(b) $t = 300$

図 3.2: モデル予測制御の適用前と適用後の渦度分布

図 3.1(c) に示すように，モデル予測制御によって決定された噴流速度 U は周期的に変動しながら，徐々に小さくなる．特に $t = 30$ 以降は噴流速度の大きさが小さく，弱い噴流で状態と平衡点との距離を接近させ，維持していることがわかる．この噴流の強さを定量的に評価するために運動量係数を用いる．流体密度は一定であり，噴流速度 $U(t)$ は一様流速 u_∞ [m/s]，噴出口の幅 $|\Gamma_{c,1}|$, $|\Gamma_{c,2}|$ は円柱直径 D_c [m] で除した無次元量であるから，各時刻での運動量係数は次式のように表される．

$$C_\mu(t) = U^2(t) \left(|\Gamma_{c,1}| + |\Gamma_{c,2}|\right). \tag{3.55}$$

運動量係数 $C_\mu(t)$ は，各時刻 t において噴出口からでる噴流の運動量流量を一様流の運動量流量で除したものである．運動量係数 C_μ は最大 2.5×10^{-2} であり，区間 $[0, 300]$ での時間平均では 2.7×10^{-4} である．運動量係数の時間平均値から，区間 $[0, 300]$ において制御によって流れ場に投入された運動量が，一様流の運動量のわずか $2.7 \times 10^{-2}\%$ であることがわかる．

図 3.2 (a) と (b) にそれぞれ制御前 ($t = 0$) と制御後 ($t = 300$) における渦度分布を示す．制御前では渦度分布が渦放出に特有の非対称性が現れているのに対して，制御後ではその非対称性が抑制されている．平衡点における流れ場 (図 2.8) で形成される渦度分布ほどの対称性はないが，平衡点の渦度分布と類似性のある渦度分布が形成されている．

以上の結果をまとめると，モデル予測制御によって，わずかな運動量の投入で流れ場の状態を平衡点に近づけられることが結論づけられる．しかしながら，モデル予測制御は制御入力の計算に非常に長い時間がかかるという欠点を持つ．表 3.2 に制御入力の計算に使用したワークステーションの性能とソフトウェアを記した．この表に記した計算環境で，各サンプリング時刻あたり 167 s を制御入力の計算に要した．

具体的なシステムを考えることで，モデル予測制御における制御入力の計算時間とサンプリング周期を比較する．いま考えているシステムは，流入速度 u_∞ [m/s] と密度 ρ_∞ [kg/m^3]，粘性係数 μ_∞ [kg$\cdot$m/s]，円柱の直径 D_c [m] によって無次元化されている．密度と粘性係数を，20°C で標準大気圧下での数値 $\rho_\infty = 1.205 \times 10^{-5}$[kg/m^3] および $\mu_\infty = 1.822 \times 10^{-5}$[kg $\cdot$ m/s] で固定し，無次元化されていない具体的なシステムを考える．Reynolds 数の関係式

$$Re = \frac{\rho_\infty u_\infty D_c}{\mu_\infty} \tag{3.56}$$

から，サンプリング周期 $\Delta t = 0.3$ の有次元量 Δt^* [s] に関してつぎの関係式を得る．

$$\Delta t^* = \frac{D_c}{u_\infty}\Delta t = \frac{Re\,\mu_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}\Delta t = \frac{4.536 \times 10^{-4}}{u_\infty^2}\ \text{[s]} \tag{3.57}$$

表 3.2: 制御入力の計算に用いた計算環境

CPU	RAM	OS	ソフトウェア
Intel Core i9-9900K at 3.6GHz	32GB	Windows 10 Pro	MATLAB

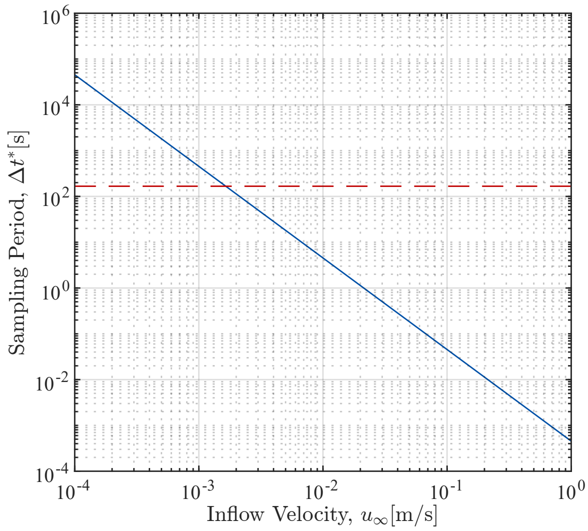


図 3.3: 流入速度とサンプリング周期の関係．青線はサンプリング周期，赤線は制御入力の計算時間．

式 (3.57) に示すように，流入速度 u_∞ [m/s] の大きな流れほど時間スケールは小さいので，システムのサンプリング周期 Δt^* [s] は小さい．図 3.3 にサンプリング周期 Δt^* [s] と流入速度 u_∞ [m/s] の関係を青線で示す．比較のために，モデル予測制御の制御入力の各サンプリング時刻あたりの計算時間を赤線で示している．一般に制御則を現実のシステムに実装するためには，制御入力の計算時間がサンプリング周期を下回らなければならない．図 3.3 より，モデル予測制御の制御入力の計算時間がサンプリング周期を下回るのは $u_\infty < 1.65 \times 10^{-3}$ [m/s] の場合である．したがって，流入速度が 1.65×10^{-3} [m/s] よりも速い流れに対しては，表 3.2 に示す計算環境ではモデル予測制御をシステムに実装することができない．より速い流れ場に対する制御系にモデル予測制御を実装するためには，計算環境を改善するか制御則の計算コストを抑える必要がある．

3.4 結論

本章では円柱まわり流れの厳密な物理モデルに対してモデル予測制御を設計した．そして，数値実験において設計したモデル予測制御を $Re = 100$ の円柱まわり流れに適用した．数値実験結果から，モデル予測制御は狙い通り，わずかな制御量で流れ場の状態を平衡点に近づけられることが確認された．

設計したモデル予測制御は，流れ場の状態を平衡点に収束させることはできなかった．これは，設定した予測ホライズンが状態を平衡点に到達させるまでに必要な時間と比べて小さかったことが原因であると考えられる．モデル予測制御を適用したとき，状態と平衡点との距離は非常に緩やかに減少し，区間 $t \in [0, 120]$ で減少し続けた．一方で，予測ホライズンは $N_{\mathrm{p}}\Delta t = 6$ しかなく，モデル予測制御則が流れ場の動的特性を十分に把握できなかったと考えられる．したがって，予測ホライズンをこれよりも大きくすることで，状態を平衡点により近づけられると期待される．ただし，抗力係数に関して言えば，状態を平衡点に近づけてもこれ以上はほとんど改善しない．予測ホライズンとモデル予測制御の性能の関係につ

いては，Appendix C を参照されたい．

厳密な物理モデルに基づいて設計したモデル予測制御では，制御入力の計算に非常に長い時間がかかることを確認した．このように，長い計算時間がかかるのは，制御器の内部において状態方程式と随伴方程式を反復的に数値積分しなければならないからである．各サンプリング時刻において，勾配を計算するために状態方程式と随伴方程式を数値積分するのは，高々十数回程度である．しかしながら，流れ場の状態方程式は Navier-Stokes 方程式であり，随伴方程式もまた Navier-Stokes 方程式のような偏微分方程式であるため，数値積分にかなりの時間がかかる．モデル予測制御を時間スケールが比較的小さい流れ場に実装するためには，何らかの手法を用いて制御入力の計算時間を削減しなければならない．

第 4 章

モデル予測制御の近似

本章では，厳密なモデル予測制御によって生成される入出力の時系列に基づいて最適制御則を近似する手法を提案する．近似された制御則では，状態方程式や随伴方程式の数値積分を行う必要がないため，計算コストが低い．

流れ場に対する最適制御入力の計算には，低次元化モデルを用いる場合でも状態方程式と随伴方程式の反復計算に無視できない時間がかかる場合がある．そこで，最適制御則を，こうした反復計算の必要がない陽的な制御則へと近似する手法が提案されてきた．提案手法の概要を説明する前に，流れ場に対する最適制御則の近似に関する研究について述べておく．

一般にモデル予測制御を近似する方法として，陽的モデル予測制御 [79, 80] がよく知られている．陽的モデル予測制御では，モデル予測制御則を区分的アフィン関数によって近似することで，制御則の計算コストを削減する．陽的モデル予測制御は非線形最適制御問題に対しても，ある程度の最適性を理論的に保障することができるという利点を持つ [81]．しかしながら，状態変数の数が増えると区分すべき領域が爆発的に増えるため，無限次元システムに直接適用することはできない．そこで，Hovland らは一種の POD を利用して，低次元化したシステムに対して，陽的モデル予測制御を適用する手法を提案した [82]．

Mathelin らもまた，流れ場の低次元モデルに基づくモデル予測制御を近似する手法を提案している [83]．彼らの手法では，低次元モデルに基づくモデル予測制御の入出力データに基づいて近似する．このとき，入力データの選択に圧縮センシングを利用することで，最終的な近似制御則の性能が良くなることを数値的に示した．

低次元モデルに基づくモデル予測制御の入出力の時系列を利用して，制御則を近似する手法も提案されている [84, 85]．時系列を利用することで，流れ場の閉ループ系において状態が遷移する軌道周辺にデータ点を配置することができると期待される．

低次元モデルを経由することなく，モデル予測制御を近似する手法も存在する．Bewley らは，制御則をニューラルネットワーク (NN) で与え，NN の重み行列を最適化する最適制御問題を考えた [86]．前章のように随伴方程式を導出することで，Navier-Stokes 方程式を拘束条件としたもとでも，重み行列に関する評価関数の勾配を計算することができる．ただし，NN の最適化は不適切な最適解に陥りやすく，初期候補解をかなり慎重に選ぶ必要がある．

4.1 提案手法の概要

本研究では，流れ場に対してモデル予測制御を適用した際の最適制御則の入出力の時系列を利用して，最適制御則を近似する手法を提案する．最適制御則のデータに基づいて近似を行う先行研究 [83–85] との

違いは，厳密な物理モデルに基づく最適制御則の入出力データを用いる点である (図 4.1(a))．本研究では厳密な最適制御則を利用することで，制御則を学習するための質の高いデータを取得する．一般的にデータ駆動で得られる流れ場の低次元モデルは，状態が流れ場データから離れている場合には再現性が低くなる．したがって，ある状態に対しては低次元モデルに基づいて計算される最適制御入力が合理的でない制御入力になっている場合がある．一方で，厳密な物理モデルでは流れ場の再現性は状態に依存しない．このため，どの状態に対しても質の高い最適制御入力のデータを取得することができる．

提案手法の概要を図 4.1(b) に示す．提案手法では，最適制御問題 (3.23)–(3.32) において任意の状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ に対して最適制御入力 V_n^{opt} が一意に定まることを想定する．このとき，ある関数 μ^{opt} が存在して次式を満たす．

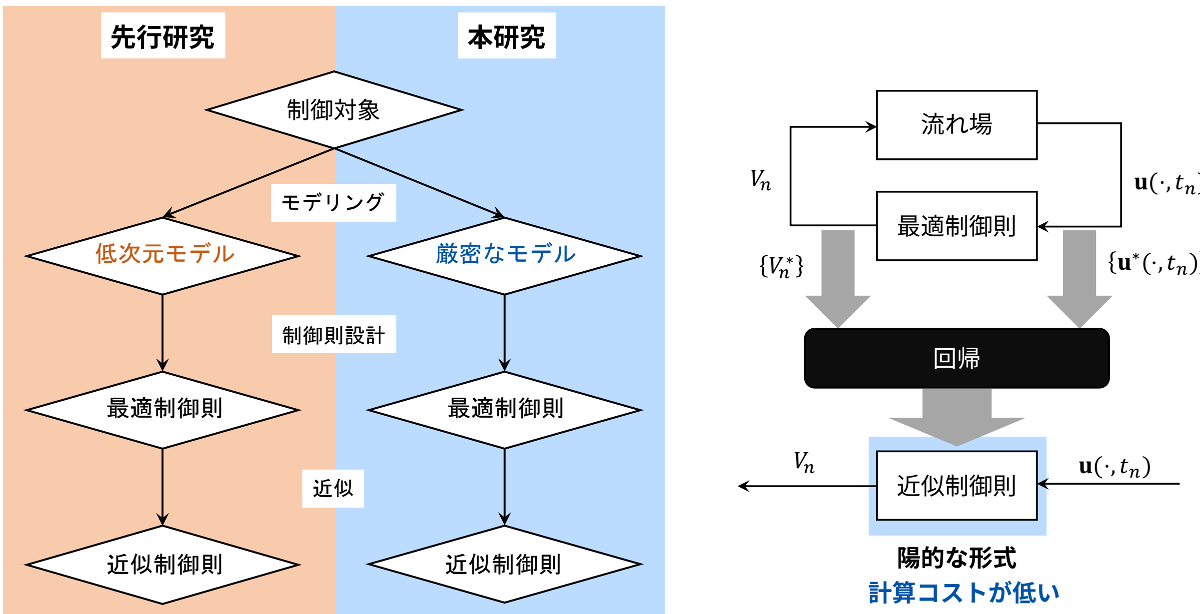
$$V_n^{\mathrm{opt}} = \mu^{\mathrm{opt}}(\mathbf{u}(\cdot, t_n)) \tag{4.1}$$

関数 μ^{opt} は未知であるため，前章では状態方程式と随伴方程式の反復計算によって最適制御入力を求めた．提案手法の目標は，関数 μ^{opt} をデータから導出することである．このとき，データとして流れ場にモデル予測制御を適用した際の $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ と V_n^{opt} の時系列を用いる．データから導出される制御則は陽的な形式で書き表されるため，計算コストが低い．

本章の以降の構成を以下に示す．まず，4.2 節では最適制御則の時系列の取得方法を説明する．つぎに，4.3 節では，得られた時系列から制御則を近似するための Gauss 過程回帰を導入する．4.4 節では提案手法によって近似制御則を導出する．設計した近似制御則の性能を確認するために，4.5 節で近似制御則による流れ場制御の数値実験を行う．

4.2　時系列の取得

制御則を導出するためのデータには，複数の初期流速に対してそれぞれモデル予測制御を適用した際の時系列を用いる (図 4.2)．初期流速はある初期値集合 $\mathcal{V}_0$ からサンプルされ，互いに異なる分布を持



(a) 先行研究と本研究との違い

(b) 提案手法の概要

図 4.1: 提案手法

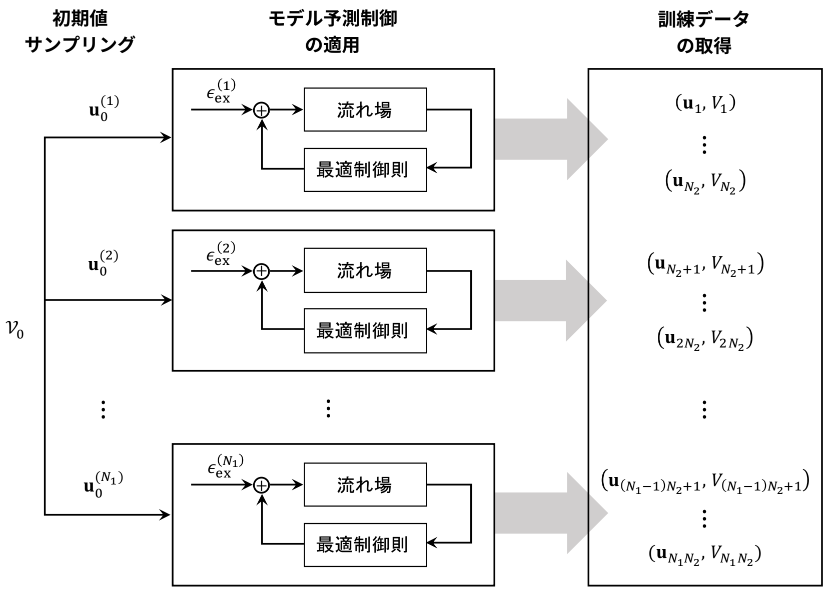


図 4.2: 時系列の取得方法

つ．いま，$\mathcal{V}_0$ から N_1 個の初期流速をサンプルし，それぞれの初期流速に対してモデル予測制御を区間 $[t_0, t_{N_2}]$ で適用したとする．このとき，状態と最適制御入力の $N = N_1N_2$ 個の組 $(\mathbf{u}_j^*, V_j^*)_{j=1}^N$ が取得される．ここで，上付きのアスタリスクは制御則の導出に用いられるデータであることを表す．

モデル予測制御を適用する際には，最適制御入力に外生入力信号を付加させる．外生信号を加えるのは，流れ場と最適制御則からなる閉ループ系を励振させるためである．この外生信号は初期値に応じて異なるものが生成される．取得されるデータの多様性を高めるために，外生信号として振幅や周波数が時間とともに変化する信号を用いる．なお，データとして取得されるのは外生信号が加わる前の最適制御入力である．

以上から，データの取得方法はつぎのようにまとめられる．

1. 初期値集合 $\mathcal{V}_0$ から N_1 個の異なる初期状態をサンプルする．各初期状態を $\mathbf{u}_0^{(i)} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ $(i = 1, \ldots, N_1)$ と表す．
2. 各初期状態 $\mathbf{u}_0^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, N_1)$ に対して，区間 $[t_0, t_{N_2}]$ で流れ場にモデル予測制御を適用する．このとき，外生信号 $\epsilon_{\mathrm{ex}}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_2}$ $(i = 1, \ldots, N_1)$ を最適制御入力に付加することでシステムを励振する．
3. モデル予測制御による制御結果から，状態と最適制御入力のデータ $(\mathbf{u}_j^*, V_j^*)_{j=1}^N$ を取得する．

これらの手続きはすべてオフラインで行われる．

初期値集合 $\mathcal{V}_0$ は，データ駆動近似で得られる制御則が有効に機能する作動域であると考えられる．一般に，データ駆動近似で得られる関数は，データ点から遠い領域では近似精度が低くなる．したがって，$\mathcal{V}_0$ から逸脱した初期状態が与えられた場合には，近似制御則は有効に機能するとは限らない．こうしたデータ取得時の初期値集合の限定は，Shimizu らの研究 [87] でもみられる．

4.3 Gauss 過程回帰

前節で得られた状態と最適制御入力のデータに回帰手法を適用することで，最適制御則を近似する．低次元モデルに基づく最適制御則のデータ駆動近似をおこなう先行研究と異なり，本研究では状態が空間的に分布する．したがって，最適制御則の近似には，空間的に分布する変数から従属変数への関数を推定できるような回帰手法を用いる必要がある．このために，本論文では Gauss 過程回帰を用いる．Gauss 過程回帰は Gauss 過程と呼ばれる確率過程を仮定し，Bayes の定理に基づいて関数を推定する手法である．Gauss 過程回帰は独立変数に関する制約が緩く，幅広い回帰問題に適用することができる．本節では，この Gauss 過程回帰について説明する．

ある空でない集合 $\mathcal{Z}$ に含まれる独立変数 $\zeta(\in \mathcal{Z})$ から従属変数 $\eta \in \mathbb{R}$ を推定する回帰問題を考える．Gauss 過程を導入する前に，正定値カーネルを定義する．

定義 4.1 (正定値カーネル [88]) ある関数 $k : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ が正定値カーネルであるとは，任意の有限個の元 $\zeta_1, \dots, \zeta_N \in \mathcal{Z}$ に対して $(k(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1,1}^{N,N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ が半正定値対称行列になることである．

正定値カーネルは Gauss 過程に共分散関数として組み込まれる．Gauss 過程は，多変数 Gauss 分布に基づく確率変数の関数バージョンである．

定義 4.2 (Gauss 過程 [89, p. 443], [90]) 関数 $k : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ を任意の正定値カーネル，$m : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ を任意の関数であるとする．このとき，確率関数 $f : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ が平均値関数 m と共分散関数 k の Gauss 過程にしたがうとは，任意の有限個の元 $Z = (\zeta_i)_{i=1}^N \in \mathcal{Z}^N$ に対して，確率変数ベクトル $f_Z \coloneqq [f(\zeta_1), \dots, f(\zeta_N)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ が平均 $m_Z \coloneqq [m(\zeta_1), \dots, m(\zeta_N)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ と共分散 $k_{Z,Z} \coloneqq (k(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1,1}^{N,N}$ の多変数 Gauss 分布 $\mathcal{N}(m_Z, k_{Z,Z})$ にしたがうことである．確率関数 f がこのような Gauss 過程にしたがうことを $f \sim \mathcal{GP}(m, k)$ と表す．

Gauss 過程回帰では，独立変数 $\zeta \in \mathcal{Z}$ と従属変数 $\eta \in \mathbb{R}$ に関してつぎの関係が成り立つと仮定する．

$$\eta = f(\zeta) + \epsilon \tag{4.2}$$

ここで，確率関数 f は Gauss 過程 $\mathcal{GP}(m, k)$ にしたがい，確率変数 ϵ は独立同分布の Gauss 分布 $\mathcal{N}(0, \sigma_{\mathrm{GP}}^2)$ にしたがう．確率変数 ϵ は従属変数のデータに加わる未知の外乱やモデル化誤差と解釈される．平均値関数 $m : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ と共分散関数 $k : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ は事前推定量であり，データに基づいて修正される．

式 (4.2) にしたがって，独立変数のデータ $Z = (\zeta_i)_{i=1}^N \in \mathcal{Z}^N$ に対して，従属変数のデータ $Y = (\zeta_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ が得られたとする．このとき，Gauss 過程回帰では Bayes 推定によって，任意の独立変数 ζ に対して従属変数 η を推定する．言い換えると，データ $(\zeta_i, \eta_i)_{i=1}^N$ が与えられたもとでの，任意の独立変数 ζ に対する従属変数 η の条件付き確率分布によって，η の推定量を与える．この条件付き確率分布は解析的に求められる．

定理 4.3 (Gauss 過程回帰 [91, p. 16]) 式 (4.2) が成り立つと仮定する．このとき，$Z = (\zeta_i)_{i=1}^N$ と $Y = (\eta_i)_{i=1}^N$ が与えられたもとでの，任意の $\zeta \in \mathcal{Z}$ に対応する η はつぎのような Gauss 分布にしたがう．

$$\eta \mid \zeta, Z, Y \sim \mathcal{N}(\hat{m}(\zeta), \hat{\sigma}^2(\zeta)) \tag{4.3}$$

ここで，関数 $\hat{m} : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ と $\hat{\sigma}^2 : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ は次式で定義される．

$$\hat{m}(\zeta) = m(\zeta) + (Y - m_Z)^\mathsf{T}(k_{Z,Z} + \sigma_{\mathrm{GP}}^2 I_N)^{-1} k_Z(\zeta) \tag{4.4}$$

$$\hat{\sigma}^2(\zeta) = k(\zeta, \zeta') + \sigma_{\mathrm{GP}}^2 - k_Z^\mathsf{T}(\zeta)(k_{Z,Z} + \sigma_{\mathrm{GP}}^2 I_N)^{-1} k_Z(\zeta') \tag{4.5}$$

ここで，$k_Z(\zeta) = [k(\zeta_1, \zeta), \ldots, k(\zeta_N, \zeta)]^\top \in \mathbb{R}^N$ である．

式 (4.3)–(4.5) が Gauss 過程回帰の根幹をなす結果である．独立変数が与えられたもとでの従属変数の確率分布を推定する場合には，式 (4.3)–(4.5) を用いることができる．また，独立変数から従属変数への確定的な関数を推定する場合には，式 (4.4) のみを用いる．特に最適制御則の近似には式 (4.4) を用いる．式 (4.4) は確定的な回帰手法であるカーネルリッジ回帰の結果と一致する [91, pp. 132–135].

Gauss 過程モデル (4.2) の確率変数 ϵ はパラメータ σ_{GP} に依存する．また，平均値関数 m や共分散関数 k もあるパラメータに依存することがある．これらのパラメータはハイパーパラメータと呼ばれ，Gauss 過程回帰では尤度の最大化によって決定される場合が多い．ハイパーパラメータを $\theta \in \mathbb{R}^{N_\theta}$ とおくと，データ $Z = (\zeta_i)_{i=1}^N$ と $Y = (\zeta_i)_{i=1}^N$ に関する尤度 $p(Z, Y; \theta)$ は，式 (4.2) と Gauss 過程の定義 4.2 からつぎのように求められる．

$$p(Z, Y; \theta) = \mathcal{N}(m_Z, C_{Z,Z}) \tag{4.6}$$

ここで，$C_{Z,Z} = k_{Z,Z} + \sigma_{\mathrm{GP}}^2 I_N$ である．なお，$p(Z, Y; \theta)$ の数値計算はオーバーフローを引き起こしやすいため，$p(Z, Y; \theta)$ の代わりに対数尤度

$$\log p(Z, Y; \theta) = -\frac{1}{2}\log|C_{Z,Z}| - \frac{1}{2}(Y - m_Z)^\top C_{Z,Z}^{-1}(Y - m_Z) - \frac{N}{2}\log 2\pi \tag{4.7}$$

をハイパーパラメータ θ に関して最大化する．関数 log は単調増加であるため，$\log p(Z, Y; \theta)$ を最大化する θ と $\log p(Z, Y; \theta)$ を最大化する θ は一致する．

対数尤度を最大化するような θ を解析的に求めることは一般にできない．このために，勾配法による数値最適化が行われる．勾配法で計算する必要がある対数尤度の勾配は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\log p(Z, Y; \theta) = \mathrm{Tr}\Bigg(&\frac{\partial C_{Z,Z}}{\partial \theta_i} C_{Z,Z}^{-1} + (Y - m_Z)(Y - m_Z)^\top C_{Z,Z}^{-1}\frac{\partial C_{Z,Z}}{\partial \theta_i} C_{Z,Z}^{-1} \\ &\frac{\partial m_Z}{\partial \theta_i}(Y - m_Z)^\top C_{Z,Z}^{-1}\Bigg), \quad i = 1, \ldots, N_\theta\end{aligned} \tag{4.8}$$

ここで，関数 Tr は対角和である．

以上のように，ある集合 $\mathcal{Z}$ に含まれる独立変数 ζ と従属変数 $\eta \in \mathbb{R}$ に Gauss 過程を導入できれば，ハイパーパラメータの最適化や Gauss 過程回帰を適用することができる．独立変数 ζ の全体集合 $\mathcal{Z}$ として，実数体 $\mathbb{R}^{N_\zeta}$ だけでなく，L_2 空間などの関数空間も選ぶことができる．

4.4　近似制御則

4.2 節の手順で得られた状態と最適制御入力のデータ $(\mathbf{u}_j^*, V_j^*)_{j=1}^N$ に Gauss 過程回帰を適用することで，最適制御則を近似する．このために，前節における独立変数を $\zeta = \mathbf{u}(\cdot, t_n)$，従属変数を $\eta = V_n^{\mathrm{opt}}$ と対応づける．

Gauss 過程回帰を適用するために，状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ と最適制御入力 V_n^{opt} に関してつぎの関係が成り立つと仮定する．

$$V_n^{\mathrm{opt}} = \mu(\mathbf{u}(\cdot, t_n)) + \epsilon_n \tag{4.9}$$

ここで，確率関数 μ は Gauss 過程 $\mathcal{GP}(0, k)$ にしたがい，確率変数 ϵ_n は独立同分布の Gauss 分布 $\mathcal{N}(0, \sigma_{\mathrm{GP}}^2)$ にしたがう．関数 $k : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ は後で設定する正定値カーネルで，$\mathcal{Z}$ は関数 $\mathbf{u}(\cdot, t_n) : \Omega \to$

$\mathbb{R}^2$ の適当な集合である．なお，平均関数の事前推定量を $m \equiv 0$ としたのは，我々が最適制御則の関数形に関して何ら知見を持っていないからである．ガウス過程回帰では，回帰の対象の関数形に対しての知識がない場合には，平均関数の事前推定量を $m \equiv 0$ とおく場合が多い．事前推定量を $m \equiv 0$ とした場合でも，十分な数のデータ数があれば関数を推定することができる．

式 (4.9) から，Gauss 過程回帰の結果 (4.4) を用いることができて，最適制御則はつぎのように推定される．

$$\hat{\mu}(\mathbf{u}(\cdot, t_n)) = L_2 k_Z(\mathbf{u}(\cdot, t_n)) \tag{4.10}$$

ここで，$k_Z(\mathbf{u}(\cdot, t_n)) = [k(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}(\cdot, t_n)), \ldots, k(\mathbf{u}_N^*, \mathbf{u}(\cdot, t_n))]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ であり，$L_2 \in \mathbb{R}^{1\times N}$ は式 (4.4) の $(Y - m_Z)^\mathsf{T}(k_{Z,Z} + \sigma_{\mathrm{GP}}^2 I_N)^{-1}$ に対応する横ベクトルである．近似制御則 $\hat{\mu}$ は陽的な形式で書き表されているため，状態方程式と随伴方程式の反復計算を必要としない．

共分散関数の事前推定量 k に応じて，得られる近似制御則の特性が定まる．本研究では二つの k を設定し，それぞれの k に対して近似制御則を導出する．一つ目の共分散関数はつぎの線形カーネルである．

$$k(\mathbf{u}(\cdot, t_n), \mathbf{u}'(\cdot, t_n)) = \theta_1 \left\langle \mathbf{u}(\cdot, t_n), \mathbf{u}'(\cdot, t_n) \right\rangle_{L_2} \tag{4.11}$$

ここで，$\theta_1 > 0$ はハイパーパラメータで，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2} : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ は L_2 ノルムに対応した内積

$$\left\langle \mathbf{u}(\cdot, t_n), \mathbf{u}'(\cdot, t_n) \right\rangle_{L_2} = \int_\Omega \mathbf{u}^\mathsf{T}(\xi, t_n)\, \mathbf{u}'(\xi, t_n) d\xi \tag{4.12}$$

である．二つ目の共分散関数は Gauss カーネルと線形カーネルを足し合わせたつぎの正定値カーネルである．

$$k(\mathbf{u}(\cdot, t_n), \mathbf{u}'(\cdot, t_n)) = \theta_{2,1} \exp\left(-\theta_{2,2} \left\| \mathbf{u}(\cdot, t_n) - \mathbf{u}'(\cdot, t_n) \right\|_{L_2}^2\right) + \theta_{2,3} \left\langle \mathbf{u}(\cdot, t_n), \mathbf{u}'(\cdot, t_n) \right\rangle_{L_2} \tag{4.13}$$

ここで，$\theta_{2,1}$, $\theta_{2,2}$, $\theta_{2,3} > 0$ はハイパーパラメータである．式 (4.10) より，近似制御則 $\hat{\mu}$ はカーネル $k(\mathbf{u}_i^*, \mathbf{u}(\cdot, t_n))$, $i = 1, \ldots, N$ の線形和によって書き表される．したがって，線形カーネル (4.11) を設定した場合に得られる近似制御則は状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ に関して線形であり，非線形なカーネル (4.13) 設定した場合に得られる近似制御則は状態に関して非線形である．

4.5　数値例

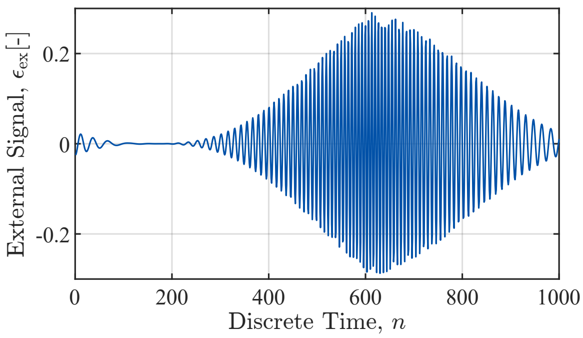
Reynolds 数 $Re = 100$ の円柱まわり流れに対して近似制御則を設計する．数値実験で，設計した近似制御則の初期状態や Reynolds 数の変化に対するロバスト性を調査する．

4.5.1　Reynolds 数 100 の流れ場に対する近似制御則

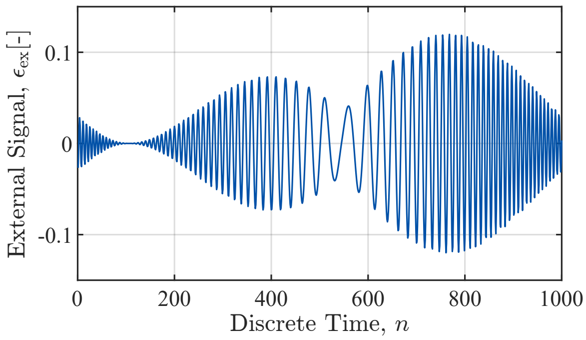
4.2 節に記した手順にしたがって，$Re = 100$ の円柱まわり流れにモデル予測制御を適用した際の時系列を取得する．データ取得時の初期値集合 $\mathcal{V}_0$ には，2.3 節で示したような無制御時の周期性のある流速分布の集合を用いる．初期値集合 $\mathcal{V}_0$ から $N_1 = 10$ 組の初期状態をサンプルし，それぞれの初期状態に対してモデル予測制御を適用した際の長さ $N_2 = 1000$ の時系列を取得する．結果として，$N = N_1 N_2 = 10000$ 組の状態と最適制御入力のデータを最適制御則の推定に用いられる．図 4.3 にはデータ取得時にシステムを励振させるために使用した N_1 組の外生信号のうちの 2 例を示す．取得されるデータの網羅性を高めるために，振幅や周期が時間的に変化するような信号を用いた．

Gauss 過程のハイパーパラメータの最適化には準 Newton 法を用いた．ある初期候補解から最適化を始めると，共分散カーネルが線形カーネル (4.11) の場合には停留解 $(\theta_1, \sigma_{\mathrm{GP}}^2) = (5.52, 5.52 \times 10^{-6})$ を非線形なカーネル (4.13) の場合には停留解 $(\theta_{2,1}, \theta_{2,2}, \theta_{2,3}, \sigma_{\mathrm{GP}}^2) = (3.99 \times 10^{-1}, 7.23 \times 10^{-2}, 3.99 \times 10^{-6}, 3.99 \times 10^{-7})$ が得られた．二つの停留解において，数値的な安定性を保証するための飽和制約 $\theta_1/\sigma_{\mathrm{GP}}^2 \leq 10^6$ と $\theta_{2,1}/\sigma_{\mathrm{GP}}^2$, $\theta_{2,1}/\sigma_{\mathrm{GP}}^2 \leq 10^6$ が有効である．このように飽和制約が有効になったのは，計算機上でデータを取得したため，データに加わる未知外乱の大きさを表す σ_{GP} が本質的に小さいためだと考えられる．

Gauss 過程回帰で得られる近似制御則 (4.10) のゲインは $L_2 k_Z(\cdot)$ である．一般的にこのゲインの描画は困難であるが，共分散関数が線形カーネルの場合にはゲインを描画することができる．実際，共分散関数が線形カーネルの場合には，描画可能な表現のゲインを表す関数 $l_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ が存在して，$L_2 k_Z(\cdot) = \langle l_2, \cdot \rangle_{L_2}$ と変形できる．この関数 l_2 を描画したものが図 4.4 である．寒色の塗りつぶしはゲインが負の領域を，暖色の塗りつぶしはゲインが正の領域を，白色の塗りつぶしはゲインが 0 に近い値を持つ領域を表している．線形カーネルに基づく Gauss 過程回帰で得られた近似制御則では，l_2 に状態 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ を掛け合わせることで制御入力が計算される．ξ_1 方向の流速 $u_1(\cdot, t_n)$ に対応するゲイン (図 4.4(a)) と ξ_2 方向の流速 $u_2(\cdot, t_n)$ に対応するゲイン (図 4.4(b)) の大きさは主に円柱の後方で大きいこと

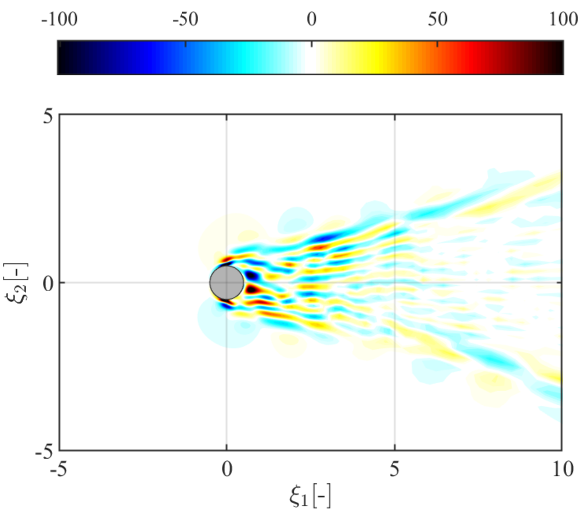


(a) $\epsilon_{\mathrm{ex}}^{(1)}$

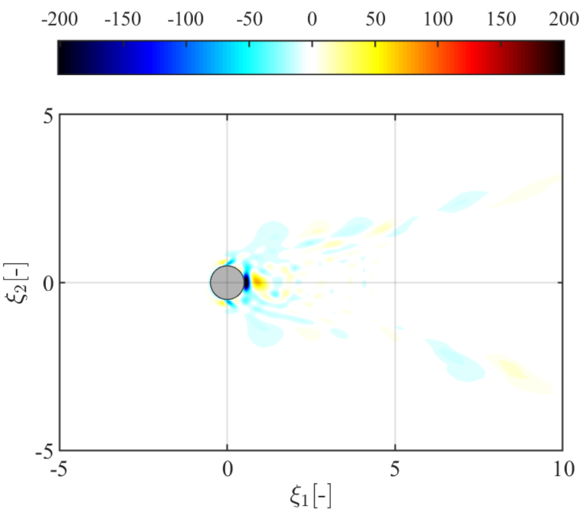


(b) $\epsilon_{\mathrm{ex}}^{(2)}$

図 4.3: データを取得時に利用した外生信号



(a) ξ_1 方向の流速 $u_1(\cdot, t_n)$ に対応するゲイン



(b) ξ_2 方向の流速 $u_2(\cdot, t_n)$ に対応するゲイン

図 4.4: 線形カーネルに対して得られた近似制御則のゲイン

がわかる．抑制されるべき流れ場の振動は円柱の主に後方で発生しているので，このようなゲインの偏りは理にかなっている．また，$u_1(\cdot, t_n)$ に対応するゲイン (図 4.4(a)) が直線 $\xi_2 = 0$ に関して概ね反対称になっている一方で，$u_2(\cdot, t_n)$ に対応するゲイン (図 4.4(b)) が $\xi_2 = 0$ に関して概ね対称になっている点も興味深い．この事実は，最適制御問題 (3.23)–(3.32) が $\xi_2 = 0$ に関して対称であることと関連があると考えられる．

以降では表記の簡略化のために，共分散関数が線形カーネル (4.11) の場合に得られた近似制御則を線形な近似制御則，共分散関数が非線形なカーネル (4.13) の場合に得られた近似制御則を非線形な近似制御則と呼ぶこととする．

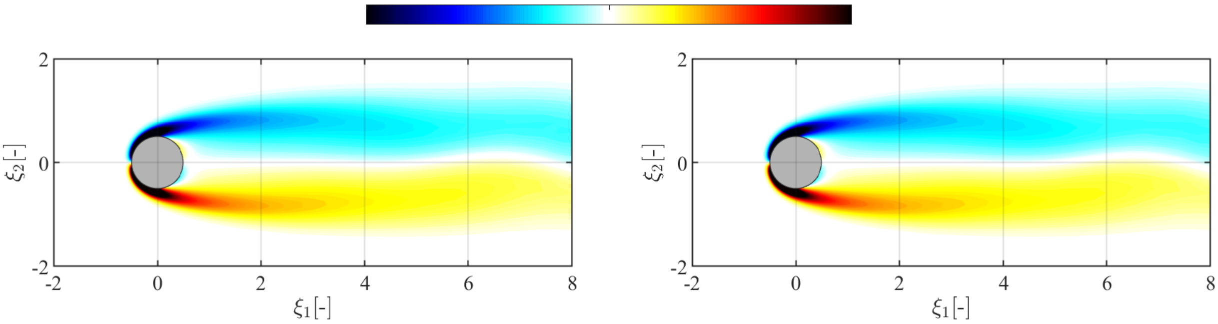
4.5.2　ある初期状態に対する数値実験結果

線形な近似制御則と非線形な近似制御則をそれぞれ $Re = 100$ の円柱まわり流れに適用する数値実験を行う．このとき，初期値集合 $\mathcal{V}_0$ に含まれるある状態 (図 3.2(a)) を初期値に用いることにする．なお，この初期状態は近似制御則を学習するために用いた初期状態とは異なる．

図 4.5(a) と 4.5(b) に，それぞれ線形な近似制御則と非線形な近似制御則を適用したときの時刻 $t = 300$ における渦度分布を示す．どちらの近似制御則を適用した場合においても，渦の非対称性が緩和され，渦放出が抑制されていることがわかる．これらの渦度分布の対称性は，モデル予測制御を適用したときの渦度分布 (図 3.2(b)) の対称性と比較しても遜色がないようにみえる．図 4.6(a) と (b)，(c) にそれぞれ，状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ と抗力係数 C_D，噴流速度 U の時系列を示す．線形な近似制御則と非線形な近似制御則を適用したときの結果をそれぞれ青線と赤線で示し，モデル予測制御を比較したときの結果を黒の破線で示している．いずれの指標においても，二つの近似制御則による結果 (青線と赤線) とモデル予測制御による結果 (黒の破線) がほとんど一致していることが確認できる．

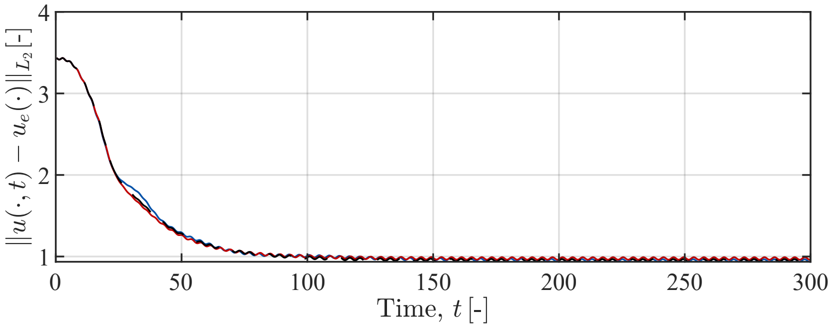
図 4.6(a) において近似制御則が流れ場の状態を平衡点に近づけた状況を維持し続けられるのは，近似制御則がフィードバック制御則だからであるということを強調しておく．仮に，図 4.6(c) に図示した噴流の時系列と同じような開ループ入力信号をシステムに印加しても，状態を平衡点に近づけた状況を維持し続けることはできない．これは開ループ入力信号ではシステムの安定性を変えることができないからである．

以上のように，近似によって得られた二つの制御則は，ある初期状態に対してモデル予測制御と同程度に，状態を平衡点に近づけ，円柱の抗力を低減することができる．制御則を適用した初期状態は，データを取得した際に使用した初期状態と異なる．したがって，近似制御則は近似に使用したデータからある程

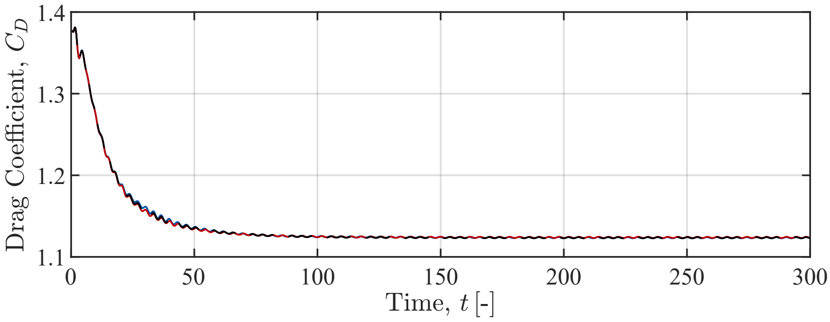


(a) 線形な近似制御則を適用した場合　　(b) 非線形な近似制御則を適用した場合

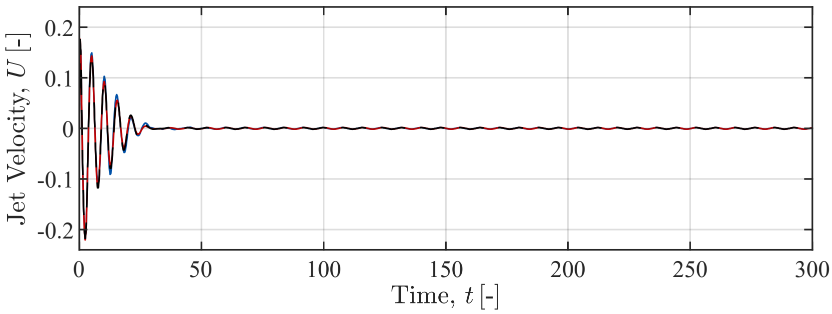
図 4.5: 二つの近似制御則を適用したときの時刻 $t = 300$ における渦度分布



(a) 状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$



(b) 抗力係数 C_D



(c) 噴流速度 U

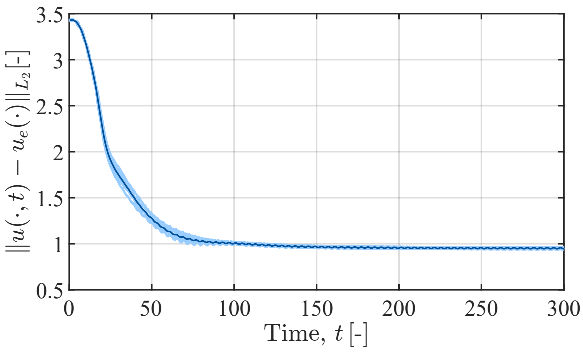
図 4.6:　二つの近似制御則を適用したときの各変数の時系列．線形な近似制御則と非線形な近似制御則を適用したときの結果をそれぞれ青線と赤線で示している．また，比較のために，黒の破線でモデル予測制御を比較したときの結果を示している．

度離れた状態に対しても有効に働くと期待できる．

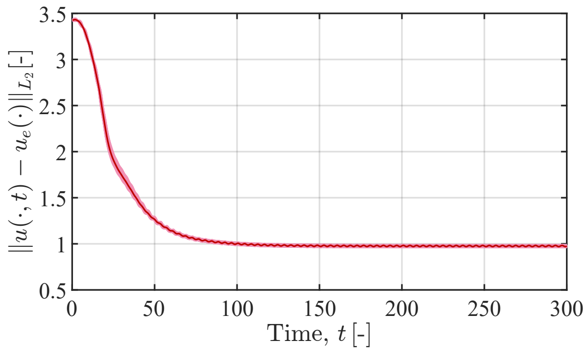
4.5.3　複数の初期状態に対する数値実験結果

前の小節では初期値集合 $\mathcal{V}_0$ に含まれるある状態を初期値とした．ここでは初期値集合 $\mathcal{V}_0$ に対する近似制御則の性能を調べるために，$\mathcal{V}_0$ に含まれる 20 組の相異なる初期状態に対して，二つの近似制御則を適用する．この初期状態はいずれも，近似制御則の設計のために用いたデータとも異なる．初期値集合 $\mathcal{V}_0$ は周期流れにおける流速分布の集まりであるため，相異なる初期状態は位相の違う流速分布の組である．

図 4.7(a) と (b) に各初期流速に対してそれぞれ線形な近似制御則と非線形な近似制御則を適用したときの，状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$ の時系列を示す．薄色の線は各初期状態に対する時系列を表し，濃色の線はそれらの平均値を表している．二つの図を見比べると，線形な近似制御則の方が区間 $[30,80]$ においてはばらつきが大きい一方で，区間 $[200,300]$ においては距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$ がわずかに



(a) 線形な近似制御則を適用した場合



(b) 非線形な近似制御則を適用した場合

図 4.7: 各初期状態に対して二つの近似制御則を適用したときの状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ の時系列

小さいことがわかる．しかし，両者の違いはそれほど大きくなく，いずれの初期状態に対してもほぼ同様に，状態と平衡点との距離を近づけられていることがわかる．

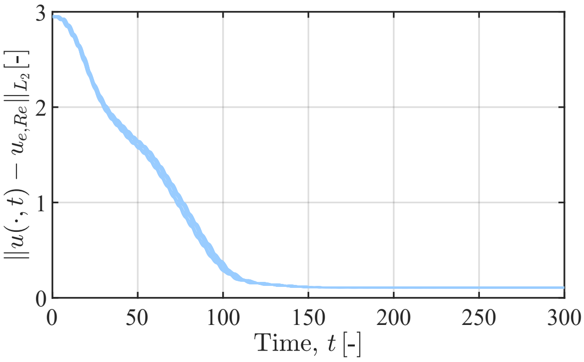
二つの近似制御則は，初期値集合 $\mathcal{V}_0$ に含まれるいずれの初期状態に対しても，モデル予測制御とほぼ同程度の性能を示している．この事実は，初期値集合を限定すれば，提案手法によってモデル予測制御と同程度の性能を持つ制御則を導出できる可能性を示唆している．

4.5.4　異なる Reynolds 数の流れ場に対する数値実験結果

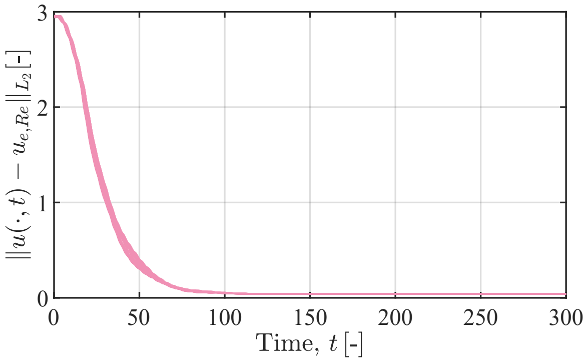
二つの近似制御則は，$Re = 100$ の円柱まわり流れ場に対して設計された．しかし，実用上は Reynolds 数が設計点から離れている場合においての性能も重要となる．ここでは，Reynolds 数が設計点である $Re = 100$ と 20% 異なる，$Re = 80, 90, 110, 120$ の流れ場に対して二つの近似制御則の性能を調査する．

円柱まわり流れでは $Re = 100$ 程度の領域では，Re が高くなるにつれて周期運動の周期が短くなり [92]，周期運動の振幅は大きくなる．また，Re が高くなるにつれて平衡点の定常流れでは，円柱の後背に形成される渦が大きくなる．このように，Re に対して円柱まわり流れの周期運動や平衡点は変化する．これまでは，$Re = 100$ において周期運動する状態の集合を $\mathcal{V}_0$，平衡点を $\mathbf{u}_\mathrm{e}$ と表していたが，この小節では，ある Re において周期運動する状態の集合と平衡点をそれぞれ $\mathcal{V}_{0,Re}$ と $\mathbf{u}_{\mathrm{e},Re}$ で表すことにする．上述の事実から，一般に $Re \neq Re'$ ならば，$\mathcal{V}_{0,Re} \neq \mathcal{V}_{0,Re'}$ および $\mathbf{u}_{\mathrm{e},Re} \neq \mathbf{u}_{\mathrm{e},Re'}$ である．

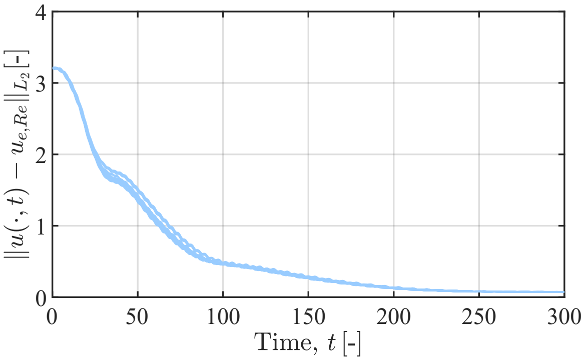
各 Re に対して，集合 $\mathcal{V}_{0,Re}$ から相異なる 20 組の状態をサンプルする．そして，それぞれの状態を初期値として，二つの近似制御則を適用する．図 4.8(a) と (c)，(e)，(g) にそれぞれ $Re = 80$, 90, 110, 120 の流れ場に対して，線形な近似制御則を適用した際の状態と平衡点との距離の時系列を示す．同様に，図 4.8(b) と (d)，(f)，(h) にそれぞれ $Re = 80$, 90, 110, 120 の流れ場に対して，非線形な近似制御則を適用した際の状態と平衡点との距離の時系列を示す．設計点である $Re = 100$ よりも低い $Re = 80$, 90 の流れ場に対してはいずれの近似制御則も良い性能を示している．いずれの近似制御則を適用した場合も，各初期状態に対して状態と平衡点との距離が減少している．また，十分に時間が経過した後の距離は $Re = 100$ の流れ場に制御則を適用した時よりも，小さな値をとる．このように低い Re の流れ場に対して平衡点との距離が縮まるのは，低い Re の流れ場ほど平衡点を安定化しやすいからだと考えられる．実際，Re が 47 程度まで下がれば，無制御時においても平衡点は安定である．一方で，設計点よりも高い $Re = 110$, 120 の流れ場に対しては，線形な近似制御則と非線形な近似制御則で異なる結果を示す．まず，$Re = 110$ の流れに対して非線形な近似制御則は，いずれの初期状態に対しても距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e},Re}\|_{L_2}$ を減少させることができている．いずれの状態から制御を始めた場合においても，最



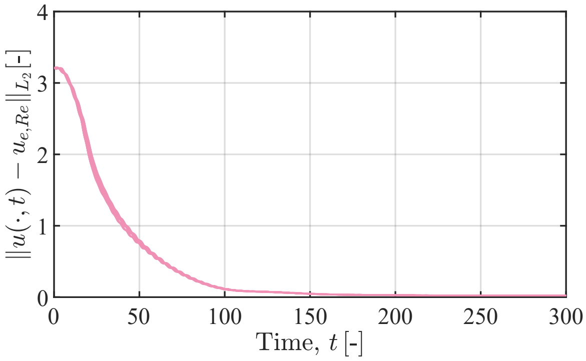
(a) $Re = 80$ の流れに線形な近似制御則を適用した場合



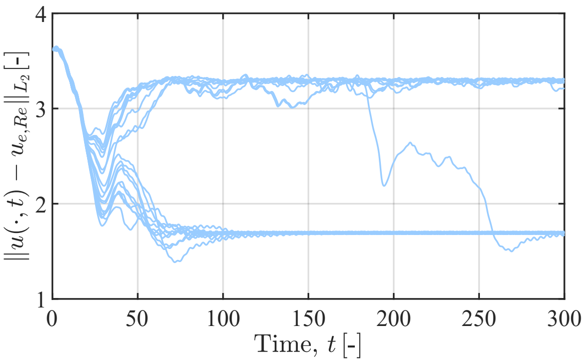
(b) $Re = 80$ の非線形な近似制御則を適用した場合



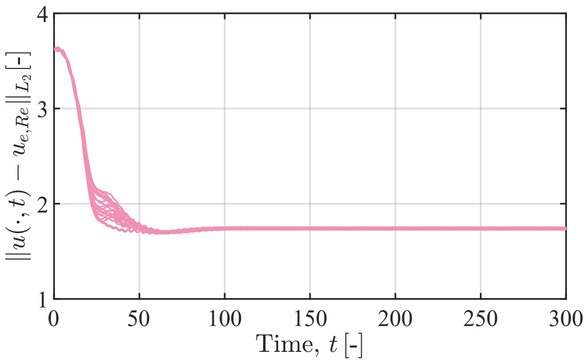
(c) $Re = 90$ の流れに線形な近似制御則を適用した場合



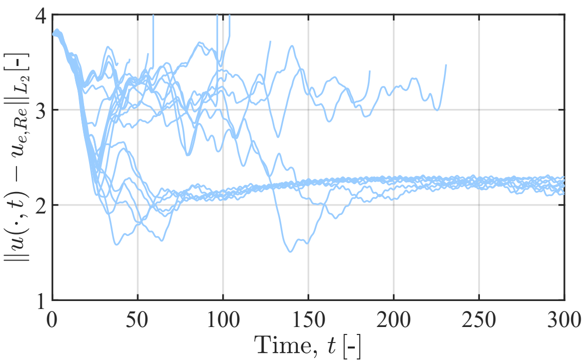
(d) $Re = 90$ の流れに非線形な近似制御則を適用した場合



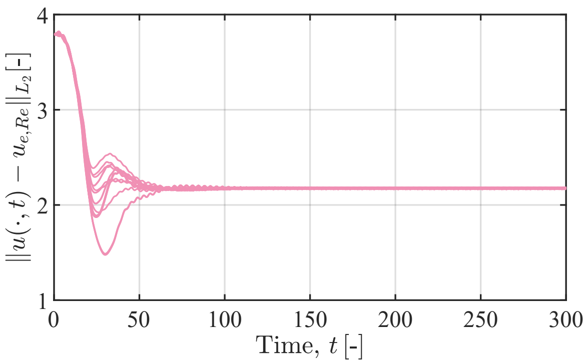
(e) $Re = 110$ の流れに線形な近似制御則を適用した場合



(f) $Re = 110$ の流れに非線形な近似制御則を適用した場合



(g) $Re = 120$ の流れに線形な近似制御則を適用した場合



(h) $Re = 120$ の流れに非線形な近似制御則を適用した場合

図 4.8: 相異なる初期状態を持つ各 Re の流れ場に，二つの近似制御則を適用したときの状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e},Re}\|_{L_2}$ の時系列

終的に距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_{\mathrm{e},Re}\|_{L_2}$ が 1.75 の近傍で振動する．対して，線形な近似制御則では，ある初期状態に対して距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_{\mathrm{e},Re}\|_{L_2}$ があまり減少しない．線形な近似制御則は 12 組の初期状態に対しては距離を 1.7 程度にまで減少させるが，8 組の初期状態に対しては距離を 3.3 程度までにしか減少させることができない．また，$Re=120$ の流れに対して非線形な近似制御則は，いずれの初期状態に対しても距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_{\mathrm{e},Re}\|_{L_2}$ を 2.2 程度にまで縮められる．対して，線形な近似制御則は 8 組の初期状態に対しては距離を 2.2 程度にまで減少させるが，12 組の初期状態に対しては状態を発散させてしまう．

以上のように，線形カーネル (4.11) と非線形なカーネル (4.13) で近似した場合に得られる制御則の Re や $\mathcal{V}_{0,Re}$ の変化に対するロバスト性が異なる．非線形な近似制御則では $\pm 20\%$ の Re 変化に対しても状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_{\mathrm{e},Re}\|_{L_2}$ を減少させられる．一方で，線形な制御則では高い Re に対しては距離を縮めることができない初期状態が存在した．このようなロバスト性の違いは，我々の研究 [93] で，別の最適制御則を異なる特徴量のもとでリッジ回帰で近似した場合にも観察されている．この先行研究においても，線形な特徴量 $\mathbf{u}(\cdot,t)$ のもとで得られた近似制御則は，非線形な特徴量 $(\mathbf{u}(\cdot,t), p(\cdot,t))$ のもとで得られた近似制御則よりもロバスト性が低かった．

4.5.5　計算時間

近似制御則の導出の目的は制御入力の計算時間の削減であった．近似制御則による制御入力は，厳密なモデル予測制御による制御入力と同様に，前章の表 3.2 に記した計算環境で計算された．表 4.1 に二つの近似制御則とモデル予測制御が各サンプリング時刻で制御入力の計算に要した時間の平均値を記す．いずれの近似制御則も厳密なモデル予測制御と比べて大幅に計算時間が短いことがわかる．特に，線形な近似制御則は $L_2 k_Z(\cdot)=\langle l_2,\cdot\rangle_{L_2}$ と書き表せるので，計算コストが低い．一方で，非線形な近似制御則では制御入力を計算するために N 個のカーネルの線形和を計算する必要があり，線形な近似制御則と比べて計算コストが高い．それでも，厳密なモデル予測制御と比較すると 1/1000 以下の時間で制御入力を計算することができる．このように，状態方程式と随伴方程式のオンライン計算を回避することで，制御入力の計算時間を削減できることが確認できた．

なお，最適制御則と流れ場の閉ループ系の低次元量に着目することで，近似制御則の計算コストをさらに抑えることができる．第 6 章で，このような低次元な近似制御則の設計を行う．

4.6　結論

本章では，流れ場の厳密なモデルに対して設計されたモデル予測制御の入出力の時系列に基づいて，制御則を近似する手法を提案した．提案手法ではモデル予測制御の入出力の時系列に，Gauss 過程回帰を適用することで制御則を近似する．近似によって得られる制御則は陽的な形式で書き表されるため，厳密なモデル予測制御よりも計算コストが低い．

本章では，$Re=100$ の円柱まわり流れに対するモデル予測制御を，線形カーネルと非線形なカーネルを持つ二つ Gauss 過程回帰で近似した．近似によって得られた二つの制御則は，データ生成に用いた初

表 4.1: 各サンプリング時刻での制御入力の計算時間

線形な近似制御則	非線形な近似制御則	モデル予測制御
1.3×10^{-4} s	1.0×10^{-1} s	1.7×10^{2} s

期値集合に対してモデル予測制御と同程度の性能を示した．この結果は，ある流れ場のシステムに対しては，初期値集合を限定することで最適制御則と同程度の性能を持つ，計算コストの低い近似制御則を設計できることを示すものである．

設計された二つの近似制御則は $Re = 100$ の流れ場に対するモデル予測制御の時系列だけを用いて導出されたが，$Re = 100$ 以外の流れ場に対してもある程度のロバスト性を持つ．特に非線形な近似制御則は，Re が $\pm 20\%$ 異なる流れ場に対しても，状態を平衡点にある程度近づけることができた．また，この非線形な近似制御則は，データ生成に用いた初期値集合に含まれない初期状態をもつ流れ場に対しても，状態を平衡点に近づけられることを確認した．このように，近似制御則は設計点から離れた状態や環境であっても，ある程度有効に機能し得る．

本章では，$\pm 20\%$ の Re 変化を考えたが，実用上はより広範に Re が変化する．広範に Re が変化する制御対象に対して近似制御則を設計するためには，本章の結果からつぎの 2 点が有効であると考えられる．

1. 単一の Re の流れ場に対するモデル予測制御のデータだけではなく，複数の Re の流れ場に対するモデル予測制御のデータを利用する．特に，このとき Re の高い流れ場に対するモデル予測制御のデータを多く用いる．Reynolds 数の高いデータを多く用いるのは，設計点よりも低い流れ場に対しては近似制御則が比較的有効に機能するという 4.5.4 節の結果に基づく．
2. 複数のカーネルに対してそれぞれ近似制御則を設計し，比較する．4.5.4 節において，カーネルによって結果的に得られる近似制御則のロバスト性に差が生じることを確認した．どのカーネルを用いればロバスト性が高められるのかは一般に不明であるので，複数のカーネルに対して近似制御則を設計し，最良のものを選ぶと良いと考えられる．

前章と本章では，全状態量が観測できるという仮定のもとで，流れ場に制御則を適用する数値実験を行なった．しかし，流れ場の状態は流速分布 $\mathbf{u}(\cdot, t)$ であるから，このような仮定はあまり現実的ではない．次章以降では，流れ場が部分的にしか観測できないという仮定のもとで，制御則の設計と適用を行う．

第 5 章

厳密な出力フィードバック制御則

本章では，ノイズが加えられた表面圧力を計測量とする出力フィードバック制御問題を考える．5.1 節ではシステムの厳密なモデルに基づいて出力フィードバック制御則を設計し，5.2 節で数値実験においてこの制御則がわずかな制御量で状態を平衡点に近づけるという制御目標を達成することを確認する．

5.1 厳密な出力フィードバック制御則の設計

本節ではシステムの厳密なモデル (2.1)–(2.11) に基づく出力フィードバック制御則を提案する．提案する出力フィードバック制御則を図 5.1 に示す．この出力フィードバック制御則は EnKF と最適制御則の直列結合によって構成されている．この出力フィードバック制御則では，流れ場の計測量 $y_n := (y_{i,n})_{i=1}^{N_y} \in \mathbb{R}^{N_y}$ から EnKF によって状態の推定量 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_n) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ が計算され，$\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_n)$ から最適制御則によって制御入力 V_n が計算される．

最適制御則は第 3 章において厳密なモデルに基づいて設計されたモデル予測制御の制御則と同じである．また，以降で説明する EnKF もまた厳密なモデルに基づいて設計される．このように提案する制御則は厳密なモデルに基づいているため，高い性能が期待できる．

EnKF の設計

Navier-Stokes 方程式に基づくオブザーバ設計に関する研究として，例えば，バックステッピング法でオブザーバゲインを設計した [94] や拡張 Kalman フィルタを設計した [95] がある．これらの研究では，対象とする流れ場の幾何学的な特徴を利用することで，誤差の収束が保証されたオブザーバの設計や精度の良い Kalman ゲインの計算を行なっている．しかしながら，これらの研究で提案された手法では，流

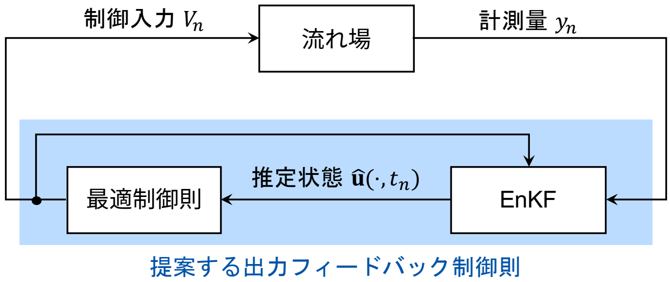


図 5.1: 提案する出力フィードバック制御則

れ場の幾何学的な特徴を利用するという制約のために，オブザーバが設計可能な流れ場が制限されてしまう．EnKF では，状態推定の過程で近似や離散化をする必要があるが，幾何学的な特徴によらず幅広い対象に適用することができる．

EnKF は Evensen によって提案された高次元システム向けの確率フィルタである [62]．EnKF はおもに海洋や気象分野の予測や推定に用いられるが，流れ場に対してもいくつかの適用例がある [96, 97]．

今考えている円柱まわり流れのシステムに対して EnKF を設計する．流速 $\mathbf{u}$ と圧力 p に関する方程式 (2.1)–(2.12) が一意な解を持つとすると，写像 $f : (\mathbf{u}(\cdot, t_{n-1}), V_{n-1}) \mapsto \mathbf{u}(\cdot, t_n)$ と $h_i : \mathbf{u}(\cdot, t_n) \mapsto p(\xi_i, t_n)$, $(i = 1, \ldots, N_y)$ が存在して，システムをつぎのように離散時間の形式で書き表すことができる．

$$\mathbf{u}_n = f\left(\mathbf{u}_{n-1}, V_{n-1}\right) \tag{5.1}$$

$$y_n = h(\mathbf{u}_n) + v_n \tag{5.2}$$

ここで，$\mathbf{u}_n \coloneqq \mathbf{u}(\cdot, t_n)$ であり，$h(\mathbf{u}_n)$ と $v_n \in \mathbb{R}^{N_y}$ はそれぞれ第 i 要素が $h_i(\mathbf{u}_n)$ と $v_{i,n}$ であるベクトルである．式 (5.1) は状態方程式の離散時間での表記であり，式 (5.2) は出力方程式 (2.11) のベクトル表記である．写像 f と h は解析的に求めることはできないが，式 (2.1)–(2.11) の離散化によって数値的に求めることはできる．

Kalman フィルタと同様に，EnKF は事前推定と事後推定を逐次的に繰り返す．時刻 t_{n-1} における事前推定では，t_{n-1} の状態の事後推定量から，次時刻 t_n の状態の事前推定量を計算する．つぎに時刻 t_n における事後推定では，t_n の状態の事後推定量と計測量 y_n から，時刻 t_n の状態の事後推定量を計算する．そして，時刻 t_n の状態の事後推定量の期待値が状態の推定量として出力される．

Kalman フィルタとの違いは，EnKF では状態の事前推定量や事後推定量を多数の粒子によって近似する点である．Kalman フィルタでは，状態の自己共分散を計算しなければならないため，状態が無限次元量である場合には空間離散化をしても数値的な取り扱いが困難である場合が多い．一方で，EnKF では確率分布を多数の粒子によって近似することで，状態の自己共分散の計算を回避することができる．

いま，時刻 t_{n-1} の事後推定量が $N_{\mathrm{en}}(\in \mathbb{N})$ 組の状態 $\mathbf{u}^{(i)}_{n-1|n-1}$, $i = 1, \ldots, N_{\mathrm{en}}$ で与えられているとする．このとき，次時刻 t_n の各粒子の状態 $\mathbf{u}^{(i)}_{n|n-1}$ とそれに対応する出力 $h^{(i)}_{n|n-1}$ が次式に基づいて計算される．

$$\mathbf{u}^{(i)}_{n|n-1} = f(\mathbf{u}^{(i)}_{n-1|n-1}, V_{n-1}), \quad i = 1, \ldots, N_{\mathrm{en}} \tag{5.3}$$

$$h^{(i)}_{n|n-1} = h(\mathbf{u}^{(i)}_{n|n-1}), \quad i = 1, \ldots, N_{\mathrm{en}} \tag{5.4}$$

EnKF では，時刻 t_n の期待値と共分散の事前推定量は $(\mathbf{u}^{(i)}_{n|n-1})$ と $(h^{(i)}_{n|n-1})$ の標本平均と標本共分散によって推定される．すなわち，期待値 $\bar{\mathbf{u}}_{n|n-1}$, $\bar{h}_{n|n-1}$ と共分散 $\mathrm{Cov}(\mathbf{u}_n, y_n)$, $\mathrm{Cov}(y_n, y_n)$ はつぎのように計算される．

$$\bar{\mathbf{u}}_{n|n-1} = \frac{1}{N_{\mathrm{en}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{en}}} \mathbf{u}^{(i)}_{\mathrm{f},n}(\xi), \quad \bar{h}_{n|n-1} = \frac{1}{N_{\mathrm{en}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{en}}} h^{(i)}_{n|n-1} \tag{5.5}$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}_n, y_n) \simeq \frac{1}{N_{\mathrm{en}} - 1} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{en}}} (\mathbf{u}^{(i)}_{n|n-1} - \bar{\mathbf{u}}_{n|n-1})(h^{(i)}_{n|n-1} - \bar{h}_{n|n-1})^{\mathsf{T}} \tag{5.6}$$

$$\mathrm{Cov}(y_n, y_n) \simeq \frac{1}{N_{\mathrm{en}} - 1} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{en}}} (h^{(i)}_{n|n-1} - \bar{h}_{n|n-1})(h^{(i)}_{n|n-1} - \bar{h}_{n|n-1})^{\mathsf{T}} + \sigma_{\mathrm{m}}^2 I_{N_y} \tag{5.7}$$

ここで，$\sigma_{\mathrm{m}}^2 I_{N_y}$ は計測ノイズ v_n の共分散行列である．二つの共分散行列を用いて，Kalman ゲイン $K(\xi) \in \mathbb{R}^{2\times N_y}$ がつぎのように計算される．

$$K = \mathrm{Cov}(\mathbf{u}_n, y_n)\left\{\mathrm{Cov}(y_n, y_n)\right\}^{-1} \tag{5.8}$$

つぎに，時刻 t_n において計測量 y_n 得られたとする．このとき，Kalman ゲイン K を用いて各粒子の状態がつぎのように修正される．

$$\mathbf{u}_{n|n}^{(i)} \coloneqq \mathbf{u}_{n|n-1}^{(i)} + K\left(y_n - h_{n|n-1}^{(i)} - v_n^{(i)}\right) \tag{5.9}$$

ここで，$v_n^{(i)}$ は確率過程 v_n から独立にサンプリングして得られる値である．状態の事後推定量は $(\mathbf{u}_{n|n}^{(i)})$ で与えられる．特に，EnKF は $(\mathbf{u}_{n|n}^{(i)})$ の標本平均を時刻 t_n における状態の推定量として出力する．すなわち，

$$\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_n) = \frac{1}{N_{\mathrm{en}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{en}}} \mathbf{u}_{n|n}^{(i)} \tag{5.10}$$

提案する出力フィードバック制御則において，EnKF によって推定された状態 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_n)$ は最適制御則に与えられる．

5.2　数値実験

本節では，提案する出力フィードバック制御則の性能を確認するために，$Re = 100$ の円柱まわり流れの制御の数値実験を行う．まず，多数の点で計測するシステムに対して制御則を適用する．つぎに，センサの数と制御則の性能の関係について調査する．

5.2.1　多数の点で計測する場合

システムと EnKF に関するパラメータを表 5.1 に示す．ここでは，圧力孔を用いた点での計測というよりも，感圧塗料などを用いた面的な計測を想定する．噴出口を除く円柱表面の $N_y = 211$ 点における圧力が利用可能である．ただし，各点で得られる圧力にはそれぞれ標準偏差 $\sigma_{\mathrm{m}} = 1.2 \times 10^{-2}$ の計測ノイズが加算されている．この計測ノイズの大きさは動圧の数 % 程度である．アンサンブル数は $N_{\mathrm{en}} = 1000$ とした．初期アンサンブル $(\mathbf{u}_{0|0}^{(i)})$ には，無制御時において周期運動をおこなう流速分布の時間平均値を用いた．そのほかのシステムや制御則に関するパラメータは表 3.1 に記したものと同一である．

表 5.1: システムと EnKF に関するパラメータ

パラメータ	**数値**
計測点数 N_y	211
計測ノイズの標準偏差 σ_{m}	1.2×10^{-2}
アンサンブル数 N_{en}	1000

部分的な計測に基づく制御の性能劣化の影響を評価するために，第 3 章の全状態が観測できるという仮定のもとでのモデル予測制御の結果と比較を行う．表記の簡略化のために，以降では第 3 章で適用したモデル予測制御を単純に状態フィードバック制御と表記する．

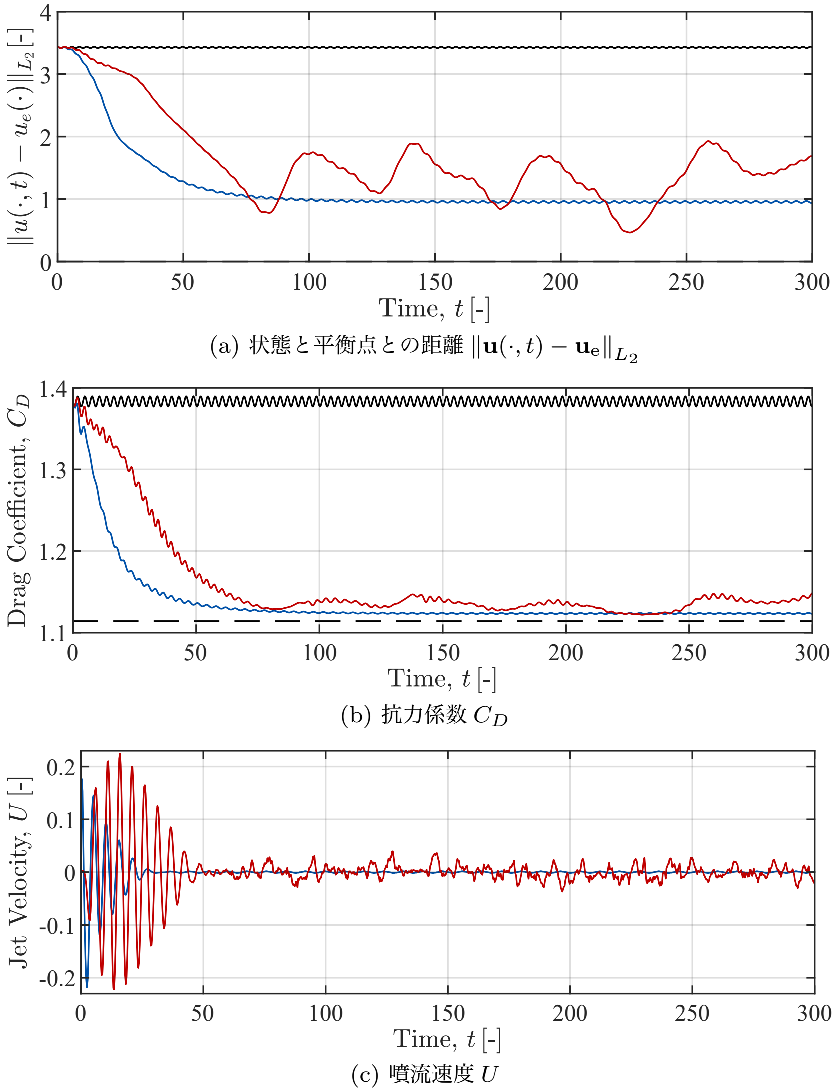


図 5.2:　提案する出力フィードバック制御と状態フィードバック制御を適用したときの各変数の時系列．出力フィードバック制御と状態フィードバック制御を適用したときの結果をそれぞれ赤線と青線で示している．また，比較のために，無制御時と平衡点における結果をそれぞれ黒の実線と破線で示している．

提案する出力フィードバック制御則と状態フィードバック制御のもとでの距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ と抗力係数，噴流速度の時系列をそれぞれ図 5.2(a) と 5.2(b)，5.2(c) に示す．出力フィードバック制御と状態フィードバック制御を適用したときの結果をそれぞれ赤線と青線で示している．また，一部の図には比較のために，無制御時と平衡点における結果をそれぞれ黒の実線と破線で示している．図 5.2(a) から，部分的にしか計測できない影響で出力フィードバック制御は，状態フィードバック制御ほど距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ を縮めることができていないことがわかる．時間平均では出力フィードバック制御の場合の方が，状態フィードバック制御の場合よりも平衡点との距離が 0.44 だけ大きい．しかし，出力フィードバック制御によって状態と平衡点との距離を明らかに近づけられている．図 5.3(a) と (b) にそれぞれ，出力フィードバック制御を適用したときの時刻 $t=0$ と $t=300$ における渦度分布を示す．出力フィードバック制御によって渦放出に特有の渦度の非対称性が改善されていることが確認できる．また，図 5.2(b) から，十分時間が経過した後では，出力フィードバック制御と状態フィードバック制御で抗力係数にそれほど大きな差は見られない．抗力係数の減少幅は状態フィードバック制御では 18.8% であったのに対し，出力フィードバック制御では 18.0% である．図 5.2(c) に示すように，出力フィードバック制御による噴

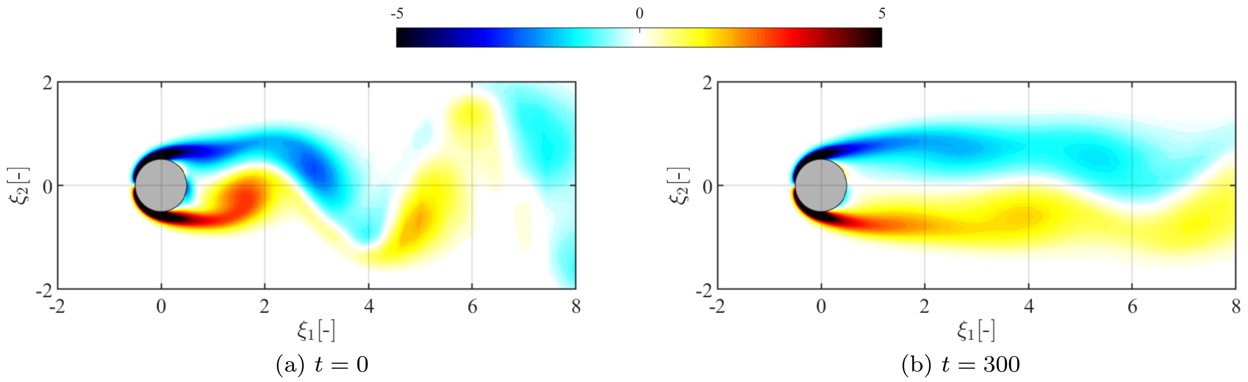


図 5.3: 提案する出力フィードバック制御の適用前と適用後の渦度分布

流は状態フィードバック制御による噴流と比べて強い傾向にある．運動量係数 C_μ の区間 $[0, 300]$ にわたる平均値は，状態フィードバック制御則では 2.71×10^{-4} であったのに対し，出力フィードバック制御則では 1.00×10^{-3} である．出力フィードバック制御則の内部の最適制御則は，第 3 章で設計したように可能な限り弱い噴流で流れ場を制御しようとする．しかし出力フィードバック制御では，部分的な計測に基づいて推定されるやや不正確な状態に基づいて制御入力が計算される．この制御入力は正しい状態に基づいて計算される最適制御入力とは一致しないために，結果的に出力フィードバック制御では噴流が強くなったと考えられる．とはいえ，出力フィードバック制御では全時間区間を通じて一様流の 0.1% の運動量しか流れ場に投入しておらず，それほど強い噴流を噴出しているわけではない．

図 5.2(c) において，制御開始時に状態フィードバック制御のもとでは噴流が急に強くなるのに対して，出力フィードバック制御のもとでは噴流は徐々に強くなる．出力フィードバック制御において噴流が徐々に強くなるのは，EnKF における初期アンサンブルに上下対称の流速分布を与えているためである．このために，はじめは EnKF はほぼ上下対称な流速分布を推定量として出力する．流速分布が上下対称である場合に噴流を噴出すると逆に平衡点から遠ざかってしまうために，EnKF から上下対称の流速分布をうけとった最適制御則は噴流を出さない判断を下す．

図 5.4(a) と (b) には，それぞれ出力フィードバック制御のもとで EnKF が推定した時刻 $t = 0$ と $t = 300$ において渦度の等高線を示している．点線が EnKF が推定した渦度の等高線で，実線が真の渦度の等高線である．初期時刻 $t = 0$ では推定値が真値と全く異なっているが，$t = 300$ では推定値が真値に一致している．このような EnKF による正確な状態推定が制御決定において役立っていると考えられる．

流れ場に対して EnKF を適用した先行研究 [96, 97] では，フィードバック制御のもとでの状態推定は行われていない．LQG による線形システムの制御が状態推定精度に影響を与えないことはよく知られているが，非線形なフィードバック制御が非線形システムに対する状態推定にどのような影響を与えるかは一般には知られていない．そこで本研究では，提案するフィードバック制御が状態推定に与える影響を調べるために，出力フィードバック制御と無制御のもとでの流れ場において EnKF が推定する状態の誤差を比較する．

図 5.5 に，それぞれ出力フィードバック制御と無制御のもとでの推定誤差 $\|\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_n) - \mathbf{u}(\cdot, t_n)\|_{L_2}$ の時系列を赤線と黒線で示す．出力フィードバック制御のもとでは，EnKF によって推定誤差を初期の 1/10 以下程度にまで減少させている．しかしながら，出力フィードバック制御のもとでの推定誤差は無制御のもとでの推定誤差と比べて大きいことがわかる．この違いは，出力フィードバック制御のもとでは状態に対する計測の感度が低下するために，生じているのではないかと考えられる．計測の感度が低下すると，

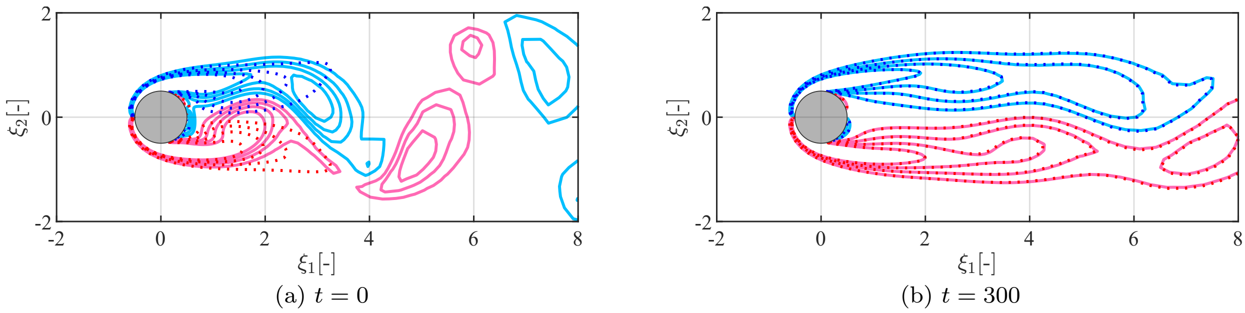


図 5.4: 出力フィードバック制御の開始時と終了時において，EnKF によって推定された渦度の等高線

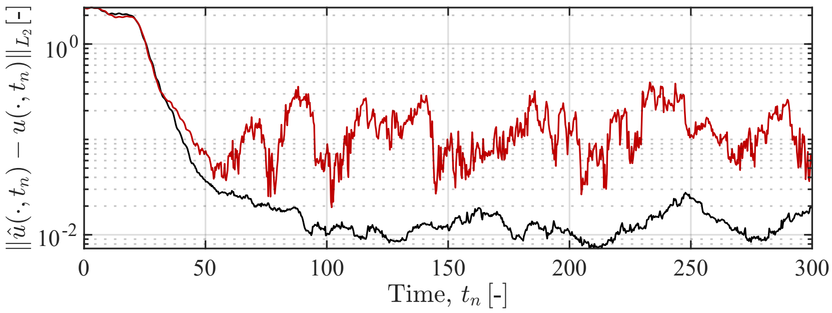


図 5.5: EnKF によって推定された状態と真の状態との誤差 $\|\hat{\mathbf{u}}(\cdot,t_n)-\mathbf{u}(\cdot,t_n)\|_{L_2}$ の時系列．赤線と黒線は，それぞれ出力フィードバック制御と無制御のもとでの結果を表す．

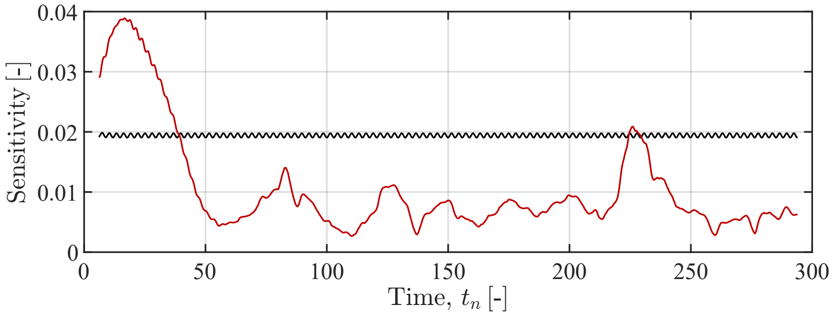


図 5.6: 計測の状態に対する感度の時系列．赤線と黒線は，それぞれ出力フィードバック制御と無制御のもとでの結果を表す．

計測信号に占めるノイズの割合が増加して，状態の推定が難しくなる．

出力フィードバック制御のもとで計測の感度が低下していることを確認するために，次式を用いて計測の感度を計算する．

$$S_n = A_{\mathrm{m}}(n)/A_{\mathrm{s}}(n), \quad n = N_3, N_3+1, \dots, \tag{5.11}$$

ここで，$N_3 \in \mathbb{N}$ は設計パラメータであり，$A_{\mathrm{m}}(n)$ と $A_{\mathrm{s}}(n)$ は，それぞれ時刻 t_n における計測信号と状態信号の変動の強度を表し，つぎのように推定される．

$$A_{\mathrm{m}}(n) = \sqrt{\frac{1}{N_y}\sum_{n'=n-N_3}^{n+N_3}\left\|h(x_{n'}) - \frac{1}{2N_3+1}\sum_{n'=n-N_3}^{n+N_3}h(x_{n'})\right\|^2}, \tag{5.12}$$

$$A_{\mathrm{s}}(n) = \sqrt{\sum_{n'=n-N_3}^{n+N_3}\left\|\mathbf{u}(\cdot,t_{n'}) - \frac{1}{2N_3+1}\sum_{n'=n-N_3}^{n+N_3}\mathbf{u}(\cdot,t_{n'})\right\|_{L_2}^2} \tag{5.13}$$

図 5.6 は，$N_3 = 20$ としたときの，フィードバック制御と無制御のもとでの感度 S_n の時系列を表している．黒線で示された無制御のもとでの感度はそれほど変動しない．一方で，赤線で示されたフィードバッ

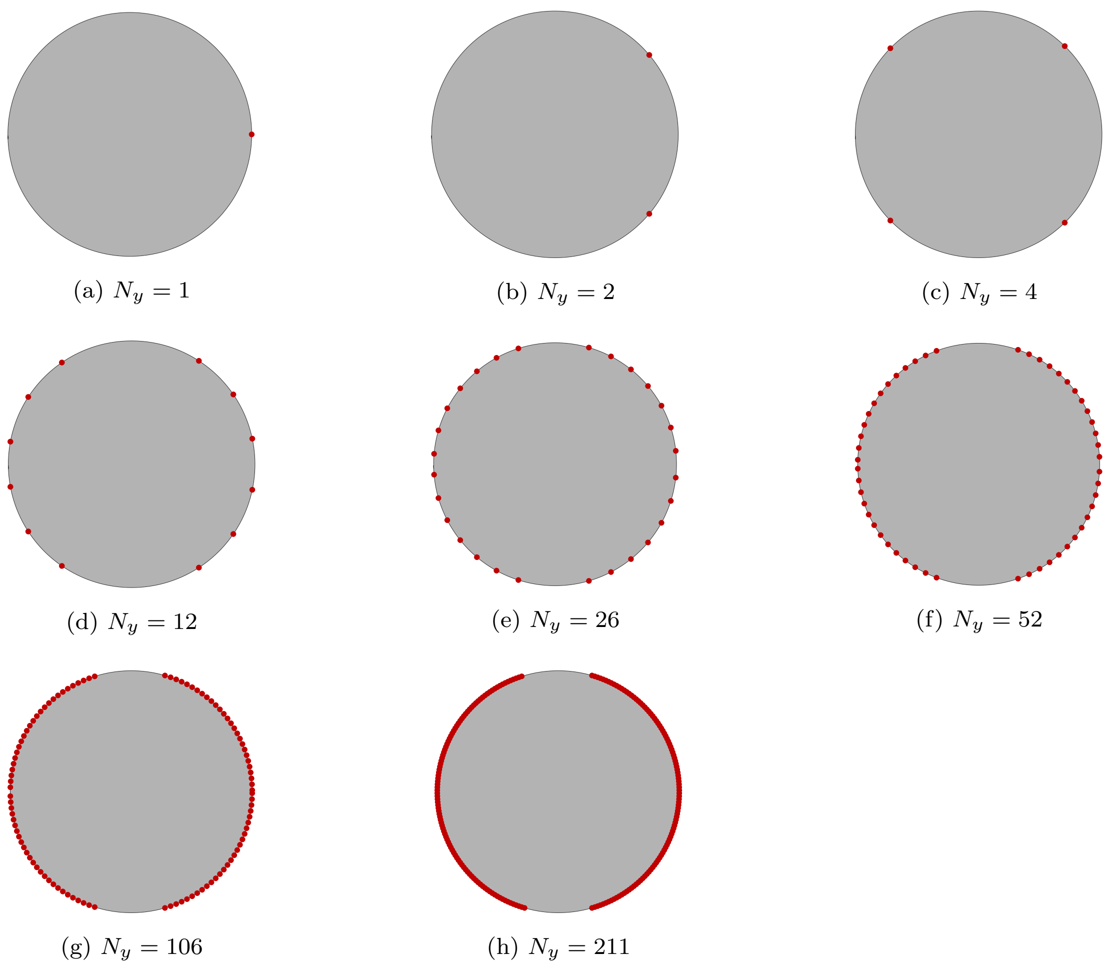
ク制御のもとでの感度は最初は増加するものの，時刻 $t = 40$ あたりで無制御時の感度を下回る．その後は感度の低い状態が続く．

フィードバック制御のもとでの流速分布に対する表面圧力の感度の低下は物理的な観点からみれば自然な現象である．図 5.3(b) で表示されているように，渦放出が緩和されると，流速分布は主に円柱のより後方で振動するようになる．円柱のかなり後方での流速の振動は，円柱表面での圧力に影響を与えにくい．

5.2.2　センサ数と制御則の性能の関係

前の小節では，表面圧力の計測点数が多数あるシステムに対して制御則を適用した．この小節では，$Re = 100$ の円柱まわり流れの噴流による制御のためにどれだけの計測点が必要であるかを調査するために，計測点数が異なる複数のシステムに対して制御則を適用する．

計測点数がそれぞれ $N_y = 1, 2, 4, 12, 26, 52, 106, 211$ 個あるシステムに対して提案する制御則を適用する．計測点は，図 5.7 に示すように円柱の上下で対称になるように配置されている．計測点が密に配置されると，計測ノイズによる影響を除去しやすくなる．これは，計測される物理量が連続である一方で，計測ノイズは独立同分布の確率分布に従うためである．ここでは，このような計測ノイズのならし効果を



(a) $N_y = 1$　(b) $N_y = 2$　(c) $N_y = 4$　(d) $N_y = 12$　(e) $N_y = 26$　(f) $N_y = 52$　(g) $N_y = 106$　(h) $N_y = 211$

図 5.7: 計測点の配置．赤い点が計測点を表す．

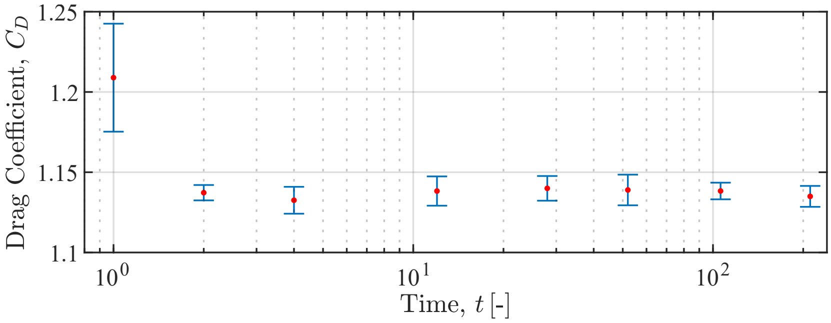


図 5.8: 計測点数と制御則の性能の関係．赤い点は区間 [100, 300] にわたる抗力係数の平均値，青線は抗力係数の変動を表す $\pm\sigma$ のエラーバーである．

排除するために，つぎのようにノイズの標準偏差 σ_{m} を定める．

$$\sigma_{\mathrm{m}} = 1.2 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{N_y}{211}} \tag{5.14}$$

ここで，1.2×10^{-2} と 211 はそれぞれ，前小節における計測ノイズの標準偏差と計測点数の数値である．この式に基づいて定められるノイズの標準偏差 σ_{m} は，計測点数 N_y が多いほど，大きくなる．標準偏差を $\sqrt{N_y}$ に比例するように設定しているのは，独立同分布の $\mathcal{N}(0, \sigma_{\mathrm{m}}^2)$ に従う N_y 個の確率変数の算術平均が $\mathcal{N}(0, \sigma_{\mathrm{m}}^2/N_y)$ に従うことからの類推による．

図 5.8 に数値実験によって得られた，計測点数と制御則の性能との関係を示す．赤い点は，制御則を流れ場に適用したときの区間 [100, 300] にわたる抗力係数の平均値を表す．青線は，区間 [100, 300] における抗力係数の変動を表す $\pm\sigma$ のエラーバーを表す．計測点数と変動を表すエラーバーの間には明確な傾向はみられない．一方で，抗力係数の平均値は，計測点数が $N_y \geq 2$ の場合では，1.13 から 1.14 の範囲に収まるが，計測点数が $N_y = 1$ の場合には 1.2 と大きな値をとる．このように，計測点数が 2 以上あれば，提案する制御則にしたがう二つの噴流によって，$Re = 100$ では円柱の抗力をかなり低減することができる．特に計測点数が 2 以上ある場合には制御則の性能に大きな差異が見られないことから，計測ノイズが小さければ，二つの計測点だけで十分である．逆に計測ノイズが大きいセンサであっても，計測点が十分な数があれば高い制御効果が期待できる．

5.2.3　先行研究との比較

この小節では，本研究と同様の制御問題を扱った先行研究との比較を行う．Rabault らは本研究と同じく，円柱の表面から噴出される二つの噴流の速度を操作することで，$Re = 100$ の円柱まわり流れの渦放出を抑制する制御問題を扱った [31]．彼らによって設計された強化学習制御器を，5 個の圧力センサが円柱まわり流れに配置されたシステムに適用したところ，抗力係数が 6% 程度低減した．一方で本研究で設計した制御則は，円柱表面上に 2 点しか圧力センサが配置されていない場合においても，抗力係数 18% 程度低減することができる．このように本研究で設計した制御則のほうが，センサ数が少なく，計測ノイズが存在するシステムに対しても，高い制御効果が得られる．

中村らも本研究と同様に円柱表面から噴出される複数の噴流速度を制御入力とする，$Re = 100$ の円柱まわり流れの制御問題を扱った [61]．この研究では最適制御則とあるオブザーバとの直列結合によって出力フィードバック制御則が設計される．このオブザーバは，非線形 Navier-Stokes 方程式に計測量の誤差フィードバック項を加えることで構成されたものである．この出力フィードバック制御則は計測量が速度であるときには，渦放出の抑制に成功している．しかし，表面圧力が計測量である場合には，推定がうま

く行えず，渦放出が抑制できないと報告されている．推定がうまく行えなかった要因として，オブザーバゲインが試行錯誤的に決められていたために，適切にゲインが設定されなかったことが考えられる．表面圧力が計測量の場合，どのようにゲインを設定すれば推定誤差を減少させることができるか，一見して明らかではない．一方で，本研究で用いた EnKF では，確率モデルに基づいてオブザーバゲインを適切に求めることができる．このために，本研究では表面圧力が計測量の場合でも状態を推定することができ，結果的に渦放出が抑制することができたと考えられる．

5.2.4 計算時間

提案する出力フィードバック制御則は計算コストが高いことが欠点である．制御入力の計算には，表 3.2 の計算環境を使用した．各サンプリング時刻あたりに制御入力の計算に要した時間は 274 秒であった．このうち，最適制御則には 156 秒，EnKF には 118 秒の計算時間を要した．最適制御則に計算時間がかかるのは，第 3 章で述べたように，Navier-Stokes 方程式と随伴方程式の数値積分を繰り返し実行しなければならないからである．EnKF において計算時間がかかるのは，各粒子において Navier-Stokes 方程式を数値的に積分しなければならないためである．EnKF の計算コストはアンサンブル数 N_{en} に比例するため，単純に N_{en} を減らすことによってある程度は計算コストを抑えることができる．しかしながら，EnKF の推定精度と N_{en} の間にはトレードオフがあるため，N_{en} を減らすことによる計算コストの低減には限界がある．

5.3 結論

本章では，流れ場の厳密なモデルに基づく出力フィードバック制御則を提案した．提案する制御則は，厳密なモデルに基づく EnKF と最適制御則の直列結合によって構成される．この制御則では，計測量から EnKF によって状態が推定され，推定された状態に基づいて最適な制御入力が計算される．

提案する制御則の有効性を検証するために，$Re = 100$ の円柱まわり流れに制御則を適用する数値実験を行なった．この円柱まわり流れの制御システムでは，ノイズが加えられた表面圧力が計測量として制御決定に利用される．数値実験の結果，提案する制御則によって円柱まわり流れの状態を平衡点にある程度近づけられることがわかった．また，これによって渦放出が抑制され，円柱の抗力が減少した．特に提案する制御則は，表面圧力の計測点が 2 点しかない場合においても，円柱の抗力をかなり低減することができる．この結果は，先行研究 [31] で提案されたモデルフリーの制御則による結果を上回っている．提案する制御則では，事前に流れ場の厳密なモデルに関する情報をうまく組み込んでいるため，高い性能が得られると考えられる．ただし，モデルフリーの制御則では当然ながら流れ場のモデル化をする必要がないが，提案する制御則では流れ場のモデル化を行わなければならないという設計上のコストがある．また，提案する制御則ではモデルが複雑であるがゆえに，オンラインでの計算コストが高くなる傾向にある．実システムへの実装のためには，提案する制御則の計算コストの低減が必要である．

第 6 章

出力フィードバック制御則の低次元化

本章では，流れ場の厳密なモデルに基づいて設計された制御則を利用した低次元な出力フィードバック制御則の設計法を提案する．

6.1 提案する制御則設計法の概要

前章で設計した流れ場の厳密なモデルに基づく出力フィードバック制御則はオンラインでの計算コストが高いために，実システムへと実装することが困難である．厳密な制御則の計算コストが高い一因は，Navier-Stokes 方程式の数値積分をしなければならないことにある．Navier-Stokes 方程式を数値積分するためには，空間離散化をする必要があり，非常に高次元な微分方程式の数値積分が求められる．この高次元性が厳密な制御則の高い計算コストにつながる．

そこで，本研究では厳密な制御則の低次元化を行うことで，計算コストの低い制御則を再設計する手法を提案する．提案する制御則設計法の概要を図 6.1 に示す．提案手法は大まかにつぎのような手順で構成される．

1 厳密な出力フィードバック制御則をオフラインで流れ場に適用することで，流れ場の閉ループ系に関する時系列を取得する．

2 ステップ 1 で取得した状態の時系列 $(\mathbf{u}_n^*)$ に POD を適用することで，低次元な状態量 $\mathbf{x}_n$ を見出す．

3-1 POD によって低次元化された推定状態と最適制御入力の時系列 $(\hat{\mathbf{x}}_n^*, V_n^*)$ から最適制御則を近似し，低次元状態フィードバック制御則 $\hat{\mathbf{x}}_n \mapsto V_n$ を導出する．

3-2 低次元化された状態と表面圧力，最適制御入力の時系列 $(\mathbf{x}_n^*, h(\mathbf{u}_n^*), V_n^*)$ から低次元動的モデルを導出する．そして，この低次元モデルに対してオブザーバを設計する．

4 ステップ 3-1 と 3-2 で得られた低次元状態フィードバック制御則と低次元オブザーバを結合することで，低次元な出力フィードバック制御則を構成する．

提案手法によって設計される低次元制御則は，状態 $\mathbf{u}_n (= \mathbf{u}(\cdot, t_n))$ の低次元量 $\mathbf{x}_n$ に基づく．したがって，厳密な制御則よりも短時間に制御入力を計算することができる．また，低次元制御則は厳密な制御則の低次元化と近似によって得られるため，設計に用いた時系列まわりでは厳密な制御則と同程度の性能が期待できる．

これまでに，数多くの研究で流れ場に対する低次元な制御則の設計法が提案されてきた．本研究の提案する低次元な制御則の設計法の従来手法との違いは，厳密な制御則が生成するデータを利用する点であ

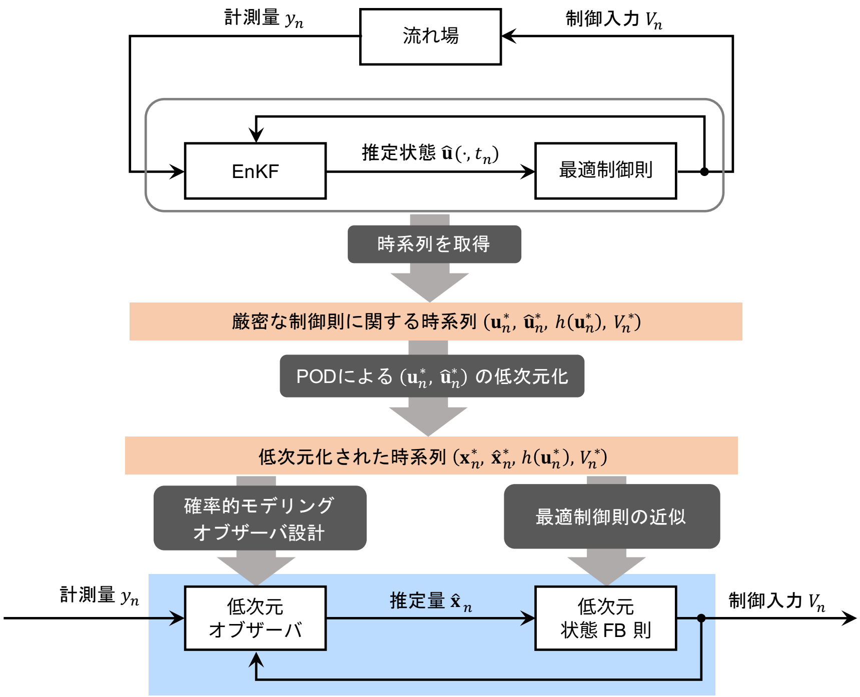


図 6.1: 提案する制御則設計法の概要

る．データ駆動で低次元モデルを導出する場合には，どのようなデータを用いるかが重要である．不適切なデータから導出される低次元モデルでは，閉ループ制御下において流れ場の運動を精度よく予測することができない．この結果，残差システムの影響が大きくなり，スピルオーバや低次元モデルと残差システムとの干渉によって，制御系が意図した挙動をとらない恐れがある．このような事情から，流れ場に対する低次元制御則の設計において，低次元モデルを導出するためのデータは慎重に選択される．流れ場において非線形性の影響が弱い場合には，線形システム同定の理論に基づいてインパルス応答や正弦波応答が低次元モデルの導出に用いられること多い．一方で，非線形性の影響が強い場合には，物理的洞察や試行錯誤に基づいて低次元モデルを導出するためのデータが決定されることが少なくない (例えば, [49, 70])．これは，線形システム同定とは異なり，非線形システム同定では同定に使用すべき応答に関しての網羅的な理論的枠組みが存在しないからである．本研究では物理的洞察や試行錯誤に基づくデータの選択は行わず，厳密な制御則が生成するデータを利用する．厳密な制御則が生成するデータから導出される低次元モデルは，厳密な制御則を模倣する低次元な制御則を設計するという用途においては，適切なモデルになっていると考えられる．

本章の構成を以下に示す．6.2–6.8 節で提案する制御則設計法を具体的に説明し，6.9 節で提案手法によって設計される制御則の有効性を数値実験で確認する．まず，6.2 節では，厳密な制御則に関するデータの取得方法について説明する．つぎに，6.3 節では，取得したデータから状態の低次元な表現を見出す．6.4 節では，第 4 章と同様にして最適制御則を近似する．6.5 節では，流れ場の低次元モデルに基づく状態推定で生じる課題について説明する．6.6 節では，状態推定で生じる課題に対処するために使用する多変数 Gauss 過程回帰について説明する．6.7 節では，多変数 Gauss 過程回帰によって流れ場の低次元確率システムを導出する．6.8 節では，導出された低次元確率システムに基づくオブザーバを設計し，6.4 節での近似制御則と結合することで出力フィードバック制御則を構成する．6.9 節では，提案手法によって設計された制御則を $Re = 100$ の円柱まわり流れに適用する．また，この制御則の初期状態や Re の変化に対するロバスト性を調べる．6.10 節では，厳密な制御則と低次元制御則の計算量について考察する．

6.2　データの取得

第 4 章で最適制御則を近似するためのデータを取得したときと同様の手法で，前章の厳密な制御則と制御対象に関する時系列を取得する．まず，制御則を有効に機能させたい作動域を表す初期値集合 $\mathcal{V}_0$ を定める．つぎに，初期値集合 $\mathcal{V}_0$ から無作為に N_1 個の初期状態 $(\mathbf{u}^*_{0,m})_{m=1}^{N_1}$ をサンプルする．そして，各初期状態 $\mathbf{u}^*_{0,m}$, $(m=1,\dots,N_1)$ に対して区間 $[0,t_{N_2}]$ にわたって厳密な制御則を適用する．これによって，状態の時系列 $(\mathbf{u}^*_{n,m})_{n=0}^{N_2}$ と観測量の時系列 $(h(\mathbf{u}^*_{n,m}))_{n=1}^{N_2}$，最適制御入力の時系列 $(V^*_{n,m})_{n=0}^{N_2-1}$ と推定状態の時系列 $(\hat{\mathbf{u}}^*_{n,m})_{n=0}^{N_2}$ を取得する．

なお，以降の説明では表記の簡略化のために，$\mathcal{V}_0$ からサンプルする初期状態の数が $N_1=1$ の場合を考える．そして，初期状態を区別するための添字 m を省略して，各時系列を $(\mathbf{u}^*_n, h(\mathbf{u}^*_n), V^*_n, \hat{\mathbf{u}}^*_n)$ で表す．以降の低次元化や回帰において時系列が複数ある ($N_1>1$ の) 場合への拡張は容易である．

6.3　POD による流速分布の低次元化

流れ場の状態である流速分布は無限次元の物理量である．しかし，流れ場はある低次元な空間かその空間の近傍で運動することが少なくない．POD では，そのような低次元な空間の基底を流速分布の時系列によって求める．

流速分布をつぎのように近似する．

$$\mathbf{u}(\xi,t)\simeq\sum_{i=1}^{r-1}\phi_i(\xi)a_i(t)+\phi_r(\xi)U(t)+\mathbf{u}_{\mathrm{e}}(\xi), \tag{6.1}$$

ここで，$\phi_i:\Omega\to\mathbb{R}^2$, $(i=1,\dots,r-1)$ は未知の関数，$\phi_r:\Omega\to\mathbb{R}^2$ は $\dot{U}(t)=1$ の噴流で瞬間的に誘起される既知の流速分布，$a:=[a_1,\dots,a_{r-1}]^{\mathsf{T}}:[0,\infty)\to\mathbb{R}^{r-1}$ は時間変化を表す関数である．式 (6.1) では，流速分布 $\mathbf{u}$ が ξ と t に関して変数分離され，$r(\in\mathbb{N})$ 個の関数列 $(\phi_i)_{i=1}^{r}$ の線形和によって書き表されている．関数列 $(\phi_i)_{i=1}^{r-1}$ は POD が求める低次元な空間の基底であり，$a(t)$ が低次元空間での座標である．関数列 $(\phi_i)_{i=1}^{r-1}$ は POD 基底，係数 $a(t)$ は POD モードと呼ばれる．

POD では流速分布の近似式 (6.1) の時系列 $(\mathbf{u}^*_n)_{n=0}^{N}$ に関する誤差が最小になるように POD 基底 $(\phi_i)_{i=1}^{r-1}$ が求められる．具体的には，つぎの最小化問題を解くことで POD 基底 $(\phi_i)_{i=1}^{r-1}$ が求められる．

$$\text{Find }(\phi_i)_{i=1}^{r-1}\text{ and }(a^*_{i,n})_{i,n=1,0}^{r-1,N}\text{ that minimize}\sum_{n=0}^{N}\|\tilde{\mathbf{u}}^*_n-\sum_{i=1}^{r-1}\phi_i a^*_{i,n}\|^2, \tag{6.2}$$

$$\text{subject to }\langle\phi_i,\phi_j\rangle=\delta_{i,j},\quad 1\le i,j\le r-1, \tag{6.3}$$

ここで，$\tilde{\mathbf{u}}^*_n:=\mathbf{u}^*_n-\phi_U U^*(t_n)-\mathbf{u}_{\mathrm{e}}$ は $\mathbf{u}^*_n$ から既知量を除いた量，$a^*_{i,n}$ は $\tilde{\mathbf{u}}^*_n$ の軸 ϕ_i に対応する座標，$\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタである．また，式 (6.2)–(6.3) における $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と $\|\cdot\|$ はそれぞれ，Ω 上で定義された関数の内積とそれから導かれるノルムである．最小化問題の拘束条件 (6.3) は POD 基底に正規直交性を課す．したがって，最小化問題 (6.2)–(6.3) は，近似式 (6.1) の時系列 $(\mathbf{u}^*_n)_{n=0}^{N}$ に関する誤差を最小化する正規直交な基底を求める問題であるといえる．この最小化問題は変数を離散化することで，数値的には容易に解くことができる．POD の数値解法については，文献 [98] が詳しい．

POD 基底の正規直交性から座標 $a_i(t)$ は流速分布 $\mathbf{u}(\cdot,t)$ の ϕ_i に関する射影によって求められる．すなわち，

$$a_i(t)=\langle\phi_i,\tilde{\mathbf{u}}(\cdot,t)\rangle,\quad i=1,\dots,r-1. \tag{6.4}$$

式 (6.4) を用いることで流速分布 $\mathbf{u}(\cdot, t)$ から POD モード $a(t)$ を求めることができ，式 (6.1) を用いることで POD モード $a(t)$ と噴流速度 $U(t)$ から流速分布 $\mathbf{u}(\cdot, t)$ を再構築することができる．EnKF によって推定される流速分布 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_n)$ に関しても，同じ POD 基底に対して同様の関係を考える．すなわち，

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi, t_n) \simeq \sum_{i=1}^{r-1} \phi_i(\xi)\hat{a}_i(t_n) + \phi_r(\xi)\hat{U}(t_n) + \mathbf{u}_{\mathrm{e}}(\xi), \tag{6.5}$$

$$\hat{a}_i(t_n) = \left\langle \phi_i, \tilde{\hat{\mathbf{u}}}(\cdot, t_n) \right\rangle, \quad i = 1, \dots, r-1. \tag{6.6}$$

これによって，EnKF によって推定される流速分布 $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ と対応する POD モード $\hat{a}(t_n)$ の間を行来することができる．この式を流速分布の時系列 $(\mathbf{u}_n^*)_{n=0}^N$ と EnKF によって推定された流速分布の時系列 $(\hat{\mathbf{u}}_n^*)_{n=1}^N$ に適用することで，それぞれの POD モードの時系列 $(\mathbf{a}_n^*)_{n=0}^N$ と $(\hat{\mathbf{a}}_n^*)_{n=1}^N$ を得ることができる．

低次元制御則は，式 (6.1) の右辺における r 個の時間変数 $a(t)$ と $U(t)$ を状態とするシステムに基づいて制御則が設計される．この低次元化された状態を $x(t) \coloneqq [a^\mathsf{T}(t), U(t)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^r$，またそのサンプリング時刻 t_n での値を $\mathbf{x}_n \coloneqq x(t_n) \in \mathbb{R}^r$，その推定量を $\hat{\mathbf{x}}_n \coloneqq [\hat{a}_1(t_n), \dots, \hat{a}_{r-1}(t_n), \hat{U}(t_n)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^r$ とおく．低次元制御則の設計には，時系列 $(\mathbf{u}_n^*)_{n=0}^N$ と $(\hat{\mathbf{u}}_n^*)_{n=0}^{N-1}$ を低次元化した時系列 $(\mathbf{x}_n^*)_{n=0}^N$ と $(\hat{\mathbf{x}}_n^*)_{n=0}^{N-1}$ が用いられる．この低次元化された時系列 $(\mathbf{x}_n^*)_{n=0}^N$ と $(\hat{\mathbf{x}}_n^*)_{n=0}^{N-1}$ の導出には，式 (6.4) と式 (6.6) を用いることができる．

6.4　最適制御則の近似

4.4 節と同様に，最適制御則の入出力の時系列に Gauss 過程回帰を適用することで最適制御則を近似する．ただし，4.4 節では流速分布を入力とする近似制御則 $\hat{\mu} : \mathbf{u}(\cdot, t_n) \mapsto V_n$ を求めたが，本節では低次元状態量を入力とする近似制御則 $\hat{\mu}_{\mathrm{r}} : \hat{\mathbf{x}}_n \mapsto V_n$ を求める．

Gauss 過程回帰を適用するために，低次元状態の推定量 $\hat{\mu}_{\mathrm{r}}$ と最適制御入力 V_n^{opt} に関してつぎの関係が成り立つと仮定する．

$$V_n^{\mathrm{opt}} = \mu_{\mathrm{r}}(\hat{\mathbf{x}}_n) + \epsilon_{3,n} \tag{6.7}$$

ここで，確率関数 μ_{r} は Gauss 過程 $\mathcal{GP}(0, k_3)$ にしたがい，確率変数 $\epsilon_{3,n}$ は独立同分布の Gauss 分布 $\mathcal{N}(0, \sigma_{\mathrm{GP},3}^2)$ にしたがう．関数 $k_3 : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ は後で定める正定値カーネルである．

式 (6.7) の仮定から，Gauss 過程回帰の結果 (4.4) を用いると，最適制御則がつぎのように推定される．

$$\mu_{\mathrm{r}}(\hat{\mathbf{x}}_n) = L_3 k_{3,Z}(\hat{\mathbf{x}}_n) \tag{6.8}$$

ここで，$k_{3,Z}(\hat{\mathbf{x}}_n) = [k_3(\hat{\mathbf{x}}_0^*, \hat{\mathbf{x}}_n), \dots, k_3(\hat{\mathbf{x}}_N^*, \hat{\mathbf{x}}_n)] \in \mathbb{R}^N$ であり，$L_3 \in \mathbb{R}^{1\times N}$ は式 (4.4) の $(Y - m_Z)^\mathsf{T}(k_{Z,Z} + \sigma_{\mathrm{GP}}^2 I_N)^{-1}$ に対応する横ベクトルである．近似制御則 $\hat{\mu}_{\mathrm{r}}$ は陽的な形式で書き表されるため，状態方程式と随伴方程式の反復計算を必要としない．

第 4 章では共分散関数として線形カーネルと非線形なカーネルの二つを比較し，非線形なカーネルを共分散関数として得られる制御則の方がロバスト性が高いことを確認した．そこで，この章では第 4 章の非線形なカーネルと同じ形式のつぎのカーネルを用いる．

$$k_3(\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_n') = \theta_{3,1} \exp\left(-\theta_{3,2} \left\|\hat{\mathbf{x}}_n - \hat{\mathbf{x}}_n'\right\|^2\right) + \theta_{3,3}\hat{\mathbf{x}}_n^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}}_n' \tag{6.9}$$

ここで，$\theta_{3,1}, \theta_{3,2}, \theta_{3,3} > 0$ はハイパーパラメータである．

6.5 低次元ダイナミクスと外乱

本研究では Gauss 過程回帰を用いて，状態に依存した外乱評価を含む低次元システムを導出する．本節では，状態に依存した外乱評価の必要性を説明するために，低次元システムとそれに加わる外乱について述べる．

POD による流速分布の近似式 (6.1) の誤差を $\mathbf{u}_{\mathrm{r}} : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ とおくと，流速分布 $\mathbf{u}$ はつぎのように書き表される．

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r-1} \phi_i x_i + \phi_r x_r + \mathbf{u}_{\mathrm{e}} + \mathbf{u}_{\mathrm{r}} \tag{6.10}$$

式 (6.10) を Navier-Stokes 方程式に代入し，関数 ϕ_i $(i = 1, \dots, r-1)$ に関して内積をとると，つぎのような低次元状態量 x に関する時間発展方程式が得られる．

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \mathscr{A}_{i,j,k} x_j x_k + \sum_{j=1}^{r} \mathscr{B}_{i,j} x_j + \mathscr{C}_i(x, \mathbf{u}_{\mathrm{r}}), \quad i = 1, \dots, r-1 \tag{6.11}$$

ここで，$\mathscr{A} \in \mathbb{R}^{(r-1)\times r\times r}$ と $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{(r-1)\times r}$ は定数，$\mathscr{C}_i$ $(i = 1, \dots, r-1)$ は関数であり，関数 $\mathscr{C}$ は一般的に x に関して分離することができない．式 (6.11) の $\mathscr{C}(x, \mathbf{u}_{\mathrm{r}})$ は低次元システムへの外乱を表す項であり，明らかに外乱が低次元状態 x に依存していることがわかる．なお，元のシステムが線形である場合には低次元システムへの外乱は低次元状態 x に依存しない形で書き表すことができる．したがって，低次元システムが x に依存する外乱を持つことは，非線形ダイナミクスを持つ流れ場に特有の性質であるといえる．

流れ場の制御則設計において，流速分布の残差 $\mathbf{u}_{\mathrm{r}}$ は未知であるため，外乱項 $\mathbf{u}_{\mathrm{r}}$ は確率的なモデルによってモデル化されることが多い．特に，外乱項 $\mathscr{C}(x, \mathbf{u}_{\mathrm{r}})$ を状態 x に依存しない独立同分布の Gauss 分布にしたがう確率変数としてモデル化することが一般的である．しかしながら，このようなモデル化では外乱が意図せず大きくなったときにその傾向をとらえることができず，状態推定の精度が悪化する場合がある．本研究ではこのような問題を回避するために，Gauss 過程回帰によって状態に依存した外乱の確率モデルを与える．

6.6 多変数 Gauss 過程回帰

状態に依存した外乱の確率モデルを与える前準備として，多変数 Gauss 過程回帰を導入する．一般に複数の従属変数を持つ回帰問題に対しては，各従属変数に対して 4.3 節の単変数の Gauss 過程回帰を適用することが少なくない．しかしながら，多変数 Gauss 過程回帰を適用することで，従属変数間での相関を加味した予測モデルを導出することができる．

ある空でない集合 $\mathcal{Z}$ に含まれる独立変数 $\zeta(\in \mathcal{Z})$ から複数の従属変数 $\eta \in \mathbb{R}^{N_\eta}$ を推定する回帰問題を考える．多変数 Gauss 過程回帰を導入するために，多変数正定値カーネルと多変数 Gauss 過程を定義する．これらは単に，定義 4.1 と 4.2 における単変数に対する正定値カーネルと Gauss 過程を多変数へと拡張したものである．

定義 6.1 (多変数正定値カーネル) ある行列関数 $k : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{N_\eta \times N_\eta}$ が多変数正定値カーネルであるとは，任意の有限個の元 $\zeta_1, \dots, \zeta_N \in \mathcal{Z}$ に対して $(k(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1,1}^{N,N} \in \mathbb{R}^{NN_\eta \times NN_\eta}$ が半正定値対称行列になることである．

定義 6.2 (多変数 Gauss 過程) 関数 $k : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{N_\eta \times N_\eta}$ を任意の正定値カーネル，$m : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{N_\eta}$ を任意の関数であるとする．このとき，確率関数 $f : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{N_\eta}$ が平均値関数 m と共分散関数 k の Gauss 過程にしたがうとは，任意の有限個の元 $Z = (\zeta_i)_{i=1}^N \in \mathcal{Z}^N$ に対して，確率変数ベクトル $f_Z \coloneqq [f(\zeta_1), \ldots, f(\zeta_N)]^\top \in \mathbb{R}^{NN_\eta}$ が平均 $m_Z \coloneqq [m(\zeta_1), \ldots, m(\zeta_N)]^\top \in \mathbb{R}^{NN_\eta}$ と共分散 $k_{Z,Z} \coloneqq (k(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1,1}^{N,N} \in \mathbb{R}^{NN_\eta \times NN_\eta}$ の多変数 Gauss 分布 $\mathcal{N}(m_Z, k_{Z,Z})$ にしたがうことである．確率関数 f がこのような Gauss 分布にしたがうことを $f \sim \mathcal{GP}(m, k)$ と表す．

多変数 Gauss 過程回帰を導入するために，独立変数 $\zeta \in \mathcal{Z}$ と従属変数 $\eta \in \mathbb{R}^{N_\eta}$ に関してつぎの関係を仮定する．

$$\eta = f(\zeta) + \epsilon \tag{6.12}$$

ここで，確率関数 f は平均値関数 $m : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, 共分散関数 $k : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{N_\eta \times N_\eta}$ の多変数 Gauss 過程 $\mathcal{GP}(m, k)$ にしたがい，確率変数 ϵ は独立同分布の平均 0 で共分散 $\Sigma \in \mathbb{R}^{N_\eta \times N_\eta}$ の Gauss 分布 $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ にしたがう．この確率関数 f と確率変数 ϵ の仮定は次式のように書き直すことができる．

$$f \sim \mathcal{GP}(m, k), \quad \epsilon \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \Sigma) \tag{6.13}$$

式 (6.12)–(6.13) は多変数 Gauss 過程回帰のモデルの標準形である．標準モデル (6.12)–(6.13) から，定理 4.3 のような Bayes 推定に関する関係を導くことができる [99]．しかし，このように導出される関係を適用するためには大規模な行列 ($NN_\eta \times NN_\eta$ の行列) の逆行列を計算する必要があり，数値計算には好ましくない．そこで，多変数正定値カーネル k に特殊な形を仮定することで，数値計算で扱いやすい関係を導く．単変数の正定値カーネル $\tilde{k} : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ を用いて，k がつぎのような形式で書き表されると仮定する．

$$k = \tilde{k}\Sigma \tag{6.14}$$

モデル (6.12)–(6.14) のもとで，従属変数 η の Bayes 推定に関するつぎの定理が導かれる．

定理 6.3 (多変数 Gauss 過程回帰) 式 (6.12)–(6.14) が成り立つと仮定する．このとき，$Z \coloneqq (\zeta_i)_{i=1}^N \in \mathcal{Z}^N$ と $Y \coloneqq (\eta_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^{N_\eta \times N}$ が与えられたもとで，任意の $\zeta \in \mathcal{Z}$ に対応する従属変数 $\eta \in \mathbb{R}^{N_\eta}$ はつぎの確率分布にしたがう．

$$\eta \mid \zeta, Z, Y \sim \mathcal{N}(\hat{m}(\zeta), \hat{\sigma}^2(\zeta)\Sigma) \tag{6.15}$$

ここで，関数 $\hat{m} : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^{N_\eta}$ と $\hat{\sigma}^2 : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ で定義される．

$$\hat{m}(\zeta) = m(\zeta) + (Y - m_Z)(\tilde{k}_{Z,Z} + I_N)^{-1}\tilde{k}_Z(\zeta) \tag{6.16}$$

$$\hat{\sigma}^2(\zeta) = \tilde{k}(\zeta, \zeta) + 1 - \tilde{k}_Z^\top(\zeta)(\tilde{k}_{Z,Z} + I_N)^{-1}\tilde{k}_Z(\zeta) \tag{6.17}$$

ここで，$m_Z = (m(\zeta_i))_{i=1}^N \in \mathbb{R}^{N_\eta \times N}$, $\tilde{k}_Z(\zeta) = (\tilde{k}(\zeta_i, \zeta))_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ である．

多変数 Gauss 過程回帰の結果 (6.15)–(6.17) から，ある点 ζ に対する η の確率分布は多変数 Gauss 分布によって与えられる．この多変数 Gauss 分布の平均は $m(\zeta)$ 共分散は $\hat{\sigma}^2(\zeta)\Sigma$ である．特に各従属変数間の共分散は，共分散の大きさを表す $\hat{\sigma}^2(\zeta)$ に行列 Σ を掛け合わせることで定まる．一般に Σ の非対角要素は非 0 なので，式 (6.15)–(6.17) によって推定される従属変数の各要素には相関がある．なお，Σ は尤度 $p(Y, Z)$ の最大化によって推定することができる．

式 (6.16) と式 (6.17) では，$N \times N$ の行列 $\tilde{k}_{Z,Z} + I_N$ の逆行列を計算する必要がある．しかしながら，これはオフラインで計算しておけば良い．したがって，従属変数のオンライン予測で必要となる計算量は，カーネルの計算を除けば，式 (6.16) では $O(N_\eta N)$，式 (6.17) では $O(N^2)$ である．オンライン予測では，N 個のカーネル $\tilde{k}_Z(\zeta)$ の計算も必要である．

6.7　低次元確率システムの導出

低次元状態量と観測量，制御入力の時系列 $(\mathbf{x}_n^*,\, h(\mathbf{u}_n^*),\, V_n^*)$ に多変数 Gauss 過程回帰を適用することで，状態依存の外乱評価を含む状態方程式と出力方程式を導出する．なお，外乱のみを評価するモデルを導出することも可能ではある．しかし，多変数 Gauss 過程回帰によって状態方程式を導出することで，数値積分を行う必要がない，離散時間のモデルを導出できる．

多変数 Gauss 過程回帰を利用するために，任意の $z_{n-1} := [\mathbf{x}_n^\mathsf{T}, V_n]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{r+1}$ が与えられたもとで，$\mathbf{x}_n$ が次式を満たすと仮定する．

$$\mathbf{x}_n = f_4(z_{n-1}) + \epsilon_{4,n-1} \tag{6.18}$$

ここで，f_4 は平均関数 0 で共分散関数 $k_4 : \mathbb{R}^{r+1} \times \mathbb{R}^{r+1} \to \mathbb{R}$ の Gauss 過程 $\mathcal{GP}(0, k_3)$ にしたがい，$\epsilon_{4,n-1}$ は平均 0 で共分散行列 $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$ の独立同分布の Gauss 分布にしたがう．同様に，任意の $\mathbf{x}_n$ が与えられたもとで，観測量 $H_n := h(\mathbf{u}_n)$ が次式を満たすと仮定する．

$$H_n = f_5(\mathbf{x}_n) + \epsilon_{5,n} \tag{6.19}$$

ここで，f_5 は平均関数 $h(\mathbf{u}_\mathrm{e})$ で共分散関数 $k_5 : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ の Gauss 過程 $\mathcal{GP}(0, k_5)$ にしたがい，$\epsilon_{5,n}$ は平均 0 で共分散行列 $R \in \mathbb{R}^{N_y \times N_y}$ の独立同分布の Gauss 分布にしたがう．流速分布の低次元量である $\mathbf{x}_n$ と表面圧力 H_n は実際には確定的な量ではあるが，確率的な量として扱うことで外乱やモデル化誤差にロバストなオブザーバを設計しやすくなる．式 (6.18) と式 (6.19) はそれぞれ状態方程式と観測方程式の事前推定量であり，時系列 $(\mathbf{x}_n^*,\, h(\mathbf{u}_n^*),\, V_n^*)$ からそれぞれの事後推定量が求められる．なお，観測方程式の確率関数 f_5 においてバイアスを $h(\mathbf{u}_\mathrm{e})$ で与えているのは，表面圧力のオフセットを除去するためである．

以上の仮定のもとで，多変数 Gauss 過程回帰の主結果 (6.15)–(6.17) を時系列 $(\mathbf{x}_n^*)_{n=0}^N$，$(V_n^*)_{n=0}^{N-1}$，$(H_n^*)_{n=1}^N$ に適用すると，つぎの低次元システムが推定される．

$$\mathbf{x}_n \sim \mathcal{N}\left(A\, k_{4,Z}(z_{n-1}),\, \sigma_x^2(z_{n-1})\, Q\right) \tag{6.20}$$

$$y_n \sim \mathcal{N}\left(C\, k_{5,Z}(\mathbf{x}_n) + h(\mathbf{u}_\mathrm{e}),\, \sigma_y^2(\mathbf{x}_n)\, R + \sigma_\mathrm{m}^2 I_{N_y}\right) \tag{6.21}$$

ここで，$A \in \mathbb{R}^{r \times N}$ と $C \in \mathbb{R}^{N_y \times N}$ は時系列に基づいて計算される定数行列，σ_x^2 と σ_y^2 は式 (6.17) によって与えられる関数，$\sigma_\mathrm{m}^2 I_{N_y}$ は計測ノイズの共分散行列である．式 (6.20)–(6.21) が時系列 $(\mathbf{x}_n^*,\, H_n^*,\, V_n^*)$ が与えられたもとでの状態方程式と観測方程式の事後推定量である．システム (6.20)–(6.21) はつぎの形式に書き直すことができる．

$$\mathbf{x}_n = A\, k_{4,Z}(z_{n-1}) + \epsilon_x(z_{n-1}), \qquad \epsilon_x(z_{n-1}) \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma_x^2(z_{n-1})\, Q) \tag{6.22}$$

$$y_n = C\, k_{5,Z}(\mathbf{x}_n) + h(\mathbf{u}_\mathrm{e}) + \epsilon_y(\mathbf{x}_n) + v_n, \quad \epsilon_y(\mathbf{x}_n) \sim \mathcal{N}\left(0,\, \sigma_y^2(\mathbf{x}_n)\, R\right) \tag{6.23}$$

ここで，v_n は前章で定義した計測ノイズベクトルである．システム (6.22)–(6.23) において $\epsilon_x(z_{n-1})$ と $\epsilon_y(\mathbf{x}_n)$ は外乱と解釈することができる．外乱 $\epsilon_x(z_{n-1})$ と $\epsilon_y(\mathbf{x}_n)$ は状態 $\mathbf{x}_n$ に依存する共分散行列を持

つ Gauss 分布にしたがう．これらの共分散行列 $\sigma_x^2(z_{n-1})\,Q$ と $\sigma_y^2(\mathbf{x}_n)\,R$ は状態方程式と出力方程式に加わる外乱の大きさを評価するのに用いられる．

以上のように，多変数 Gauss 過程回帰を用いることで，状態依存の外乱評価を含む状態方程式と出力方程式を導出することができた．後の数値実験では，共分散行列 $\sigma_x^2(z_{n-1})\,Q$ によって低次元状態方程式に加わる外乱を正確に見積もることができることを確認する．

6.8　低次元オブザーバの設計

多変数 Gauss 過程回帰を用いることで得られた低次元システム (6.20)–(6.21) に基づいて，低次元なオブザーバを設計する．オブザーバとして EnKF ではなく，UKF (Unscented Kalman Filter) [100] を用いる．厳密なモデルに対して EnKF を用いたのは，EnKF が高次元なシステムに対して比較的少ない計算量で実装できるという利点を持つからであった．しかしながら，低次元なシステムに対しては EnKF はそれほど少ない計算量で実装できるわけではない．そこで，低次元システムに基づく状態推定では UKF を用いる．UKF は状態の確率分布を複数の粒子によって近似するなど EnKF との類似点が多い．しかし，UKF では粒子が状態の共分散に基づいて効率的に再配置されるため，同じ粒子数のもとでは EnKF よりも高精度に状態を推定できると期待できる．低次元システム (6.20)–(6.21) に基づく UKF の設計については Appendix D を参照されたい．

Gauss 過程回帰によって導出されたシステムに基づいてオブザーバを設計すること自体は初めての試みではない．実際，ロボティクス分野ではいくつかの適用例が見られる (例えば，[101])．本研究の貢献は，非線形性な流れ場の低次元システムに加わる外乱が状態依存であることに着目し，Gauss 過程回帰によって状態依存の外乱モデルを構築することで，外乱に対してロバストなオブザーバを提案したことである．

低次元システム (6.20)–(6.21) に基づいて設計される UKF と 6.4 節で示した方法で導出される近似制御則を直列に結合することで出力フィードバック制御則を構成する．次節では，本章で説明してきた提案手法によって円柱まわり流れに対して制御則を設計する．

6.9　数値例

提案手法によって $Re = 100$ の円柱まわり流れに対して低次元な出力フィードバック制御則を設計する．数値実験において設計された制御則が，表面圧力の情報のみから流れ場の状態を平衡点に近づけられることを確認する．また，制御則における外乱評価の有効性や設計した近似制御則の初期状態の変化に対するロバスト性を調査する．

6.9.1　Reynolds 数 100 の流れ場に対する低次元制御則の設計

これまで扱ってきた $Re = 100$ の円柱まわり流れのシステムに対して制御則を設計する．システムに関するパラメータは表 3.1 と表 5.1 に示したものである．前章で設計した厳密な出力フィードバック制御則を模倣する低次元な制御則を提案手法によって導出する．

6.2 節に記した手順にしたがって，$Re = 100$ の円柱まわり流れに前章で設計した厳密な制御則を適用し，流れ場の閉ループ系に関する時系列を取得する．データ取得時の初期値集合 $\mathcal{V}_0$ には，2.3 節で示したような無制御時の周期性のある流速分布の時系列を用いる．初期値集合 $\mathcal{V}_0$ から $N_1 = 10$ 組の初期状態をサンプルし，それぞれの初期状態に対して厳密な制御則を適用した際の長さ $N_2 = 1000$ の時系列を取

得する．結果として，$N = N_1 N_2 = 10000$ 組の各変数のデータを低次元制御則の設計に用いることができる．

データから次元 $r = 40$ の低次元な制御則を設計する．この次元 $r = 40$ は，低次元制御則の性能が厳密な制御則の性能と概ね一致するように，試行錯誤的に決定された．POD における最小化問題にはつぎの重み付きの内積とノルムを用いた．

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle_{L_2,w} := \int_\Omega \mathbf{v}^\mathsf{T}(\xi)\mathbf{v}'(\xi)w(\xi)d\xi, \quad \|\mathbf{v}\|_{L_2,w} := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle_{L_2,w}} \tag{6.24}$$

ここで，$\mathbf{v}, \mathbf{v}' : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は任意の関数で，$w : \Omega \to (0, \infty)$ は重みづけをする関数である．重み関数 w を調整することで，低次元化による誤差を優先的に減少したい空間中の場所を指定することができる．円柱付近での流速が流れ場のダイナミクス全体に与える影響が大きいと考えられるため，関数 w には円柱表面に近づけるにつれて値が大きくなるような関数を選んだ．このとき POD の低次元化による再構築誤差

$$\sum_{m=1}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}\left\|\tilde{\mathbf{u}}^*_{n,m} - \sum_{i=1}^{r-1}\phi_i a^*_{i,n,m}\right\|^2_{L_2,w} \Big/ \sum_{m=1}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}\|\tilde{\mathbf{u}}^*_{n,m}\|^2_{L_2,w} \tag{6.25}$$

は 5.28% であった．

6.9.2　ある初期状態に対する数値実験結果

設計した低次元制御則を $Re = 100$ の円柱まわり流れに適用する数値実験を行い，ある初期状態に対して厳密な制御則と同程度の性能を持つことを確認する．ここでは，初期値集合 $\mathcal{V}_0$ に含まれるある状態 (図 5.3(a)) を初期値として用いる．この初期状態は低次元制御則を導出するために用いた初期状態とは異なる．

図 6.2 に低次元制御則を円柱まわり流れに適用して $t = 300$ だけ経過したときの渦度分布を示す．低次元制御則によって，初期状態の渦度分布 (図 5.3(a)) と比較して，渦度の非対称性が改善し，流れ場の振動が抑えられていることがわかる．図 6.3(a) と (b), (c), (d) にそれぞれ，状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ と抗力係数，噴流速度 U，推定誤差 $\|\hat{\mathbf{u}}(\cdot,t_n) - \mathbf{u}(\cdot,t_n)\|_{L_2}$ の時間履歴を示す．図 6.3(a) より，低次元制御則によって流れ場の状態を平衡点に近づけられていることがわかる．また，図 6.3(b) から，低次元制御則によって厳密な制御則と同程度に円柱の抗力を低減できていることがわかる．制御則の長期的な性能を測るために各変数の時間平均値を計算する．距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ の区間 $[150, 300]$ での平均値を計算すると，低次元制御則では 1.42，厳密な制御則では 1.30 であった．抗力係数の区間 $[150, 300]$ での平均値は，低次元制御則では 1.137，厳密な制御則では 1.134 であった．また，図 6.3(c) において青線で示す低次元制御則による噴流速度の大きさを測るために，区間 $[0, 300]$ での運動量係数 C_μ

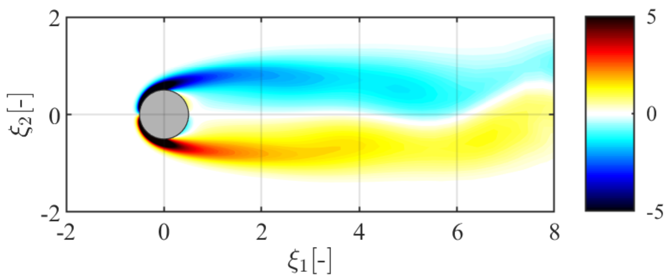
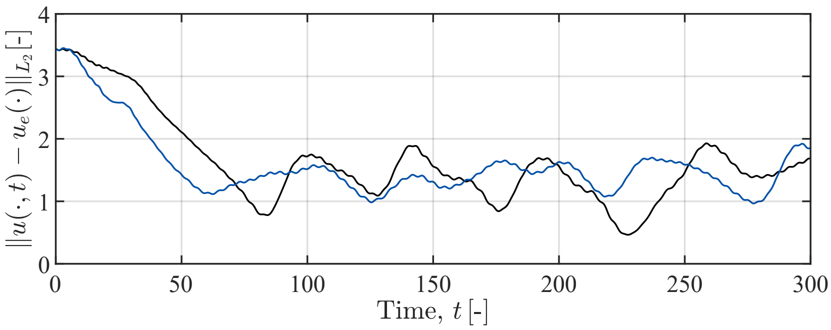
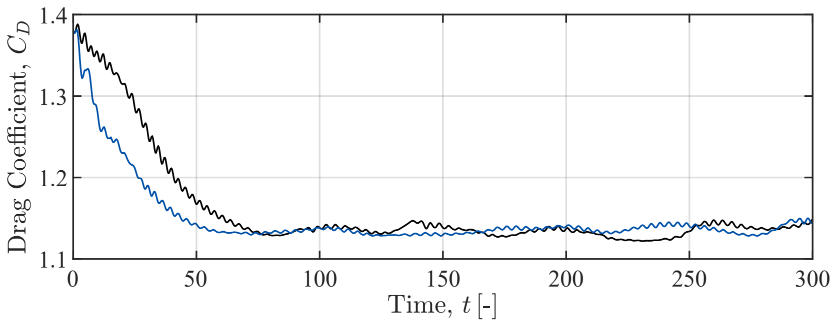


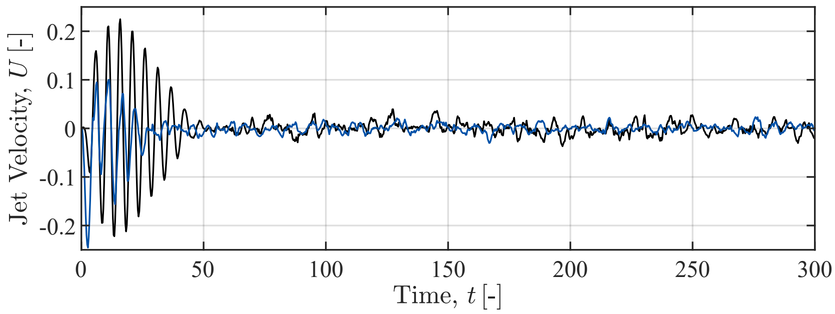
図 6.2: 低次元制御則の適用後の渦度分布



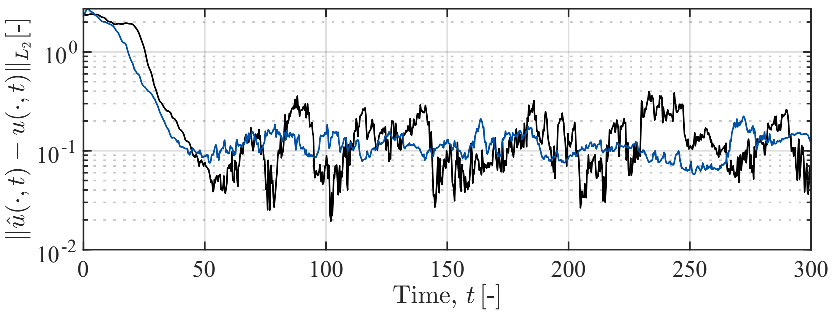
(a) 状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$



(b) 抗力係数 C_D



(c) 噴流速度 U



(d) 推定された状態と真の状態との誤差 $\|\hat{\mathbf{u}}(\cdot,t_n) - \mathbf{u}(\cdot,t_n)\|_{L_2}$

図 6.3: 低次元制御則と厳密な制御則を適用したときの各変数の時系列．低次元制御則と厳密な制御則を適用したときの結果をそれぞれ青線と黒線で示している．

の時間平均を計算すると，3.79×10^{-4} であった．低次元制御則と厳密な制御則の各変数の時間平均値を表 6.1 にまとめた．低次元制御則では厳密な制御則と比べて，平衡点との距離や抗力係数の減少幅がわずかに小さいが，流れ場に投入する運動量は小さい．このように低次元制御則は，長期的な観点で言えば厳密な制御則とほぼ同程度の性能を示している．

図 6.3(d) から，低次元オブザーバと厳密な EnKF で推定誤差の変動に多少の差はあるものの，低次元オブザーバは厳密な EnKF と同程度の精度で状態を推定できていることがわかる．低次元オブザーバに

表 6.1: 二つの制御則を適用したときの各変数の時間平均値

変数	低次元制御則	厳密な制御則
距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$	1.42	1.30
抗力係数 C_D	1.137	1.134
運動量係数 C_μ	3.79×10^{-4}	1.00×10^{-3}

よる高精度な状態推定は，Gauss 過程回帰によって導出された状態依存する外乱モデルのおかげであると考えられる．低次元状態方程式への外乱の大きさと低次元オブザーバによって評価された外乱の大きさを比較する．低次元状態方程式 (6.22) の時刻 t_{n-1} での外乱は $\mathbf{x}_n - A\,k_{4,Z}(z_{n-1})$ であるので，その大きさ $d_{\mathrm{r}}\in\mathbb{R}$ は次式で表される．

$$d_{\mathrm{r},n-1} = \|\mathbf{x}_n - A\,k_{4,Z}(z_{n-1})\|^2 \tag{6.26}$$

一方で，低次元オブザーバにおいて時刻 t_{n-1} での外乱は確率分布

$$\mathcal{N}(0,\sigma_x^2(\hat{z}_{n-1|n-1})\,Q) \tag{6.27}$$

にしたがう確率変数として評価される．ここで，$\hat{z}_{n-1|n-1}$ は時刻 t_{n-1} における z_{n-1} の事後推定量の平均値である．したがって，低次元オブザーバによって予測される外乱の大きさ $\hat{d}_{\mathrm{r},n-1}\in\mathbb{R}$ は，つぎのように見積もられる．

$$\hat{d}_{\mathrm{r},n-1} = \sigma_x^2(\hat{z}_{n-1|n-1})\ \mathrm{Tr}\,Q \tag{6.28}$$

低次元制御則による流れ場制御における真の外乱の大きさ $d_{\mathrm{r},n-1}$ と低次元オブザーバで推定された外乱の大きさ $\hat{d}_{\mathrm{r},n-1}$ の時系列を図 6.4 に示す．赤で示した $d_{\mathrm{r},n-1}$ は時間の経過とともに大きく変動していることがわかる．これは，外乱が状態 $\mathbf{x}_n$ に依存し，制御によって状態 $\mathbf{x}_n$ が平衡点へと近づくためであると考えられる．青で示した $\hat{d}_{\mathrm{r},n-1}$ は，$d_{\mathrm{r},n-1}$ よりもやや小さい傾向があるが，$d_{\mathrm{r},n-1}$ の変動によく追従していることがわかる．このように低次元オブザーバでは，未知である外乱の大きさを状態依存の外乱モデルによって高精度に推定できることが確認された．6.9.4 節では状態依存で外乱を評価が制御に与える効果について調べる．

図 6.3(c) から，厳密な制御則よりも低次元制御則の方が操作量の立ち上がりが早いように見える．また，低次元制御則の方が距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$ と抗力係数 C_D の減少が速い．これらは，厳密な制御則よりも低次元制御則の方が速応性が高いことを意味している．いったん平衡点に状態を近付けられれば，わ

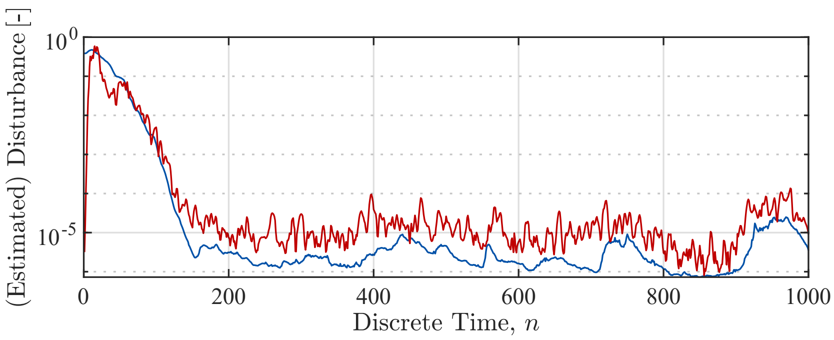


図 6.4: 真の外乱の大きさ $d_{\mathrm{r},n-1}$ と低次元オブザーバで推定された外乱の大きさ $\hat{d}_{\mathrm{r},n-1}$ の時系列．赤線: $d_{\mathrm{r},n-1}$，青線: $\hat{d}_{\mathrm{r},n-1}$．

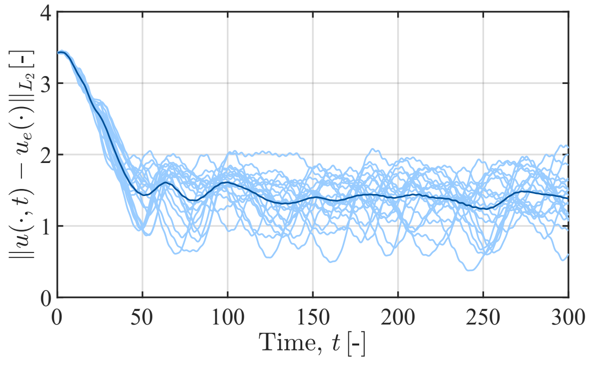
ずかな運動量でその状況を維持できるため，低次元制御則の方が投入した運動量が少ないこともこの速応性に起因している．一般的に制御則は速応性が高い方が望ましく，流れ場に投入する運動量は少ない方が良い．しかしながら，本研究の低次元制御則は厳密な制御則を模倣するという指針のもとで設計された．この設計指針の観点から言えば，このような違いは望ましくない．6.9.5 節では速応性の違いが生まれた原因を考察する．

6.9.3 複数の初期状態に対する数値実験結果

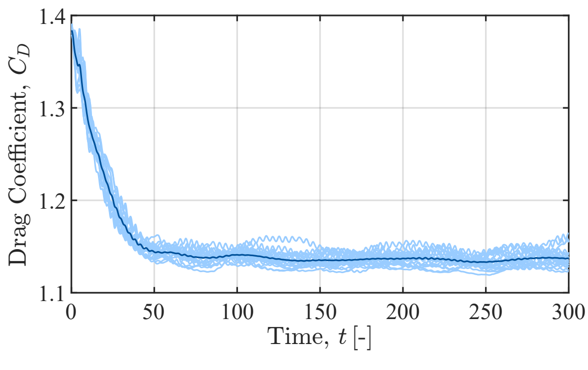
低次元制御則の導出に用いた時系列は，初期値集合 $\mathcal{V}_0$ からサンプルされた初期状態に厳密な制御則を適用することで取得された．この初期値集合 $\mathcal{V}_0$ は低次元制御則の動作を保証したい作動域である．そこで，ここでは $\mathcal{V}_0$ に含まれる複数の状態に対して低次元制御則が状態を平衡点に近づけられることを確認する．

数値実験において，$\mathcal{V}_0$ に含まれる 20 組の相異なる初期状態に対して，低次元制御則を適用する．これら初期状態はいずれも，低次元制御則の導出に用いたデータと異なる．数値実験結果を図 6.5 に示す．薄い青線で各初期状態に対する時系列を表し，濃い青線でこれらの時系列の平均を表す．図 6.5(a) で示されているように，状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ はいずれの初期状態に対しても減少する．状態が平衡点に近づけたことによって，図 6.5(b) のように，抗力係数をいずれの初期状態に対しても同程度に低減することができている．距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ は時刻 $t=50$ 以降でもやや大きく変動しているが，抗力係数はそれほど大きく変動していない．なお，距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ の変動は，厳密な制御則による変動 (図 5.2(a)) と比べてそれほど大きいわけではない．区間 $[150,300]$ にわたる距離と抗力係数の平均値はそれぞれ，1.39 と 1.136 であり，いずれも表 6.1 に示した厳密な制御則による結果と比べてわずかに大きい程度である．

以上のように，低次元制御則は初期値集合 $\mathcal{V}_0$ に含まれるいずれの初期状態に対しても，厳密な制御則とほぼ同程度の性能を示している．言い換えれば，このベンチマーク問題においては初期値集合に限定すれば，提案手法によって厳密な制御則と同程度の性能を持つ低次元制御則を設計できたことになる．



(a) 状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$



(b) 抗力係数 C_D

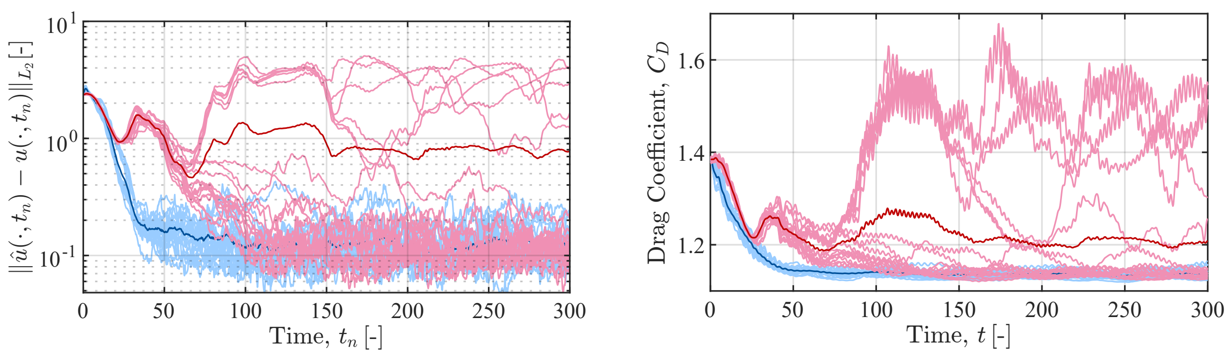
図 6.5: 各初期状態に対する数値実験結果．薄い青線で各初期状態に対する時系列を表し，濃い青線でこれらの時系列の平均を表す．

6.9.4　一定の外乱評価のもとでの数値実験

これまでに，設計した低次元オブザーバが状態依存の外乱モデルによって外乱の大きさを正確に予測できることを確認した．ここでは，この状態依存の外乱評価が制御に与えた効果を調べるために，一定の外乱評価のもとでの制御を行う．

低次元オブザーバにおいて一定の外乱評価をするために，式 (6.22)–(6.23) における σ_x^2 と σ_y^2 に一定値を与える．ここでは，$\sigma_x^2 \equiv \sigma_y^2 \equiv 30$ とする．このとき，オブザーバの内部で評価される外乱の大きさ $\hat{d}_{\mathrm{r},n-1} \equiv 1.3 \times 10^{-6}$ であり，これは図 6.4 に示す $\hat{d}_{\mathrm{r},n-1}$ の時系列の下限よりもやや大きい．前小節と同様に，初期値集合 $\mathcal{V}_0$ に含まれる 20 組の相異なる初期状態に対して，低次元制御則を適用する．図 6.6 に一定の外乱評価と状態依存の外乱評価のもとでの流れ場制御の数値実験結果を示す．薄い赤線と濃い赤線が一定の外乱評価のもとでの制御による結果で，薄い青線と濃い青線が状態依存の外乱評価のもとでの制御による結果を表す．また，薄い赤線と薄い青線は各初期状態に対する結果，濃い赤線と濃い青線はそれらの平均値を表す．図 6.6(a) に示すように，一定の外乱評価のもとでも推定誤差 $\|\hat{\mathbf{u}}(\cdot,t) - \mathbf{u}(\cdot,t)\|_{L_2}$ は時刻 $t = 20$ までは減少する．しかしながら，ある時刻を境に増加に転じる．その後，ある初期状態に対しては推定誤差が初期の推定誤差よりも上回ってしまっている．一方で状態依存の外乱評価のもとでの制御では，いずれの初期状態に対しても推定誤差が減少している．以上の結果から，状態依存の外乱モデルを用いて外乱を予測することで，ロバストに状態を推定できていることがわかる．精度良く状態が推定されないと，その推定された状態に基づいて計算される制御入力は合理的でない値をとる．このために，図 6.6(b) で示すように，一定の外乱評価のもとでの制御ではある初期状態に対して抗力係数が大きな値をとってしまっている．一方で，状態依存の外乱評価のもとでの制御では，前小節で確認したようにいずれの初期状態に対しても推定誤差が減少している．

以上のように，状態依存の外乱モデルを用いて外乱を予測することで，初期状態の変化や外乱に対してロバストに流れ場を制御することができる．なお，σ_x^2 と σ_y^2 に大きな値を与えることでロバストな推定および制御が可能になる．しかしながら，そのような場合には，外乱が実際に小さくても大きな外乱があるとして状態推定が行われるため，特にノミナルモデルに対する性能が低下する．一方で，提案の状態依存の外乱評価を行うオブザーバでは，各時刻で推定状態量に応じた外乱評価が行われるため，このような性能の低下が起きにくい．



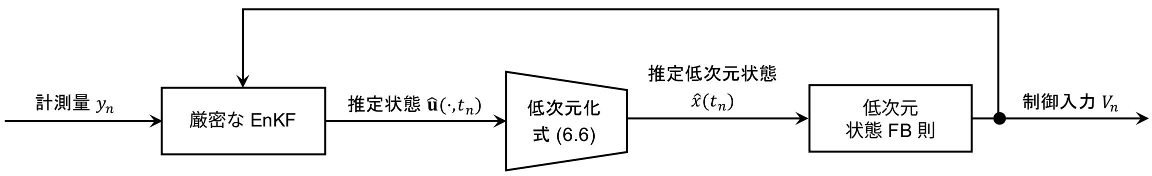
(a) 推定誤差 $\|\hat{\mathbf{u}}(\cdot,t) - \mathbf{u}(\cdot,t)\|_{L_2}$　　(b) 抗力係数 C_D

図 6.6: 各初期状態に対する数値実験結果．薄い赤線と濃い赤線が一定の外乱評価のもとでの制御による結果で，薄い青線と濃い青線が状態依存の外乱評価のもとでの制御による結果を表す．また，薄い赤線と薄い青線は各初期状態に対する結果，濃い赤線と濃い青線はそれらの平均値を表す．

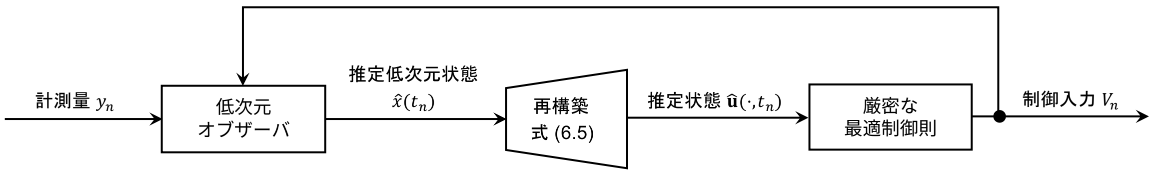
6.9.5　速応性の違いについての考察

まず，低次元制御則と厳密な制御則で速応性の違いを生じさせた構成要素を特定する．このために，図 6.7(a) と (b) に示すように厳密な制御則の状態フィードバック制御則とオブザーバをそれぞれ，低次元制御則のそれへと置き換えた制御則を流れ場に適用する数値実験を行う．図 6.7(c) と (d) には参考のために，低次元制御則と厳密な制御則の構成を示している．簡単のために以降では，図 6.7(a) に示す状態フィードバック制御則を置き換えた制御則を制御則 A，図 6.7(b) に示すオブザーバを置き換えた制御則を制御則 B と呼ぶ．制御則 A では，厳密な EnKF によって推定された状態 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_n)$ が式 (6.6) によって $\hat{x}(t_n)$ に低次元化され，低次元状態フィードバック制御則に渡される．制御則 B では，低次元オブザーバによって推定された低次元状態 $\hat{x}(t_n)$ が式 (6.5) によって $\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_n)$ に再構築され，厳密な最適制御則に渡される．仮に，低次元化ブロックと低次元状態フィードバック制御則が厳密な最適制御則を模倣できていれば，制御則 A は厳密な制御則と同じように振る舞うはずである．同様に，低次元オブザーバと再構築ブロックが厳密な EnKF を模倣できていれば，制御則 B は厳密な制御則と同じように振る舞うはずである．

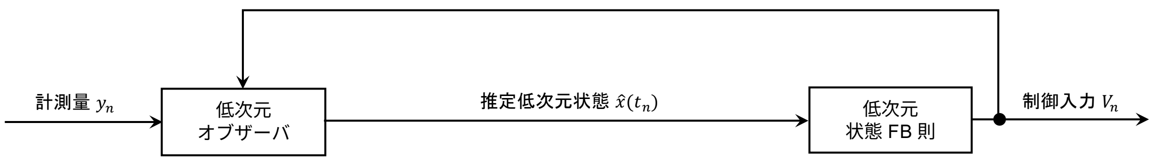
図 6.8(a) と (b) にそれぞれ，各制御則を適用した際の状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$ と噴流速度 U の時系列を示している．図 6.8 から，制御開始からしばらくは，制御則 A は厳密な制御則とほぼ同じような挙動を見せていることが確認できる．このことから，低次元状態フィードバック制御則は厳密な最適制御則を模倣するように設計できていて，速応性の違いを生じさせる原因にはなっていないと考えられる．一方で，制御則 B は厳密な制御則とは少し異なる挙動を見せている．制御則 B は，厳密な制御則



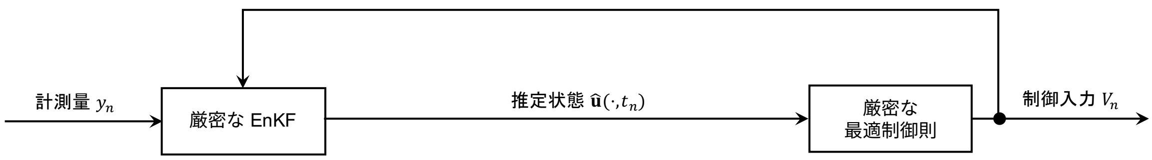
(a) 厳密な最適制御則を低次元状態フィードバック制御則に置き換えた制御則 (制御則 A)



(b) 厳密な EnKF を低次元オブザーバに置き換えた制御則 (制御則 B)

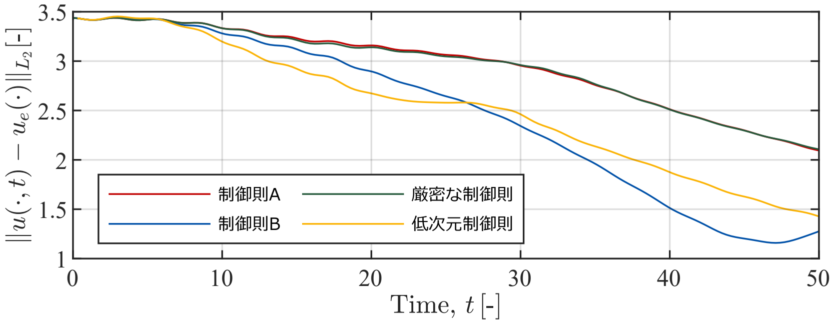


(c) 低次元制御則

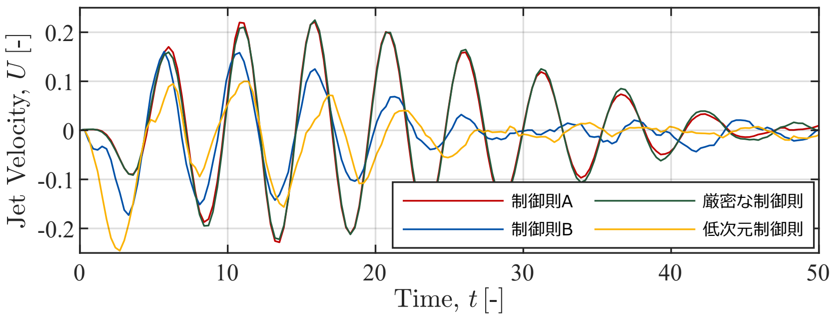


(d) 厳密な制御則

図 6.7:　各制御則の構成



(a) 状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$



(b) 噴流速度 U

図 6.8:　各制御則を適用した際の各変数の時系列．赤線と青線，緑線，黄線はそれぞれ制御則 A と制御則 B，厳密な制御則，低次元制御則の結果を表す．

よりも距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ の減少が速く，噴流速度 U の立ち上がりが早い．どちらかといえば，制御則 B の挙動は低次元制御則の挙動に近い．このため，速応性の違いを生じさせた原因となっているのは低次元オブザーバであると考えられる．

そこで，厳密な制御則と低次元制御則におけるそれぞれのオブザーバの挙動を調べる．図 6.9 と図 6.10 にそれぞれ，厳密な制御則と低次元制御則におけるオブザーバが制御開始直後 $t=t_n$, $n=0,\ldots,7$ に推定した渦度分布を示す．図 6.9 から，厳密な制御則における EnKF では制御開始直後に推定される渦度分布は初期の推定量からほぼ変わらず対称のままであることがわかる．制御開始直後において推定量がほとんど変化しないのは，初期アンサンブルとして各粒子に等しい状態量を与えているためであると考えられる．これを説明するために，各粒子の事前推定量 $\mathbf{u}^{(i)}_{n|n-1}$ がすべて等しいときを考える．このとき，式 (5.6) から

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}_n, y_n)=0 \tag{6.29}$$

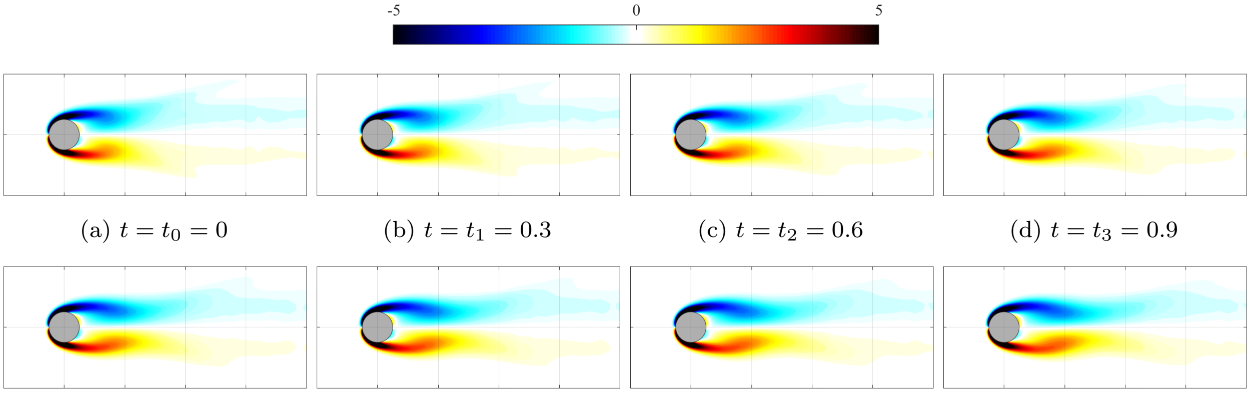
となる．一方で，式 (5.7) から

$$\mathrm{Cov}(y_n, y_n)=\sigma_\mathrm{m}^2 I_{N_y} \tag{6.30}$$

となるため，式 (5.8) より，Kalman ゲイン $K\equiv 0$ となる．したがって，式 (5.9) から各 i に対して

$$\mathbf{u}^{(i)}_{n|n}=\mathbf{u}^{(i)}_{n|n-1} \tag{6.31}$$

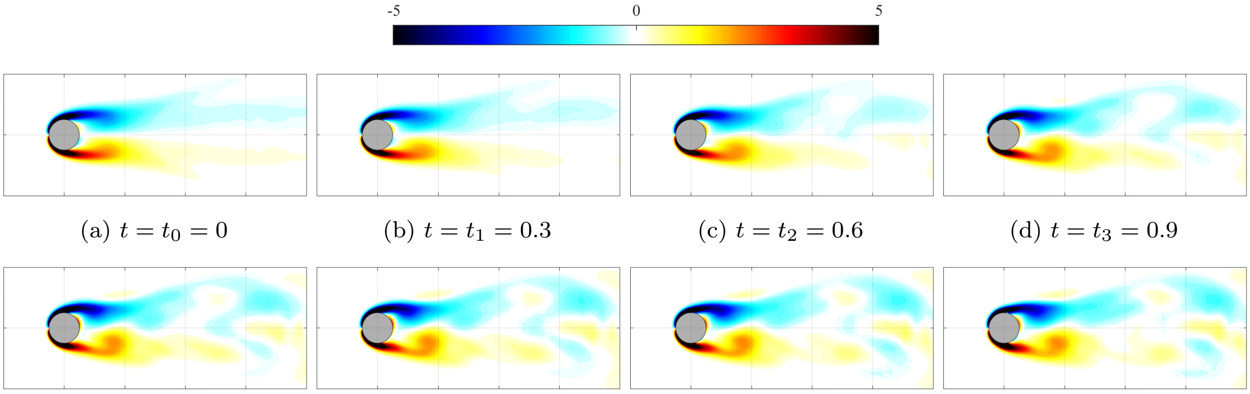
が成り立ち，計測量 y_n による修正が効かない．実際には，各粒子の事前推定量 $\mathbf{u}^{(i)}_{n|n-1}$ は時間の経過とともに緩やかにばらつくために，$K\equiv 0$ とはならない．しかしながら，制御開始直後ではばらつきが非常に小さいため，K は各点において 0 に近い値をとり，計測量 y_n による修正効果がほとんどない．結果として，EnKF によって推定される状態の平均は緩やかに変化する．一方で図 6.10 から，低次元制御則



(a) $t = t_0 = 0$ (b) $t = t_1 = 0.3$ (c) $t = t_2 = 0.6$ (d) $t = t_3 = 0.9$

(e) $t = t_4 = 1.2$ (f) $t = t_5 = 1.5$ (g) $t = t_6 = 1.8$ (h) $t = t_7 = 2.1$

図 6.9: 厳密な制御則における EnKF が推定する渦度分布の時系列



(a) $t = t_0 = 0$ (b) $t = t_1 = 0.3$ (c) $t = t_2 = 0.6$ (d) $t = t_3 = 0.9$

(e) $t = t_4 = 1.2$ (f) $t = t_5 = 1.5$ (g) $t = t_6 = 1.8$ (h) $t = t_7 = 2.1$

図 6.10: 低次元制御則におけるオブザーバが推定する渦度分布の時系列

における UKF によって推定される渦度分布は対称な分布から非対称な分布へとすぐに変化することがわかる．これには， UKF における低次元モデルの外乱項が寄与していると考えられる．EnKF と同様に，UKF でも各粒子のばらつきの大きさに相当する状態の共分散が小さい場合には，計測量 y_n による修正が効かない．しかし，図 6.4 に示すように，制御開始直後で UKF 内部で推定される外乱は大きいため，状態の共分散はすぐに大きくなる．このために，すぐに計測量 y_n による修正が効きやすくなり，結果的に状態の平均がすぐに変化する．

前章で述べたように推定される流速分布が対称である場合には，最適制御則は噴流を噴出しないような制御決定を行う．したがって，厳密な制御則における EnKF では制御開始直後に，図 6.9 に示すような対称の分布を推定するために，噴流をほとんど噴出しない．一方で，低次元制御則における UKF では制御開始後すぐに，図 6.10 に示すような非対称の分布を検出するために，噴流をすぐに噴出する．結果的に，低次元制御則を用いた方が噴流速度 U の立ち上がりが早くなり，状態と平衡点との距離の減少が速かったと考えられる．

6.9.6　計算時間

そもそも低次元な制御則を設計したのは，計算コストの高い厳密な出力フィードバック制御則から計算コストの低い制御則を求めるためであった．低次元制御則による制御入力の計算にも，表 3.2 の計算環境

を使用した．表 6.2 に厳密な制御則と低次元制御則において各サンプリング時刻あたりにオブザーバと状態フィードバック制御則，全体で要した計算時間を記した．狙い通りに，低次元化によって制御入力の計算に要する時間が減少していることが確認できる．

低次元制御則では，オブザーバで要する計算時間のオーダが，状態フィードバック制御則に要する計算時間のオーダよりも大きい．これは，次節で確認するようにオブザーバの方が状態フィードバック制御則よりも必要とする計算量のオーダが大きいためである．

表 6.2: 各サンプリング時刻あたりで制御則の各要素および全体で要した計算時間 (単位はすべて [s])

制御則	オブザーバ	状態フィードバック則	合計
厳密な制御則	118	156	274
低次元制御則	6.6×10^{-2}	5.6×10^{-4}	6.7×10^{-2}

6.10 計算量とパラメータの関係

本節では，データを生成するために使用した厳密な制御則と提案手法によって得られた低次元制御則が各サンプリング時刻あたりに必要とする計算量について述べる．ここでは簡単にアルゴリズムの計算量を，アルゴリズムを実行するために必要となる四則演算の回数と定義する．制御則の計算量は，計算機が制御入力を計算するために要する時間と強い相関を持つと考えられる．

6.10.1 厳密な制御則が各サンプリング時刻あたりに必要とする計算量

EnKF と最適制御則からなる厳密な制御則が必要とする計算量のほとんどが，Navier-Stokes 方程式を数値積分するためのものである．そこで，Navier-Stokes 方程式を単位時間だけ数値積分をするために必要な計算量を $\mathscr{S} \in \mathbb{N}$ とおく．EnKF は各サンプリング時刻で，N_{en} 個ある各粒子において時間 Δt だけ Navier-Stokes 方程式を数値積分する．したがって，EnKF の計算量は $O(N_{\mathrm{en}}\,\Delta t\,\mathscr{S})$ と表せる．また，最適制御則では勾配を計算するために，予測ホライズン長さ $N_{\mathrm{p}}\Delta t$ だけ Navier-Stokes 方程式とその随伴方程式を数値積分する．したがって，勾配法における反復回数を $I_{\mathrm{tr}} \in \mathbb{N}_0$ とおくと，最適制御則が各サンプリング時刻あたりに要する計算量は $O(I_{\mathrm{tr}}\,N_{\mathrm{p}}\,\Delta t\,\mathscr{S})$ と表される．以上から，厳密な制御則が各サンプリング時刻あたりに必要とする計算量は

$$O(\max\{N_{\mathrm{en}}\,\Delta t\,\mathscr{S},\, I_{\mathrm{tr}}\,N_{\mathrm{p}}\,\Delta t\,\mathscr{S}\}) \tag{6.32}$$

と表される．

最適制御則における勾配法の反復回数 I_{tr} は勾配法の設計パラメータである初期候補解や許容誤差に依存する．極端な例として，初期候補解が最適解に一致している場合には $I_{\mathrm{tr}} = 0$ となる．また，反復回数 I_{tr} は，予測ホライズン長さ $N_{\mathrm{p}}\Delta t$ が長いほど，多くなる傾向にある．したがって，予測ホライズン長さ $N_{\mathrm{p}}\Delta t$ の増加に対して，最適制御則の計算量 $O(I_{\mathrm{tr}}\,N_{\mathrm{p}}\,\Delta t\,\mathscr{S})$ は 1 次以上のスピードで大きくなると考えられる．このため，予測ホライズン長さ $N_{\mathrm{p}}\Delta t$ は最適制御則の性能と計算量のトレードオフを踏まえながら，慎重に検討しなければならない．

厳密な制御則の計算量 $O(\max\{N_{\mathrm{en}}\,\Delta t\,\mathscr{S},\, I_{\mathrm{tr}}\,N_{\mathrm{p}}\,\Delta t\,\mathscr{S}\})$ は，Navier-Stokes 方程式のための計算量 $\mathscr{S}$ に依存している．この計算量 $\mathscr{S}$ は，流れ場の数値計算のための格子数が増えるほど，増加する傾向にある．本研究では，流れ場の数値計算に DNS (Direct Numerical Simulation) を用いた．DNS では，流

れ場のエネルギ散逸を模擬するために，流れ場の乱れの最小スケール程度に小さい格子幅を持つ格子を設ける必要がある．高 Reynolds 数の流れ場では，乱れの最小スケールは Re のべき乗のオーダで小さくなるため [102, pp. 158-160]，求められる格子幅が小さくなる．したがって，数値計算に用いる格子数が増え，結果的に Navier-Stokes 方程式を数値積分するための計算量 $\mathscr{S}$ が大きくなる．このため，オフラインでのデータ取得の用途であっても，高 Reynolds 数の流れ場に対して厳密な制御則を適用することは数値計算的に困難である．このような高 Reynolds 数の流れ場に対するデータ取得の困難性に対する対策は第 7 章で述べる．

6.10.2　低次元な制御則が各サンプリング時刻あたりに必要とする計算量

まず，近似によって得られた低次元な状態フィードバック制御則 (6.8) が各サンプリング時刻で要する計算量を調べる．本研究では制御入力が単一の変数で表される場合を考えたが，一般性を失わずに議論を行うために制御入力が複数の変数で表される場合を考える．そこで，制御入力ベクトルの次元を N_V と表す．このとき，状態フィードバック制御則 (6.8) が推定状態量 $\hat{\mathbf{x}}_n$ から制御入力ベクトル V_n を求めるために必要な計算量のうち，主要なものはつぎの二つである．

- カーネルベクトル $k_{3,Z}(\hat{\mathbf{x}}_n)$ を求めるための計算量: $O(r\,N)$
- 行列ベクトル積 $L_3 k_{3,Z}(\hat{\mathbf{x}}_n)$ のための計算量: $O(N_V N)$

したがって，状態フィードバック制御則 (6.8) が各サンプリング時刻で要する計算量は

$$O(\max\{r\,N,\, N_V N\}) \tag{6.33}$$

と表される．

つぎに，低次元確率モデル (6.22)–(6.23) に基づく UKF が各サンプリング時刻で要する計算量を評価する．低次元な UKF が計測量 y_n から推定状態量 $\hat{\mathbf{x}}_n$ と状態の事後共分散を求めるために必要な計算量のうち，主要なものはつぎの四つである．

- $2r+1$ 個ある各サンプル点において，カーネルベクトル $k_{4,Z}(\mathbf{x}_n)$ と $k_{5,Z}(z_{n-1})$ を求めるための合計の計算量: $O(\max\{r^2\,N,\, r\,N_V N\})$
- $2r+1$ 個ある各サンプル点において，行列ベクトル積 $A\,k_{4,Z}(\mathbf{x}_n)$ および $C\,k_{5,Z}(z_{n-1})$ のための合計の計算量: $O(\max\{r^2\,N,\, r\,N_y N\})$
- 外乱の大きさ $\sigma_x^2(z_{n-1})$ と $\sigma_y^2(\mathbf{x}_n)$ を求めるための計算量: $O(N^2)$
- 状態の共分散行列の Cholesky 分解や逆行列の演算のための計算量: $O(r^3)$

したがって，UKF が各サンプリング時刻で要する計算量は

$$O(\max\{r^2\,N,\, r\,N_V N,\, r\,N_y N,\, N^2,\, r^3\}) \tag{6.34}$$

と表される．

状態フィードバック制御則の計算量 (6.33) と UKF の計算量 (6.34) を比較すると，状態フィードバック制御則の計算量の方がオーダが小さいことがわかる．したがって，状態フィードバック制御則と UKF の直列結合によって得られる低次元な制御則が各サンプリング時刻で要する計算量のオーダは，式 (6.34) と一致する．このように，状態フィードバック制御則の計算量が無視できるのは，UKF では確率的な評価をしている一方で，状態フィードバック制御則では確率的な評価をしていないためである．

本章では，低次元制御則が厳密な制御則と同程度の性能を持つように，低次元状態量の次元 r やデータ点数 N を定めた．式 (6.34) のように，低次元制御則の計算量は r と N の 2 乗から 3 乗のオーダを持つため，r と N は低次元制御則の計算量に対して支配的なパラメータである．このため実用上では，いくらかの性能の劣化を許容して，与えられた計算機がオンラインで制御入力が計算できるような計算負荷となるように，r や N を小さく定める必要がある．近似精度を保ったまま，低次元状態量の次元 r を小さくするためには，本研究で用いた線形の POD の代わりに非線形な低次元化手法が有効であると考えられる．例えば，Fukami らは NN ベースのオートエンコーダによって POD よりも少ない次元でいくつかの流れ場を精度よく再構成できることを数値的に示している [103]．また，データ点数 N を減らすためには，K-means 法のようなクラスタリング手法を利用することができる．クラスタリング手法で得られたクラスの代表以外のデータ点を削除することで，データの網羅性をある程度維持しつつ，データ点数を効率的に削減することができる．また，本研究では単純なガウス過程回帰を用いたが，補助変数を利用したガウス過程回帰 [104, pp. 146-158] の使用も考えられる．この手法では，学習に使用されるデータ点数は変わらないが，オンラインでの予測に必要な計算量を減らすことができる．こうした手法の利用することで低次元制御則の計算量を抑えることができる．

6.11　結論

本章では，流れ場に対する低次元な出力フィードバック制御則の設計法を提案した．提案手法では，厳密な出力フィードバック制御則を流れ場に適用したときの時系列を利用することによって，低次元モデルを導出する．厳密な制御則が生成するデータから導出される低次元モデルは，厳密な制御則を模倣する低次元な制御則を設計するという用途においては，適切なモデルになっていると考えられる．

また提案手法では，流れ場の低次元システムに加わる状態依存の外乱を予測するために，Gauss 過程回帰によって得られた低次元モデルに基づいてオブザーバを設計する．このようにして得られたオブザーバは，$Re = 100$ の円柱まわり流れの制御において低次元システムに加わる外乱を正確に予測することができることを数値実験で確認した．そして，このオブザーバを持つ制御則は，一定の外乱評価をするオブザーバを持つ制御則と比較して，ロバストな状態推定および制御が可能であることも確認した．

$Re = 100$ の円柱まわり流れの制御のベンチマーク問題において，提案手法によって設計された低次元制御則は，ある初期値集合に対して厳密な制御則とほぼ同程度の性能を持つことを確認した．これは，ある集合に含まれる状態に対しては厳密な制御則とほぼ同程度の性能を発揮する計算コストの低い制御則を設計できる可能性を示唆している．

設計された低次元制御則は厳密な制御則よりも高い速応性を示した．これは，厳密な制御則を模倣するような制御則を設計するという指針からいえば，望ましい事柄ではない．低次元制御則の高い速応性の根本的な原因は，オブザーバの初期値近傍で評価される外乱が大きいことであると考えられる．初期値近傍で評価される外乱が大きいために，状態の分散が速く大きくなり，結果として制御入力が早く立ち上がるようになる．低次元モデルの導出に使用されるデータには，オブザーバの初期値近傍でのデータが含まれていないために，オブザーバの初期値近傍で評価される外乱が大きくなると考えられる．このため，オブザーバの初期値近傍でのデータも低次元モデルの導出に使用することによって，オブザーバの初期値近傍で評価される外乱の大きさを抑えられると期待される．

第 7 章

結論

本研究では，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御に着目した制御則設計法を提案した．非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御は高い性能を持つものの，実システムへ実装するうえでつぎの二つの課題を抱えている．

1. オンラインで制御入力の計算に要する時間が長いこと
2. 計測ノイズが加えれた部分的な物理量から流速分布を推定しなければならないこと

本研究では，これらの課題を解決する制御則の設計法を提案した．Reynolds 数 $Re = 100$ の円柱まわり流れの制御問題をベンチマーク問題として考え，この提案手法によって設計された制御則が制御目標を達成することを確認した．

第 2 章では円柱まわり流れの制御問題を設定し，このシステムの特性を調べた．制御のための操作量は円柱表面から噴出する二つの噴流の流速で，計測量は円柱表面の圧力に計測量が加算された量である．制御目標は，わずかな操作量によって流れ場の状態を平衡点に近づけることである．$Re = 100$ の流れ場の平衡点は不安定であるが，この平衡点に流れ場の状態を近づけることによって円柱の抗力を低減できることを数値実験で確認した．

第 3 章と第 4 章では状態フィードバック制御問題を扱った．まず，第 3 章では非線形 Navier-Stokes 方程式に基づくモデル予測制御を設計した．このモデル予測制御によって，全状態が観測できるという仮定のもとで，わずかな操作量で円柱まわり流れの状態を平衡点に近づけられることを数値実験で確認した．このモデル予測制御における最適制御則の入出力の時系列に基づいて，最適制御則を近似する手法を第 4 章で提案した．この提案手法では，無限次元ベクトルである流れ場の状態を扱うために，Gauss 過程回帰によって最適制御則が近似される．近似によって得られる制御則は陽に書き表されるために，厳密な最適制御則よりも短い時間で制御入力を計算することができる．円柱まわり流れの制御問題に対して，提案手法によって得られた近似制御則は，ある初期値集合に対して最適制御則と同程度の性能を示した．また，近似制御則は Re の変化に対して幾分のロバスト性を持つことを確認した．

第 5 章と第 6 章では出力フィードバック制御問題を扱った．まず，第 5 章では計測ノイズが加えられた部分的な物理量から，最適制御則に与えるための流速分布を推定するために，非線形 Navier-Stokes 方程式に基づく EnKF を用いることを提案した．円柱まわり流れの制御問題に対して，この EnKF と最適制御則からなる出力フィードバック制御則が，計測ノイズが加えられた表面圧力の情報のみから，流れ場の状態を平衡点に近づけられるような制御決定ができることを確認した．また，この厳密な出力フィードバック制御則が，モデルフリー制御則と比較して高い性能を示すことも確認した．第 6 章では厳密な出力フィードバック制御則のオンラインでの計算コストの課題を解決するために，低次元な制御則を設計する

手法を提案した．提案手法では，厳密な出力フィードバック制御則によって生成される流れ場の閉ループ系に関する時系列から，厳密な出力フィードバック制御則を模倣する低次元制御則が設計される．そこでは，流れ場の低次元システムにおける外乱の状態依存性に着目し，多変数 Gauss 過程回帰によって状態依存で外乱を評価できる低次元モデルが導出される．円柱まわり流れの制御問題において，提案手法によって設計された制御則が，ある初期値集合に対して厳密な出力フィードバック制御則とほぼ同程度の性能を持つことが数値実験で示された．また，状態依存の外乱モデルが低次元制御則におけるロバストな状態推定に役立つことを確認した．

提案した制御則設計法は円柱まわり流れに対する制御則設計に幾分特化していたが，境界条件などを変えることによって円柱まわり流れ以外の流れ場にも適用することができる．本研究の数値実験結果は，円柱まわり流れ以外の流れ場に対して初期値集合を限定すれば，厳密なモデルに基づく制御則と同程度の性能を持つ計算コストの低い制御則を設計できる可能性を示唆している．

しかし，本研究の提案手法は実応用に向けていくつかの課題を抱えている．以下に，主な四つの課題を示す．

1. 一つ目は，高い Reynolds 数の流れに対する低次元制御則の設計用のデータを取得するときに必要となるオフラインでの計算コストである．本研究では低い Reynolds 数 $Re = 100$ 程度の流れに対して制御則を設計したが，実応用で重要となる流れでは $Re = 10^3 \sim 10^7$ 程度のさらに高い Reynolds 数を持つ．Reynold 数が高い流れに対して，本研究で用いた数値計算手法である DNS では深刻な計算コストの問題が存在する．DNS は Navier-Stokes 方程式を直接離散化することによって流れ場の数値解析を行う数値計算手法である．Reynolds 数が増加すると，DNS では流れ場の小さな渦構造を解像する必要があるために，大規模な計算量が必要となる．このために，Reynold 数の高い流れに対して，オフライン計算であっても，DNS で流れ場の発展を予測することは困難である．特に，最適制御やアンサンブル状態推定のために，流れ場の時間発展の予測を多用する提案手法においては深刻な課題である．
2. 二つ目の課題は，スピルオーバ不安定に対する対処である．高 Reynolds 数の流れ場の運動はマルチスケール性を持ち，小さな時間スケールで変化する現象を含む．小さな時間スケールで変化する現象をフィードバック的に制御するためには，現象の時間スケールよりも短い制御周期で制御パラメータを変化させる必要がある．しかし，センサなどのデバイスの制約から，流れ場のフィードバック制御において制御パラメータを変更可能な周期は，現状では ms のオーダが限界であると考えられる．実際，これまでの流れ場に対するフィードバック制御の実験 [5,8,50] では，制御周期は 1/800 s から 0.1 s に設定されている．このため，高 Reynolds 数の流れ場に含まれる時間スケールの小さな現象を直接的に制御することはできない．低次元制御則を設計する場合には，こうした時間スケールの小さな現象の表現は残差システムが担うことになると想定される．第 1 章で述べたように残差システムはスピルオーバ不安定を生じさせる恐れがある．本研究では，$Re = 100$ の円柱まわり流れでは時間スケールの大きな現象が主体であるため，このようなスピルオーバ不安定は回避できていた．しかし，時間スケールの小さな現象を多く含む高 Reynolds 数の流れ場に対する制御では，スピルオーバ不安定が生じやすく，これに対する対処が必要となる．
3. 三つ目の課題は，アクチュエータの具体的なモデルが欠如していることである．流れ場のフィードバック制御に用いられるアクチュエータには，プラズマアクチュエータ (PA) やピエゾ素子がある．こうしたアクチュエータは電気的な信号を制御入力として与えることによって，流れ場に擾乱を与える．実応用に向けた本研究の課題は，電気的な信号を与えたときにアクチュエータが流れ場

ダイナミクスに与える具体的な影響の大きさが明らかでないことである．例えば，PA が流れ場ダイナミクスに与える影響は体積力によってモデル化されるが [105]，ある電気信号を PA に入力したときにどれだけの体積力が発生するかを表す定量的なモデルは一般的に明らかでない．アクチュエータの具体的なモデルが欠如していると，データの取得のために用いられるモデルベーストな制御則を設計することができない．

4. 四つ目の課題は，モデル化誤差の影響である．本研究では，Navier-Stokes 方程式などの厳密な数式モデルが正しいという仮定のもとで制御則設計を進めてきた．しかしながら，このような数式モデルと実際の流れ場との間にはモデル化誤差が存在する．例えば，前方から流入する流れの乱れや境界条件の違いなどがモデル化誤差として考えられる．このようなモデル化誤差のために，モデルベースト制御則を模倣するように設計された制御則を実際の流れ場に適用した場合，所望の挙動をとらない可能性がある．

一つ目の，高 Reynolds 数の流れに対してオフラインでの計算コストが高くなる課題に対しては，LES (Large Eddy Simulation) の利用が有効であると考えられる．LES では DNS よりも粗い格子を用い，格子サイズよりも小さな乱れによる影響を乱流モデルを与えることで考慮する．DNS よりも粗い格子を用いているために，少ない計算量で流れ場の数値解析を行うことができる．LES はより粗い格子を用いる RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations) を利用した数値計算と比較して，計算コストが高いことが知られている．しかし，近年では Reynolds 数が 10^7 の翼型まわり流れの数値解析が行われるなど [106]，計算機の高性能化に伴ってその適用範囲が広まっている．将来的には高 Reynolds 数の流れに対する最適制御や状態推定において，LES による流れ場の予測を利用することができると期待される．ただし，LES では乱流モデルによるモデル化誤差があり，これが制御に与える影響を考慮しなければならない．

二つ目のスピルオーバ不安定への対処には，制御則の入出力の部分にフィルタを設置することが有効であると考えられる．これによって，制御入力による残差システムの加振と残差システムからの出力による制御則の加振を抑えることができる．残差システムは時間スケールの小さな現象を表すため，高周波成分を除去するようなフィルタが有効であると考えられる．

三つ目のアクチュエータのモデルの課題に対しては，パラメータ同定 (データ同化) 手法が利用できる．PIV で計測される流速分布のデータにデータ同化手法を適用することで，流れ場システムのモデルパラメータを同定することができる．例えば，Kato らは EnKF を利用することで乱流モデルのパラメータなどを同定し，実際の流れ場のダイナミクスをより正確に再現するモデルの獲得に成功している [107]．こうしたデータ同化手法をアクチュエータのモデルパラメータの同定に利用することで，電気信号から流れ場に与える影響を正確に記述したモデルが獲得できると期待される．

四つ目のモデル化誤差の課題に対しては，実システムからの計測量に基づいて制御則のパラメータを調整する対策をとることができる．つまり，本研究の提案手法で設計された制御則のパラメータを初期値とする適応制御則を設計する．適応制御則では計測量から制御則のパラメータを更新するため，モデル化誤差に強い．一方で，一般的に多変数の最適化に基づく適応制御則は，不適切な局所最適値に陥りやすいという課題を抱えている．提案手法によって設計された制御則のパラメータは，最適制御則を模擬するように導出されている．したがって，適応制御則の最適制御問題を適切に設定すれば，適応制御における最適解に近くなると考えられる．適応制御則における最適制御問題の設定には課題があるが，これが解決できれば，本研究で提案した制御則設計法を利用してモデル化誤差に強い制御則を設計することができる．

このように，それぞれの課題に対して解決策が考えられるが，これらの解決策を実行することは必ずし

も容易ではない．しかし，これらの課題が解決できれば，本研究の円柱まわり流れの制御問題で示されたように，高性能な制御則を設計できる可能性がある．この制御則を用いて流れ場をフィードバック制御することで，物体抗力の減少や制御系に投入するエネルギの抑制などの社会的に大きな成果が期待できる．このため，上記の課題の解決は容易ではないが，解決に向けて取り組む価値がある．

付録 A

不等間隔格子の生成法

本章では，流れ場の数値計算において，半径方向の不等間隔格子を生成するために使用した手法を説明する．使用した不等間隔格子の生成手法は Vinokur によって提案された伸縮関数 [66] に基づく．この伸縮関数を利用した格子生成法の対象は 1 次元の領域であり，領域の両端の格子幅と格子数を指定することができる．指定したパラメータが無理のないものであれば，両端の格子幅が指定パラメータと大まかに一致し，格子幅が緩やかに変化する格子が得られる．

図 A.1 に示すような 1 次元の区間 $[r_0, r_{N_\mathrm{G}}] \subset \mathbb{R}$ に格子を刻むことを考える．格子数 $N_\mathrm{G} \in \mathbb{N}$ と両端の格子幅の目標値 Δr_1, $\Delta r_{N_\mathrm{G}} > 0$ が与えられている．両端の格子幅が目標値 Δr_1, Δr_{N_G} にほとんど一致し，格子幅が緩やかに変化するように $N_\mathrm{G} - 1$ 個の内点 r_j, $j = 1, \ldots, N_\mathrm{G} - 1$ を求める．Vinokur は区間 $[0, 1]$ で定義され，両端で指定された傾きを持つある伸縮関数を導出した．この伸縮関数を利用することで所望の内点を求めることができる．本章では伸縮関数の導出までには立ち入らず，内点の導出方法についてのみ記す．

まず，つぎの二つのパラメータを計算する．

$$A_\mathrm{G} = \sqrt{\frac{\Delta r_{N_\mathrm{G}}}{\Delta r_0}}, \quad B_\mathrm{G} = \sqrt{\frac{\Delta r^2}{\Delta r_1 \, \Delta r_{N_\mathrm{G}}}} \tag{A.1}$$

ここで，$\Delta r \coloneqq (r_{N_\mathrm{G}} - r_0)/N_\mathrm{G}$ は区間 $[r_0, r_{N_\mathrm{G}}]$ を格子数 N_G で等間隔に刻んだときの格子幅を表す．また，A_G は格子幅 Δr_{N_G} の Δr_0 に対する比，B_G は等間隔格子幅 Δr の Δr_1 と Δr_{N_G} に対する比を表す．内点の導出方法は，二つの場合 (i) $B_\mathrm{G} < 1$, (ii) $B_\mathrm{G} > 1$ で異なる．なお，Vinokur による格子生成法で

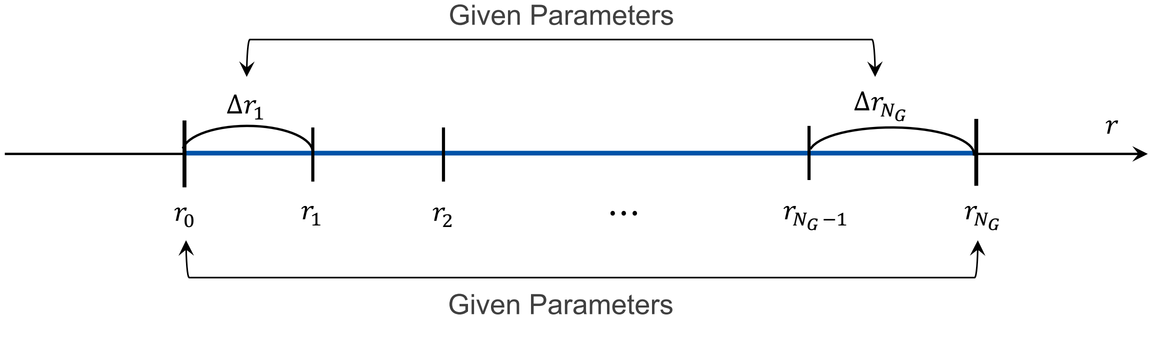


図 A.1: Vinokur による格子生成法で格子を刻む区間 $[r_0, r_{N_\mathrm{G}}]$ が青で示されている．両端の格子幅が目標値 Δr_1, Δr_{N_G} にほとんど一致し，格子幅が緩やかに変化するように $N_\mathrm{G} - 1$ 個の内点 r_j, $j = 1, \ldots, N_\mathrm{G} - 1$ を求めることが目的である．

は，$B_{\mathrm{G}} = 1$ の場合の内点の導出方法を与えない．この場合は，両端の格子幅が目標値 Δr_1, $\Delta r_{N_{\mathrm{G}}}$ をわずかに変えることによって，$B_{\mathrm{G}} = 1$ からずらすことができる．

(i) $B_{\mathrm{G}} < 1$ の場合．つぎの方程式の解 $\Delta z \in \mathbb{R}$ を数値的に求める．

$$B_{N_{\mathrm{G}}} \Delta z = \sin(\Delta z) \tag{A.2}$$

このとき，所望の内点はつぎのように求められる．

$$r_j = r_0 + \frac{(r_{N_{\mathrm{G}}} - r_0)\tan(\chi_j \Delta z)}{A_{\mathrm{G}} \sin(\Delta z) + (1 - A_{\mathrm{G}} \cos(\Delta z))\tan(\chi_j \Delta z)}, \quad j = 1, \ldots, N_{\mathrm{G}} - 1 \tag{A.3}$$

ここで，$\chi_j = j/N_{\mathrm{G}}$, $j = 1, \ldots, N_{\mathrm{G}} - 1$ は区間 $[0, 1]$ に等間隔に配置された内点である．

(ii) $B_{\mathrm{G}} > 1$ の場合．つぎの方程式の解 $\Delta z \in \mathbb{R}$ を数値的に求める．

$$B_{N_{\mathrm{G}}} \Delta z = \sinh(\Delta z) \tag{A.4}$$

このとき，所望の内点はつぎのように求められる．

$$r_j = r_0 + \frac{(r_{N_{\mathrm{G}}} - r_0)\tanh(\chi_j \Delta z)}{A_{\mathrm{G}} \sinh(\Delta z) + (1 - A_{\mathrm{G}} \cosh(\Delta z))\tanh(\chi_j \Delta z)}, \quad j = 1, \ldots, N_{\mathrm{G}} - 1 \tag{A.5}$$

ここで，$\chi_j = j/N_{\mathrm{G}}$, $j = 1, \ldots, N_{\mathrm{G}} - 1$ は区間 $[0, 1]$ に等間隔に配置された内点である．

本研究では，円柱まわり流れの数値計算のために半径方向の格子を生成するためにこの手法を用いた．そこでは，格子数を $N_{\mathrm{G}} = 90$，内円と外円にそれぞれ接する格子の幅の目標値を $\Delta r_1 = 5.00 \times 10^{-3}$ と $\Delta r_{N_{\mathrm{G}}} = 4.00 \times 10^{-1}$ とした．このとき，$A_{\mathrm{G}} = 8.94$, $B_{\mathrm{G}} = 3.60$, $\Delta z = 3.11$ である．$B_{\mathrm{G}} > 1$ であるので，格子は式 (A.5) によって生成される．式 (A.5) の右辺を $\chi \in [0, 1]$ に関する関数であると考え，それを図示したものが図 A.2 である．この関数は伸縮関数と呼ばれる．不等式 $\exp(-\Delta z) < A_{\mathrm{G}} < \exp(\Delta z)$ が成り立つとき，この伸縮関数は関数 tanh の一部分によく似た形を持つ [66].

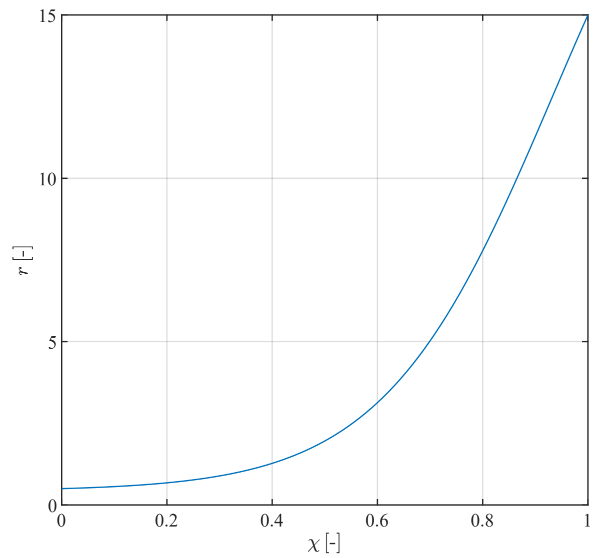


図 A.2:　使用した伸縮関数

付録 B

流れ場最適制御問題の第 1 変分の導出

本章では流れ場に対する最適制御問題 (3.23)–(3.32) に対して導入された Lagrange 関数の第 1 変分 (3.41) を導出する．まず，Lagrange 関数の定義式 (3.33) をその第 1 変分の定義式 (3.40) に代入することで，第 1 変分 $\delta L[\phi, \delta\phi]$ を求める．Lagrange 関数 (3.33) が $\phi = (\mathbf{V},\, \mathbf{u},\, p,\, U)$ に関する多項式であるため，偏差 $L[\phi + \epsilon\,\delta\phi] - L[\phi]$ は ϵ に関する多項式となる．偏差 $L[\phi + \epsilon\,\delta\phi] - L[\phi]$ の ϵ に関する定数項は 0 であるため，第 1 変分 $\delta L[\phi, \delta\phi]$ は偏差 $L[\phi + \epsilon\,\delta\phi] - L[\phi]$ の ϵ に関する一次項の係数に一致する．これを利用すると，第 1 変分は $\delta L[\phi, \delta\phi]$ がつぎのように求められる．

$$
\begin{aligned}
\delta L[\phi, \delta\phi] = q_1 \int_\Omega \left[\delta\mathbf{u}^\mathsf{T}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathrm{e})\right]_{\tau = t_{n+N_\mathrm{p}}} d\xi + \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \delta U\, U d\tau + q_2 \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} \delta V_{\tilde{n}}\, V_{\tilde{n}} \\
+ \int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \int_\Omega \Bigg[\left\{ \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\tau} + \nabla\cdot\left(\delta\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\mathsf{T} + \mathbf{u}\,\delta\mathbf{u}^\mathsf{T}\right) + \nabla\delta p - \frac{1}{Re}\nabla^2\delta\mathbf{u} \right\}^\mathsf{T} \mathbf{u}_\mathrm{a} \\
+ \left(\nabla\cdot\delta\mathbf{u}\right)\, p_a \Bigg] d\xi d\tau + \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_\mathrm{p}-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\delta\dot{U} - \delta V_{\tilde{n}})\, U_\mathrm{a} d\tau
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

なお，右辺の第 1 項から第 3 項までは評価関数 $J[\phi]$ の第 1 変分と一致する．つぎに，式 (B.1) を各摂動 $\delta\mathbf{u}$, δp, δU, $\delta\mathbf{V}$ について整理する．このために，式 (B.1) の各摂動の導関数または偏導関数を含む項に部分積分を適用する．これによって，式 (B.1) の各項はつぎのように計算される．

$$
\int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\tau}^\mathsf{T} \mathbf{u}_\mathrm{a}\, d\tau = -\int_{t_n}^{t_{n+N_\mathrm{p}}} \delta\mathbf{u}^\mathsf{T} \frac{\partial\mathbf{u}_\mathrm{a}}{\partial\tau}\, d\tau - \left[\delta\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u}_\mathrm{a}\right]_{\tau=t_n} + \left[\delta\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u}_\mathrm{a}\right]_{\tau=t_{n+N_\mathrm{p}}}
\tag{B.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left\{\nabla\cdot\left(\delta\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\mathsf{T} + \mathbf{u}\,\delta\mathbf{u}^\mathsf{T}\right)\right\}^\mathsf{T} \mathbf{u}_\mathrm{a}\, d\xi &= -\int_\Omega \mathrm{Tr}\left\{\left(\delta\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\mathsf{T} + \mathbf{u}\,\delta\mathbf{u}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} \nabla\mathbf{u}_\mathrm{a}\right\} d\xi \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_\mathrm{a}^\mathsf{T} \left(\delta\mathbf{u}\,\mathbf{u}^\mathsf{T} + \mathbf{u}\,\delta\mathbf{u}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} \mathbf{n}\, d\xi \\
&= -\int_\Omega \delta\mathbf{u}^\mathsf{T}\left(\nabla\mathbf{u}_\mathrm{a} + \nabla\mathbf{u}_\mathrm{a}^\mathsf{T}\right)\mathbf{u}\, d\xi \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}^\mathsf{T}\left(\mathbf{u}_\mathrm{a}\mathbf{u}^\mathsf{T} + \mathbf{u}_\mathrm{a}^\mathsf{T}\mathbf{u}\, I_2\right)\mathbf{n}\, d\xi
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

$$
\int_\Omega (\nabla\delta p)^\mathsf{T}\mathbf{u}_\mathrm{a}\, d\xi = -\int_\Omega \delta p\,(\nabla\cdot\mathbf{u}_\mathrm{a})\, d\xi + \int_{\partial\Omega} \delta p\,(\mathbf{u}_\mathrm{a}^\mathsf{T}\mathbf{n})\, d\xi
\tag{B.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\nabla^2 \delta \mathbf{u})^{\mathsf{T}} \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \, d\xi &= -\int_{\Omega} \mathrm{Tr} \left(\nabla \delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \, \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \right) \, d\xi + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \nabla \delta \mathbf{u})^{\mathsf{T}} \, \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \, d\xi \\
&= \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \, d\xi - \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \, \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \, \mathbf{n} \, d\xi + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \nabla \delta \mathbf{u})^{\mathsf{T}} \, \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \, d\xi
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

$$
\int_{\Omega} (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}) \, p_{\mathrm{a}} \, d\xi = -\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \nabla p_{\mathrm{a}} \, d\xi + \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \left(p_{\mathrm{a}} \mathbf{n} \right) \, d\xi
\tag{B.6}
$$

$$
\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}} \delta \dot{U} \, U_{\mathrm{a}} d\tau = -\int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}} \delta U \, \dot{U}_{\mathrm{a}} d\tau - \left[\delta U \, U_{\mathrm{a}} \right]_{t_{\tilde{n}}} + \left[\delta U \, U_{\mathrm{a}} \right]_{t_{\tilde{n}+1}}
\tag{B.7}
$$

これらの式を式 (B.1) に代入して各摂動について整理すると，$\delta L[\phi, \delta\phi]$ をつぎのように書き表すことができる．

$$
\begin{aligned}
&\delta L[\phi, \delta\phi] \\
&= -\int_{t_n}^{t_{n+N_{\mathrm{p}}}} \int_{\Omega} \left\{ \delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{a}}}{\partial \tau} + \left(\nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}}^{\mathsf{T}} \right) \mathbf{u} + \nabla p_{\mathrm{a}} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \right) + \delta p \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \right) \right\} d\xi \, d\tau \\
&\quad - \frac{1}{Re} \int_{t_n}^{t_{n+N_{\mathrm{p}}}} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \nabla \delta \mathbf{u})^{\mathsf{T}} \, \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \, d\xi \, d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+N_{\mathrm{p}}}} \int_{\partial\Omega} \delta p \left(\mathbf{u}_{\mathrm{a}}^{\mathsf{T}} \mathbf{n} \right) d\xi \, d\tau \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+N_{\mathrm{p}}}} \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \left\{ \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \, \mathbf{u}^{\mathsf{T}} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \left(\mathbf{u}_{\mathrm{a}}^{\mathsf{T}} \mathbf{u} + p_{\mathrm{a}} \right) I_2 \right\} \mathbf{n} \, d\xi \, d\tau \\
&\quad - \int_{t_n}^{t_{n+N_{\mathrm{p}}}} \delta U \, (\dot{U}_{\mathrm{a}} - U) d\tau - \int_{\Omega} \left[\delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \right]_{\tau = t_n} \, d\xi \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[\delta \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \left\{ \mathbf{u}_{\mathrm{a}} + q_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}) \right\} \right]_{\tau = t_{n+N_{\mathrm{p}}}} \, d\xi - \left[\delta U \, U_{\mathrm{a}} \right]_{t_n} + \left[\delta U \, U_{\mathrm{a}} \right]_{t_{n+N_{\mathrm{p}}}} \\
&\quad + \sum_{\tilde{n}=n}^{n+N_{\mathrm{p}}-1} \delta V_{\tilde{n}} \left(q_1 V_{\tilde{n}} - \int_{t_{\tilde{n}}}^{t_{\tilde{n}+1}} U_{\mathrm{a}} \, d\tau \right)
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

この式に境界条件 (3.28)-(3.30) と摂動に関する境界条件 (3.34)–(3.39) を代入することで，目的の式 (3.40) が得られる．

付録 C

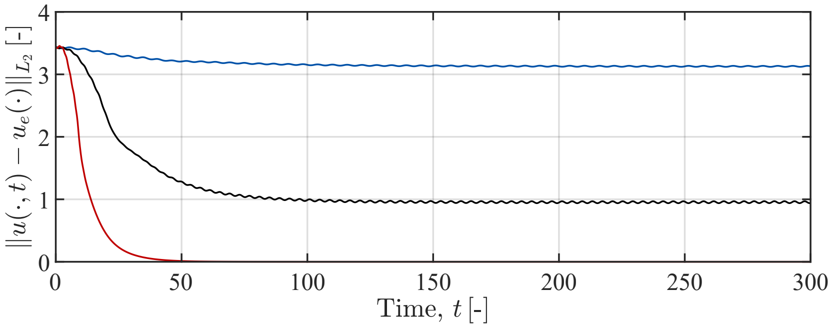
予測ホライズンと性能の関係

本章ではモデル予測制御の予測ホライズンと性能の関係を調査する．一般にモデル予測制御は予測ホライズンが長いほど高い性能を持つことが期待できる．これは予測ホライズンが長いほど，制御システムの長期的な予測に基づいて制御決定がなされるためである．特に有限次元システムに対しては，十分な長さの予測ホライズンを設定すれば，モデル予測制御によって平衡点を安定化することができることが理論的に示されている [108]．本章では円柱まわり流れに対して，十分に長いホライズンをとることで，モデル予測制御によって状態が平衡点に漸近することを数値実験で確認する．

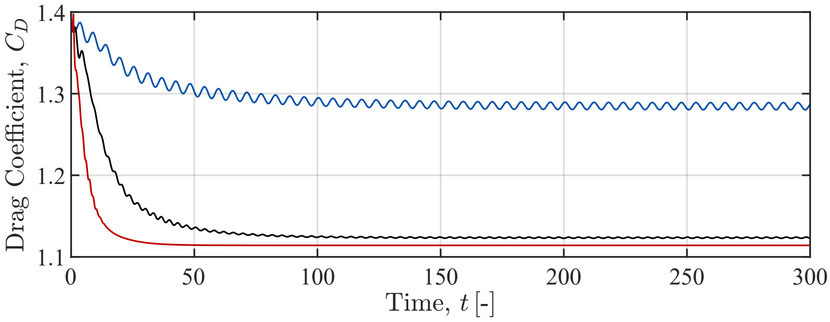
第 3 章では，無制御時の渦放出の周期とほぼ等しい予測ホライズン $N_{\mathrm{p}}\Delta t = 6$ で流れ場にモデル予測制御を適用した．本章では，この予測ホライズンの 1/2 および 2 倍にあたる予測ホライズン $N_{\mathrm{p}}\Delta t = 3$, 12 で流れ場を制御する数値実験を行う．数値実験の結果を図 C.1 に示す．図 C.1(a) と (b), (c) はそれぞれ，各予測ホライズンを持つモデル予測制御を流れ場に適用した際の距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$ と抗力係数 C_D，噴流速度 U を表す．予測ホライズン $N_{\mathrm{p}}\Delta t = 3$, 6, 12 の場合の結果がそれぞれ，青線と黒線，赤線で示されている．図 C.1(a) から，短い予測ホライズン $N_{\mathrm{p}}\Delta t = 3$ の場合には，状態をわずかにしか平衡点に近づけることができていないことがわかる．一方で，長い予測ホライズン $N_{\mathrm{p}}\Delta t = 12$ の場合には，状態をほぼ平衡点に到達させることができている．長い予測ホライズンの場合，時刻 $t = 300$ において $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2} = 1.49 \times 10^{-7}$ である．また，図 C.1(b) から，抗力係数の減少幅で比較した場合においても，長い予測ホライズンを持つモデル予測制御のほうが高い性能を示していることがわかる．長い予測ホライズンを持つモデル予測制御を適用した場合，時刻 $t = 50$ 以降では流れ場の状態と平衡点がほぼ一致するため，円柱の抗力係数は平衡点における抗力係数とほぼ等しい．

各モデル予測制御において評価関数の予測ホライズンは異なるが，噴流の強さに対する重みは同じである．しかしながら，図 C.1(c) に示されているように，噴流の瞬間的な強さは予測ホライズンが長いほど強くなる傾向がある．これは，長期的なスパンで評価すれば噴流を一時的に強く噴出して噴流に関するコストが大きくなったとしても，状態と平衡点との距離に関する終端コストを抑えた方が良いという判断を最適制御則が下していることを意味する．このように長い予測ホライズンを持つモデル予測制御は瞬時的には強い噴流を出すが，最終的な運動量の投入量は最も少ない．噴流の強さを評価する指標である運動量係数 C_μ の全区間 $[0, 300]$ での時間平均で比較すると，表 C.1 に記しているように，長い予測ホライズン $N_{\mathrm{p}}\Delta t = 12$ の場合に最も C_μ の時間平均値が小さい．

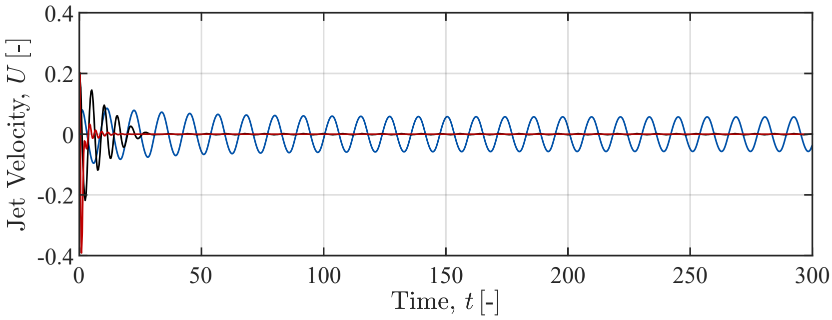
各物理量の時間平均値を表 C.1 に記しているが，モデル予測制御において予測ホライズンが長いほど，小さな運動量係数 C_μ で平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_{\mathrm{e}}\|_{L_2}$ を縮め，抗力係数 C_D を低減させることができる．このように，円柱まわり流れに対するモデル予測制御においても本章の冒頭で述べたように，予測ホライズンが長いほど高い性能を持つ．また，十分に長いホライズンを設定することで，平衡点への漸近が



(a) 状態と平衡点との距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$



(b) 抗力係数 C_D



(c) 噴流速度 U

図 C.1: 異なる予測ホライズンを持つモデル予測制御を適用したときの各変数の時系列．予測ホライズン $N_\mathrm{p}\Delta t = 3$, 6, 12 の場合の結果をそれぞれ，青線と黒線，赤線で示している．

表 C.1: 異なる予測ホライズン $N_\mathrm{p}\Delta t$ を持つモデル予測制御を適用した際の各物理量の時間平均値．距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$ と抗力係数 C_D には区間 $[200, 300]$ での平均値，運動量係数 C_μ には全区間 $[0, 300]$ での時間平均を示している．

予測ホライズン $N_\mathrm{p}\Delta t$	運動量係数 C_μ	距離 $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_\mathrm{e}\|_{L_2}$	抗力係数 C_D
3	9.99×10^{-4}	3.13	1.285
6	2.67×10^{-4}	0.954	1.124
12	2.14×10^{-4}	2.93×10^{-7}	1.114

達成することが確認された．

このようにモデル予測制御は予測ホライズンを長くするほど高い性能を発揮するが，実用的な観点で言えば，予測ホライズンを無尽蔵に長くすることは良いことではない．これは，予測ホライズンが長いほど下記の理由で最適制御入力の計算に要する時間がかかってしまうためである．最適制御入力の計算には勾配法やシューティング法などの変分法に基づく方法がとられる場合が多い．この場合，数値最適化のプロ

セスで予測ホライズンの長さだけ状態方程式を数値積分することが繰り返し求められる．したがって，予測ホライズンの長いほど状態方程式を数値積分する計算時間がかかってしまう．また，予測ホライズンが長いと初期の制御入力が終端における状態に及ぼす影響が大きくなり，評価関数が数値的に最適化しにくい形となる．結果として，最適化における反復回数が増え，計算時間が長くなる．

上述のようにモデル予測制御は予測ホライズンを長くするほど性能が高くなるが，制御入力の計算に要する時間が長くなる．このため，一般にモデル予測制御の設計では，性能と計算時間のトレードオフでホライズンの長さが決定される．流れ場では解くべき最適制御問題が大規模になるため，オフラインでの計算を前提としても，予測ホライズンをそれほど長く設定することはできない．第 3 章から第 6 章では，予測ホライズンの長さを $N_{\mathrm{p}}\Delta t = 6$ とすることで，平衡点における抗力係数に匹敵する抗力係数が得られたため，このホライズン長さを用いた．

付録 D

UKF の設計

この章では低次元確率システム (6.20)–(6.21) に対して UKF を設計する．表記の簡略化のために，$f_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_n, V_n) \coloneqq A\,k_{4,Z}(\mathbf{x}_n, V_n)$, $h_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_n) \coloneqq C\,k_{5,Z}(\mathbf{x}_n) + h(\mathbf{u}_{\mathrm{e}})$, $R_0 \coloneqq \sigma_{\mathrm{m}}^2 I_{N_y}$ とおくと，式 (6.20)–(6.21) はつぎのように書き直すことができる．

$$\mathbf{x}_n \sim \mathcal{N}\left(f_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_n, V_n),\, \sigma_x^2([\mathbf{x}_{n-1}^{\mathsf{T}}, V_{n-1}]^{\mathsf{T}})\,Q\right) \tag{D.1}$$

$$y_n \sim \mathcal{N}\left(h_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_n),\, \sigma_y^2(\mathbf{x}_n)\,R + R_0\right) \tag{D.2}$$

式 (D.1)–(D.2) に基づいて UKF を設計する．

UKF では Unscented 変換と呼ばれる手法を利用することで，確率変数の非線形変換の統計量が推定される．いま，平均 $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^r$ で共分散 $P \in \mathbb{R}^{r\times r}$ の Gauss 分布にしたがう確率変数 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ が与えられたとする．このとき，ある非線形変換 $g : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^j$ が施された確率変数 $g(\mathbf{x})$ の平均と共分散を推定することを考える．確率変数 $g(\mathbf{x})$ の統計量を解析的に求めることは一般に困難である．Unscented 変換では確率変数 $\mathbf{x}$ に関する複数のサンプル点をとることで，確率変数 $g(\mathbf{x})$ の統計量を推定する．確率変数 $\mathbf{x}$ のサンプル点 $(\mathbf{x}^{(i)})_{i=0,1,\ldots,2r}$ はつぎのようにとられる．

$$\mathbf{x}^{(0)} = \bar{\mathbf{x}} \tag{D.3}$$

$$\mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{(r+\lambda_{\mathrm{UT}})P}\right)_i, \quad i = 1, \ldots, r \tag{D.4}$$

$$\mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{(r+\lambda_{\mathrm{UT}})P}\right)_i, \quad i = r+1, \ldots, 2r \tag{D.5}$$

ここで, $\lambda_{\mathrm{UT}} = \alpha_{\mathrm{UT}}^2(r+\kappa_{\mathrm{UT}}) - r \in \mathbb{R}$, $\alpha_{\mathrm{UT}} \in \mathbb{R}$, $\kappa_{\mathrm{UT}} \in \mathbb{R}$ は設計パラメータであり，$\left(\sqrt{(r+\lambda_{\mathrm{UT}})P}\right)_i \in \mathbb{R}^r$ は $(r+\lambda_{\mathrm{UT}})P$ の平方根行列の第 i 番目の列ベクトルを表す．これらのサンプル点における非線形変換の値 $(g(\mathbf{x}^{(i)}))_{i=0,1,\ldots,2r}$ を用いて，確率変数 $g(\mathbf{x})$ の平均 $\bar{g} \in \mathbb{R}^j$ と共分散 $P_{gg} \in \mathbb{R}^{j\times j}$ がつぎのように推定される．

$$\bar{g} = \sum_{i=0}^{2r} W_{\mathrm{m}}^{(i)} g(\mathbf{x}^{(i)}) \tag{D.6}$$

$$P_{gg} = \sum_{i=0}^{2r} W_{\mathrm{c}}^{(i)} \left(g(\mathbf{x}^{(i)}) - \bar{g}\right)\left(g(\mathbf{x}^{(i)}) - \bar{g}\right)^{\mathsf{T}} \tag{D.7}$$

定数 $W_{\mathrm{m}}^{(i)}$ と $W_{\mathrm{c}}^{(i)}$ は重み係数でつぎのように定められる．

$$W_{\mathrm{m}}^{(0)} = \lambda_{\mathrm{UT}}/(r+\lambda_{\mathrm{UT}}) \tag{D.8}$$

$$W_{\mathrm{c}}^{(0)} = \lambda_{\mathrm{UT}}/(r+\lambda_{\mathrm{UT}}) + 1 - \alpha_{\mathrm{UT}}^2 + \beta_{\mathrm{UT}} \tag{D.9}$$

$$W_{\mathrm{m}}^{(i)} = W_{\mathrm{c}}^{(i)} = 1/\{(r+\lambda_{\mathrm{UT}})\}, \quad i = 1, \ldots, 2r \tag{D.10}$$

ここで，$\beta_{\mathrm{UT}} \in \mathbb{R}$ は設計パラメータである．式 (D.6) と式 (D.7) のように，Unscented 変換ではサンプル点 $(\mathbf{x}^{(i)})_{i=0,1,\ldots,2r}$ における各量の重みつきの和によって，平均と共分散を推定する．このように推定される平均と共分散は，Taylor 展開に基づく評価基準において，線形近似によって推定される平均と共分散よりも精度が良いことが知られている [109].

Unscented 変換を用いることで，モデル (D.1)–(D.2) に基づいて状態と計測量の平均と共分散を予測し，また実際の計測量から状態の平均と共分散を修正する．いま，時刻 t_{n-1} において，状態の平均と共分散の事後推定量がそれぞれ $\bar{\mathbf{x}}_{n-1|n-1} \in \mathbb{R}^r$ と $P_{n-1|n-1}^{xx} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ で与えられているとする．このとき，Unscented 変換で計算されるサンプル点 $(\mathbf{x}_{n-1|n-1}^{(i)})_{i=0,\ldots,2r}$ を用いて，時刻 t_n における状態の平均と共分散のそれぞれの事前推定量 $\bar{\mathbf{x}}_{n|n-1} \in \mathbb{R}^r$ と $P_{n|n-1}^{xx} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ をつぎのように推定する．

$$\bar{\mathbf{x}}_{n|n-1} = \sum_{i=0}^{2r} W_{\mathrm{m}}^{(i)} f_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n-1|n-1}^{(i)}, V_{n-1}) \tag{D.11}$$

$$\begin{aligned} P_{n|n-1}^{xx} = &\sum_{i=0}^{2r} W_{\mathrm{c}}^{(i)} (f_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n-1|n-1}^{(i)}, V_{n-1}) - \bar{\mathbf{x}}_{n|n-1})(f_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n-1|n-1}^{(i)}, V_{n-1}) - \bar{\mathbf{x}}_{n|n-1})^{\mathsf{T}} \\ &+ \sigma_x^2([\bar{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}^{\mathsf{T}}, V_{n-1}]^{\mathsf{T}})\, Q \end{aligned} \tag{D.12}$$

式 (D.12) の第 1 項は確率変数 $f_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n-1}, V_{n-1})$ の共分散行列の事後推定量である．さらに，平均 $\bar{\mathbf{x}}_{n|n-1}$ と共分散 $P_{n|n-1}^{xx}$ のもとで求められるサンプル点 $(\mathbf{x}_{n-1|n-1}^{(i)})_{i=0,\ldots,2r}$ を用いて，時刻 t_n における計測量の平均と共分散のそれぞれの事前推定量 $\bar{y}_{n|n-1} \in \mathbb{R}^{N_y}$ と $P_{n|n-1}^{yy} \in \mathbb{R}^{N_y\times N_y}$ をつぎのように推定する．

$$\bar{y}_{n|n-1} = \sum_{i=0}^{2r} W_{\mathrm{m}}^{(i)} h_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n|n-1}^{(i)}) \tag{D.13}$$

$$P_{n|n-1}^{yy} = \sum_{i=0}^{2r} W_{\mathrm{c}}^{(i)} (h_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n|n-1}^{(i)}) - \bar{y}_{n|n-1})(h_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n|n-1}^{(i)}) - \bar{y}_{n|n-1})^{\mathsf{T}} + \sigma_y^2(\bar{\mathbf{x}}_{n|n-1})\, R + R_0 \tag{D.14}$$

式 (D.14) の第 1 項は確率変数 $h_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n-1})$ の共分散行列の事後推定量である．また，x_n と y_n の共分散の事前推定量 $P_{n|n-1}^{xy} \in \mathbb{R}^{r\times N_y}$ をつぎのように推定する．

$$P_{n|n-1}^{xy} = \sum_{i=0}^{2r} W_{\mathrm{c}}^{(i)} (\mathbf{x}_{n|n-1}^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}_{n|n-1})(h_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_{n|n-1}^{(i)}) - \bar{y}_{n|n-1})^{\mathsf{T}} \tag{D.15}$$

UKF では, Kalman フィルタと同様に式 (D.11)–(D.15) で求めれれた事前推定量 $\bar{\mathbf{x}}_{n|n-1}$, $\bar{y}_{n|n-1}$, $P_{n|n-1}^{xx}$, $P_{n|n-1}^{xy}$, $P_{n|n-1}^{yy}$ と実際の計測量 y_n から，時刻 t_n における状態の平均と共分散の事後推定量が計算される．時刻 t_n における状態の平均と共分散の事後推定量 $\bar{\mathbf{x}}_{n|n} \in \mathbb{R}^r$ と $P_{n|n}^{xx} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ はつぎのように求められる．

$$\bar{\mathbf{x}}_{n|n} = \bar{\mathbf{x}}_{n|n-1} - P_{n|n-1}^{xy}(P_{n|n-1}^{yy})^{-1}(\bar{y}_{n|n-1} - y_n) \tag{D.16}$$

$$P_{n|n}^{xx} = P_{n|n-1}^{xx} - P_{n|n-1}^{xy}(P_{n|n-1}^{yy})^{-1}(P_{n|n-1}^{xy})^{\mathsf{T}} \tag{D.17}$$

状態の平均の事後推定量 $\bar{\mathbf{x}}_{n|n}$ が時刻 t_n における状態の推定量 $\hat{\mathbf{x}}_n$ として，図 6.1 のように近似制御則に渡される．

以上をまとめると，モデル (D.1)–(D.2) に基づく UKF ではつぎの手順で状態を逐次的に計算する．

1. $n = 1$．状態の平均と共分散の初期推定量 $\bar{\mathbf{x}}_{0|0}$ と $P^{xx}_{0|0}$ を与える．また，設計パラメータ α_{UT}, β_{UT}, κ_{UT} を与える．
2. 式 (D.8)–(D.10) により重み係数 $(W^{(i)}_{\mathrm{m}}, W^{(i)}_{\mathrm{c}})_{i=0,\dots,2r}$ を計算する．
3. 平均 $\bar{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}$ と共分散 $P^{xx}_{n-1|n-1}$ のもとでサンプル点 $(\mathbf{x}^{(i)}_{n-1|n-1})_{i=0,\dots,2r}$ を計算する．
4. 式 (D.11) と式 (D.12) より，状態の平均と共分散の事前推定量 $\bar{\mathbf{x}}_{n|n-1}$ と $P^{xx}_{n|n-1}$ を求める．
5. 平均 $\bar{\mathbf{x}}_{n|n-1}$ と共分散 $P^{xx}_{n|n-1}$ のもとでサンプル点 $(\mathbf{x}^{(i)}_{n|n-1})_{i=0,\dots,2r}$ を計算する．
6. 式 (D.13)–(D.15) により，計測量の平均と共分散および状態との共分散の事前推定量 $\bar{y}_{n|n-1}$ と $P^{yy}_{n|n-1}$, $P^{xy}_{n|n-1}$ を求める．
7. 時刻 t_n における計測量 y_n を取得．
8. 式 (D.16) と式 (D.17) により，状態の平均と共分散の事後推定量 $\mathbf{x}_{n|n}$ と $P^{xx}_{n|n}$ を計算する．
9. 状態の平均の事後推定量 $\mathbf{x}_{n|n}$ を時刻 t_n における状態の推定量として出力する．$n = n + 1$ としてステップ 3 へ戻る．

設計パラメータ α_{UT}, κ_{UT} に関して，文献 [100] では α_{UT} は 0 に近い値，κ_{UT} は 0 もしくは β_{UT} にとることが推奨されている．また，確率変数が Gauss 分布にしたがう場合には $\beta_{\mathrm{UT}} = 2$ とすると，Taylor 展開に基づく評価のもとで誤差が最小になる [110]．本研究では，$\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 2$, $\kappa = 0$ を用いた．また，状態の平均と共分散の初期推定量には，EnKF で用いた量を POD によって低次元化した値を用いた．

参考文献

[1] C.-M. Ho, Y.-C. Tai: "Micro-electro-mechanical-systems (MEMS) and fluid flows", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.30, No.1, pp.579–612 (1998)

[2] A. Glezer, M. Amitay: "Synthetic jets", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.34, No.1, pp.503–529 (2002)

[3] T. C. Corke, C. L. Enloe, S. P. Wilkinson: "Dielectric barrier discharge plasma actuators for flow control", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.42, No.1, pp.505–529 (2010)

[4] M. P. Patel, Z. H. Sowle, T. C. Corke, C. He: "Autonomous sensing and control of wing stall using a smart plasma slat", *Journal of Aircraft*, Vol.44, No.2, pp.516–527 (2007)

[5] J. T. Pinier, J. M. Ausseur, M. N. Glauser, H. Higuchi: "Proportional closed-loop feedback control of flow separation", *AIAA Journal*, Vol.45, No.1, pp.181–190 (2007)

[6] M. L. Post, T. C. Corke: "Separation control using plasma actuators: dynamic stall vortex control on oscillating airfoil", *AIAA Journal*, Vol.44, No.12, pp.3125–3135 (2006)

[7] J. Poggie, C. P. Tilmann, P. M. Flick, J. S. Silkey, B. A. Osbourne, G. Ervin, D. Maric, S. Mangalam, A. Mangalam: "Closed-loop stall control system", *Journal of Aircraft*, Vol.47, No.5, pp.1747–1755 (2010)

[8] T. Segawa, D. Suzuki, T. Fujino, T. Jukes, T. Matsunuma: "Feedback control of flow separation using plasma actuator and FBG sensor", *International Journal of Aerospace Engineering*, Vol.2016, id 8648919 (2016)

[9] M. Pastoor, L. Henning, B. R. Noack, R. King, G. Tadmor: "Feedback shear layer control for bluff body drag reduction", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.608, pp.161–196 (2008)

[10] R. Becker, R. King, R. Petz, W. Nitsche: "Adaptive closed-loop separation control on a high-lift configuration using extremum seeking", *AIAA Journal*, Vol.45, No.6, pp.1382–1392 (2007)

[11] N. Benard, E. Moreau, J. Griffin, L. N. Cattafesta: "Slope seeking for autonomous lift improvement by plasma surface discharge", *Experiments in Fluids*, Vol.48, No.5, pp.791–808 (2010)

[12] Z. Wu, C. W. Wong, L. Wang, Z. Lu, Y. Zhu, Y. Zhou: "A rapidly settled closed-loop control for airfoil aerodynamics based on plasma actuation", *Experiments in Fluids*, Vol.56, No.8, pp.1–15 (2015)

[13] K. Ogawara, M. Nomoto, Y. Taguchi, H. Shingin: "Experimental study on delayed feedback flow control around a NACA0015 airfoil using PSJA", in 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting (2017)

[14] L. Henning, R. Becker, G. Feuerbach, R. Muminovic, R. King, A. Brunn, W. Nitsche: "Extensions of adaptive slope-seeking for active flow control", *Proceedings of the Institution of*

Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, Vol.222, No.5, pp.309–322 (2008)

[15] N. Benard, L. N. Cattafesta, E. Moreau, J. Griffin, J. Bonnet: “On the benefits of hysteresis effects for closed-loop separation control using plasma actuation”, *Physics of Fluids*, Vol.23, No.8 (2011)

[16] S. Shimomura, S. Sekimoto, A. Oyama, K. Fujii, H. Nishida: “Closed-loop flow separation control using the deep Q network over airfoil”, *AIAA Journal*, Vol.58, No.10, pp.4260–4270 (2020)

[17] D. Fan, L. Yang, Z. Wang, M. S. Triantafyllou, G. E. Karniadakis: “Reinforcement learning for bluff body active flow control in experiments and simulations”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol.117, No.42, pp.26 091–26 098 (2020)

[18] T. Yoshino, Y. Suzuki, N. Kasagi: “Drag reduction of turbulence air channel flow with distributed micro sensors and actuators”, *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol.3, No.1, pp.137–148 (2008)

[19] P. Tewes, I. Wygnanski, A. E. Washburn: “Feedback-controlled forcefully attached flow on a stalled airfoil”, *Journal of Aircraft*, Vol.48, No.3, pp.940–951 (2011)

[20] R. Vazquez, M. Krstic: “A closed-form feedback controller for stabilization of the linearized 2-D Navier-Stokes Poiseuille system”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.52, No.12, pp.2298–2312 (2007)

[21] H. Choi, P. Moin, J. Kim: “Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.262, pp.75–110 (1994)

[22] D. S. Park, D. M. Ladd, E. W. Hendricks: “Feedback control of von Kármán vortex shedding behind a circular cylinder at low Reynolds numbers”, *Physics of Fluids*, Vol.6, No.7, pp.2390–2405 (1994)

[23] K. Roussopoulos: “Feedback control of vortex shedding at low Reynolds numbers”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.248, p.267–296 (1993)

[24] V. Troshin, A. Seifert: “Performance recovery of a thick turbulent airfoil using a distributed closed-loop flow control system”, *Experiments in Fluids*, Vol.54, No.1 (2013)

[25] T. C. Corke, P. O. Bowles, C. He, E. H. Matlis: “Sensing and control of flow separation using plasma actuators”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.369, No.1940, pp.1459–1475 (2011)

[26] Z. Wu, Y. Zhou, H. L. Cao, W. J. Li: “Closed-loop enhancement of jet mixing with extremum-seeking and physics-based strategies”, *Experiments in Fluids*, Vol.57, No.6 (2016)

[27] 中野壮毅・椿野大輔：「ある円柱周り剥離流のフィードバック制御系における極値探索法による流速観測位置の最適化」，第 62 回自動制御連合講演会講演論文集，pp.1D4–03（2019）

[28] T. Chabert, J. Dandois, É. Garnier: “Experimental closed-loop control of separated-flow over a plain flap using extremum seeking”, *Experiments in Fluids*, Vol.57, No.3, p.37 (2016)

[29] N. Gautier, J. L. Aider, T. Duriez, B. R. Noack, M. Segond, M. Abel: “Closed-loop separation control using machine learning”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.770, pp.442–457 (2015)

[30] P. Garnier, J. Viquerat, J. Rabault, A. Larcher, A. Kuhnle, E. Hachem: “A review on deep reinforcement learning for fluid mechanics”, *Computers and Fluids*, Vol.225 (2021)

[31] J. Rabault, M. Kuchta, A. Jensen, U. Réglade, N. Cerardi: “Artificial neural networks trained through deep reinforcement learning discover control strategies for active flow control”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.865, p.281–302 (2019)

[32] G. Berkooz, P. Holmes, J. L. Lumley: “The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.25, No.1, pp.539–575 (1993)

[33] C. Rowley: “Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.15, No.3, pp.997–1013 (2005)

[34] J.-N. Juang, R. S. Pappa: “An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.8, No.5, pp.620–627 (1985)

[35] P. J. Schmid: “Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.656, pp.5–28 (2010)

[36] P. Sashittal, D. J. Bodony: “Reduced-order control using low-rank dynamic mode decomposition”, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol.33, No.6, pp.603–623 (2019)

[37] M. Samimy, M. Debiasi, E. Caraballo, A. Serrani, X. Yuan, J. Little, J. H. Myatt: “Feedback control of subsonic cavity flows using reduced-order models”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.579, p.315–346 (2007)

[38] S. S. Ravindran: “Reduced-order controllers for control of flow past an airfoil”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.50, No.5, pp.531–554 (2006)

[39] K. H. Lee, L. Cortelezzi, J. Kim, J. Speyer: “Application of reduced-order controller to turbulent flows for drag reduction”, *Physics of Fluids*, Vol.13, No.5, pp.1321–1330 (2001)

[40] E. Åkervik, J. Hœpffner, U. Ehrenstein, D. S. Henningson: “Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary-layer flow using global eigenmodes”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.579, No.2007, pp.305–314 (2007)

[41] O. Semeraro, S. Bagheri, L. Brandt, D. S. Henningson: “Feedback control of three-dimensional optimal disturbances using reduced-order models”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.677, pp.63–102 (2011)

[42] R. Dadfar, A. Hanifi, D. S. Henningson: “Feedback control for laminarization of flow over wings”, *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol.94, No.1, pp.43–62 (2015)

[43] S. Bagheri, L. Brandt, D. S. Henningson: “Input–output analysis, model reduction and control of the flat-plate boundary layer”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.620, pp.263–298 (2009)

[44] B. Jin, S. J. Illingworth, R. D. Sandberg: “Feedback control of vortex shedding using a resolvent-based modelling approach”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.897, pp.A26–1–22 (2020)

[45] S. J. Illingworth: “Model-based control of vortex shedding at low Reynolds numbers”, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol.30, No.5, pp.429–448 (2016)

[46] M. Martin, C. Patton, J. Schmitt, S. V. Apte: “Direct simulation based model-predictive control of flow maldistribution in parallel microchannels”, *Journal of Fluids Engineering*, Vol.131, No.11 (2009)

[47] J. Baker, A. Armaou, P. D. Christofides: “Nonlinear control of incompressible fluid flow: Application to Burgers’ equation and 2D channel flow”, *Journal of Mathematical Analysis and*

Applications, Vol.252, No.1, pp.230–255 (2000)

[48] K. B. Kidambi, N. Ramos-Pedroza, W. MacKunis, S. V. Drakunov: "A closed-loop nonlinear control and sliding mode estimation strategy for fluid flow regulation", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.29, No.3, pp.779–792 (2019)

[49] K. Aleksić-Roeßner, R. King, O. Lehmann, G. Tadmor, M. Morzyński: "On the need of nonlinear control for efficient model-based wake stabilization", *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol.28, No.1, pp.23–49 (2014)

[50] B. M. Reese, E. G. Collins, E. Fernandez, F. S. Alvi: "Nonlinear adaptive approach to microjet-based flow separation control", *AIAA Journal*, Vol.54, No.10, pp.3002–3014 (2016)

[51] E. Arian, M. Fahl, E. W. Sachs: "Trust-region proper orthogonal decomposition for flow control", Institute for Computer Applications in Science and Engineering, Tech. Rep. (2000)

[52] S. S. Ravindran: "Reduced-order adaptive controllers for fluid flows using POD", *Journal of Scientific Computing*, Vol.15, No.4, pp.457–478 (2000)

[53] C. Leclercq, F. Demourant, C. Poussot-Vassal, D. Sipp: "Linear iterative method for closed-loop control of quasiperiodic flows", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.868, p.26–65 (2019)

[54] O. Semeraro, J. O. Pralits, C. W. Rowley, D. S. Henningson: "Riccati-less approach for optimal control and estimation: An application to two-dimensional boundary layers", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.731, pp.394–417 (2013)

[55] J. Cochran, R. Vazquez, M. Krstic: "Backstepping boundary control of Navier-Stokes channel flow: A 3d extension", *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, No.8, pp.769–774 (2006)

[56] J. Borggaard, M. Stoyanov, L. Zietsman: "Linear feedback control of a von Kármán street by cylinder rotation", in Proceedings of the 2010 American Control Conference, pp.5674–5681 (2010)

[57] J. O. Pralits, P. Luchini: "Riccati-less optimal control of bluff-body wakes", in Seventh IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, pp.325–330 (2010)

[58] O. Semeraro, J. O. Pralits: "Full-order optimal compensators for flow control: the multiple inputs case", *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol.32, No.3, pp.285–305 (2018)

[59] T. R. Bewley, P. Moin, R. Temam: "DNS-based predictive control of turbulence: An optimal benchmark for feedback algorithms", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.447, No.2001, pp.179–225 (2001)

[60] Y. Sasaki, D. Tsubakino: "Model predictive control of a separated flow around a circular cylinder at a low Reynolds number", *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol.11, No.3, pp.154–159 (2018)

[61] 中村昌道：「流れ場の最適制御に関する研究」，Ph.D. dissertation，東京大学（2017）

[62] G. Evensen: "Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics", *Journal of Geophysical Research: Oceans*, Vol.99, No.C5, pp.10 143–10 162 (1994)

[63] M. Tokarev, E. Palkin, R. Mullyadzhanov: "Deep reinforcement learning control of cylinder flow using rotary oscillations at low Reynolds number", *Energies*, Vol.13, No.22 (2020)

[64] T. L. Flinois, T. Colonius: "Optimal control of circular cylinder wakes using long control

horizons", *Physics of Fluids*, Vol.27, No.8 (2015)

[65] C. Min, H. Choi: "Suboptimal feedback control of vortex shedding at low Reynolds numbers", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.401, p.123–156 (1999)

[66] M. Vinokur: "On one-dimensional stretching functions for finite-difference calculations", *Journal of Computational Physics*, Vol.50, No.2, pp.215–234 (1983)

[67] 藤井孝藏：「流体力学の数値計算法」，東京大学出版会（1994）

[68] P. R. Spalart, R. D. Moser, M. M. Rogers: "Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and 2 periodic directions", *Journal of Computational Physics*, Vol.96, No.2, pp.297–324 (1991)

[69] 神部勉・Drazin PG：「流体力学 安定性と乱流」，東京大学出版会（1998）

[70] M. Bergmann, L. Cordier, J. P. Brancher: "Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model", *Physics of Fluids*, Vol.17, No.9, pp.1–21 (2005)

[71] 井村順一：「システム制御のための安定論」，コロナ社（2000）

[72] O. Marquet, D. Sipp, L. Jacquin: "Sensitivity analysis and passive control of cylinder flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.615, p.221–252 (2008)

[73] R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen: "Deflation techniques for an implicitly restarted arnoldi iteration", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol.17, No.4, pp.789–821 (1996)

[74] 丸岡 晃・太田 真二・平野 廣和・川原 睦人：「広範囲な reynolds 数域での円柱まわりの 2 次元及び 3 次元数値流体解析」，土木学会論文集，Vol.1998，No.591，pp.139–150（1998）

[75] C. H. K. Williamson: "Vortex dynamics in the cylinder wake", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.28, No.1, pp.477–539 (1996)

[76] L. D. Berkovitz: "Variational methods in problems of control and programming", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.3, No.1, pp.145–169 (1961)

[77] 大塚敏之：「非線形最適制御入門」，コロナ社（2011）

[78] J. Nocedal, S. Wright: Numerical Optimization, 2nd ed., Springer Science (2006)

[79] A. Bemporad, F. Borrelli, M. Morari: "Model predictive control based on linear programming - the explicit solution", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.47, No.12, pp.1974–1985 (2002)

[80] T. A. Johansen: "Reduced explicit constrained linear quadratic regulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.48, No.5, pp.823–828 (2003)

[81] A. Grancharova, T. A. Johansen: Explicit Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Applications, Springer, Berlin, Heidelberg (2012)

[82] S. Hovland, J. T. Gravdahl, K. E. Willcox: "Explicit model predictive control for large-scale systems via model reduction", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.31, No.4, pp.918–926 (2008)

[83] L. Mathelin, L. Pastur, O. L. Maître: "A compressed-sensing approach for closed-loop optimal control of nonlinear systems", *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol.26, No.1-4, pp.319–337 (2012)

[84] 森安 竜大・上田 松栄・池田 太郎・永岡 真・神保 智彦・松永 彰生・中村 俊洋：「機械学習によるディーゼルエンジン吸排気系の実時間 MPC 設計」，計測自動制御学会論文集，Vol.55，No.3,

pp.172–180（2019）

[85] J. Drgoňa, D. Picard, M. Kvasnica, L. Helsen: “Approximate model predictive building control via machine learning”, *Applied Energy*, Vol.218, pp.199–216 (2018)

[86] T. Bewley, P. Moin, R. Temam: “A method for optimizing feedback control rules for wall-bounded turbulent flows based on control theory”, in Proceedings of ASME Fluids Engineering Conference: Forum on Control of Transitional and Turbulent Flows (1996)

[87] K. Shimizu, Y. Ishizuka, M. Ohtani: “Optimal state feedback control law for nonlinear systems and its best approximation by a neural network”, in IEEE SMC’99 Conference Proceedings. 1999 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (Cat. No.99CH37028), Vol.4, pp.1096–1101 (1999)

[88] 鈴木大慈：「再生核ヒルベルト空間の理論によるガウス過程回帰の汎化誤差解析」，システム/制御/情報，Vol.62，No.10，pp.396–404（2018）

[89] R. M. Dudley: Real Analysis and Probability, 2nd ed., ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press (2002)

[90] M. Kanagawa, P. Hennig, D. Sejdinovic, B. K. Sriperumbudur: “Gaussian processes and kernel methods: A review on connections and equivalences” (2018)

[91] C. E. Rasmussen, K. I. Williams: Gaussian Processes for Machine Learning, the MIT Press (2006)

[92] J. H. Lienhard: Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders, Technical Extension Service, Washington State University Pullman, WA, Vol.300 (1966)

[93] Y. Sasaki, D. Tsubakino: “Designs of feedback controllers for fluid flows based on model predictive control and regression analysis”, *Energies*, Vol.13, No.6 (2020)

[94] R. Vazquez, M. Krstic: “A closed-form observer for the channel flow Navier-Stokes system”, in Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, pp.5959–5964 (2005)

[95] M. Chevalier, J. Hæpffner, T. R. Bewley, D. S. Henningson: “State estimation in wall-bounded flow systems. Part 2. Turbulent flows”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.552, pp.167–187 (2006)

[96] C. H. Colburn, J. B. Cessna, T. R. Bewley: “State estimation in wall-bounded flow systems. Part 3. The ensemble Kalman filter”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.682, pp.289–303 (2011)

[97] A. F. da Silva, T. Colonius: “Ensemble-based state estimator for aerodynamic flows”, *AIAA Journal*, Vol.56, No.7, pp.2568–2578 (2018)

[98] 平邦彦：「固有直交分解による流体解析: 1. 基礎」，ながれ: 日本流体力学会誌，Vol.30，No.2，pp.115–123（2011）

[99] H. Liu, J. Cai, Y.-S. Ong: “Remarks on multi-output Gaussian process regression”, *Knowledge-Based Systems*, Vol.144, pp.102–121 (2018)

[100] E. Wan, R. Van Der Merwe: “The unscented Kalman filter for nonlinear estimation”, in Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373), pp.153–158 (2000)

[101] J. Ko, D. J. Klein, D. Fox, D. Haehnel: “GP-UKF: Unscented Kalman filters with Gaussian process prediction and observation models”, in 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp.1901–1907 (2007)

[102] 梶島岳夫：「乱流の数値シミュレーション 改訂版」，養賢堂（2017）

[103] K. Fukami, T. Nakamura, K. Fukagata: “Convolutional neural network based hierarchical autoencoder for nonlinear mode decomposition of fluid field data”, *Physics of Fluids*, Vol.32, No.9 (2020) 095110.

[104] 持橋大地 大羽成征：「ガウス過程と機械学習」，講談社（2019）

[105] J. P. Boeuf, Y. Lagmich, T. Unfer, T. Callegari, L. C. Pitchford: “Electrohydrodynamic force in dielectric barrier discharge plasma actuators”, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol.40, No.3, pp.652–662 (2007-1)

[106] 河合宗司：「実飛行レイノルズ数・航空機全機 LES 解析に向けて (特集 「富岳」の時代における計算工学)」，計算工学，Vol.26，No.1，pp.4195–4199（2021）

[107] H. Kato, A. Yoshizawa, G. Ueno, S. Obayashi: “A data assimilation methodology for reconstructing turbulent flows around aircraft”, *Journal of Computational Physics*, Vol.283, pp.559–581 (2015)

[108] A. Jadbabaie, J. Hauser: “On the stability of receding horizon control with a general terminal cost”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.50, No.5, pp.674–678 (2005)

[109] S. Julier, J. K. Uhlmann: “A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions” (1996)

[110] S. Julier: “The scaled unscented transformation”, in Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301), Vol.6, pp.4555–4559 (2002)

謝辞

筆者が学部 4 年生の頃から 6 年間にわたり，指導教員である名古屋大学 航空宇宙工学専攻 制御システム工学研究グループの椿野大輔講師に研究を指導していただきました．期限間近で論文を渡すなど，いろいろご迷惑をおかけしましたが，椿野先生にはいつも時間を作っていただき熱心に指導をしていただきました．また，椿野先生には研究の指導だけではなく，特別研究員の申請書を見ていただくなど多方面でお世話になりました．椿野先生が指導教員でなければ，研究の道に進むことはなかったと思います．ここに厚く御礼申し上げます．また，同研究グループの原進教授にも 6 年間お世話になりました．原先生にはいつも研究に対するご助言をいただいていたほか，本論文の主査を快く引き受けていただきました．ここに深く感謝申し上げます．また，同研究グループの秘書である近藤華子さんにも 6 年間お世話になりました．物品購入の手続きなどを代わりにしていただいたおかげで，円滑に研究活動を進めることができました．ここに深謝申し上げます．また，同研究グループのほかの先生方や学生，卒業生の皆様のおかげで，充実した研究生活を送ることができました．ここに深く感謝申し上げます．

名古屋大学 航空宇宙工学専攻の長田孝二教授と南山大学 理工学部機械システム工学科の坂本登教授には，本論文の副査を引き受けていただきました．ご多忙のなか，本論文を精読していただき，有益なご助言をいただきました．ここに深く感謝申し上げます．東北大学 航空宇宙工学専攻の野々村拓准教授にはセンサ位置最適化に関する研究に引き入れてくださいました．研究に対する視野を広げることができました．ここに厚く御礼申し上げます．

最後に，経済面と生活面において支えてくれた両親に感謝の意を表します．