

粘土の圧密と砂の締め固め
—弾塑性力学による記述—

名古屋大学 浅岡 顕

Consolidation of Clay and Compaction of Sand
-An elasto-plastic description-

By Akira ASAOKA
Nagoya University

Abstract: Naturally deposited clays/sands are mostly found in structured, and usually also in overconsolidated states. Furthermore, they exhibit what is more or less a condition of anisotropy. In order to describe the mechanical behavior of these natural soils, this study models super/subloading yield surfaces together with rotational hardening using the modified Cam-Clay model. Three evolution laws are introduced naturally into the constitutive laws of soils; the first one describes decay/collapse of soil structure, the second loss of overconsolidation, and the third evolution of anisotropy. Although all of these proceed with ongoing plastic deformation, it is newly emphasized that the decay of structure tends to promote plastic volume compression while the loss of overconsolidation leads to plastic volume expansion. Clay is clearly distinguished from sand by the difference in the rates of these evolution laws. As highly structured overconsolidated clay reverts to the normally consolidated state, it initially retains its structure. Then the clay begins to lose its structure very gradually with ongoing plastic deformation, during which process secondary consolidation and/or delayed compression is observed. In contrast, sand loses its structure very rapidly, not in the manner of a decay, but rather in a sudden collapse, while remaining in its overconsolidated state. The loss of overconsolidation for sand requires a huge amount of plastic deformation. Fundamental constitutive model responses of natural clay are illustrated through numerical simulations of secondary consolidation and/or delayed compression, during which softening is clearly observed with the occurrence of plastic volume compression. For sand, typical model responses are illustrated through numerical simulations of compaction of a loose sand deposit. Repeated application of low-level shear stress upon the loose sand leads to a huge amount of volume compression, which is due to the rapid collapse of the initial soil structure. Repetition of the loading also results in a rapid increase of the overconsolidation ratio.

1. 序論

1.1 論文の目的

その土が砂であるか粘土であるかは、土の色や肌触り、あるいは粒度分布や透水係数の大きさなどで、簡単に見分けられるかもしれない。これらの感覚や物理的指標はたしかに、ほかの土と違ってその土はその土であることを教える。しかし大事なことは、これら感覚や物理的指標の違いをいくら精密に述べ立てても、その違いだけからでは、実験室での3軸試験などで私たちがよく知っている砂と粘土の弾塑性応答の違いを力学的に導くことはできない、という点にある。著者は子供のときに母親から「粘土で遊んではだめよ、砂で遊びなさい」とよく言われた。このように砂と粘土の違いは子供の直感でも容易に識別できるものである。しかし私たちは、砂と粘土の違いを弾塑性力学の言葉で明確に述べたことは、これまでまだ、ほとんどなかったのではないか。

もちろん、砂と粘土でまったく別々の構成式を準備している研究者/研究グループはいる。しかしもし彼らが、一つの土を与えられて、二つの構成式の使い分けの基準だけは、上に述べた「子供の直感」に任せたままにしているとすれば、これら二つの構成式は、一貫した論理のもとで準備されているとは、まだ言えないであろう。粘土遊びや砂遊びに長けた子供でも、「砂か粘土か分らない」ことはよくあるからである。clayey sand や sandy clay がそれにあたる。砂と粘土の違いは明確なはずであるとしても、しかし一本のボーダーラインで区別をつくものでないことは、このようにして想像できる。

砂と粘土の区別どころではなくて、単に砂についてだけでさえ、ゆるい砂と密な砂とで、同じ砂でも、密度や間隙比に応じて構成式とそのパラメータを別々に用意している研究者/研究グループがいる。しかしこれは土の力学研究の態度としては論外である。理由は以下の通り。土は圧縮すれば間隙から水が排出されて密度が高まり、間隙比は小さくなる。つまり密度と間隙比は、土粒子と間隙水からなる土材料では、土の力学的な状態を表している。構成式は本来、負荷や除荷による材料の力学状態の変化を記述するものである。だから密度や間隙比ごとに同じ砂でも別々の構成式、材料定数を与える研究の進め方は、材料の構成式研究の名には値しないからである。実際このような「構成式」では、砂の排水せん断や体積圧縮は、もはや原理的に議論できていない。これらの研究は、圧縮とせん断を統合して考えた 45 年前の Cam-Clay model に比べても、なんとという理論的後退だろう。

この論文/Keynote Lecture の目的は、

- (1) 砂と粘土の違いを弾塑性力学の言葉で明らかにし、
- (2) 有限要素法の計算で実際に使い物になる砂/粘土の弾塑性構成式を与え、
- (3) その計算事例を示すことにある。

最後の (3) ではとくに、ゆるい砂の締固めと、自然堆積粘土の2次圧密/遅れ圧縮（の水～土連成計算）が取り上げられる。締固めと圧密は、砂と粘土の圧縮メカニズムの違いがあることを気づかせる典型的な地盤工学の用語として、これまでに広く用いられてきた。だからこの論文で、締固めと圧密の二つの事例を取り上げることに、十分な意味があるのだ。

1.2 論文の構成

Cambridge 大学の soil mechanics group によって、いまから約 45 年前に打ち立てられた Critical State Soil Mechanics (e.g. Roscoe et al., 1958, 1963) は、土の shear behavior と volume change behavior を統合して考えることのできる、世界で最初の弾塑性構成式、Cam-Clay model、を与えたことで、その功績は不滅のものである。著者はこの論文で、Cam-Clay model の要諦を整理して、このモデルの適用限界を見極めることが、砂と粘土の統合的な理解に欠かせないことを強調する。

Cam-Clay model の要諦 (essentials) とは言うまでもなく、

- (1) 土の硬化は塑性圧縮をとめない、
- (2) 土の軟化は塑性膨張をとめない、そして、
- (3) 有効応力空間 (p' - q 空間) でのその境界は限界状態線、 $q = Mp'$ 、で与えられる、

というものである。(さらにこの論文では、係数 M が定数というのも、essentials の一つに挙げている。) Cam-Clay model による軟化/膨張の解析²⁾ が少ないのは、電子計算機と計算技術の制約が当時あったからで、Cam-Clay model そのものの限界を表しているではない。

Cam-Clay model の限界は言うまでもなく、このモデルが、繰り返した正規圧密土の負荷時の力学挙動しか記述できないことにある。言い換えれば、

- (1) 密な砂や過圧密粘土のように、限界状態線より上側での塑性膨張をとまらう硬化や、
- (2) ゆるい砂や構造の発達した粘土の非排水せん断でしばしば見ることのできる、限界状態線より下側での軟化、

を Cam-Clay model は表現することができない。これら二つの Cam-Clay model の限界は、しかし、Cam-Clay model を否定することによってではなく、そうではなくて、Cam-Clay model が当時考えていなかった hierarchy の異なる二つの概念、すなわち過圧密と骨格構造の二つの概念を、Cam-Clay model に新しく注入することによって、克服される。これら二つの概念は、Cam-Clay model の yield surface/plastic potential に相似形の二つの Super/subloading yield surfaces (上(うえ) 負荷面 (e.g. Asaoka., 2000a) と下(した) 負荷面 (e.g. Hashiguchi K., 1989)) を新しく定義することによって、持ち込まれる。繰り返し言うが、著者は Cam-Clay model を否定するのではなくて、この論文では、Cam-Clay model は依然として土質力学の理論的基礎の立場を保持しているのだ。

さきに述べた密度や間隙比と同じく、過圧密の状態や構造の状態は、力学状態であって、同じ土でも負荷と除荷によって変化してゆく。だから、Super/subloading yield surfaces の導入によって、塑性変形の進展にもなって生じる

- (1) 過圧密の喪失と
- (2) 砂や自然堆積粘土の骨格構造の劣化

の記述が可能になることが重要である。このために、土の硬化と軟化の境界線、critical state line、の勾配 M は塑性変形の進展によって大きくなったり小さくなったりする。だからこれらの土ではもはやオリジナルの Cam-Clay model のように、硬化は圧縮だけを、軟化は膨張だけをともなうということはなくなってしまふ。

過圧密は過去の負荷履歴と現在の負荷状態との比較から決まると理解してよく、また構造は、

第3章以降で、その土がいかに嵩張っているかを示すものとして説明される。つまり構造の発達している土は、そうでない土に比べ、間隙比が同じなら大きな荷重を支えることができるし、荷重が同じなら大きな間隙比でいることができる。この論文で、過圧密とか骨格構造とかの言葉にこれ以上の直感的説明を求めてはならない。つまり過圧密や構造に、土粒子の大きさや並び方などの visual で物理的ないし即物的な定義を求めてはならないのだ。土粒子の視点に立った過圧密や構造のマイクロで直感的な定義は不要なのであって、必要なのは「過圧密や骨格構造の働き、ないし作用」に関する力学的記述である。これだけが連続体力学としての土質力学に重要なのである。たとえば過圧密の解消は土が膨張する方向に作用し、構造の劣化は土が圧縮する方向に作用する。このような力学応答の記述が、Super/subloading surfaces の導入によってなされることに、読者は注目しなければならない。

さて以上の内容はこの論文の第4章までに取り上げられる。この第4章までの記述には、微小変形の力学が用いられ、しかも異方性の議論はまったく避けている。しかしこれは定式化の見易さと、さらに言えば、英語が不得手な著者の lecture のしやすさを重視したためである。4章までの議論に異方性を取り入れて、しかもその記述を、客観性をみたく有限変形理論による記述に改めることには、関口・太田の応力比に関する新しい不変量 η^* を除いては、理論的な飛躍はまったく必要でない。だから余計な説明も必要でない。それらは論文末の APPENDIX A に、完全な形で、与えた (Asaoka., 2002)。つづく 5, 6, 7 章はすべてこの「完全なモデル」を用いて計算した結果が示される。

5章では、砂と粘土の力学挙動の違いについて説明する。砂は塑性変形が進展すると砂の構造はすぐに壊れるのに、砂の過圧密は塑性変形が進展してもなかなか解消しない。粘土は、砂とあべこべで、塑性変形の進展により過圧密粘土はすぐに正規圧密粘土に戻るのに、粘土の構造はなかなか壊れない。これらは過圧密と構造の発展則の速度の違いを操作して表現される。このようにすれば、実験室でよく知られている粘土と砂の典型的な力学応答が、Super/subloading surfaces を用いた提案モデルで一貫してよく説明されることが分る。

6章ではゆるい砂の締固め過程を、排水条件でゆるい砂に小さい振幅の繰り返しせん断応力を作用させることによって simulate する。この過程で砂に大圧縮が起こり、同時に急激に過圧密化することが示される。この計算を通じて、砂の大圧縮は僅かの塑性変形でも構造破壊が容易に起こることに起因し、砂の急激な過圧密化は負荷時の過圧密の解消がごく僅かしか起こらないことに起因することがよく理解される。だから、構造がなかなか破壊せず、過圧密は容易に解消する粘土では、締固めはほとんど起こらないことも理解される。締固め途上にある様々な密度ないし間隙比にある砂の力学的性質は、それぞれ大いに異なる。しかしそれらはすべて、ひとつの構成式と単一の材料定数の組で完全に説明されることもこの章で明らかにされる。

7章では構造の発達した粘土の2次圧密/遅れ圧縮を解析する。2次的大沈下はもちろん粘土の構造骨格の破壊に起因する。それがなぜ遅れるかと言えば、構造骨格の破壊に起因する圧縮は、有効応力の大きな増大なしに可能だからである。つまり圧縮にはダルシー則から分かるようにもともと長い時間がかかるのに、その間に、過剰間隙水圧が消散しないですむ。有効応力が減少しても圧縮が可能なきがある。すなわち圧縮をとまなう軟化がそれである。このときは荷重が同じなら、圧縮中に間隙水圧は増大しさえする。過剰水圧の一様化にもダルシー則

が教えるように、粘土では長い時間がかかる。かくして圧密が遅れる。

締固めと2次圧密はそれぞれ、砂と粘土に固有の別の現象に見える。しかしそれらが構造の劣化ないし破壊という原因によって起こるといえるのは共通のことである。だから力学的には同種の現象であると言えなくもない。砂の締固めは、粘土の2次圧密に当たると言っても大きな間違いでないことが本論文によって理解されるであろう。

2. CAM-CLAY MODEL の要諦

本章では簡単のために original Cam-Clay model を論じるが、modified Cam-Clay model (Roscoe K.H. and Burland J. B., 1968) でもまったく同じことが結論される。

2.1 降伏関数と塑性ポテンシャル

完全に練り返された粘土の等方圧密試験から、つぎの正規圧密線が得られる。

$$1+e = N - \tilde{\lambda} \ln p' \quad (2.1)$$

この式は、もちろん応力比 η が

$$\eta = \frac{q}{p'} = 0 \quad (2.2)$$

の時のものである。一方同じ粘土の一連の非排水ないし排水3軸試験から

$$1+e = \Gamma - \tilde{\lambda} \ln p' \quad (2.3)$$

が得られる。この式はもちろん応力比 η が限界状態：

$$\eta = \frac{q}{p'} = M \quad (2.4)$$

の時のものである。以上で $N, \Gamma, \tilde{\lambda}, M$ はこの粘土の材料定数で、 $N > \Gamma$ 、 e は間隙比を表し、平均有効応力 p' 、せん断応力 q は

$$p' = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}', \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}}, \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma}' - p' \boldsymbol{I} \quad (2.5)$$

で定義される。ここに $\boldsymbol{\sigma}'$ と \boldsymbol{S} は有効応力テンソル（圧縮を正）と偏差応力テンソル、 \boldsymbol{I} は単位テンソル。式(2.1)、(2.3)は図 2.1 に示した。

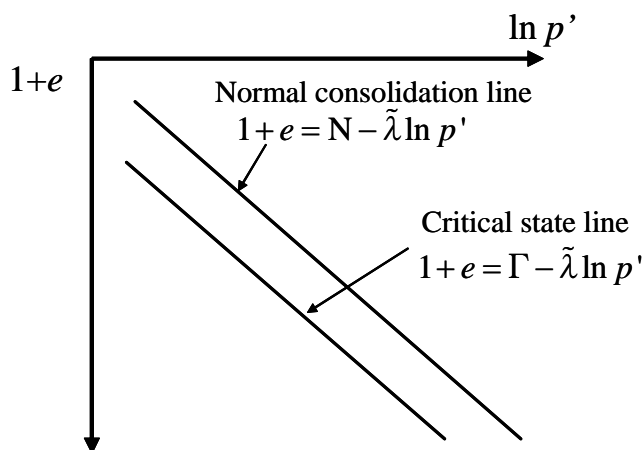


図 2.1 正規圧密線と限界状態線

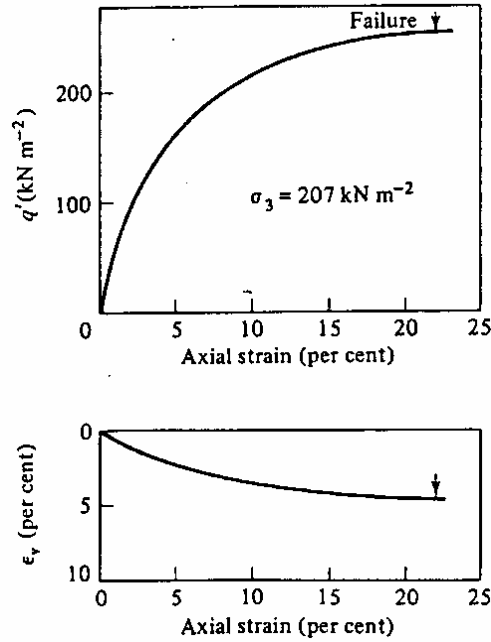


図 2.2 繰り返し正規圧密粘土の排水 3 軸試験
(after Bishop A.W. and Henkel D.J., 1962)

式(2.3)、(2.4)で表される限界状態では、有効応力に変化がなくてもせん断ひずみは不定で、このときどのようなせん断ひずみに対しても、土の体積は変化しないことが知られている。すなわち $\dot{\epsilon}_v = 0$ 。この例を、完全に繰り返された粘土の排水 3 軸圧縮試験によって示す (図 2.2)。土に有効応力変化がなければもちろん体積ひずみの弾性成分の変化も 0 だから、体積ひずみ増分における

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p \quad (2.6)$$

という第 1 次近似のもとで、限界状態では

$$\dot{\epsilon}_v^p = 0 \quad \text{at} \quad q = Mp' \quad (2.7)$$

が従う。ここに ϵ_v は体積ひずみを表し (圧縮を正) 上付きドットは物質時間微分ないし増分を表す。また super script e , p は弾性成分, 塑性成分を表す。

さて、式(2.1)、(2.3)で $\tilde{\lambda}$ が応力比 η に依存しないことを考慮して、 $0 < \eta = q/p' < M$ の間で式(2.1)、(2.3)に相当する関係は、

$$1 + e = x(\eta) - \tilde{\lambda} \ln p' \quad (2.8)$$

で書けると仮定する。ここに切片 $x(\eta)$ は

$$x(\eta = 0) = N, \quad x(\eta = M) = \Gamma \quad (2.9)$$

を満たす。これを満足するもっとも簡単なものは線形補間

$$x(\eta) = N + \frac{\Gamma - N}{M} \left(\frac{q}{p'} \right) \quad (2.10)$$

で与えられる。だから式(2.1)、(2.3)からは、すべての応力比にあてはまる一般形として

$$1 + e = N + \frac{\Gamma - N}{M} \left(\frac{q}{p'} \right) - \tilde{\lambda} \ln p' \quad (2.11)$$

が素直に仮定される。

つぎにこの粘土が除荷を受けず正規圧密状態のまま、状態が $e_0, p' = p_0', q = 0$ から e, p', q に変化したとしよう。そうすれば式(2.11)から

$$1 + e_0 = N - \tilde{\lambda} \ln p_0' \quad (2.12)$$

$$1 + e = N + \frac{\Gamma - N}{M} \left(\frac{q}{p'} \right) - \tilde{\lambda} \ln p' \quad (2.13)$$

が得られるので、この状態の変化による体積ひずみは

$$\varepsilon_v = \frac{(1 + e_0) - (1 + e)}{1 + e_0} = \frac{1}{1 + e_0} \left\{ \frac{N - \Gamma}{M} \left(\frac{q}{p'} \right) + \tilde{\lambda} \ln \frac{p'}{p_0'} \right\} \quad (2.14)$$

で計算される。この体積ひずみの弾性成分は、弾性定数 $\tilde{\kappa}$ を用いて

$$\varepsilon_v^e = \frac{\tilde{\kappa}}{1 + e_0} \ln \frac{p'}{p_0'} \quad (2.15)$$

で与えられるから

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p \quad (2.16)$$

の近似のもとで、この間の塑性体積ひずみは

$$\varepsilon_v^p = f(p', q) = \frac{1}{1 + e_0} \left\{ \frac{N - \Gamma}{M} \left(\frac{q}{p'} \right) + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p'}{p_0'} \right\} = f_{\sigma'}(\sigma') \quad (2.17)$$

で表されることになる。式(2.17)は original Cam-Clay model の降伏関数として知られているものである。式(2.10)は体積変化の dilatancy component を与えるものであるが、しかし式(2.17)はふたつの $e \square \log p'$ 関係 (式(2.1)、式(2.3)) だけに基づくから、式(2.17)から演繹される土質力学は $e \square \log p'$ の土質力学とも呼びうるものである⁴⁾。

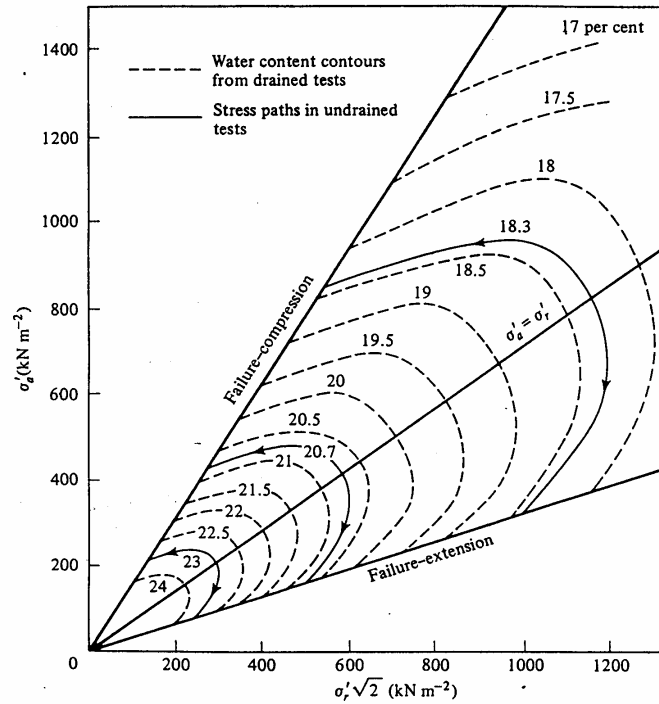


図 2.3 等含水比線
(after Henkel D.J., 1960)

式(2.17)は塑性体積ひずみが負荷経路に依存せず、はじめの応力状態と終わりの応力状態とだけで決まることを示している。Henkel の実験⁸⁾(図 2.3) はこのことを示すものとして有名である。だから数学における「ポテンシャル概念」を援用して理解を進めると、式(2.17)は original Cam-Clay model の plastic potential surface をも表していると考えられる。これからつぎの関連塑性流れ則の仮定は自然である。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (2.18)$$

ここに $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ は塑性ひずみ増分テンソルで $\boldsymbol{\sigma}'$ は有効応力テンソルである。塑性乗数 λ は負荷時には $\lambda > 0$ である。式(2.17)の $f_{\sigma'}(\boldsymbol{\sigma}')$ はテンソルのスカラー値等方関数であるから、応力の方向と塑性ひずみ増分の方向は共軸である。実際、3 軸試験機から出てくる実験結果を用いれば等方関数しか出てこない。これは Bishop の天才としか言いようがない。さて、この $f_{\sigma'}(\boldsymbol{\sigma}')$ の等方性を分かりやすく表すのに、しばしば式(2.18)と形が同じの次の関係式が用いられる。

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial p'} \\ \dot{\varepsilon}_s^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial q} \end{cases} \quad (2.19)$$

ここに $\dot{\varepsilon}_v^p$ は塑性体積ひずみ増分、 $\dot{\varepsilon}_s^p$ は塑性せん断ひずみ増分を表し、いずれもスカラーでその内容は以下の通り。

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_v^p = \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ \dot{\varepsilon}_s^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\varepsilon}_s^p - \frac{1}{3}(\text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \boldsymbol{I} \end{cases} \quad (2.20)$$

式(2.19)は $p' \square q$ 図上で表した塑性ひずみ増分ベクトル(これは塑性ポテンシャル面の外向き法線方向)の圧縮とせん断の二つの成分をあらわす。これを図 2.4 に示した。

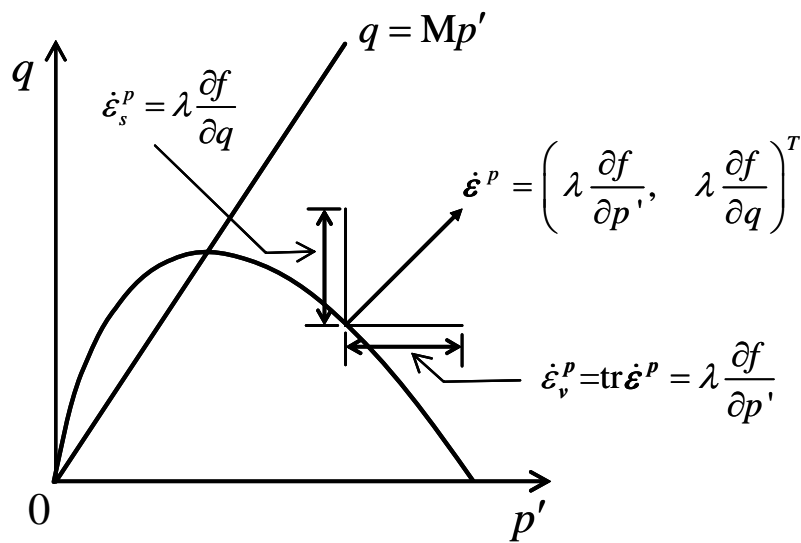


図 2.4 塑性ひずみ増分の分解

式(2.19)は式(2.18)より計算が容易で、 p' と q しか出てこない3軸試験の解釈やその p' - q 図による表現に便利である。たとえば、式(2.7)に示した限界状態における塑性体積ひずみ増分がゼロの条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial p'} = 0 \quad (2.21)$$

と書いて、これに式(2.17)を代入して具体的に計算すると、容易に材料定数間のつぎの関係が得られる。

$$N - \Gamma = \tilde{\lambda} - \tilde{\kappa} \quad (2.22)$$

式(2.21)の p' - q 図での説明は図 2.5 に示した。

図 2.4 や図 2.5 の降伏関数/塑性ポテンシャルの形は、応力空間で限界状態線より上側では塑性膨張、下側では塑性圧縮が起こること示している。すなわち

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_v^p > 0 & \text{when } q < Mp' \\ \dot{\varepsilon}_v^p < 0 & \text{when } q > Mp' \end{cases} \quad (2.23)$$

これをあらためて図 2.6 に示した。

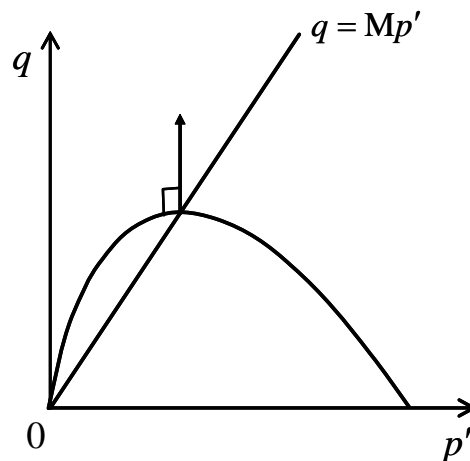


図 2.5 塑性体積ひずみ増分ゼロの状態

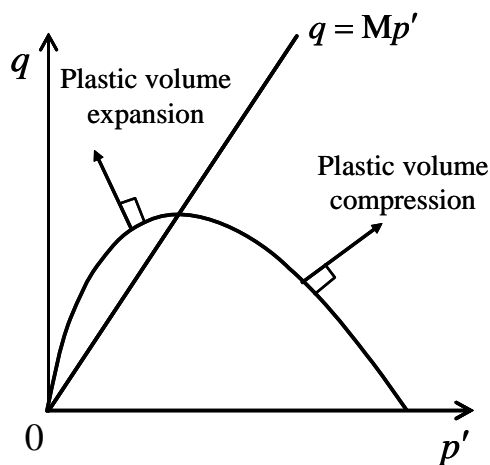


図 2.6 塑性圧縮と塑性膨張

Modified Cam-Clay model の降伏関数/塑性ポテンシャルは式(2.1)と式(2.3)のあいだの補間を、式(2.10)でなく、

$$x(\eta) = N + \frac{\Gamma - N}{\ln 2} \ln \left\{ \frac{M^2 + (q/p')^2}{M^2} \right\} \quad (2.24)$$

で行うことによって、上とまったく同じやり方で導くことができる。そして限界状態線の上側で塑性膨張、下側で塑性圧縮が生じること（式(2.23)）もまったく同じである。これを図 2.7 に示した。また参考までに、modified Cam-Clay model の original Cam-Clay model における式(2.17)、式(2.22)に対応する式を次式に示しておく。

$$\varepsilon_v^p = f(p', q) = \frac{1}{1 + e_0} \left[\frac{N - \Gamma}{\ln 2} \ln \left\{ \frac{M^2 + (q/p')^2}{M^2} \right\} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p'}{p_0'} \right] = f_\sigma(\sigma') \quad (2.25)$$

$$N - \Gamma = \ln 2(\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \quad (2.26)$$

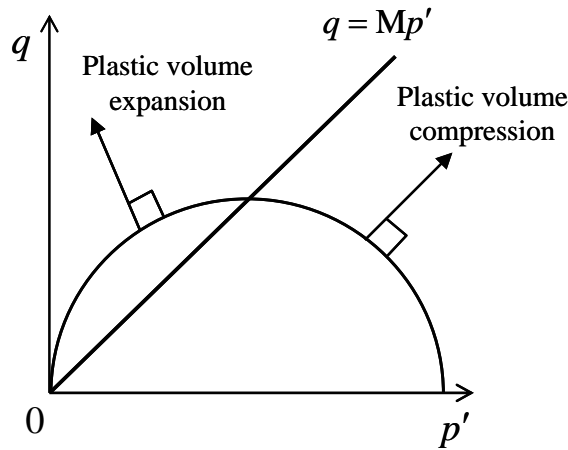


図 2.7 修正カムクレイモデルにおける塑性圧縮と塑性膨張

2.2 硬化と軟化

式(2.17)の全微分を取ると

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \quad (2.27)$$

これと式(2.19)第 1 式とを等値して、塑性乗数 λ は

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}}{\frac{\partial f}{\partial p'}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}}{\frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \frac{1}{p'} \left(M - \frac{q}{p'} \right)} \quad (2.28)$$

のように得られる。したがって負荷条件

$$\lambda > 0 \quad (2.29)$$

にはつぎの三つの場合があることがわかる。

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} > 0 & \text{when } q < Mp' \\ \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} < 0 & \text{when } q > Mp' \\ \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = 0 & \text{when } q = Mp' \end{cases} \quad (2.30)$$

さて $\frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}$ は塑性ポテンシャルの外向き法線ベクトル $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p'} \\ \frac{\partial f}{\partial q} \end{pmatrix}$ と応力増分ベクトル $\begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \dot{q} \end{pmatrix}$ の

内積を表すから、その正負は応力増分ベクトルが塑性ポテンシャルの外側に出るか内側に向くかを教える。このことから、式(2.28)の内容は図 2.8 のように表される。後続負荷面は限界状態の下側では拡大し（硬化）、限界状態の上側で縮小する（軟化）。限界状態線 $q = Mp'$ は硬化と軟化の境界線にもなっている。だから、図 2.8 は図 2.6 と重ねて理解することが重要である。

その結果、

- ① 硬化は必ず塑性圧縮をとめない、軟化は塑性膨張をとめない、
 - ② 硬化と軟化および塑性圧縮と塑性膨張の境界はともに限界状態線 $q = Mp'$ で表される、
 - ③ 限界状態線の勾配 M は材料定数で、負荷によって変化することはない、
- ことがわかる。

以上の、original Cam-Clay model の性質は、まったくそのまま modified Cam-Clay model にもあてはまる。

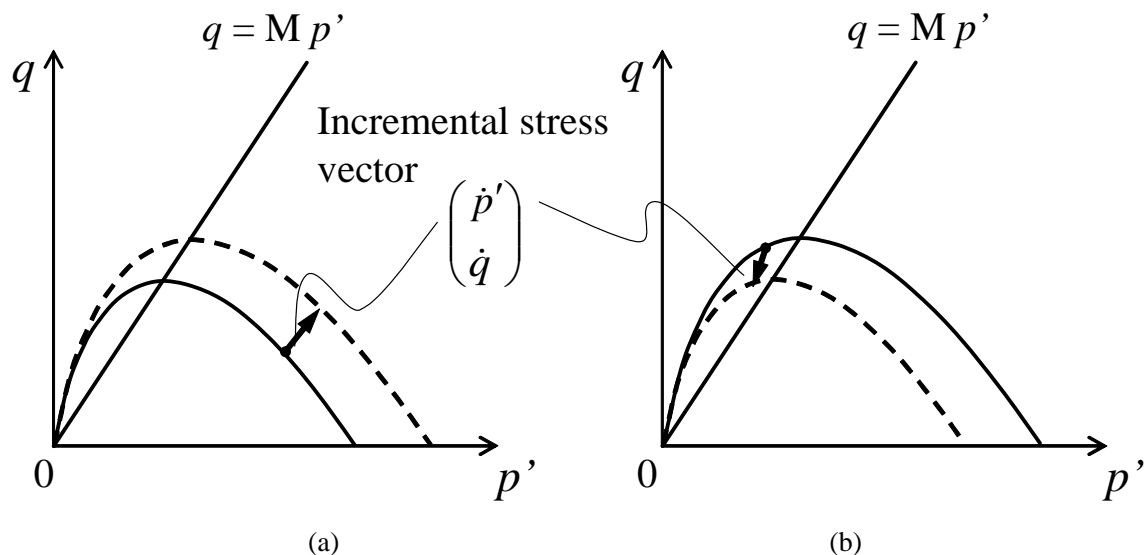


図 2.8 $q = Mp'$ より下側での硬化と $q = Mp'$ より上側での軟化

2.3 構成式と負荷基準

式(2.17)の全微分

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \dot{\sigma}' \quad (2.31)$$

は、関連流れ則、式(2.18)から

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda \operatorname{tr} \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \quad (2.32)$$

のように計算される。両者は同じだから等値して、塑性乗数 λ は有効応力テンソル σ' を用いて

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \dot{\sigma}'}{\operatorname{tr} \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'}} \quad (2.33)$$

のように得られる。これは有効応力テンソルで表された塑性乗数と呼ばれる。この分子にある応力増分は、

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}^e \quad (2.34)$$

のように書き直される。これは増分型弾性応答と呼ばれ \mathbf{E} は（非線形）弾性係数テンソルである。式(2.34)を式(2.33)に代入して、

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} - \lambda \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \quad (2.35)$$

に注意すれば、塑性乗数 λ は

$$\lambda = \Lambda = \frac{\frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \mathbf{E} \dot{\varepsilon}}{\operatorname{tr} \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} + \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'}} \quad (2.36)$$

のように、書き直すことができる。この Λ は、もちろん式(2.33)の λ と同じものだが、ひずみ速度で表された塑性乗数と呼ばれる。この Λ を用いると応力増分とひずみ増分の関係は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}' &= \mathbf{E} \dot{\varepsilon}^e = \mathbf{E} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \\ &= \mathbf{E} \dot{\varepsilon} - \Lambda \mathbf{E} \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \end{aligned} \quad (2.37)$$

式(2.37)は増分型の（線形）弾塑性応答とよばれる。式(2.37)にはもちろん一意に逆関係が存在するが、力のつりあい式の弱形式から出発して変位計算を行う有限要素法では式(2.37)が便利である。

弾性応答式(2.34)と弾塑性応答式(2.37)の使い分けは、負荷基準にもとづいてなされる。式(2.36)の分母第2項は正值の2次形式で、たいていの土定数にたいして、応力状態がどうであれ分母は正になる。それを一般化して、いかなる応力状態に対しても式(2.36)の分母を正にする材料定数をあらためて **Cam-Clay parameters** とよぶ。詳細は Asaoka et.al.(1994)を参照。このとき負荷の条件

$$\Lambda (= \lambda) > 0 \quad (2.38)$$

は式(2.36)の分子が正であることと等価になる。すなわち

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 & \text{:loading} & \text{(式(2.37))} \\ \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} < 0 & \text{:unloading} & \text{(式(2.34))} \end{cases} \quad (2.39)$$

が負荷基準となる。負荷基準は軟化と除荷（弾性応答）を区別するのに必須のものである。軟化は現応力点までの降伏面の縮小をともなう（図 2.8(b)）。除荷でも増分応力ベクトルが降伏面の内側を向くのは軟化と同じだが、除荷では降伏面は動かずに止まったままである（図 2.9）。

Cam-Clay model では、除荷によって応力がひとたび降伏面の内側に入ってしまうと、除荷のあと再載荷にたいしても、現応力点がもとの降伏面に達するまでは弾性応答すると仮定される。それは式(2.39)の負荷基準では書いていないので注意するが、このことは Cam-Clay model の essentials のひとつとして知られるべきである（Conventional plasticity）。すなわち

④ 応力が降伏面の内部で変化するとき、土は弾性応答（式 (2.34)）する。

この論文では上の①～④を essentials of the Cam-Clay model と呼ぶ。

本論文の序文で、粘土と砂の構成式を別々に与えて、その使い分けを子供の直感にゆだねるのは正しくないと述べた。それは、ちょうど負荷基準(2.39)や上の④を与えずに式(2.34)と式(2.37)を与えるのと同じだからと話せば分かりやすい。

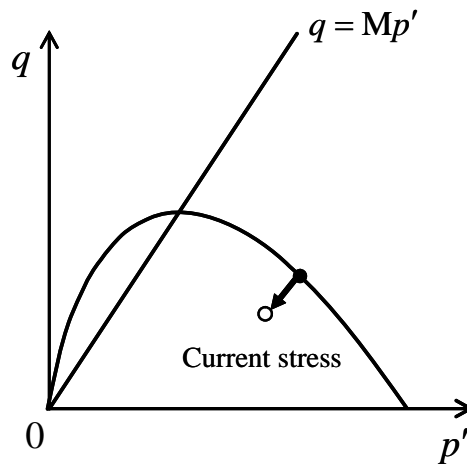


図 2.9 除荷（動かず止まったままの降伏曲面）

3 Cam-Clay model の限界

3.1 過圧密の解消 (Loss of overconsolidation)

図 3.1 に、完全に練り返された過圧密粘土の排水 3 軸圧縮試験の典型的な結果を示す。この実験の $p'-q$ 平面での有効応力経路は図 3.2 に示す。これらの試験結果はすでに 40 年前の Bishop と Henkel の実験⁶⁾以来私たちになじみのものである。図 3.1 中の shaded zone 1 では、応力状態はまだ限界状態線の下にあり、粘土試料は圧縮をしている。ところが shaded zone 2 では応力状態は限界状態線の上側を上昇しながら、試料はやがて膨張を示している。膨張をとともなう軟化は zone 3 で認められる。Zone 3 で除荷ではなく軟化と言ったのは、もし除荷ならせん断ひずみは減少するはずだからである。

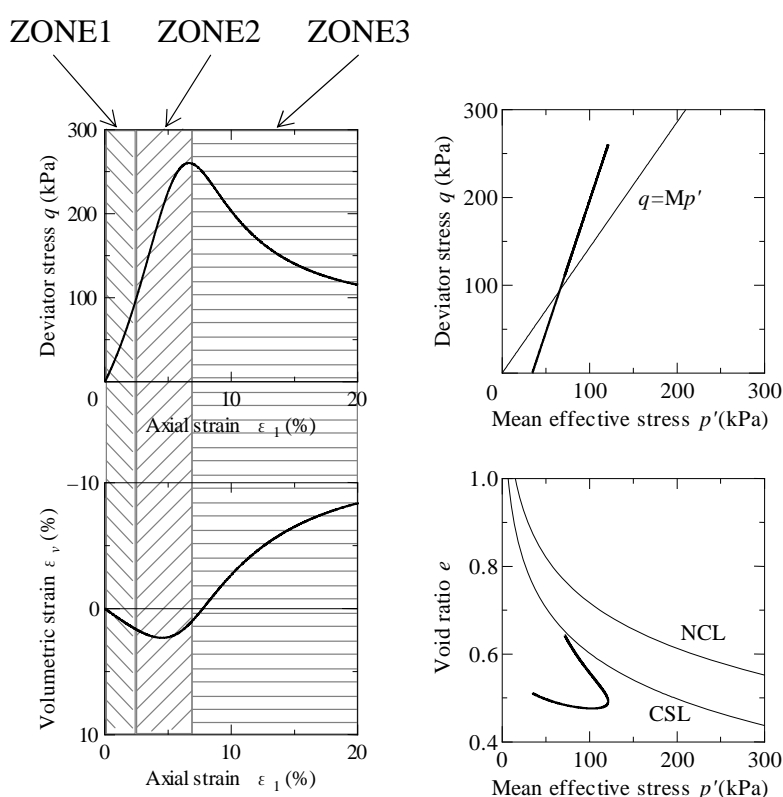


図 3.1 過圧密粘土の排水せん断 図 3.2 過圧密粘土の排水せん断(有効応力図)

さて、Cam-Clay model で説明のつかない典型的な現象は zone 2 で見られる。このモデルによれば zone 2 では、まだ応力状態は降伏面の内側にあるはずで、そのときは弾性応答だから、 p' の増大にともない試料は圧縮を示さなければならない。この zone 2 での膨張が、塑性膨張が弾性圧縮をはるかに卓越したために起こっていると考えると、①降伏面の内側で弾塑性応答していることになるし、②せん断応力 q が増大しているから、塑性膨張が硬化をともなっている可能性さえある。①も②も Cam-Clay model ではまったく説明がつかない。

過圧密比が 24 のように大きい過圧密粘土について、Cam-Clay model で計算される応答は図 3.3(a), (b) のようになって、図 3.1、図 3.2 とはまったく異なる。過圧密比が 24 のように大きい

と、降伏面は現応力よりもはるかに上方にある。したがってこの過圧密粘土を再負荷するとき、もし降伏面は動かないと考えると、応力～ひずみのピークは図 3.1 に比べてはるかに大きくなる。しかも、ピークに達するまでは応力は降伏面内部だから試料は弾性圧縮のみを示す。ピークで応力は降伏面に到達し、その後は正規圧密粘土となる。ところが応力は限界状態線より上側にあるから試料は軟化を示し、したがってピークで激しい尖がり点をつくってしまう（図 3.3(a)）。ピークでの応力状態も図 3.2 にくらべてはるかに大きくなる（図 3.3(b)）。このようにして、Cam-Clay model は、過圧密粘土のせん断挙動はまったく表現できないことがわかる。

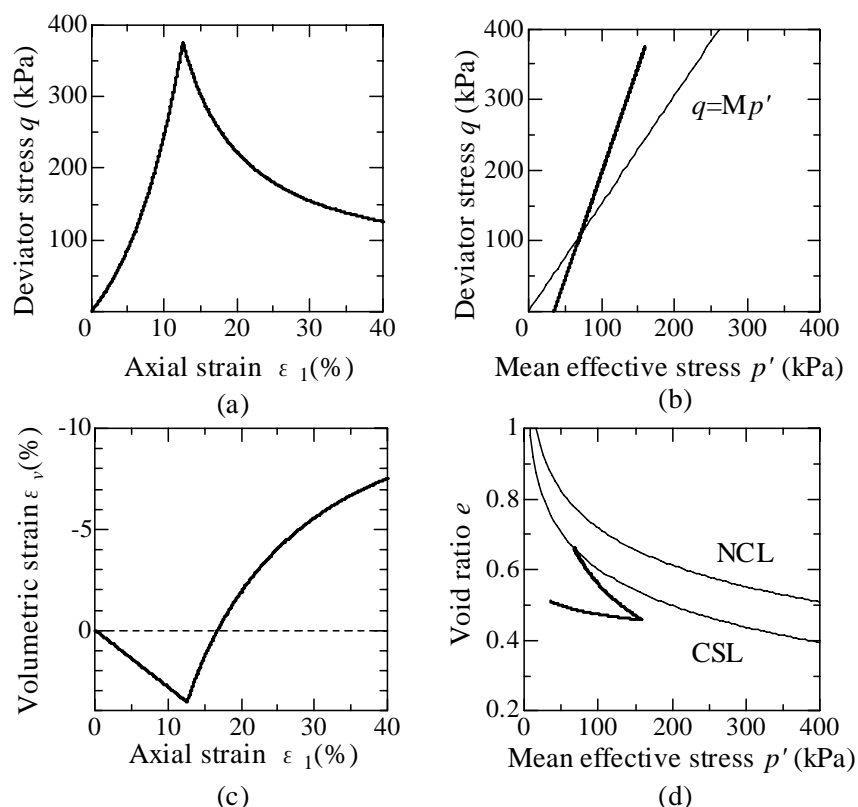
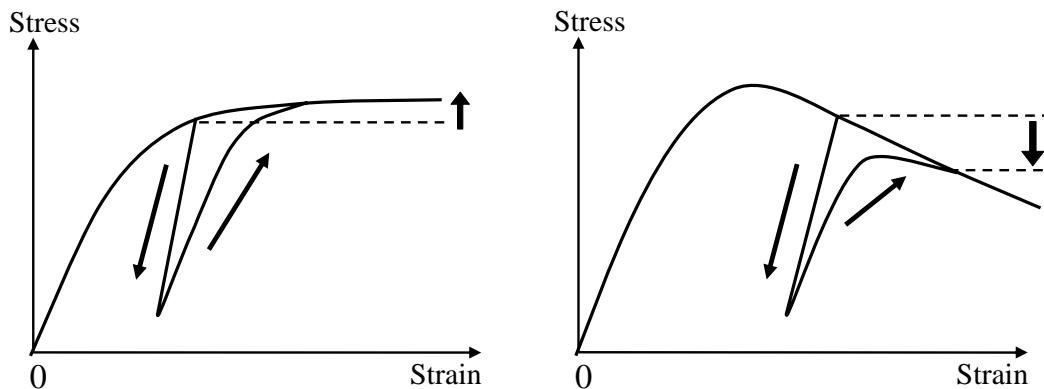


図 3.3 カムクレイモデルによる排水せん断

図 3.1,3.2 に忠実なモデル化のためには、

- ① 降伏面の内側での弾塑性応答を許し、
- ② 塑性膨張が硬化をともなうことがあることも許す、

必要がある。この問題は、Cam-Clay model に subloading yield surface (下(した)負荷面) の概念を導入して、全面的に解決する。それは今から約四半世紀前に日本の橋口によってなされた (Hashiguchi, 1978)。ここで大事なことは、橋口は Cam-Clay model を否定したのではなく、Cam-Clay model の適用を正規圧密土の負荷と除荷に限定しただけである点にある。橋口は負荷によって過圧密の解消が進み、負荷すなわち塑性変形の進展によって過圧密土は正規圧密状態に戻ることを、世界で始めて合理的に示した。橋口以前では過圧密の解消は弾性変形によってもたらされると考えられていたから、橋口は Cam-Clay model を否定しなかったとはいえ、大きな理論的飛躍を成し遂げたことには間違いがない。これを図 3.4(a), (b) に示す。



(a) 硬化による上負荷面の拡大 (b) 軟化による上負荷面の縮小

図 3.4 再負荷時の弾塑性応答と過圧密の解消 (第 4.1 節参照)

3.2 土骨格の構造の劣化/破壊 (Decay/collapse of structure of soil skeleton)

図 3.5 は構造の発達した自然堆積粘土の試料を用いた標準圧密試験の結果を示す (Asaoka ., 2000)。図中の直線は、この粘土を完全に練り返したあとでふたたび標準圧密試験をして得られる、練り返された粘土の正規圧密線を示している。Cam-Clay model では正規圧密線の上側は不可能領域で、土はその領域に状態をとることができない。ところが構造の発達した土は、練り返し粘土にとっては不可能領域にその状態をとることができる。

図 3.5 はさらに、構造が発達した粘土は構造が破壊された完全練り返し粘土に比べ、間隙比が同じなら大きな荷重を支えることができ、荷重が同じならより大きな間隙比でいることができることを示している。この様子を、本論文では、土がかさばっていると呼ぶことにする。

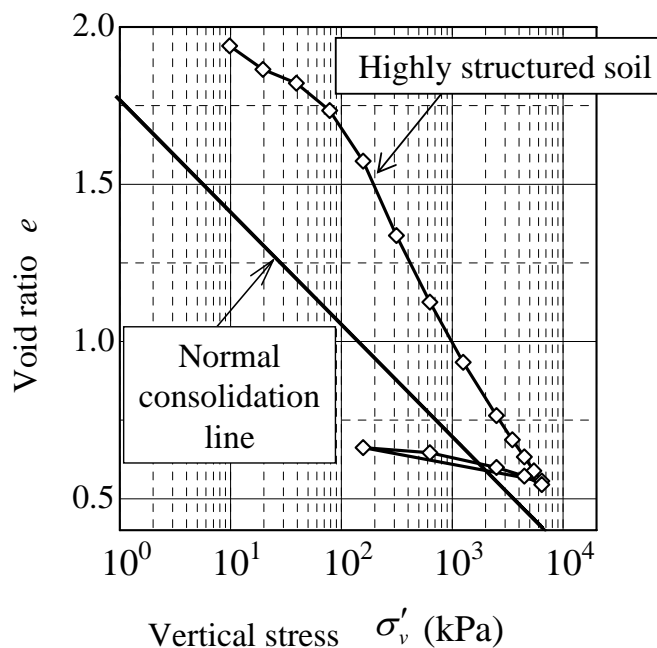


図 3.5 標準圧密試験
(after Asaoka ., 2000c)

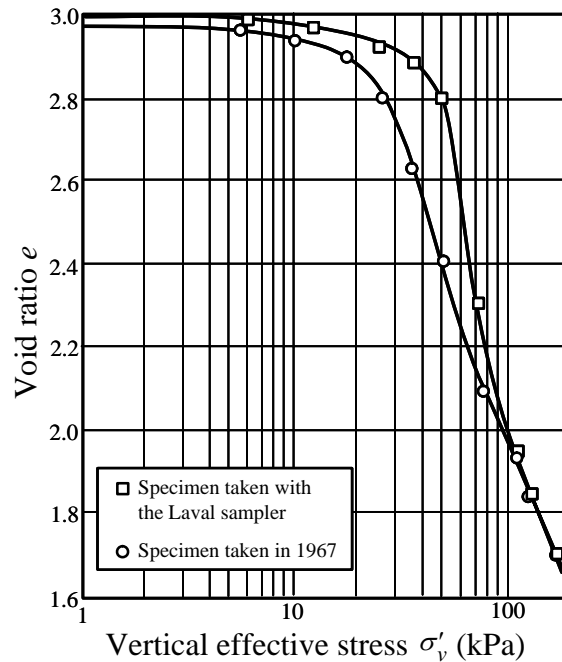


図 3.6 標準圧密試験

(after Leroueil S., 1996)

図 3.6 は、攪乱が少ない粘土と少し攪乱された粘土の標準圧密試験の比較を示している (Leroueil S., 1996)¹⁰。攪乱が少ない粘土のほうが、構造がより発達していて、だから、よりかさばっていることがわかる。その土の何が攪乱されているかと言え、目に見えないから描くことはできないが、もちろんそれは土粒子骨格の構造である。

図 3.6 では完全に練り返した土の正規圧密線が描かれていないのでふたたび図 3.5 にもどる。図 3.5 は、圧密荷重が大きくなればなるほど、そして圧縮が進めば進むほど、不可能領域にいた土は上から構造がない状態 (練り返された粘土の正規圧密線) に近づくこともわかる。つまり構造の劣化ないし破壊は負荷時の塑性変形の進展によって進むことが想像される。

前節の overconsolidation と本節の structure の説明から、Cam-Clay model は、

- ①完全に練り返されて構造がまったく破壊され、そして
- ②過圧密が完全に解消して正規圧密状態に達した、

土の負荷と除荷だけにしか適用できないことが分かる。逆に言えば Cam-Clay とはこのような土のことを意味する。

Asaoka, Nakano and Noda (1998, 2000(a),(b)) は、Cam-Clay model では不可能とされる領域に土がその力学状態を取れるように、superloading yield surface (上 (うえ) 負荷面) の概念を Cam-Clay model に導入した。そして橋口の下負荷面概念の導入と合わせて、負荷によって過圧密の解消と構造の劣化が進行し、すべての土はやがて Cam-Clay に限りなく近づくことを表現した。

次章では、負荷による過圧密状態の解消や構造の劣化にともない、硬化と軟化の境界線の勾配 M_s (Cam-Clay model で言えば $q=Mp'$ の M) が大きくなったり小さくなったりすることを示す。これがもう動かなくなってしまった土 (Cam-Clay) は、言わば「死んだ土」であるが、土

が「生きている」あいだは、すなわち過圧密が残っているか、あるいは構造が残っているか、あるいはその両方が残っている間は、負荷にともなう過圧密の解消と構造の劣化によって M_s が上下するのだから、塑性膨張をともなう硬化も塑性圧縮をともなう軟化も可能になる。これを図 3.7 に示す。この図では

$q = Mp'$: 塑性圧縮と塑性膨張の境界線、 M は定数

$q = M_s p'$: 硬化と軟化の境界線、 M_s は変数

を示していることに注意する。塑性膨張をともなう硬化は過圧密粘土ですで見たと (図 3.1, zone 2)。塑性圧縮をともなう軟化は、正規圧密状態に近い自然堆積粘土の非排水せん断試験でしばしば観測される。それは図 3.8 に示した。この図の詳細は次章で説明される。

なお、塑性圧縮と塑性膨張の境界 $q = Mp'$ の M は実は定数でなく、異方性の発展により大きくなったり小さくなったりする。この詳細は APPENDIX A に示している。 $q = M_a p'$ がそれに当たる。しかし、本文にそれを書くとは Text が読みにくくなるのですべて省略する。

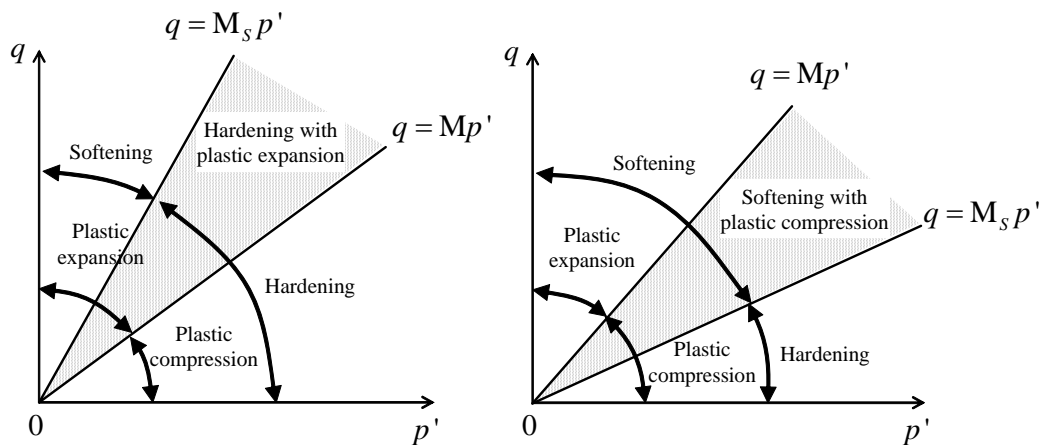


図 3.7 塑性圧縮・膨張と硬化・軟化

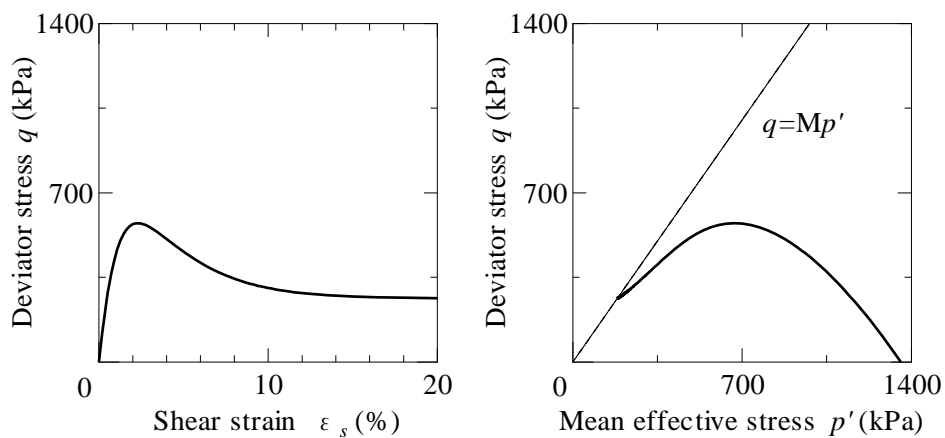


図 3.8 構造の発達した正規圧密粘土の非排水せん断

4 上/下負荷面カムクレイモデル

この章では、Cam-Clay model に上負荷面と下負荷面を導入して、構造が発達して過圧密な土の弾塑性挙動を表現する。記述は微小変形理論に従い、しかも異方性についてはまったく議論しない。こうすることによって、構造と過圧密に関する新しい概念は著しく平明に書き表すことができ、このために理解が容易になる。

異方性の表現には modified Cam-Clay model の降伏面の形が適している。土が破壊に至るような大変形の記述のためには、客観性を有する有限変形理論がどうしても必要である。これらを満たす「完全なモデル」は APPENDIX A で与えている。この章以下の計算例はすべてこの「完全モデル」を用いている。しかし計算例の説明の理解は、本章の知識だけで十分である。

4.1 Super/subloading Yield Surfaces model

次節でのモデルの詳細な定式化の前に、いくつかの新しい概念の説明と定義をこの節で与える。

The Cam-Clay model

完全に構造を喪失して、正規圧密状態にある土が負荷を受けるとき、その土の力学挙動は、Cam-Clay model の弾塑性挙動であらわされるとする。

Superloading yield surface

構造を有する土では、original Cam-Clay model の降伏面の外側に、つまり Cam-Clay model で言う状態境界面 (Roscoe surface) の外側の、いわゆる「不可能領域」に形が相似の上負荷面 (superloading yield surface) が存在する。これを $p' \square q$ 応力空間で示す (図 4.1)。二つの面はこの図で示すように原点に関して相似と仮定する。図中に示した上負荷面上の現応力 \bar{p}', \bar{q} は、Cam-Clay model の降伏面上の応力 \tilde{p}', \tilde{q} に対応するから、相似比は図 4.1 のように R^* で表され、これは 0 と 1 の間にある。

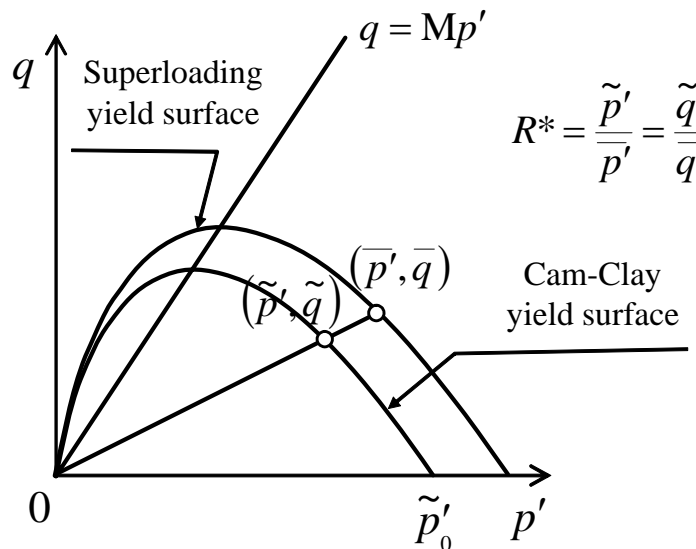


図 4.1 2つの負荷面

Normally consolidated state

現応力が上負荷面上にある土は正規圧密状態にあると呼ばれる。この土が負荷されると、その弾塑性応答は上負荷面に関連流れ則を適用して記述される。

Evolution law for R^*

構造の状態は R^* で定義される。完全に構造を失った状態は $R^* = 1$ 、無限に構造が発達した状態は $R^* = 0$ に対応する。構造は塑性変形の進展によって失われてゆくから、 R^* は塑性変形の進展によって値が増大し、ついには 1 に至る。つまり R^* は塑性ひずみ速度の関数で、いつも正である。これを表すものを R^* の発展則 (evolution law for R^*) という。構造が完全に失われた $R^* = 1$ の状態で、はじめて上負荷面は、上側から Cam-Clay yield surface に完全に重なる。

Overconsolidated state

正規圧密状態にある土が除荷を受けると、その土は過圧密状態にあると呼ばれる。

Subloading yield surface

過圧密状態にある土が再負荷を受けると、その土は弾塑性応答する。この応答は下負荷面 (subloading yield surface) に関連流れ則を適用して記述される。したがって過圧密状態にある土では、現応力はいつでも下負荷面上にあることになる。これを図 4.2 に示した。この図に示すように、下負荷面は、ふたたび、Cam-Clay yield surface と原点に関して相似と仮定する。

図 4.2 で示した、下負荷面と上負荷面の相似比 R は、 p', q が現応力を、 \bar{p}', \bar{q} が除荷時の上負荷面の大きさを与えることから分かるように、過圧密の状態を表す ($0 < R \leq 1$)。実際、 R の逆数 $1/R$ は古典土質力学での過圧密比の定義と一致する。すなわち $R = 1$ が正規圧密状態を表し、このときだけ下負荷面と上負荷面は一致する。一般には過圧密状態にあるとき下負荷面は上負荷面の内側にあつて、 $R < 1$ である。

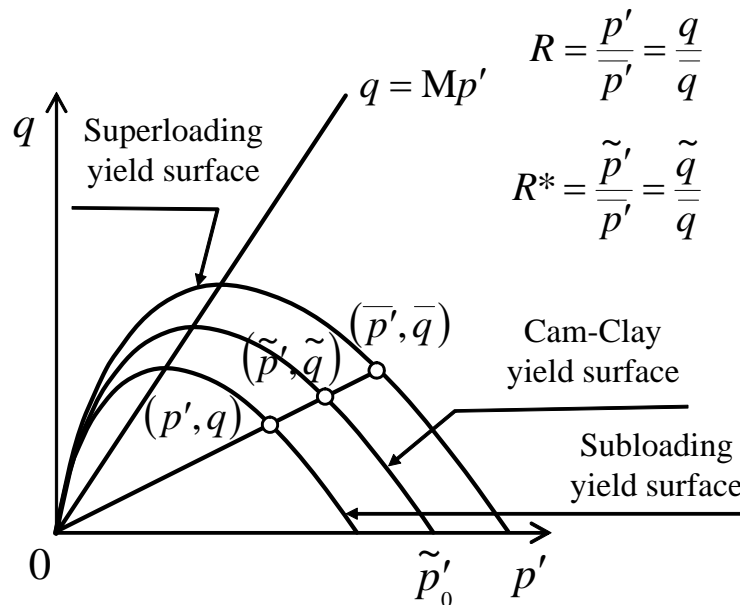


図 4.2 3つの負荷面

Evolution law for R

過圧密土が負荷を受けて塑性変形が進展すると、過圧密状態は正規圧密状態に近づく。つまり、過圧密土が、途中で除荷を受けずに（再過圧密化）、負荷状態のまま推移すれば R の値は増大しつつ、やがて 1（正規圧密状態）に至る。かくして、塑性ひずみ速度の関数 \dot{R} はいつも正である。 R の発展則（evolution law for R ）は \dot{R} を塑性変形の進展と関連付けて記述する。

土が塑性変形をするときは、 R が増大するだけでなく、同時に R^* も増大することが大事である。つまり過圧密土が正規圧密状態に向かうときは、はじめ除荷の位置にあった上負荷面もその位置を変えて拡大ないし縮小しているのである。すなわち過圧密比は、現応力の増加だけでなく上負荷面の移動によってもその値が変化する。これはすでに第 3 章に示した図 3.4 から理解できる。もちろんこの塑性変形が塑性体積ひずみを変化させるときは、第 2 章式(2.17)が示すように Cam-Clay yield surface も拡大ないし縮小して位置を変えている。

Four possible states for soils

以上の説明から、土にはつぎの 4 つの状態があることが分かる。

- ① 過圧密で構造のある状態 ($0 < R < 1, 0 < R^* < 1$)
- ② 正規圧密で構造のある状態 ($R = 1, 0 < R^* < 1$)
- ③ 過圧密で構造のない状態 ($0 < R < 1, R^* = 1$)
- ④ 正規圧密で構造のない状態 ($R = 1, R^* = 1$)

①, ② または ③ の状態にある土は、塑性変形の進展にともない、最後は状態④に至る。これは第 5 章の中心の話題となる。

4.2 モデルの定式化

三つの負荷面（降伏面）

構造を有する土が除荷されて過圧密状態にあるとし、現応力 p', q は下負荷面上にあるとする。相似中心が原点であることに注意して、この p', q に対応する上負荷面と Cam-Clay yield surface 上の応力をそれぞれ、 \tilde{p}', \tilde{q} そして p^*, q^* とすれば、 R^* と R は

$$R^* = \frac{\tilde{q}}{\tilde{p}'} = \frac{p^*}{p'} \quad (4.1)$$

$$R = \frac{q}{\tilde{q}} = \frac{p'}{p^*} \quad (4.2)$$

で与えられる。これらはすでに図 4.2 に示している。

Cam-Clay yield surface は

$$\varepsilon_v^p = f(\tilde{p}', \tilde{q}) = \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \ln \frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}'_0} + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \frac{\tilde{q}}{\tilde{p}'} \quad (4.3)$$

で表される。ここに \tilde{p}'_0 はすでに図 4.1、図 4.2 に示している。式(4.3)に式(4.1)を代入すれば、上負荷面は

$$\varepsilon_v^p = f(\bar{p}', \bar{q}) + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \ln R^* = \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \ln \frac{\bar{p}'}{\bar{p}'_0} + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \frac{\bar{q}}{\bar{p}'} + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \ln R^* \quad (4.4)$$

と書ける。同様にして、式(4.4)に式(4.2)を代入すれば下負荷面は

$$\begin{aligned} \varepsilon_v^p &= f(p', q) + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} (\ln R^* - \ln R) = \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \ln \frac{p'}{\bar{p}'_0} + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \frac{q}{p'} + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} (\ln R^* - \ln R) \\ &= f_{\sigma'}(\sigma') + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} (\ln R^* - \ln R) \end{aligned} \quad (4.5)$$

と書ける。

直交則と適応条件式

Cam-Clay model と同じく、この研究でも土の塑性応答は関連流れ則

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial p'} \\ \dot{\varepsilon}_s^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial q} \end{cases} \quad (4.6), (4.7)$$

に従うとする。ここに λ は塑性乗数である。土の硬化ないし軟化にともなう後続負荷面の size は、式(4.5)の物質時間微分ないし増分形

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{f} + \left(\frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \right) \frac{\dot{R}^*}{R^*} - \left(\frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \right) \frac{\dot{R}}{R} \quad (4.8)$$

から計算される (Prager's consistency condition (適応条件))。この式は R^* と R の物質時間微分 \dot{R}^* と \dot{R} を与える発展則が必要なことを教えている。

式(4.8)はさらに

- ① 過圧密の解消 ($\dot{R} > 0$, $R \rightarrow 1$) は土が塑性膨張する方向に作用し、
 - ② 構造の劣化 ($\dot{R}^* > 0$, $R^* \rightarrow 1$) は土が塑性圧縮する方向に作用する
- ことも表しているから重要である。①は土粒子の噛み合わせがはずれてゆくことから、②は card house の崩壊から、これまでそれぞれ直感的に理解されてきた内容にあたる。

R と R^* の発展則

発展則は、塑性変形が進展しているときはいつでも R も R^* も増加して1に近づくことを表すもので、ここではそれを

$$\dot{R} = U \dot{\varepsilon}_s^p \quad (4.9)$$

$$\dot{R}^* = U^* \dot{\varepsilon}_s^p \quad (4.10)$$

と書く。ここに U, U^* はそれぞれ R および R^* の正のスカラー関数である。式(4.9)、(4.10)では、塑性変形の進展があることを塑性せん断ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_s^p$ で表していることに注意する。負荷のとき $\dot{\varepsilon}_s^p$ は必ず正になることにも注意する。塑性せん断ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_s^p$ の代わりに塑性ひずみ速度テンソル $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ のノルムをとることも考えられる (詳細は APPENDIX A 参照)。この章で塑性せん断ひずみ速度を用いているのは、これ以降の計算と式が簡単になるからだけの理由による。

さて、 R の正のスカラー関数 U にはつぎの制約がつく。

$$U(R=1)=0 \quad (4.11)$$

$$U(R=0)=\infty \quad (4.12)$$

式(4.11)は過圧密の解消が正規圧密状態に達したときに止まることを表す。式(4.12)は過圧密比が無限大のときはその土の弾塑性応答はほとんど弾性応答に近いことをあらわす。なぜなら

$$U = \frac{\dot{R}}{\dot{\epsilon}_s^p} = \infty \quad (4.13)$$

は $\dot{\epsilon}_s^p \rightarrow 0$ を意味するからである。

式(4.11)、(4.12)の制約を満たす最も簡単な関数 U は

$$U = -\frac{M(1+e_0)}{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}} m \ln R \quad (4.14)$$

で与えられる。この形は Hashiguchi(1989)によって与えられた。材料定数 m は大きいほど過圧密の解消が速い。このため m は degradation parameter of overconsolidation state と呼ばれる。式(4.11)から(4.14)の議論は Hashiguchi et.al. (1989)¹³⁾に詳しい。

つぎに R^* の正のスカラー関数 U^* には、つぎの制約を導入する。

$$U^*(R^*=1)=0 \quad (4.15)$$

$$U^*(R^*=0)=0 \quad (4.16)$$

式(4.15)は構造の劣化がやがて止まる条件を表す。一方式(4.16)は、構造の無限に発達した飽和土は、間隙比も無限に大きく、いわば液体で、液体の弾塑性応答は考えていないことを表す。式(4.15)、(4.16)の制約を満たすもっとも簡単な関数 U^* はつぎのベータ関数で与えられる。

$$U^* = \frac{M(1+e_0)}{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}} a R^{*b} (1-R^*)^c \quad (4.17)$$

3つもパラメータを用いているが、通常は、 $b=1$ 、 $c=1$ が用いられ、実質的にはパラメータは a ひとつである。これらのパラメータは degradation parameters of structure と呼ばれる。式(4.15)から式(4.17)の議論は Asaoka, Nakano and Noda(1988, 2000a), Asaoka et.al. (2002)によってなされた。

式(4.14)の関数 U と式(4.17)の関数 U^* の形の例は図 4.3 に示した。

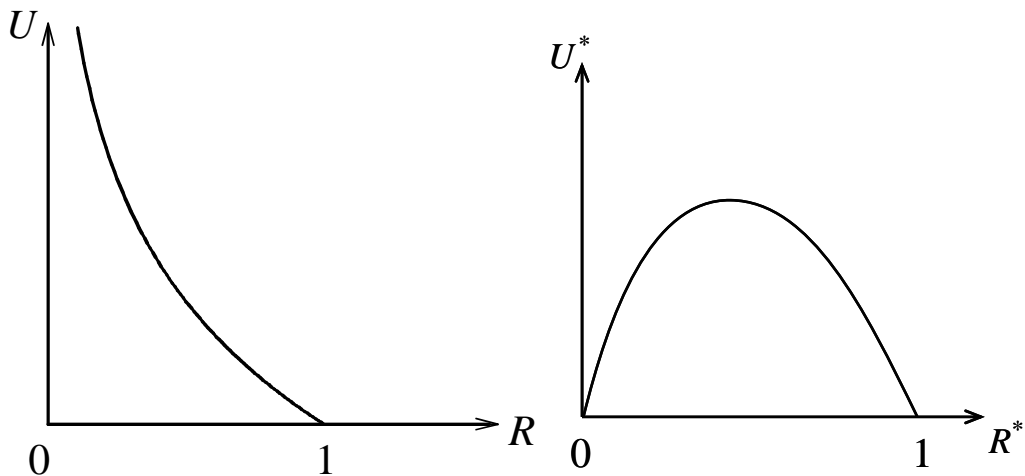


図 4.3 U, U^* の形

Plastic multiplier λ in terms of stresses

塑性体積ひずみ速度と塑性せん断ひずみ速度がそれぞれ式(4.6)、式(4.7)で表されることに注意して、二つの発展則，式(4.9)、(4.10)を consistency condition, 式(4.8)に代入すれば、

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial p'} = \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \lambda \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \left(\frac{U^*}{R^*} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{U}{R} \frac{\partial f}{\partial q} \right) \quad (4.18)$$

が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \frac{1}{p'} \quad (4.19)$$

なので、式(4.18)の第2式と第3式から塑性乗数 λ は

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}}{\frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \frac{1}{p'} \left(M_s - \frac{q}{p'} \right)} \quad (4.20)$$

のように計算される。ここに

$$M_s = M \left\{ 1 - \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \frac{U^*}{R^*} + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \frac{U}{R} \right\} \quad (4.21)$$

である。

式(4.20)の塑性乗数 λ を Cam-Clay model の λ (第2章式(2.28)) と比べると、定数 M が変数 M_s に入れ替わっていることがわかる。

負荷の条件

$$\lambda > 0 \quad (4.22)$$

から、負荷状態がつぎの3つに分かれることは第4章の Cam-Clay model とまったく同じで、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} > 0 & \text{when } q < M_s p' & : \text{hardening} \\ \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} < 0 & \text{when } q > M_s p' & : \text{softening} \\ \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = 0 & \text{when } q = M_s p' & : \text{perfectly plastic} \end{cases} \quad (4.23)$$

となる。ただし、硬化と軟化の境界線

$$q = M_s p' \quad (4.24)$$

は、Cam-Clay model と異なり、勾配 M_s が塑性変形の進展によって大きくなったり小さくなったりする。これは次節で述べる。

構成式と負荷基準

塑性乗数 λ は応力テンソルと関数 f_σ (式(4.5)) を用いて、一般的には

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \dot{\sigma}'}{\frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1+e_0)} \frac{1}{p'} \left(M_s - \frac{q}{p'} \right)} \quad (4.25)$$

と書かれる。この式に土の弾性応答

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E} \dot{\epsilon}^e \quad (4.26)$$

を代入すれば

$$\Lambda = \lambda = \frac{\frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \mathbf{E} \dot{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1+e_0)} \frac{1}{p'} \left(M_s - \frac{q}{p'} \right)} \quad (4.27)$$

が得られるのは第2章と同じである。したがって土の弾塑性応答が

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}' &= \mathbf{E} \dot{\epsilon}^e = \mathbf{E} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \\ &= \mathbf{E} \dot{\epsilon} - \Lambda \mathbf{E} \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \end{aligned} \quad (4.28)$$

と書かれるのも Cam-Clay model と同じである。応力変化に対して土が弾性応答するか、あるいは弾塑性応答するか、すなわち式(4.26)と式(4.28)の使い分けが、

$$\frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial \sigma'} \cdot \mathbf{E} \leq 0 \quad (4.29)$$

でなされるのも、第2章の Cam-Clay model とまったく同じである。

4.3 上負荷面・下負荷面モデルの特性

式(4.21)の M_s に U と U^* の式(4.14)、(4.17)を代入すれば ($b=1, c=1$)

$$M_s = M \left\{ 1 - \frac{m}{R} \ln R - a(1 - R^*) \right\} \quad (4.30)$$

が得られる。この式は、式(4.21)よりも明瞭に、

① 過圧密の解消 ($R \rightarrow 1$) は M_s の減少をもたらし、

② 構造の劣化 ($R^* \rightarrow 1$) は M_s の増加をもたらすことを、

示している。これを図 4.4(a), (b)にも示した。図中の直線 $q = Mp'$ はもちろん塑性圧縮と塑性膨張の境界線を表している。したがって、図 4.4(a)では、塑性膨張をともなう硬化が起こりうる領域は、 M_s の減少とともにやがて喪失することを示しているし、図 4.4(b)は、塑性圧縮をともなう軟化が起こりうる領域は、 M_s の増大とともにやがて喪失することを示している。

以上を明瞭に示すふたつの極端な例を挙げよう。

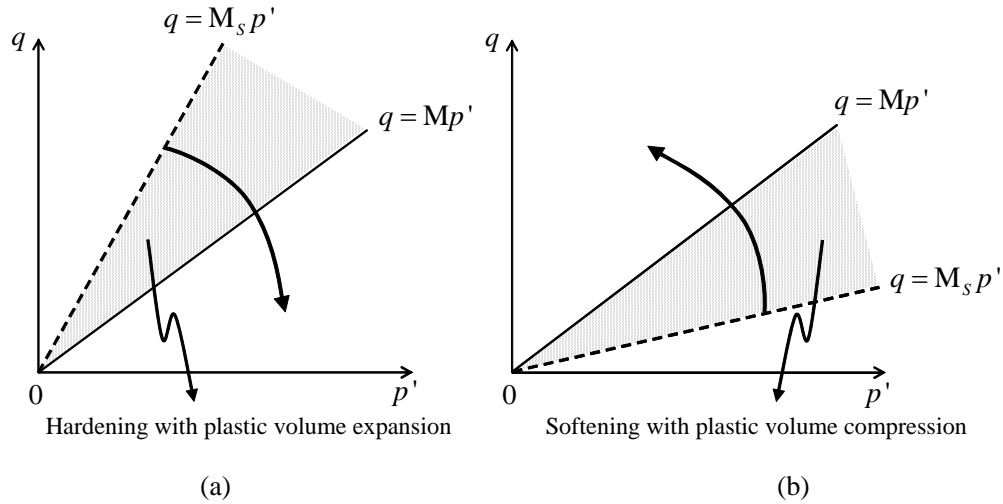


図 4.4 M_s の動き

完全に繰り返されているが、しかし超過圧密な粘土の排水せん断 第3章図3.1 に対応
この粘土試料の弾塑性パラメータと発展則パラメータは以下で与える。

表 4.1 材料定数と発展則パラメータ

Elasto-plastic parameters	
Compression index $\tilde{\lambda}$	0.15
Swelling index $\tilde{\kappa}$	0.035
Critical state constant M	1.43
Void ratio at $p' = 98.1 \text{ kPa}$ on NCL N	1.72
Poisson's ratio ν	0.15
Evolution parameters	
Degradation parameter of overconsolidation state m	2.0
Degradation parameter of structure a ($b = c = 1.0$)	1.5

つぎにこの試料の初期値は以下で与える（下つき添え字 0 は初期値を示す）。

表 4.2 初期値

Initial conditions	
Initial void ratio e_0	0.51
Initial mean effective stress p_0' (kPa)	34.5
Initial value of R^* (R_0^*)	1.00
Initial overconsolidation ratio $1/R_0$	24.0

$R_0^* = 1$ だから土試料は繰り返されて構造を完全に無くしており、上負荷面はすでに Cam-Clay

降伏面に重なっている。しかし現応力は下負荷面上にあって（過圧密比 24）、再負荷に対しては試料はこの下負荷面に支配される弾塑性応答を示す。

この試料が排水 3 軸圧縮試験で示す力学挙動を、本章のモデルで計算してみよう。計算結果は図 4.5(a), (b)に示す。これらの図は土試料が最初は塑性圧縮をとまなう硬化を示すが、やがて応力状態が $q = Mp'$ を超えると

$$Mp' < q < M_s p' \quad (4.31)$$

のために塑性膨張をとまなう硬化に転じることを示している。ところがさらに塑性変形が進展して過圧密の解消（ $R \rightarrow 1$ ）が進み M_s が減少すると（図 4.4(a)）、やがて

$$M_s p' < q \quad (4.32)$$

となって、土試料は塑性膨張をとまなう軟化に転じる。そして最後には試料は正規圧密粘土

$$M_s = M \quad (4.33)$$

になって、応力状態も $q = Mp'$ 上に上側から降りてきて、体積変化がなくせん断ひずみの大きさが不定の、いわゆる残留状態に達する。図 4.5(a)にはせん断変形にともなう $1/R$ の値（過圧密比）の変化も記入している。過圧密粘土の力学挙動の全体はこのようにして理解することができた。

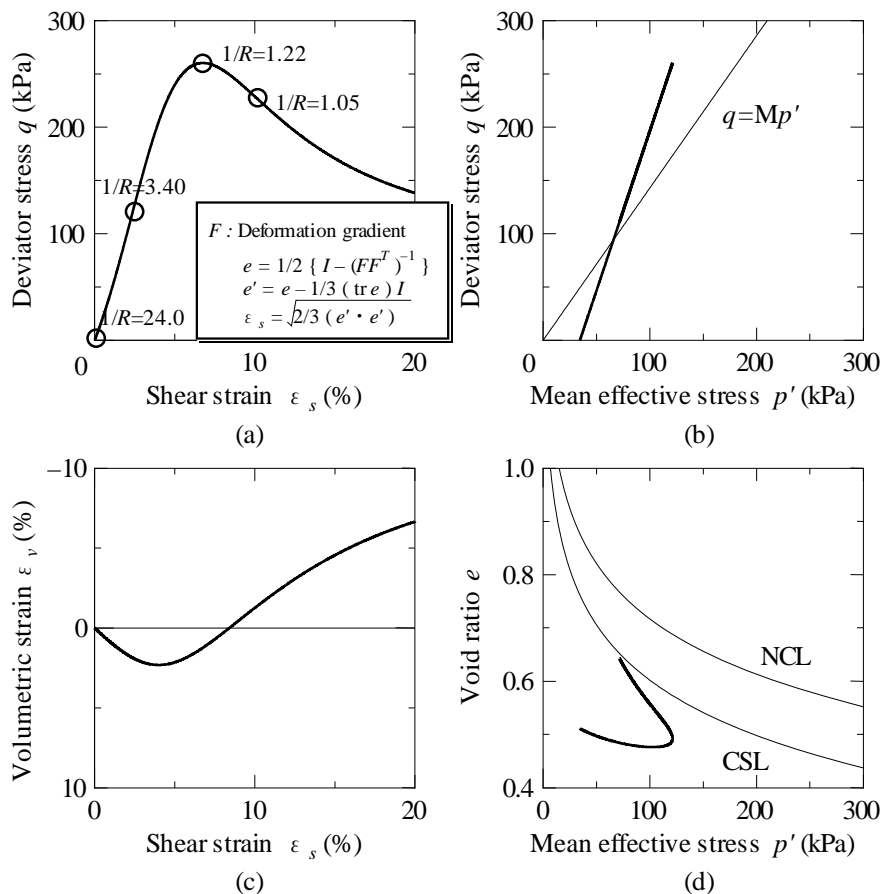


図 4.5 超過圧密粘土の排水せん断

正規圧密だが、しかし高位に構造の発達した粘土の非排水せん断 第3章図3.8 に対応

つぎに、いわゆる鋭敏比が問題にされるような、構造が発達した正規圧密粘土を考える。この土試料の弾塑性パラメータと発展則パラメータは、先に述べた過圧密粘土のそれとまったく同じとする。ところが試料の初期値が異なっていて、この例では

表 4.3 初期値

Initial conditions	
Initial void ratio e_0	0.51
Initial mean effective stress p_0' (kPa)	1357
Initial value of R^* (R_0^*)	0.2
Initial overconsolidation ratio $1/R_0$	1.00

のように与える。 $R_0 = 1$ (正規圧密状態) だから下負荷面はすでに上負荷面と一致しているが、Cam-Clay 降伏面は $R_0^* = 0.2$ だから上負荷面より相似比で 5 倍内側にある。もちろん現応力は上負荷面上にある。

この試料が非排水 3 軸圧縮試験で示す力学挙動を、本章のモデルで計算してみよう。結果は図 4.6(a), (b)に示す。図 4.6(b)には塑性変形の進展とともに劣化する構造の状態を R^* の値で示している。試料はせん断変形の初期には塑性圧縮をともなう硬化を示している。これは初期の応力状態が

$$q < M_s p' < M p' \quad (4.34)$$

となっているためである。ところがやがて応力状態は

$$M_s p' < q < M p' \quad (4.35)$$

になり、かくして試料は塑性圧縮をともなう軟化を示すようになる。しかし塑性変形がさらに進展し、構造の劣化がさらに進む ($R^* \rightarrow 1$) と M_s が増大してゆき (図 4.4(b))、やがて

$$M_s = M \quad (4.36)$$

となって、応力状態も $q = M p'$ の上に載って、過剰間隙水圧が変化せずせん断ひずみの大きさが不定の定常状態に達する。

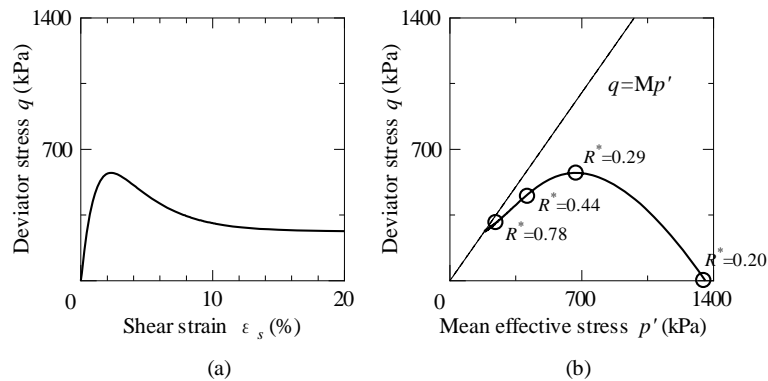


図 4.6 構造のある粘土の非排水せん断

つぎに、同じ粘土を十分に練り返して、初期の間隙比を上と同じにした正規圧密粘土の非排水 3 軸圧縮試験を考えよう。粘土は同じだから弾塑性パラメータは今までと同じである。(発展則パラメータはもはや必要でない。) しかし試料の初期値が異なっている。それは

表 4.4 初期値

Initial conditions	
Initial void ratio e_0	0.51
Initial mean effective stress p_0' (kPa)	395.2
Initial value of R^* (R_0^*)	1.0
Initial overconsolidation ratio $1/R_0$	1.0

で与えられる。この粘土の非排水 3 軸圧縮試験の結果は図 4.7(a), (b)のように計算される。もちろん図 4.7 は Cam-Clay が示す応答に他ならない。図 4.7 と図 4.6 を重ねて描いたものを図 4.8 に示す。鋭敏比はピーク強度と練り返し粘土の強度の比だから、この粘土は鋭敏比が 2 程度であったこともわかる。かくして、「試料の乱れ」とか「鋭敏比」などの古典土質力学の言葉が示す弾塑性力学の意味がしだいに明らかになってきたことが理解される。

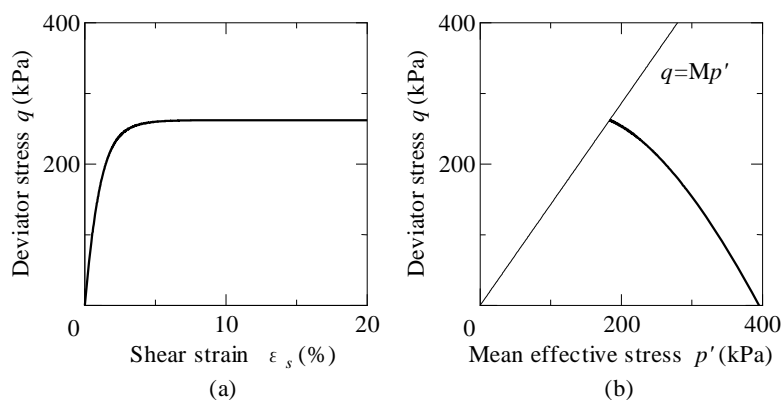


図 4.7 練り返し正規圧密粘土の非排水せん断

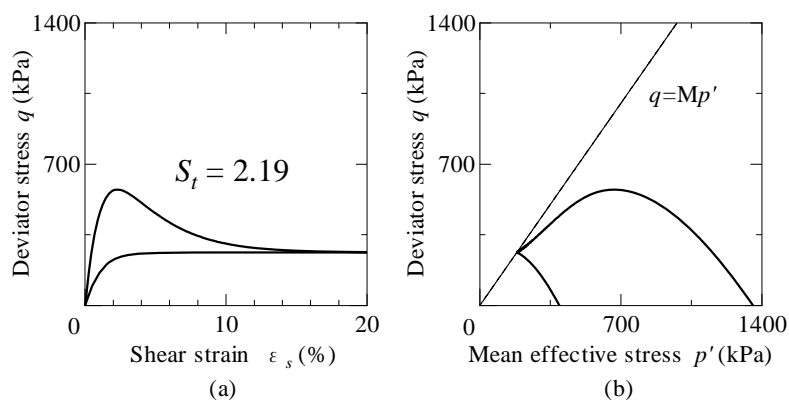


図 4.8 鋭敏比

5 砂と粘土の違い

5.1 過圧密と構造の状態の変化

土は、つぎの4つの状態のいずれかにあることは第4章で述べた。すなわち

- ① 過圧密で構造のある状態 ($0 < R < 1, 0 < R^* < 1$)
- ② 正規圧密で構造のある状態 ($R = 1, 0 < R^* < 1$)
- ③ 過圧密で構造のない状態 ($0 < R < 1, R^* = 1$)
- ④ 正規圧密で構造のない状態 ($R = 1, R^* = 1$)

①, ② または ③ の状態にある土は、塑性変形の進展にともない、最後は状態④に至る。

自然の堆積土は粘土でも砂でも一般に、上で言う状態①に、すなわち構造が発達していて、しかも程度の差こそあれ過圧密な状態にあると考えてよい。このような土が、塑性変形の進展につれて、状態④にいたるとき、大別つぎのふたつの道筋がある。

道筋 C: ①過圧密・構造あり → ②正規圧密・構造あり → ④正規圧密・構造なし

道筋 S: ①過圧密・構造あり → ③過圧密・構造なし → ④正規圧密・構造なし

道筋 C をたどる土では、塑性変形の進展に対し過圧密の解消のほうが構造の劣化よりも早く進む。構造をなくすためには、さらによりおおきな塑性変形が必要になる。道筋 S をたどる土はその逆で、塑性変形が進展すると構造はすぐになくなるのに、過圧密の解消はなかなか進まない。

結論を先に述べると、土を荷重するとき、典型的な粘土は道筋 C をたどり、典型的な砂は道筋 S をたどる。これを図 5.1 に示した。

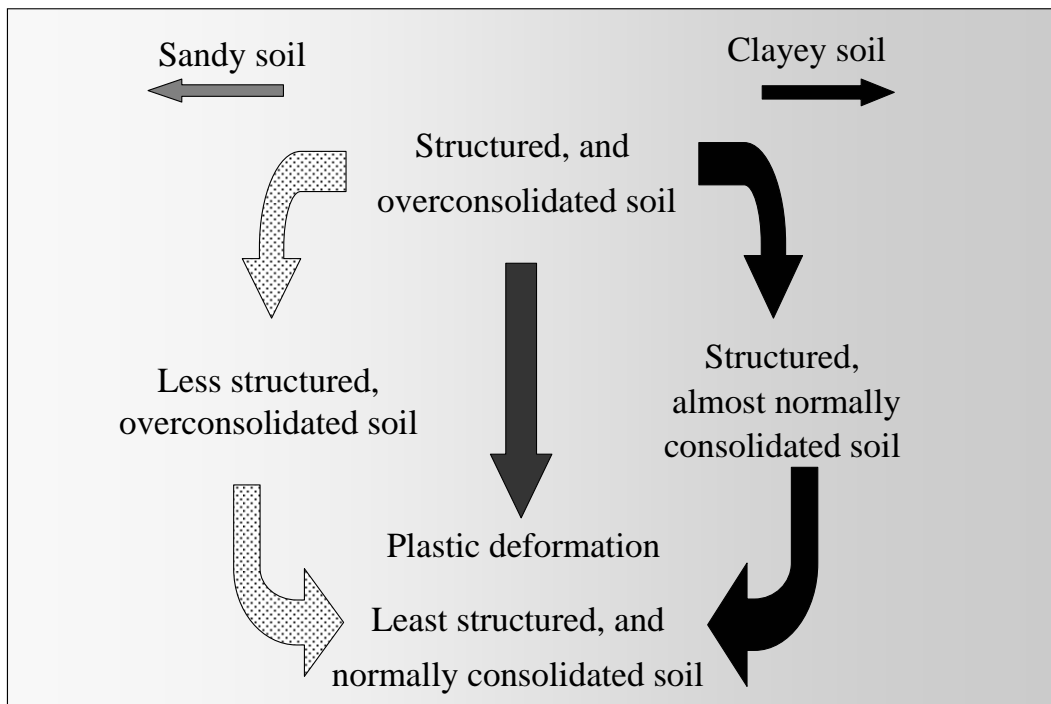


図 5.1 道筋 S と道筋 C

(after Asaoka. et. al, 2002)

図 5.1 の結論が導かれた経緯は本章の後半と第 6 章、第 7 章で明らかにするが、先にこの結論の詳細を以下の 5 点にわたって説明する。

(1) この論文では、過圧密と構造に関する土の状態がどのように変化してゆくか、状態の変化の仕方の違いで、その土が砂か粘土か区別できることを主張している。つまり、ある土が与えられて、それが状態①にあることをもし教えられたとしても、それだけの情報では、負荷によるこれから先の状態の変化の仕方はまだ分らないのだから、今はまだ砂か粘土かの区別はつかない。よく似たことは状態④についてもいえる。土が状態④にあることを教えられると、負荷によってもうこれ以上の状態変化は起こらないから、砂と粘土の区別はすでに必要でなくなる。状態④に達すれば、砂も粘土もその弾塑性応答は、ともに Cam-Clay model で記述できるから、このかぎりでは、違いがないのである。もっとも、弾塑性パラメータの値には違いがあるから、たとえば粘土はやわらかく砂は固いなどの違いはある。

(2) Super/subloading Yield Surfaces (上 (うへ) 負荷面と下 (した) 負荷面) を導入したモデルでは、過圧密の解消の速さは R の発展則のパラメータ m で支配され、構造の劣化の速さは R^* の発展則のパラメータ a, b, c (通常は $b=1, c=1$) で支配される。だから、これらの値の違いによって、モデルは道筋 C でも道筋 S でもたどることができる。つまり、粘土と砂で別々のモデルを用意する必要はまったくない。実際、

(3) 過圧密の解消も、構造の劣化も同じような速度で進行し、だから状態①から、②や③の状態を経ずに、状態④にゆく土も、想像できなくはないのだ。clayey sand や sandy clay がこれに当たるかもしれない。上に述べた結論で、「典型的」という形容詞をつけているのは、このためである。粘土と砂を明確な一つの線で区分けすることは難しいし、その必要もないのである。

(4) さて、第 4 章で計算した二つの例を思い出そう。最初の計算例は構造を喪失して過圧密にある粘土であった。この土試料は、状態④の土を除荷して状態③にして得られたものである。

(道筋 C は粘土に状態③がないことを主張するものではまったくないから注意する。上に述べた結論で、「土を負荷するとき」という限定をつけたのはこのためでもある。) さて、この試料は排水せん断で状態③から状態④に変化したから、結論の道筋から言えば、この土は砂と判定されかねない。しかし、構造の劣化の速さが測定されていないのだから、つまり状態①からの変化が観測されていないのだから、砂か粘土かの判定は、この実験だけからではつかないのである。同じことは 2 番目の計算例についてもいえる。そこでは正規圧密だが構造がある粘土の非排水せん断を計算した。この場合も①からの変化が観測されていないのだから、過圧密が解消する速さが分からず、砂か粘土かの判定は、この実験だけからではつかないのである。

(5) 状態④にある土は除荷すれば状態③に移るから、砂でも粘土でも状態③は考えることができる。問題は状態②にある。除荷によって構造は回復されない (蘇らない、あるいは、生き返らない)。だから上の結論だけから推論すると、典型的な砂には状態②が考えられないことになる。しかしこれは間違いである。円筒容器に水をいれて、水中落下法でゆるい砂をつくれれば、この砂はほとんど正規圧密でしかも構造は高位に発達している。この砂をごく低い応力レベルで繰り返しせん断すれば、すぐに状態①に達する。つまり砂は状態①のまえに状態②があるのだ。繰り返しせん断とは負荷と除荷の繰り返しだが、砂は負荷中に過圧密の解消がなかな

か進まないで、除荷中の過圧密の増大が、繰り返すたびに蓄積してゆく。一方、低い応力レベルでのせん断なので構造はまだ残っている。かくして最初状態②にあったこの砂に状態①が実現する。このあとこの砂を（除荷なしに）負荷だけすれば、① → ③ → ④の経路をたどる。この話題には、しかし、もっと多くの説明が必要である。それは第6章で述べる。

5.2 中密な砂と構造の発達した超過圧密粘土

砂と粘土のふたつの非排水せん断を検討する。

中密な砂 (medium dense sand) の非排水せん断挙動

計算の対象にした medium dense sand の弾塑性パラメータと発展則パラメータを表5.1に掲げる。この発展則パラメータを使えば、単位の塑性変形に対し、構造は早く壊れるが過圧密はなかなか解消しない。それは計算例の中でも示す。だから表5.1のパラメータは典型的な砂に関するものである。

表 5.1 材料定数と発展則パラメータ

Elasto-plastic parameters	
Compression index $\tilde{\lambda}$	0.05
Swelling index $\tilde{\kappa}$	0.012
Critical state constant M	1.00
Void ratio at $p' = 98.1 \text{ kPa}$ on NCL N	0.97
Poisson's ratio ν	0.3
Evolution parameters	
Degradation parameter of overconsolidation state m	0.08
Degradation parameter of structure a ($b = c = 1.0$)	2.3

この砂試料の、非排水3軸圧縮試験の前の初期値を表5.2に掲げる。試料の過圧密比 $1/R_0$ は3.5、構造の状態は $R_0^* = 0.26$ である。

表 5.2 初期値

Initial conditions	
Initial void ratio e_0	0.92
Initial mean effective stress p_0' (kPa)	294.3
Initial value of R^* (R_0^*)	0.26
Initial overconsolidation ratio $1/R_0$	3.5

この砂試料をなぜ medium dense sand と呼ぶか、その理由は第6章で説明する。

さて、非排水3軸圧縮試験で得られる砂試料の応答の Super/subloading Yield Surface model による計算を図5.2(a), (b), (c), (d)に示す。図5.2(c), (d)には R と R^* の変化の様子を示しているから、試料は典型的な砂であることがわかる。

試験中の M_s の変化は図 5.3 に示した。はじめは $M_s < M$ だから、応力状態が

$$M_s p' < q < M p' \quad (5.1)$$

のときにこの砂は塑性圧縮をとまなう軟化を示す。ところが砂の構造の破壊は早く、 M_s は急速に増大し、すぐに $M_s > M$ となるから、応力状態が

$$M p' < q < M_s p' \quad (5.2)$$

になると、試料は塑性膨張をとまなう硬化に転じる。塑性変形がさらに進展すれば、もちろん最後には $M_s = M$ になるから、試料は最後には $q = M p'$ のうえで定常状態に達する。つまりせん断ひずみの進行に対して、もはや応力も体積も過剰水圧も変化しなくなる。

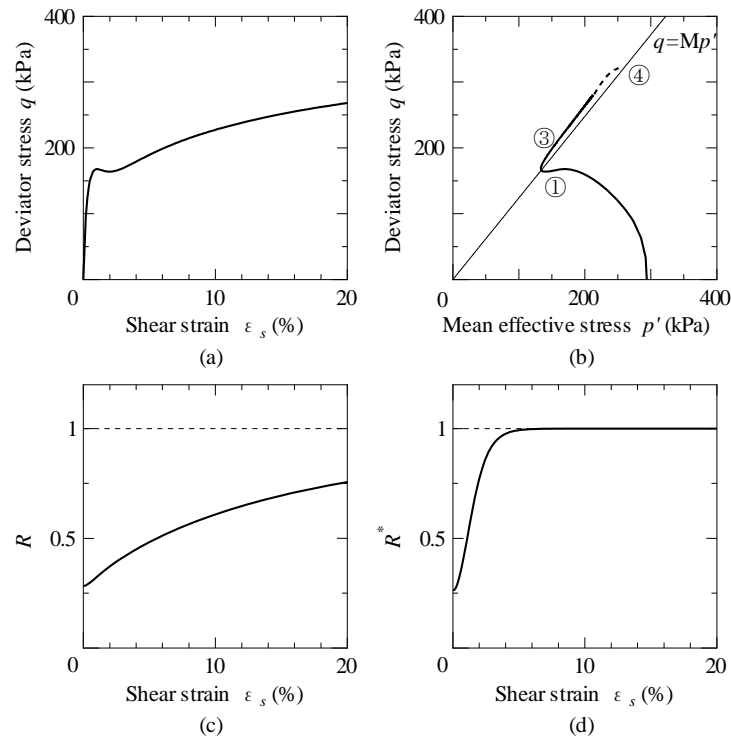


図 5.2 中密な砂の非排水せん断

(図中①, ③, ④は p.29 の状態の定義参照)

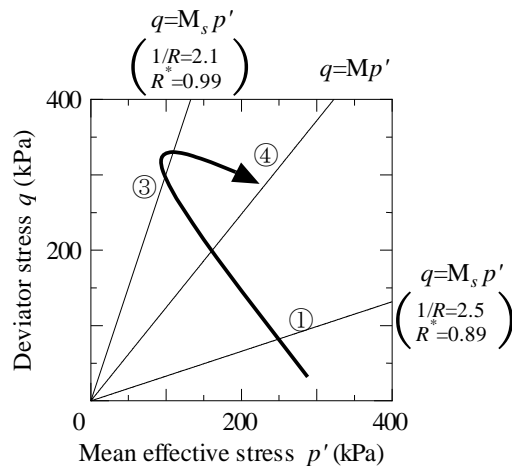


図 5.3 M_s の変化 (図中①, ③, ④は p.29 の状態の定義参照)

構造の発達した超過圧密粘土の非排水せん断挙動

計算の対象にした粘土の弾塑性パラメータと発展則パラメータを表 5.3 に掲げる。この発展則パラメータを使えば、単位の塑性変形に対し、過圧密は早く解消するが構造はなかなか劣化しない。それは計算例の中でも示す。だから表 5.3 のパラメータは典型的な粘土に関するものである。

表 5.3 材料定数と発展則パラメータ

Elasto-plastic parameters	
Compression index $\tilde{\lambda}$	0.25
Swelling index $\tilde{\kappa}$	0.045
Critical state constant M	1.25
Void ratio at $p'=98.1\text{kPa}$ on NCL N	1.73
Poisson's ratio ν	0.3
Evolution parameters	
Degradation parameter of overconsolidation state m	10.0
Degradation parameter of structure a ($b=c=1.0$)	0.5

この粘土試料の、非排水 3 軸圧縮試験の前の初期値を表 5.4 に掲げる。試料の過圧密比 $1/R_0$ は 4.5、構造の状態は $R_0^* = 0.45$ である。

表 5.4 初期値

Initial conditions	
Initial void ratio e_0	1.58
Initial mean effective stress p_0' (kPa)	98.1
Initial value of R^* (R_0^*)	0.46
Initial overconsolidation ratio $1/R_0$	4.5

非排水 3 軸圧縮試験で得られるこの粘土試料の応答の super/subloading yield surface model による計算を図 5.4(a), (b), (c), (d) に示す。図 5.4(c), (d) には R と R^* の変化を示しているから、試料は典型的な粘土であることがわかる。

試験中の M_s の変化を図 5.5 に掲げる。はじめは $M_s > M$ だから、応力状態が

$$Mp' < q < M_s p' \quad (5.3)$$

になってもこの粘土は塑性膨張をとめないながらもなお硬化を示す。ところが粘土の過圧密の解消は早く進み、 M_s は急速に減少して、やがて $M > M_s$ となるから、応力状態が

$$M_s p' < q < Mp' \quad (5.4)$$

になると、試料は塑性圧縮をとまなう軟化に転じる。塑性変形がさらに進展すれば、もちろん最後には $M_s = M$ になるから、試料は最後には $q = Mp'$ のうえで定常状態に達する。つまりせん断ひずみの進行に対して、もはや応力も体積も過剰水圧も何も変化しなくなる。

過圧密が解消した後もまだ残る構造のために、試験の後半で粘土が塑性圧縮をとまなう軟化を示すことが重要である。これは「巻き返し」と呼ばれる (Tatsuoka F. and Kohata Y., 1995)。

巻き返しが観測された実験事例を図 5.6 に示した。

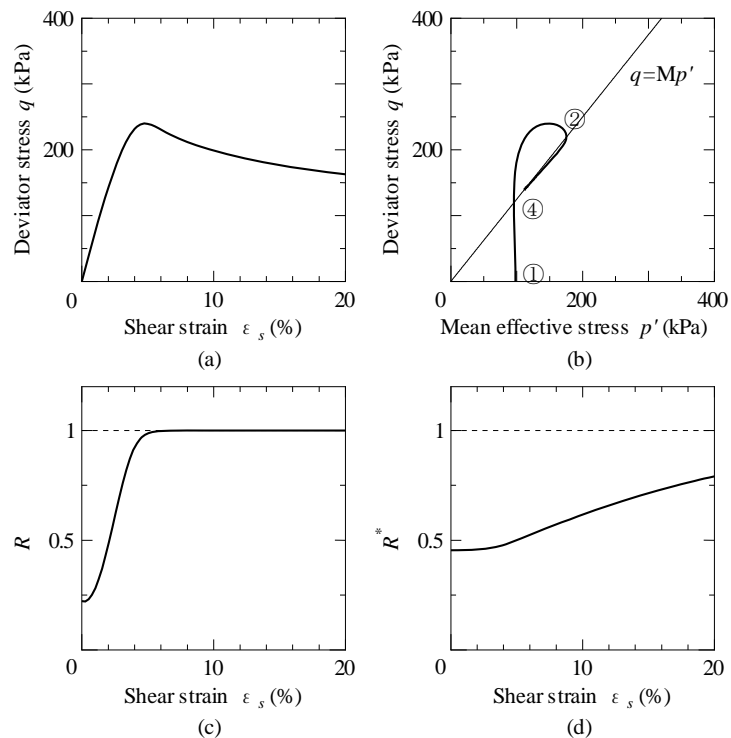


図 5.4 粘土の非排水せん断
(図中①, ②, ④は p.29 の状態の定義参照)

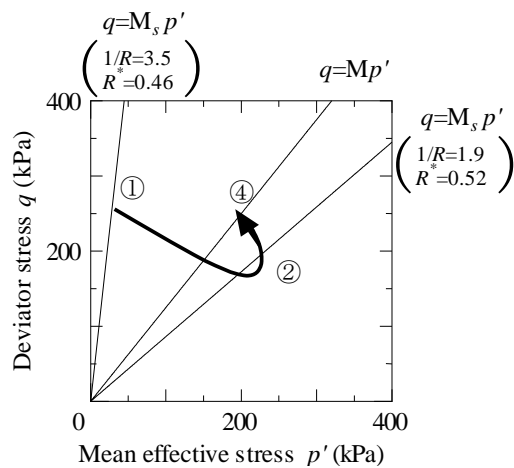


図 5.5 M_s の変化 (図中①, ②, ④は p.29 の状態の定義参照)

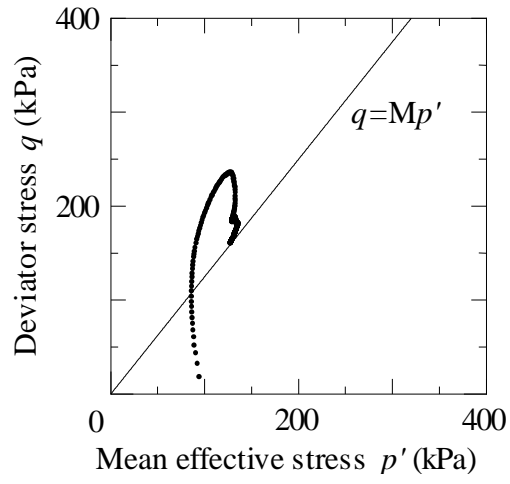


図 5.6 構造の発達した過圧密粘土の非排水せん断
(after Asaoka A. ,2000)

6 砂の締め固め／高密度化

第4章式(4.8)

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{f} + \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 + e_0} \left(\frac{\dot{R}^*}{R^*} - \frac{\dot{R}}{R} \right) \quad (6.1) \text{ (第4章式(4.8)再掲)}$$

は、粘土でも砂でも、土骨格の構造の劣化ないし破壊 ($\dot{R}^* > 0$) が塑性体積圧縮を促すことを明確に表している。一方砂では、構造の破壊に比べて過圧密はなかなか解消しない。この二つが原因になって起る砂の典型的な現象が、繰り返し载荷による大圧縮、すなわち砂の「締め固め」である。

6.1 排水繰り返しせん断のもとでのゆるい砂の高密度化

排水条件での繰り返しせん断で起こるゆるい砂の高密度化の現象は、少し複雑であるので、そのメカニズムを、モデルの数値計算事例を示しながら説明してゆく。

用いる砂は、第5章表 5.1 のものと同じである。しかし異方性の発展則を考慮しているので弾塑性パラメータと発展則パラメータをあらためて表 6.1 に掲げる。異方性の詳細は APPENDIX A に示しているが、本章の理解に異方性は重要でない。

表 6.1 材料定数と発展則パラメータ

Elasto-plastic parameters	
Compression index $\tilde{\lambda}$	0.05
Swelling index $\tilde{\kappa}$	0.012
Critical state constant M	1.00
Void ratio at $p' = 98.1 \text{ kPa}$ on NCL N	0.97
Poisson's ratio ν	0.3
Evolution parameters	
Degradation parameter of overconsolidation state m	0.08
Degradation parameter of structure a ($b = c = 1.0$)	2.3
Evolution parameter of β b_i (see APPENDIX A)	200.0
Limit of rotation m_b (see APPENDIX A)	0.7

表 6.2 初期値

Initial conditions	
Initial void ratio e_0	1.09
Initial mean effective stress p_0' (kPa)	294.3
Initial value of R^* (R_0^*)	0.01
Initial overconsolidation ratio $1/R_0$	1.00
Initial anisotropy $\zeta_0 = \sqrt{3/2\beta_0 \cdot \beta_0}$ (see APPENDIX A)	0.00

さて第5章の砂は最初 **medium dense** の状態 (状態①) にあったとしてその後の非排水せん断を検討した。ここで検討する砂は、第5章の砂と同じ砂ではあるが、しかし初期値が異なっていて、この砂は繰り返し排水せん断の前には、表6.2で与える初期条件にあったとする。表6.2は、この砂が最初「正規圧密で構造のある状態」、すなわち第5章で言う②の状態にあったことを意味している。この表6.2は典型的なゆるい砂の初期値に相当することが、すぐに理解されるであろう。

側圧 $\sigma_2 = \sigma_3$ を一定にした、低いせん断応力 q での排水繰り返し3軸圧縮・伸張試験を実施する。せん断応力振幅は **60kPa** である。このときの表6.1の砂に関する、**Super/subloading Yield Surface model** の応答を図6.1(a)~(d)に示す。図6.1(a)はこの試験での有効応力経路を表し、図6.1(c)が繰り返しせん断による砂試料の体積圧縮の様子を示している。図6.1(b), (d)には、せん断ひずみ ε_s を横軸にとって R と R^* の繰り返しせん断中の変化を示している。

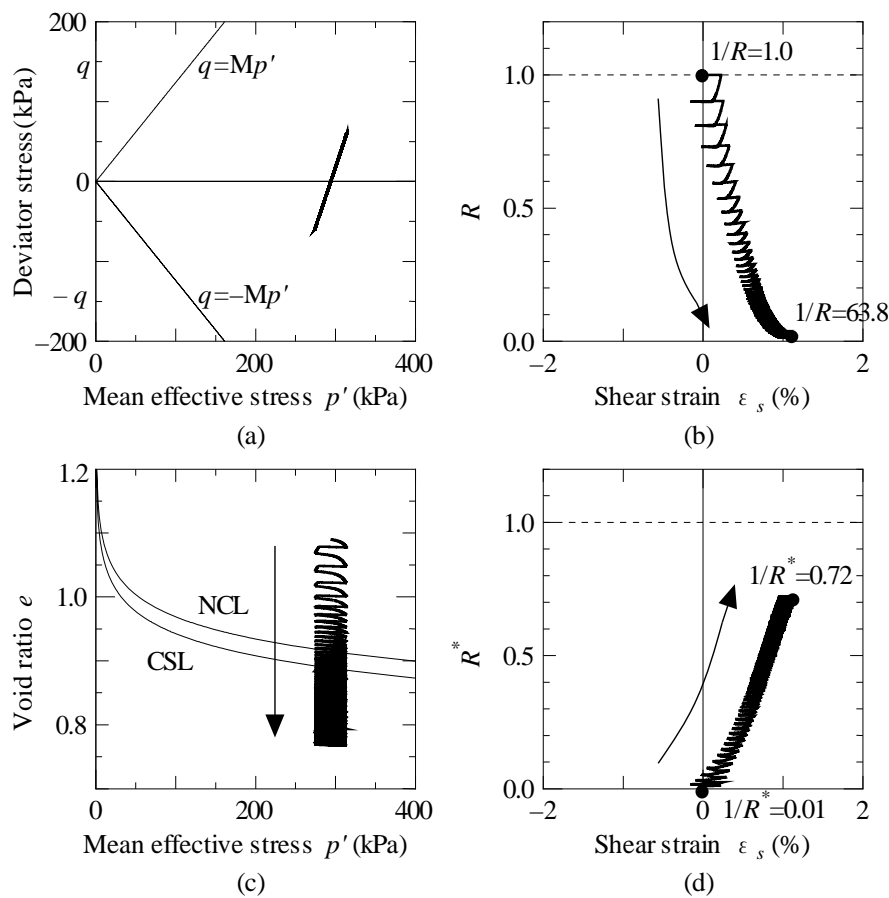


図 6.1 砂の締固め

図6.1cがこの砂の著しい体積圧縮を表している。図中の2本の線は、この砂の弾塑性パラメータ $\tilde{\lambda}, \tilde{\kappa}, N, \Gamma (= N - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2)$ を使って、**modified Cam-Clay model** での正規圧密線 (第2章式(2.1)) と限界状態線 (第2章式(2.3)) を書き込んだものである。これを見れば、古典土質力学における $e \propto \log p'$ 関係とダイレイタンス $N - \Gamma \propto \tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}$ に基づく土の圧縮理論が、砂の締め固め/高密度化にはまったく無力であることが理解される。

図6.2は図6.1(c)を大きなスケールに俯瞰したものである。この図は、塑性せん断ひずみが

大きく出にくい **monotonic loading** ではゆるい砂を締固めることがほとんど不可能であるかを如実に物語っている。2000kPa を超えるような圧力では、砂は粒子破碎を起こしてしまう。図 6.2 は、過圧密比の定義のためには「過去に負荷された最大荷重」の概念が必要でないことを示す点でも重要である。これをつぎに調べよう。

繰り返しせん断の第 3 サイクルにおける間隙比変化と R 、 R^* の変化を図 6.3(a)~(d) に拡大して示す。これらの図は図 6.1(a)~(d) の拡大図に過ぎないが、しかし大きいので理解を助ける。負荷過程である(a)~(b)と(c)~(d)で大圧縮が生じているのは、式(6.1)と R^* の増大 (図 6.3(d)) から理解される。しかしこの負荷過程では、過圧密の解消はきわめて小さい(図 6.3(b))。一方繰り返し載荷での除荷過程 (b)~(c)と(d)~(e)) における過圧密の増大は、きわめて顕著である。このように繰り返し載荷によって、構造は壊れる一方なのに過圧密が蓄積されて R が減少してゆく。これは図 6.1(b), (d)からも読み取れる。

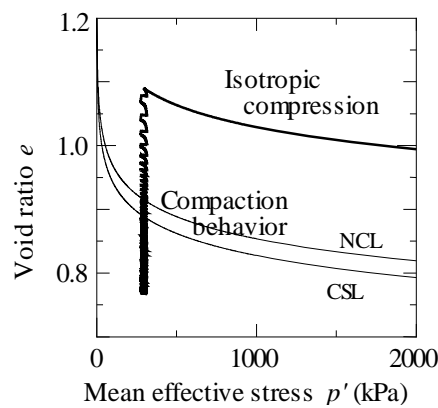


図 6.2 砂の締固めと等方圧密試験 (図 6.1(c)の俯瞰図)

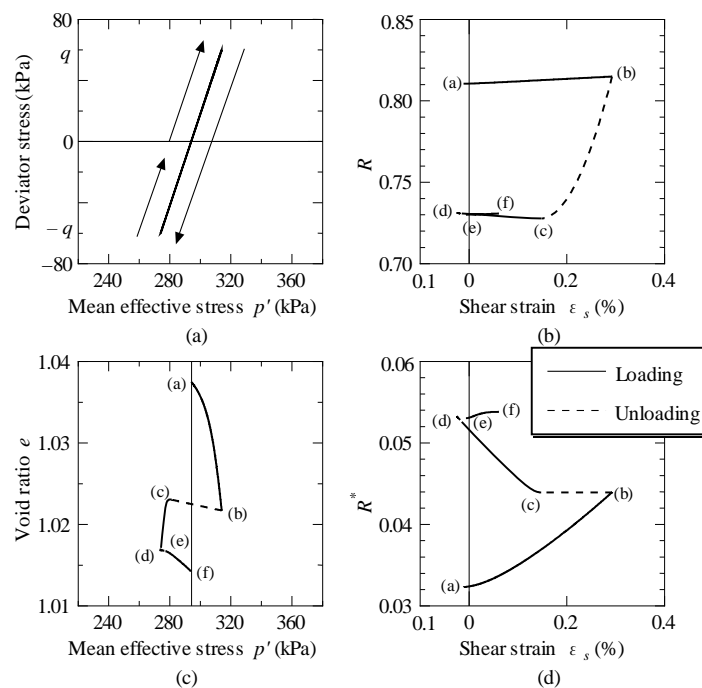


図 6.3 砂の締固めの様子 (図 6.1 の拡大図)

砂が負荷によって過圧密を解消することが少ないと言うのは、負荷中に下負荷面の size の増大と上負荷面の size の増大が comparable で、比率がほとんど変化しないことを意味する。ところが、負荷によって拡大された上負荷面は除荷によってその位置を変えないのに、下負荷面は除荷による現応力の減少に追随してその形を縮小する。過圧密比は上負荷面と下負荷面の size の比だから、繰り返し載荷がおこるたびに上負荷面だけ size が増大して、下負荷面の size は現応力の位置にとどまったままだから、かくして砂の場合は、過圧密比が急激に増大してゆくのである。

粘土では、負荷による過圧密の解消が顕著で、上負荷面と下負荷面は負荷中にすぐに重なってしまう。このため、砂のような繰り返し載荷による急激な過圧密の蓄積は生じない。

6.2 Variation of shear behavior of sand with the decrease of void ratio and the increase of the degree of overconsolidation

図 6.1(b)をふたたび図 6.4 に掲げる。図 6.4 には初期状態 [1] から始まって締め固めの途中で得られる 5 つの繰り返し載荷段階 [1] ~ [5] での砂の状態を間隙比 e , R , R^* で示している。

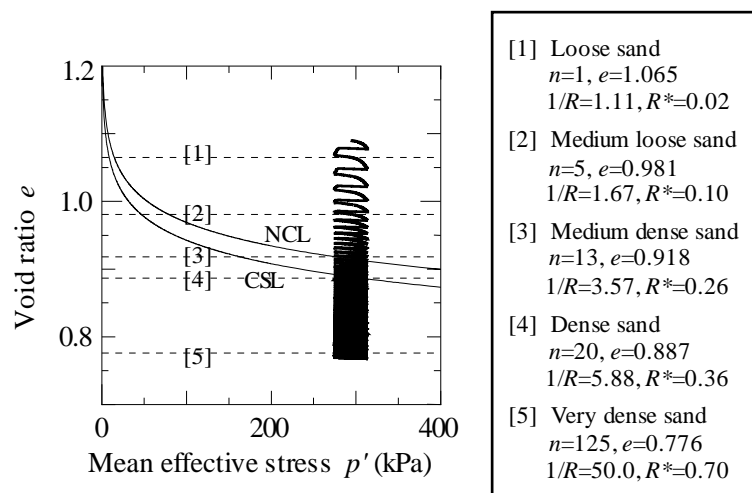


図 6.4 5 段階の締め固めの様子

(n は繰り返しせん断の回数を表す。) これを見れば

- [1] : ゆるい砂
- [2] : 中くらいにゆるい砂
- [3] : 中くらいに密な砂
- [4] : 密な砂
- [5] : とても密

であることがわかる。これら 5 つの砂は、すべて同じ砂から作られている。すなわち [1] ~ [5] の 5 つの砂の状態は Super/subloading Yield Surface model に表 6.1 の弾塑性パラメータ、発展則パラメータを与え、表 6.2 の初期条件のもとで繰り返しせん断での応答を計算することによって、自ずと出てきたものである。5 つの状態を、著者が恣意的に想像して、勝手に与えた

ものではないことを強調する。

さて、この5つの砂は、非排水と排水の3軸圧縮試験でどのように応答するか、モデルで計算してみよう。

図 6.5(a)~(e)は側圧一定の非排水3軸圧縮試験でのモデルの弾塑性応答を示している。これらの砂の応答は、すべて同一の弾塑性パラメータ、発展則パラメータ (表 6.1) から出てきたものである。5つの砂の初期条件も、上で強調したように、同じ砂のゆるい状態から、順に計算によって求めたものである。だから、図 6.5 の非排水せん断の応答は、すべて同じ砂についての、空隙比と過圧密比が異なるときの応答であることがわかる。

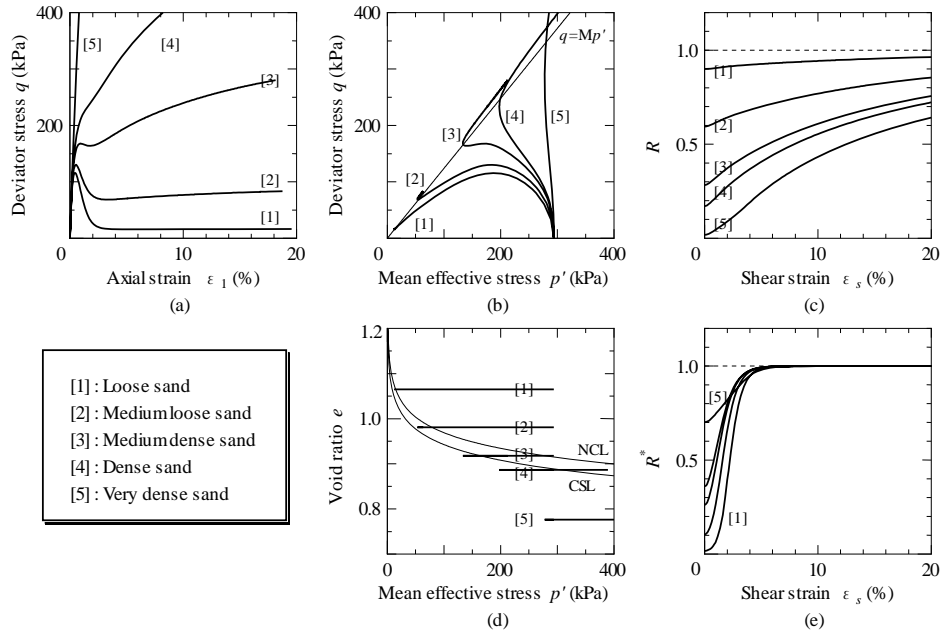


図 6.5 締固め後の非排水せん断

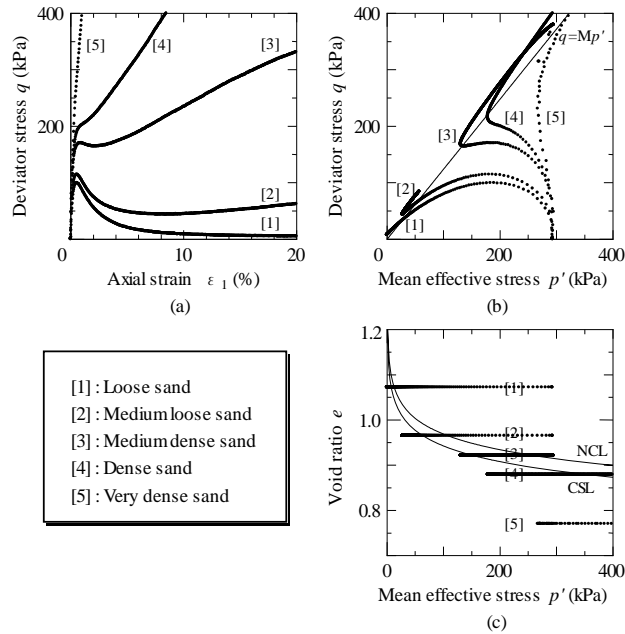


図 6.6 砂の実験 (after Nakano and Nakai, 2003a)

実際に実験すればどうなるかは、図 6.6(a)~(c)に示した。この実験は中野、中井 (Nakano and Nakai, 2003a) によるものである。用いた砂の物理的指標は表 6.3 に、粒度分布は図 6.7 に示す。図 6.5 と図 6.6 が、定性的にも定量的にもよく一致していることが重要である。図 6.6 の実験が示す定性的な傾向は、実験土質力学で古くから知られていた。たとえばカストロの実験 (Castro, 1969) 参照。

表 6.3 砂の物理的指標

Specific gravity of grains G_s	2.65
Maximum void ratio e_{\max}	1.06
Minimum void ratio e_{\min}	0.64

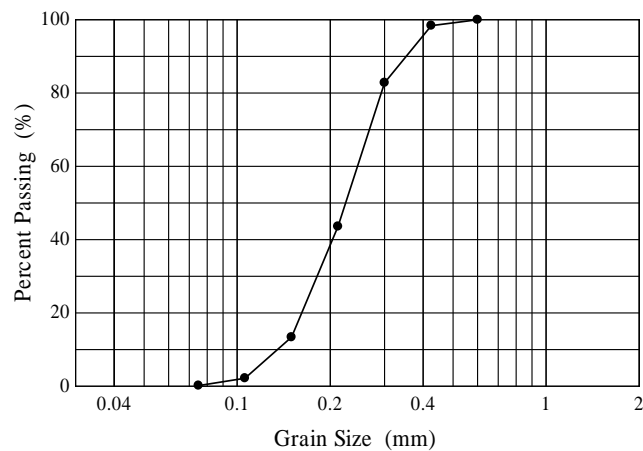


図 6.7 粒径加積曲線

論文の INTRODUCTION で述べたように、間隙比が変わると別のモデル、別の弾塑性パラメータを用意して図 6.6 の実験を説明する研究者/研究グループがあった。そしてそれらが、構成式研究として受け入れがたいことも INTRODUCTION で述べた。彼らには共通して「構造」ないしは上負荷面の概念が欠如していたことがその原因である。

間隙比が変わると別のモデル、別の弾塑性パラメータを用意する研究者/研究グループは、共通して、排水せん断についてほとんど何も語っていない。排水条件では、とくにゆるい砂はせん断中に著しく体積変化を引き起こすからである。

図 6.4 の 5 つの砂の、側圧一定 3 軸排水せん断での、モデルの応答を図 6.8 に示す。図 6.8 が示す定性的傾向は、再び、実験土質力学で古くから知られていた。Bishop and Henkel(1962) の実験結果も参照のこと。

図 6.5(c), (e)および図 6.8(c), (f)には軸ひずみの進展にともなう R と R^* の変化を示している。砂では構造の劣化が速く、過圧密の解消が遅いこともあらためて確認することができる。

砂のせん断特性に関する、これ以上のさらに詳しい説明は、

- ① 粒度分布
- ② 異方性

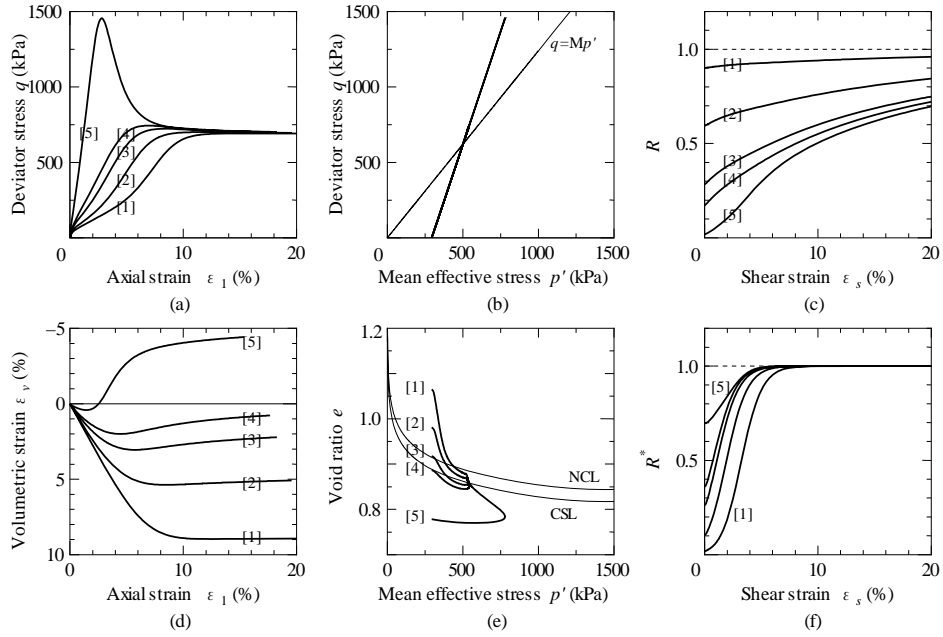


図 6.8 締固め後の砂の排水せん断

についての考察を抜きにしては難しい。①の粒度分布は、もしそれが、なだらかでなく切り立った形状を示せば、その砂は *medium loose* や *medium dense* の状態を出現しにくい。つまり粒度分布は構造と過圧密の発展則パラメータと強く関係する。また②の異方性について言えば、砂では、現応力状態の変化にともなう異方性の変化、すなわち誘導異方性が著しい。この誘導異方性は、とくに砂がゆるい状態にあるときに、せん断特性に大きな影響を与える。異方性の記述とその発展則は、砂でも粘土でも重要である。

以上の①と②について何もわかっていないのではない。しかしこれらの話題は、この論文の目的や *scope* からは逸脱するので説明は割愛する。

7 構造の発達した粘土の「2次圧密」

粘土の2次圧密は、長い間、粘土の土骨格自体がもともと粘性をもっているために起こる現象であると見なされてきた。そして、Suklje 以来現代に至る粘塑性理論はこの見方を理論的に述べたものとされてきた。これらの理論では、要約して言えば、「粘土の土骨格エレメントはもともと粘塑性材料である。したがって、粘土マスを境界値問題として解けば、クリープ、つまり2次圧密/遅れ圧縮が『計算される』』と言う論理を展開する。しかし土骨格エレメントの「粘性」と、粘土マスの「クリープ」は、もともと同義の概念だから、『計算される』のは自明である。つまりこの論理は、「クリープ（2次圧密）が起こる粘土からなる地盤はクリープ（2次圧密）が起きる」と言っているに過ぎない。なぜ2次圧密が起こるのか、その理由を説明する論理ではまったくないのだ。

土質力学の私たちの先輩の研究態度を思い出そう。彼らは、粘弾性の数学理論が Terzaghi の1次元圧密沈下と同じ解を出すことがあることはよく知っていた。しかしそれでもなお、粘弾性理論ではなく、「有効応力」概念の上に築かれた Terzaghi の圧密理論が、土質力学の理論であるとしてきた。Terzaghi の理論は、なぜ圧密沈下が起こるのかその理由を、概念と理論の階層的な構造を見せることにより、私たちに説明したからである。

粘土の2次圧密ないし遅れ圧縮はどのようなメカニズムで起こり、それらが起こらないのはどのような場合か？粘土では起こっても砂ではなぜ2次圧密は起こらないのか？これらに答える論理が、土質力学には必要である。そして、本論文が「砂と粘土の違いを記述できた」とするなら、その記述をした当の Super/subloading Yield Surface model が、この論理を与えるものでなければならない (Asaoka ., 2000b)。

7.1 用語の注意

本章では、構造の発達した粘土が、その構造を劣化させつつ進行する圧密現象を調べる。

「構造を劣化させつつ進行する圧密」を表す土質力学上の言葉は、まだない。これまで「2次圧密」や「遅れ圧縮」と言う言葉が存在したが、これらの言葉は「構造を劣化させつつ進行する圧密」が示す極端な場合の、特徴的な現象に対して名づけられた言葉である。「構造を劣化させつつ進行する圧密」は、もちろん極端な場合は、圧密終了までにひどく時間がかかるし、遅れて大沈下が生じることもある。しかし「構造を劣化させつつ進行する圧密」ならすべて、圧密にひどく時間がかかり、遅れて大沈下が生じる、というわけではない。だから「構造を劣化させつつ進行する圧密」にただちに「2次圧密」などの言葉を充てるのは適当でない。

「2次圧密」や「遅れ圧縮」という、経験的に用いられてきた言葉に、力学上の厳密な定義を与えるのは難しいし、また（力学的には）その必要もないのだ。構造の発達した粘土が、その構造を劣化させつつ進行する圧密現象を、私たちが解析し、調べることができれば、もうそれで十分なのである。以上のような理由で、「2次圧密」や「遅れ圧縮」という言葉を使うときにはいつも、引用符「」をつけて用いる。

7.2 「2次圧密」や「遅れ圧密」のメカニズム

この節では最初に、構造が高位に発達した粘土では、構造の劣化が進行するにともない、塑性圧縮をともなう軟化が起こりうることを述べ、それが圧密/圧縮を著しく遅らせることを説明する。圧縮をともなう軟化は、粘土の力学挙動のうちで「極端な例」かもしれない。しかし「極端な例」を検討することは、メカニズムの徹底的な理解に役に立つことがある。

この節と次節は、1次元圧密条件に限定して、議論をすすめる。しかも分かりやすさのために、ときには1次元力学を用いて説明をしている(図7.2と図7.3)。これらは、もうひとつの「極端な例」にあたるかもしれない。現実の地盤工学問題では、1次元圧密変形の条件が満たされることは極端に稀であるし、1次元力学というのも理論の極端な単純化である。しかし、このような「極端な例」を検討することは、やはりメカニズムの徹底的な理解には役に立つ。

多次元圧密の検討は7.4節で行う。

さて、その粘土が初期にたとえかなり過圧密で、このため、たとえ初期に $M_s > M$ の状態にあっても、粘土は一般に過圧密の解消が構造の喪失よりは速いため、負荷に伴う塑性変形の進展によって M_s が下がり M よりも小さくなって(図7.1)、やがて

$$M_s p' < q < M p' \quad (7.1)$$

の応力状態に達するときがある。4章と5章で説明したようにこの状態では、塑性圧縮を伴う軟化が起こるが、この現象が地盤内で継続すると必ず遅れ圧密沈下が起こる。これをまず説明しよう。

軟化が進展すると、圧縮が進行してもやがて有効応力は下がるので、荷重が一定なら間隙水圧が新たに発生することになる。これを1次元力学を用いて図7.2に示した。間隙水圧は消散しないのだから、これが、圧密の遅れる原因になる。もちろん負荷が継続し、塑性変形がなおも進展すると、やがて構造の破壊は進展し、これにともない M_s は大きくなって M に近づいてゆくから、式(7.1)に書いた $M_s p' < q < M p'$ の状態はいつまでも続かずに、やがて

$$q < M_s p' < M p' \quad (7.2)$$

となってこの土は硬化に転ずる。式(7.2)の状態になれば、粘土は教科書などで知られた「剛性が正」の通常の圧密にもどる。だからもし式(7.1)の状態にあるときの圧密に「2次圧密」と名づけてしまうと、2次圧密のあとに1次圧密が起こることになる。

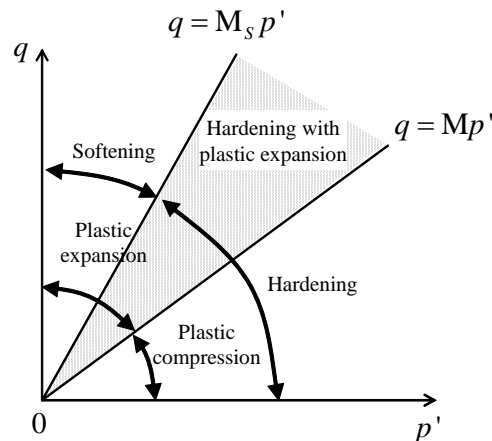


図 7.1 塑性圧縮を伴う軟化域

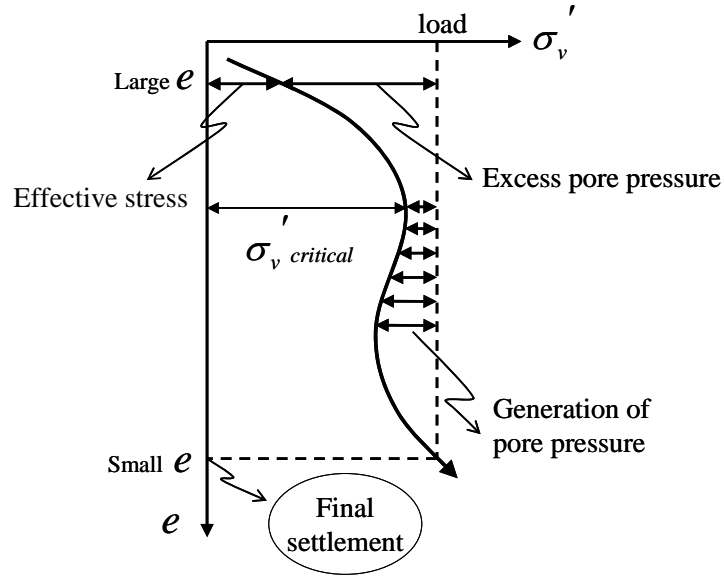


図 7.2 一定荷重下での軟化

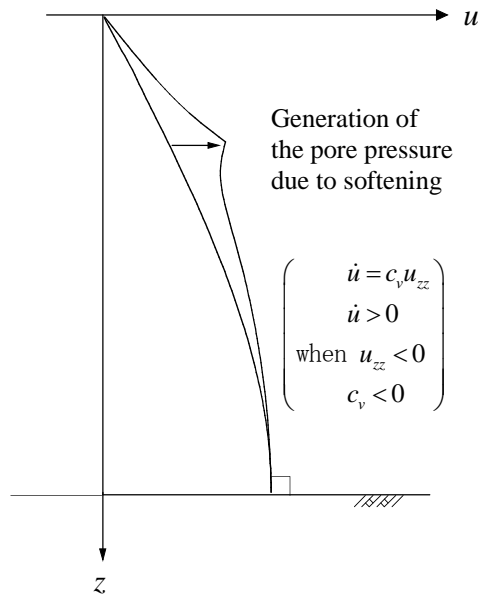


図 7.3 軟化による過剰間隙水圧の湧き出し

地盤内のある点の間隙水圧の時間変化は、過剰間隙水圧の場の勾配に依存するから、圧密は本質的には境界値問題に属する概念である。だからたとえ 1 次元力学とはいえ、「点」の挙動を描いた図 7.2 だけで間隙水圧の新たな発生とその消散などを説明するのは不十分である。このために、Terzaghi の 1 次元圧密式（これも 1 次元力学である）を使って、軟化が圧密に及ぼす影響を説明したのが図 7.3 である。この図にあるように、1 次元力学では圧密係数 c_v が負というのが軟化に当たる。軟化ばかりが続くと、図 7.3 のような局所化が進行しすぎて、計算は爆発してしまう。しかし式(7.2)と図 7.2 に示すように、粘土は必ずやがて硬化に転ずるから、幸いにもその心配はない。

圧密を境界値問題として見る必要性をもう少し続けて述べる。

粘土地盤のある深さで軟化が継続し、そこで間隙水圧の上昇が始まると、その土エレメントに隣り合う上下の土エレメントでは、間隙水圧分布は連続だから、間隙水圧がやはり上昇して、これらの土エレメントでは除荷が起こる。このようにして、圧密荷重を受ける地盤内の粘土は、たとえ変形が1次元状態で起こっていても、図7.2のような硬化・軟化・再硬化だけでなく、途中で除荷も受けて、応力状態は3次的に複雑になり、負荷履歴と有効応力経路も極めて複雑になる。しかも、このような有効応力経路は、地盤の上から下まで、すべて互いに異なるから、圧密終了後は、負荷履歴の違いを反映して、弾塑性体である地盤は深さ方向に不均質になる。私たちが現場でしばしば観測する堆積地盤の深さ方向に沿う間隙比その他の不均質性は、実はその地盤が堆積過程で上記のような圧縮をとまなう軟化を経験したのかどうかを示す、隠しようのない痕跡になっているのだ。

以上に述べた事柄を、1次元圧密の数値計算事例によって、確認しよう。計算はもちろん3次元構成則を用いた多次元圧密理論で1次元変形を計算するものである。厚さ2cmの粘土供試体の標準圧密試験をシミュレートする。図7.4に有限要素計算の諸条件を示す。表7.1は計算に使ったパラメータの値と初期値を示す。構造が発達した粘土だが、初期過圧密比が100というのは、サンプリングした後室内に持ち込んだときの状態を模擬している。図7.5は、この供試体を定率の荷重増加速度で圧密したときの、供試体全体としての荷重と間隙比の関係を示したものである。ここで言う間隙比とは、供試体の上から下までの間隙比の平均値である。つまり、排水端ではもっと圧縮が進んでいるし、非排水端では圧縮はあまり進んでいないときの、その平均値である。

表 7.1 材料定数と初期値

Elasto-plastic parameters	
Compression index $\tilde{\lambda}$	0.13
Swelling index $\tilde{\kappa}$	0.075
Critical state constant M	1.53
Void ratio at $p' = 98.1 \text{ kPa}$ on NCL N	1.97
Poisson's ratio ν	0.3
Evolution parameters	
Degradation parameter of overconsolidation state m	10.0
Degradation parameter of structure a ($b = c = 1.0$)	0.59
Initial conditions	
Initial void ratio e_0	1.19
Initial mean effective stress p_0' (kPa)	9.8
Initial value of R^* (R_0^*)	0.05
Initial overconsolidation ratio $1/R_0$	100.0
Permeability k (cm/sec)	7.8×10^{-9}

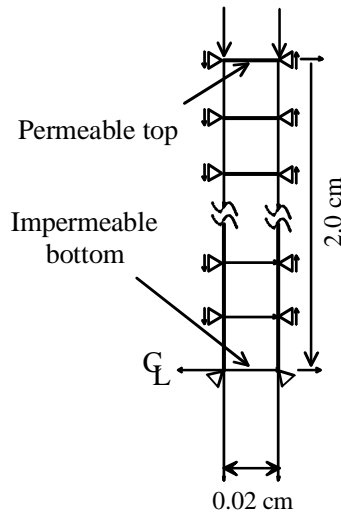


図 7.4 有限要素メッシュ

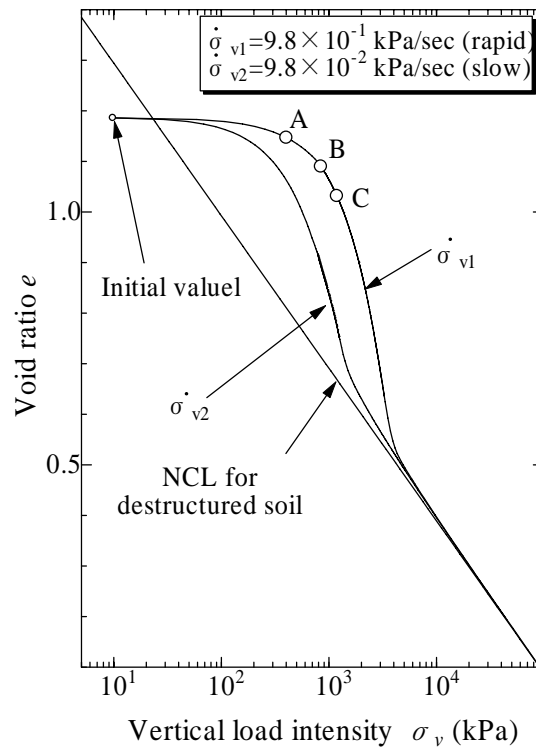


図 7.5 比体積～鉛直応力関係

図 7.5 では、速く载荷した方が圧縮曲線が右に出ている。载荷速度が速いと、排水が間に合わないことによる過剰水圧の上昇が起こり、同じ間隙比でも遅い载荷に比べより大きな荷重を支えることができる。図 7.5 は同じ土なのに载荷速度の違いによって異なる圧縮曲線があるように見えるが、これらが見かけのものであるのは、間隙からの水の排水にかかる抵抗、すなわち間隙水圧の上昇を考えると理解できる。そしてこのような挙動は、土骨格の圧縮率をダルシー則 (Darcy's law) が制御する水～土 2 相系問題を解けば、おのずと計算されてしまう。土骨格

の微小エレメントに関する Suklje の「アイソタック仮定」 (Suklje L., 1957) とは縁もゆかりもないので注意する。

図 7.5 の 3 つの荷重レベル A (392kPa)、B (833kPa)、C (1179kPa) まで速い載荷速度で荷重をかけて、そのあと荷重を一定にして通常の圧密試験に移る。荷重一定になってからの供試体上端の沈下量を時間に対してプロットしたものが、図 7.6 である。この計算例の場合、荷重レベル B のときに圧密沈下に著しい遅れが観測されている。荷重レベルが B の時の供試体内部の深さ方向に沿う過剰間隙水圧の等時曲線を図 7.7 に示す。

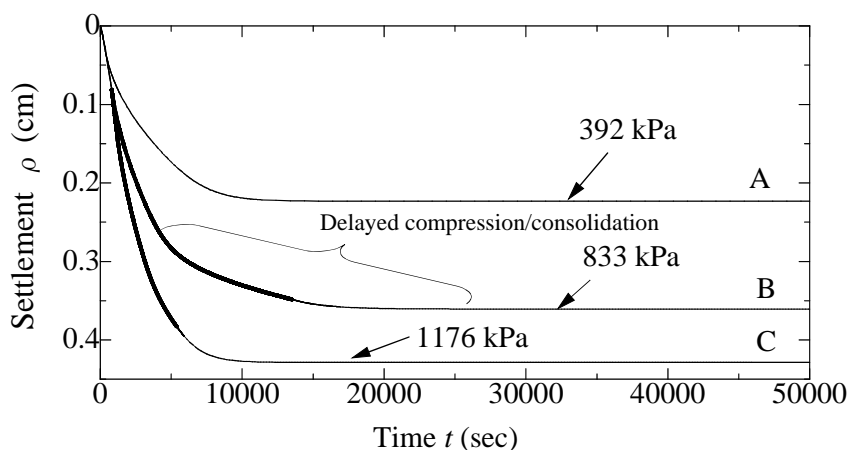


図 7.6 体積圧縮を伴った軟化による遅れ沈下
(図中太線は供試体内で軟化が生じている)

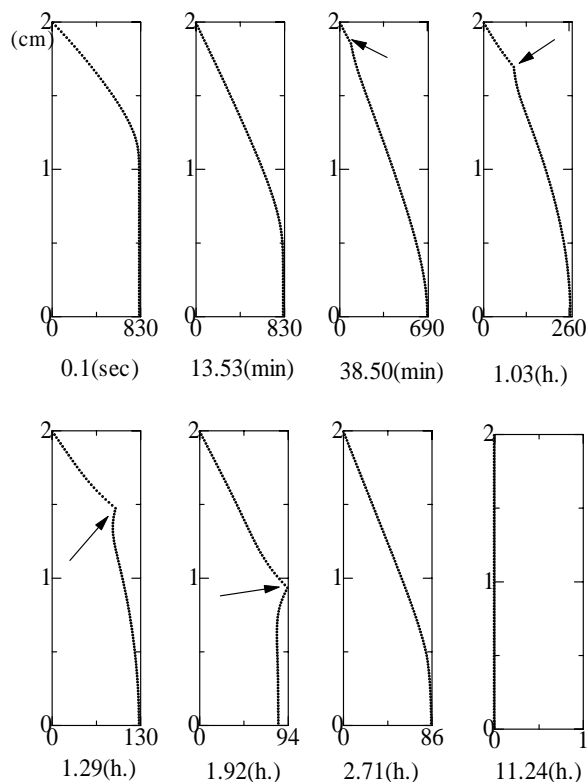


図 7.7 過剰間隙水圧の等時曲線 (kPa)

軟化によって間隙水圧が上昇する位置が、時間とともに供試体上部（排水端）から徐々に供試体下部（非排水端）に移動して行く様子と、過剰水圧の消散の遅れがこの図から見て取れる。図 7.8 は圧密終了後の粘土試料の不均質性の様子を、圧密試験前の基準配置に対して描いたものである。

図 7.5～7.8 の粘土では、荷重レベル A (392kPa) と荷重レベル B (833kPa) の間に、供試体内で軟化を生じさせる荷重のレベル (図 7.2 の $\sigma_v'_{critical}$) がある (この計算の粘土では 700kPa 前後)。荷重レベル B の荷重がもっとこの $\sigma_v'_{critical}$ に近いときは、圧密遅れはもっとひどくなる。これを図 7.9 に示す。この時の荷重は 785kPa である。アイソクロンは図 7.10 に示した。荷重レベル C のように大荷重の時は、図 7.6 のように軟化は圧縮の初期に起こり、もちろん構造の劣化/破壊による大圧縮は避けられないが、圧密遅れは少ない。

図 7.5 を見れば、荷重レベル A と荷重レベル B とはともに「圧密降伏荷重」に近いように見える。昔から、「圧密降伏荷重」を跨ぐあたりの荷重で「2次圧密」、「遅れ圧縮」が起こると言われていた。これは、土の骨格構造を破壊させて軟化現象を起こす荷重レベルが、構造の発達した過圧密粘土を圧密試験したときに観測される「圧密降伏荷重」に近いことから、出てきた経験則であると考えてよい。なお、土はいつでも降伏しているのだから (現応力はいつも下負荷面 subloading surface 上にあるから)、「圧密降伏荷重」という言葉は、見かけの降伏荷重を表す言葉で、力学的に厳密な言葉ではない。詳細は次節の図 7.16、図 7.17 でも説明する。

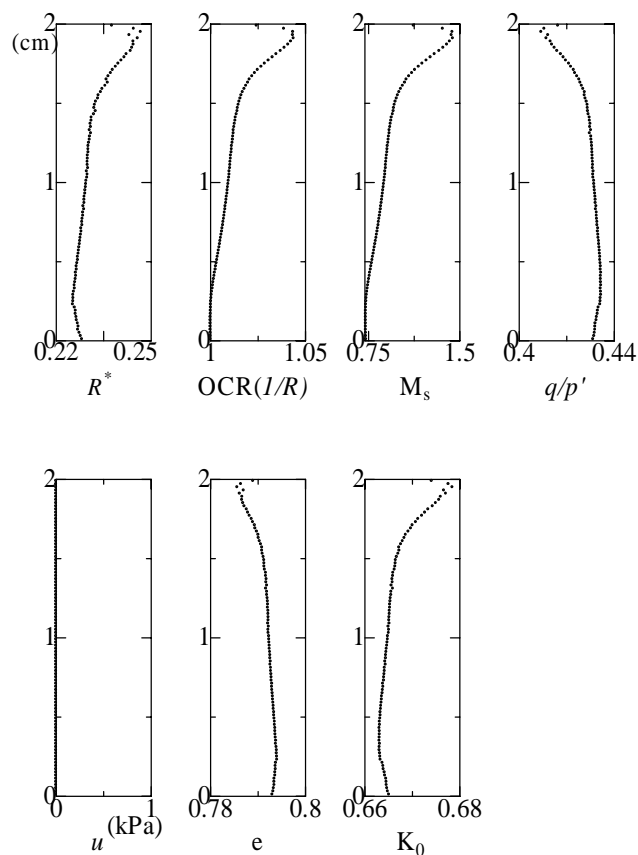


図 7.8 圧密後の供試体の不均質性

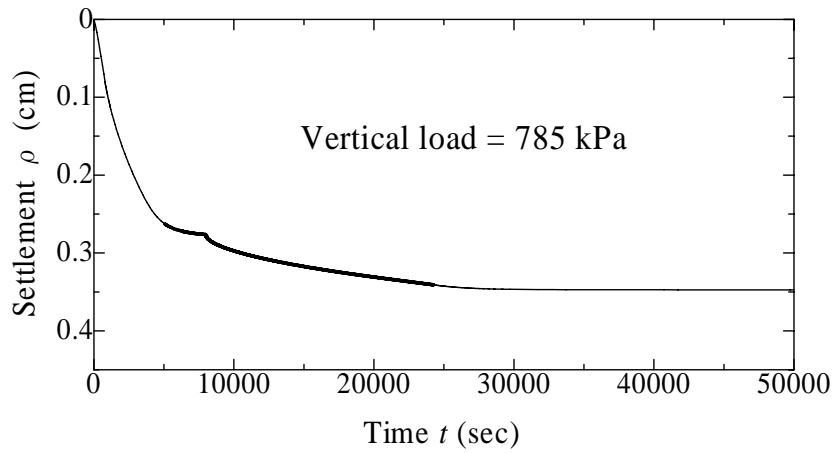


図 7.9 突然に起こる大沈下

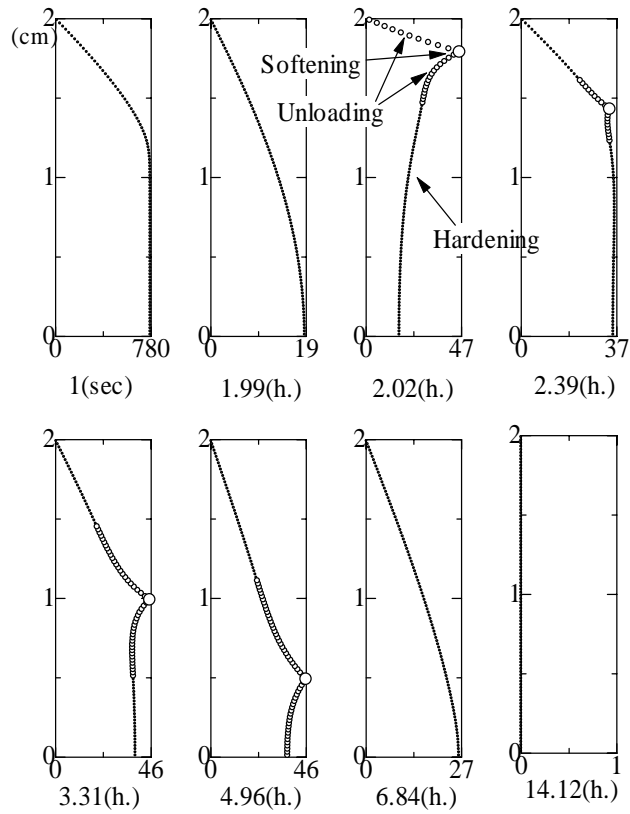


図 7.10 過剰間隙水圧の等時曲線 (kPa)

図 7.9 のように途中から圧密沈下がその速度を速める現象は、荷重が「圧密降伏荷重」に近いあたりで起こることは、これまでも報告されている。ラバル Labal 大学の Leroueil と Tavenas による観測 (Leroueil ., 1985) を図 7.11 に示す。この図は沈下速度の急増がある荷重レベルでのみ起こることを示している。日本の埋め立て地での沖積粘土地盤でも同種の観測が報告されている。

さて図 7.5 は、「この供試体を定率の荷重増加速度で圧密したときの、供試体全体としての荷重と空隙比の関係を示したものである」と述べた。それではこの粘土を無限にゆっくりと圧縮し、間隙水は荷重を一切支えず、厚さ 2cm の供試体が終始エレメントとして挙動するときの圧縮曲線はどのようなものであるか？これを図 7.5 と重ねて図 7.12 に示した。荷重レベル A (392kPa) と荷重レベル B (833kPa) の間に、供試体内で軟化を生じさせる σ_v' critical があるのがわかる。

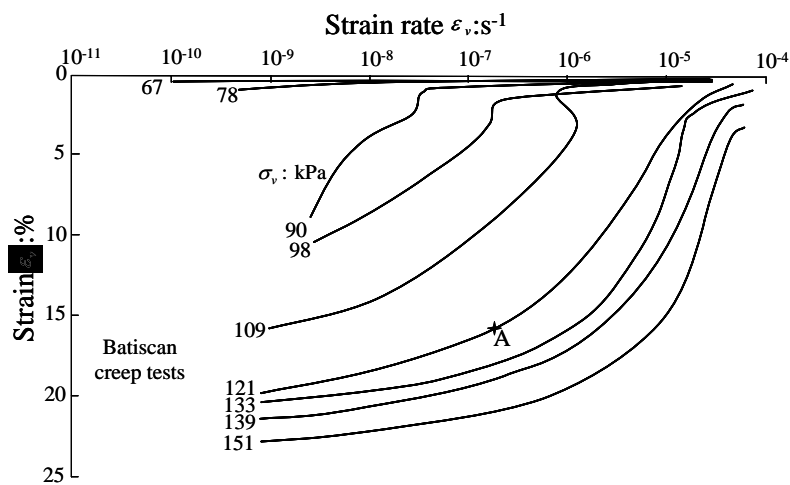


図 7.11 Leroueil と Tavenas による沈下速度の観測図 (afte Leroueil ., 1985)

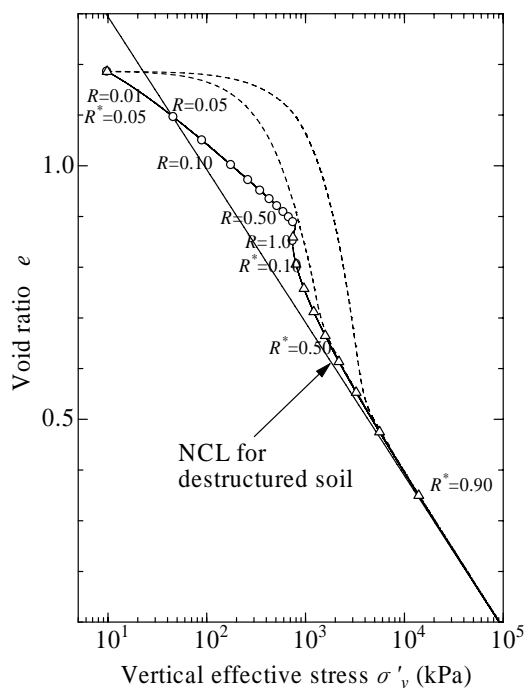


図 7.12 土のエレメント挙動

さて、式(7.1)の応力状態とそのときの圧縮をとまなう軟化（図 7.2）は、圧密/圧縮が遅れるもっとも極端な場合に見られる現象である。しかし圧密が遅れるために、必ずしもこのような軟化が絶対必要と言っているのではないので注意する。構造の発達した粘土でも、1次元圧縮の過程では必ずしも図 7.2 のような軟化や $\sigma_v'_{critical}$ が観測されるとは限らない、これを図 7.13 に示す。しかしこの場合でも、地盤の中で粘土が X→Y の荷重経路にあるときは、図 7.3 で圧密係数 c_v がほとんどゼロに近づくため、圧密遅れと著しい大圧縮が生じることには変わらない。そして X→Y の荷重レベルに「圧密降伏荷重」に近いのも同じである。だから昔から、「圧密降伏荷重」を跨ぐあたりの荷重で「2次圧密」、「遅れ圧縮」が起こると言われていたことが、図 7.2 でなく図 7.13 の場合でも理解できる。次節の図 7.16、図 7.17 でも再度説明する。

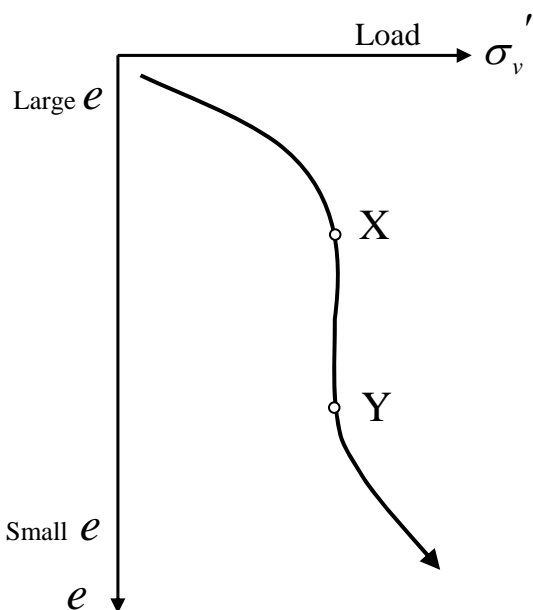


図 7.13 一定荷重下での様子

7.3 室内一次元圧密試験の限界

構造の発達した自然堆積粘土の乱さないサンプリングはたいそう難しい。また、室内での粘土供試体の圧密試験へのセットには必ず除荷を伴うから、供試体は超過圧密になってしまう。だから室内での再負荷の応力経路は、現地の負荷での応力経路とはまったく異なってしまう。自然堆積地盤の現位置での負荷過程を室内で再現することは、このようにして大変困難である。このような事柄は昔からよく知られていたが、現在では、「試料の乱れ」も含め、そのほとんどは計算によって詳しく再現することができる。本節では数値実験の計算結果を用いながら、室内圧密試験の限界について、主な点を順に見てゆく。

室内試験での粘土供試体の過圧密の状態

現位置での soil sampling と室内圧密試験機への粘土試料のセット、そしてその後の 1次元圧密試験を数値シミュレーションする (see Noda ., 2003a and Nakano .,2003b)。

図 7.14 に示す「現位置 (深さ 20m)」での粘土の初期状態は表 7.2 に示す。過圧密比 2.5 の構造の発達した粘土を想定している。この粘土の弾塑性パラメータと発展則パラメータは表 7.3 のように与えた。単位の塑性変形に対して過圧密の解消が構造の劣化よりも速く進む典型的な粘土のパラメータである。これが数値シミュレーションのすべての出発点である。

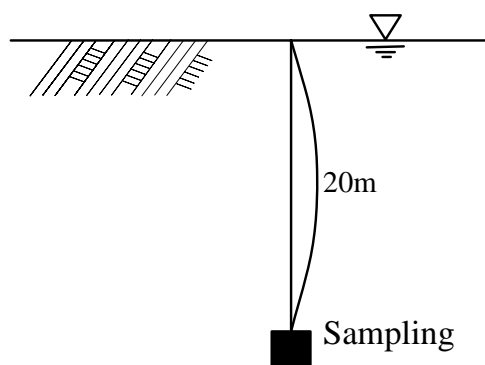


図 7.14 サンプリング

表 7.2 現位置での各状態量 (lightly overconsolidated clay)

Vertical effective stress σ'_v (kPa)	153.7
Coefficient of lateral pressure σ'_h/σ'_v	0.7
Overconsolidation ratio $1/R_0$	2.5
Value of R_0^*	0.1
Anisotropy $\zeta_0 = \sqrt{3/2\beta_0 \cdot \beta_0}$ (see APPENDIX A)	0.38

表 7.3 材料定数と初期値

Elasto-plastic parameters	
Compression index $\tilde{\lambda}$	0.131
Swelling index $\tilde{\kappa}$	0.06
Critical state constant M	1.2
Void ratio at $p' = 98.1\text{kPa}$ on NCL N	1.97
Poisson's ratio ν	0.1
Evolution parameters	
Degradation parameter of overconsolidation state m	5.0
Degradation parameter of structure a ($b = c = 1.0$)	1.73
Evolution parameter of β b_r (see APPENDIX A)	0.0001
Limit of rotation m_b (see APPENDIX A)	1.0
Permeability k (cm/sec)	7.8×10^{-9}

この粘土を非排水条件を厳密に守りながら等方応力状態に移す。この過程での有効応力経路は図 7.15 の A→A' で示される。図 7.15 で示した現位置での下負荷面は、異方性が導入された modified Cam-Clay model の降伏関数の形をしている。詳細は APPENDIX A に説明している。A→A' の経路はこの下負荷面の外側（非排水経路）に向かっていて、A→A' は除荷経路ではなく負荷経路である。つまり A→A' の間に塑性変形が進展し、少しだが構造の状態も過圧密比も現位置での状態から変化する。点 B での粘土試料の状態は表 7.4 のように計算される。表 7.2 と比較すると sampling 過程で試料少し乱されてしまっていることがわかる。

つぎにこの粘土試料を 1 次元圧密試験機にセットして、1 段階目の鉛直荷重まで吸水除荷すると、試料のとくに過圧密の状態は表 7.4 からさらに変化する。その程度は 1 段階目の鉛直荷重の大きさによって異なるが、それを表 7.5 に示す。

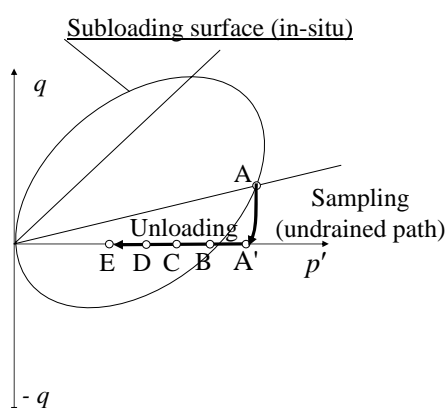


図 7.15 サンプリングと等方除荷

表 7.4 サンプリング後 (A') の各状態量

Vertical effective stress σ'_v (kPa)	121.4
Coefficient of lateral pressure σ'_h/σ'_v	1.07
Overconsolidation ratio $1/R$	2.3
Value of R^*	0.1
Anisotropy $\zeta = \sqrt{3/2\beta \cdot \beta}$ (see APPENDIX A)	0.38

表 7.5 初期応力に応じた 1 次元圧縮の初期値

Four different unloading stages	B	C	D	E
Initial vertical load (kPa)	78.5	39.2	19.6	9.8
Vertical effective stress σ'_v (kPa)	78.5	39.2	19.6	9.8
Coefficient of lateral pressure σ'_h/σ'_v	1.0	1.0	1.0	1.0
Overconsolidation ratio $1/R$	3.58	7.16	14.3	28.6
Value of R^*	0.10	0.10	0.10	0.10
Anisotropy $\zeta = \sqrt{3/2\beta \cdot \beta}$ (see APPENDIX A)	0.38	0.38	0.38	0.38

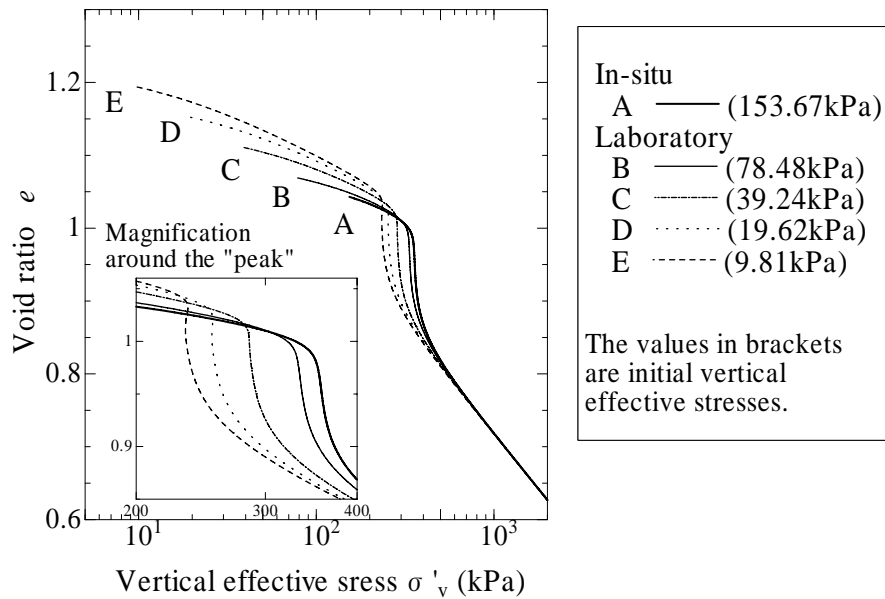


図 7.16 構成式での応答

表 7.5 の各状態を初期値にして、1 次元圧縮させたときの土のエLEMENTとしての応答は Super/subloading Yield Surface model の構成式からすぐに計算されるが、その結果を図 7.16 に示す。この図を、前節の図 7.2 と図 7.13 に沿って考察すると以下のことがわかる。

①表 7.5 に示した 4 つのどの粘土試料も、現位置での 1 次元圧縮応答を示すものはない。

②この粘土は原位置状態から 1 次元圧縮を受けても、図 7.13 の形だから圧縮をとまなう軟化は生じない。

③しかし、たとえば室内で 9.81kPa まで吸水除荷された試料は、室内 1 次元圧密試験では必ず圧縮をとまなう軟化現象を示す。図 7.16 中の拡大図を見れば、9.81kPa まで吸水除荷された試料は明らかに $\sigma'_{v, critical} = 230\text{kPa}$ あたりで明確な軟化を示している。これは 19.62kPa までの吸水除荷の試料でも同じで、ともに図 7.2 の形の圧縮を示している。

サンプリングと吸水除荷によって超過圧密にしてしまった試料は、室内 1 次元圧密試験では、現位置での粘土に比べて、より小さい圧密荷重で「2 次元圧密/遅れ圧縮」を示すことがわかる。いずれにせよ、室内 1 次元圧密試験が現位置での粘土の 1 次元圧縮応答に関する正確な情報を与えるものでないことは、よく知っておく必要がある。

なお、図 7.16 は構成式から計算したものであるが、通常の段階荷重による室内圧密試験で図 7.16 が正しく観察されるかどうかを、つぎに調べておこう。9.81kPa まで吸水除荷された試料（これが典型的な室内試験試料である）を用いた標準圧密試験の結果を図 7.17 に示す。図中黒点が段階荷重 24 時間放置による試験の結果である。（この図はもちろん実験を数値計算でシミュレートした計算結果であって本当の実験値ではない。標準圧密試験での段階荷重のシミュレーションは「1 秒で急速荷重、その後 24 時間放置」としている。）図 7.17 中に「カサグランデ Casagrande の方法」で「圧密降伏荷重」を求めているが、それは 230kPa となっている。 $\sigma'_{v, critical}$

ときわめて近い。この標準圧密試験結果と、先の図 7.16 の応答を対比したものが図 7.18 である。「圧密降伏荷重」の前後を除いては、標準圧密試験の精度はとてもよい。しかし、室内試験の図 7.17 や図 7.18 が、現位置での土の応答（図 7.16 の黒い太線）についての情報を与えるものではまったくないことが最も重要で、それはすでに上で述べたとおりである。

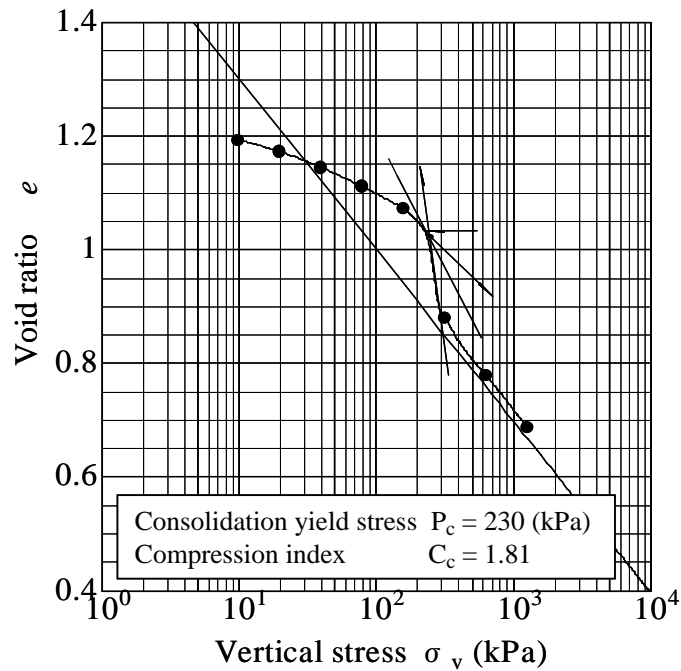


図 7.17 標準圧密試験

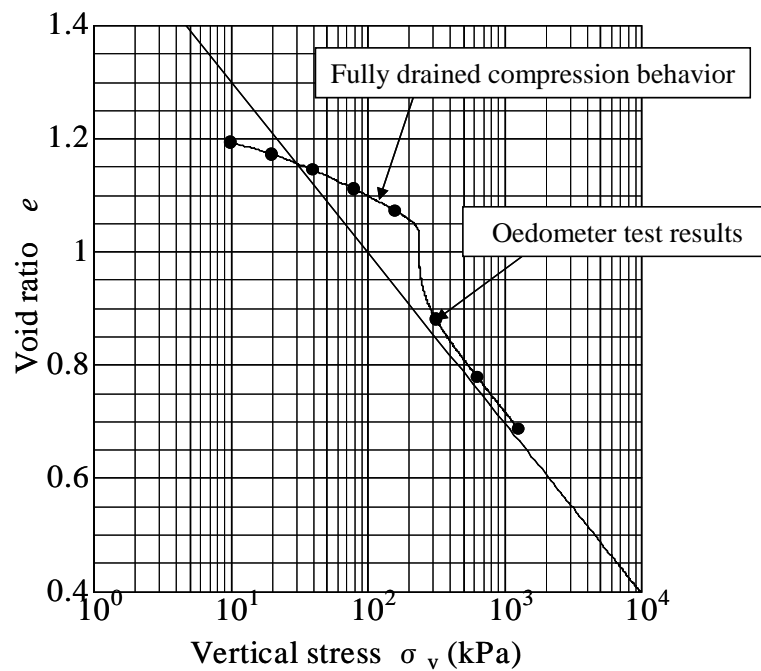


図 7.18 完全排水試験と標準圧密試験

Effect of soil disturbance during sampling and testing

もし乱された試料で室内圧密試験をすればどうなるか、数値シミュレーションを用いて、調べる。試料の攪乱は、非排水で等方応力状態に持ってきたあと、吸水除荷をする前の試料（図 7.15 B 点の試料）に繰り返し非排水せん断を与えて模擬した。その様子は図 7.19 に示す。こうして計算された攪乱後の試料の状態は表 7.6 に示す。攪乱の程度は、非排水せん断の繰り返し数を変えて、3 段階与えている。また、攪乱後前後 4 つの試料の 1 軸圧縮試験の結果は図 7.20 に示す。鋭敏比が約 2.5 の粘土を対象にして考察が進められていることがわかる。

以上の 4 つの粘土試料を 9.81kPa まで吸水除荷して標準圧密試験をすると、結果は図 7.21 のようになり、これは昔 Schmertmann が描いた想像図 (Schmertmann, J. H., 1953) (図 7.22) とよく似ている。攪乱によって「圧密降伏荷重」が低下し、圧縮曲線 $e-\log \sigma'_v$ curve の傾きが小さくなる。図 7.2 と図 7.13 で説明したことを思い出せば、図 7.21 は、

- ①試料を少しだけ攪乱すれば「2 次圧密/遅れ圧縮」が起こる荷重のレベルは低下するけれども、しかし
- ②十分に攪乱を与えて試料を練り返せば、「2 次圧密」や「遅れ圧縮」は起こりにくくなること、を示していることがわかる。

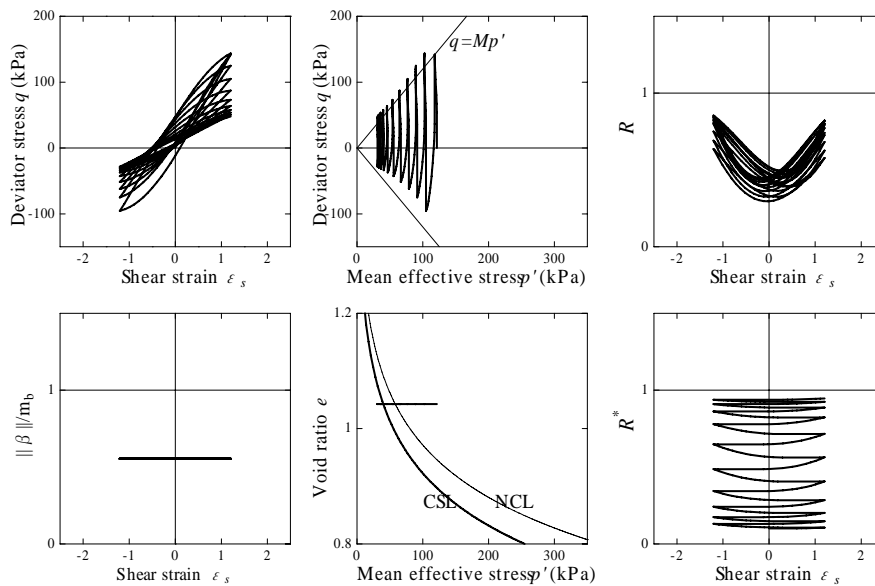


図 7.19 非排水繰り返しせん断による攪乱

表 7.6 繰り返し载荷後の各状態量

Number of cycles n	0	5	10	15
Vertical effective stress σ'_v (kPa)	121	91.5	69.7	51.7
Coefficient of lateral pressure σ'_h/σ'_v	1.0	1.0	1.0	1.0
Overconsolidation ratio $1/R$	2.32	2.96	3.48	3.36
Value of R^*	0.10	0.14	0.19	0.34
Anisotropy $\zeta = \sqrt{3/2\beta \cdot \beta}$ (see APPENDIX A)	0.7	0.7	0.7	0.7

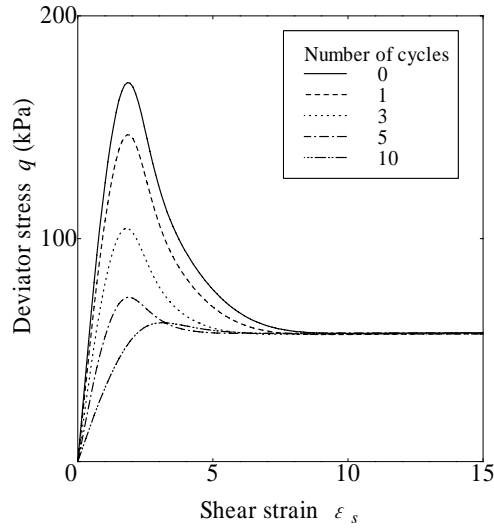


図 7.20 1 軸圧縮試験と鋭敏比

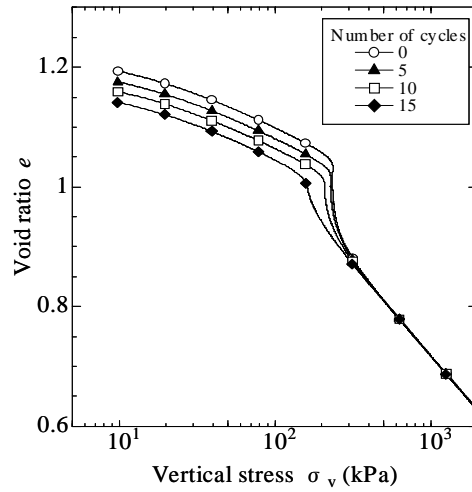


図 7.21 乱れによる 1 次元圧縮挙動の変化

(・印は標準圧密試験から観測されるデータであることを示す)

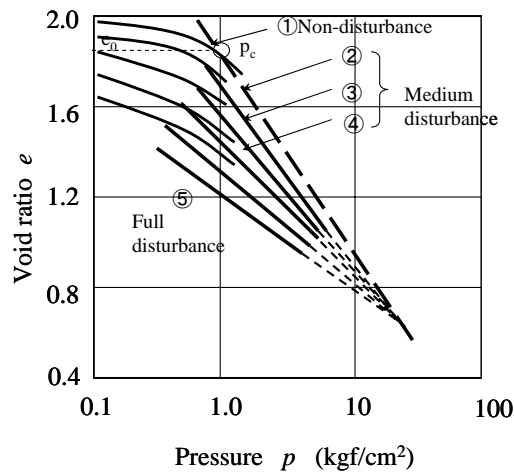


図 7.22 Schmertmann の想像図 (after Schmertmann, J. H., 1953)

7.4 多次元圧密の検討事例

常磐自動車道の神田地区での、盛土荷重による沖積粘土地盤の長期沈下の事例を図 7.23 に示す²¹⁾。盛土下部の地盤の soil profile は図 7.24 の中に示している。厚さ 15m の沖積軟弱粘土地盤の上に厚さ 8m の砂層が載っている。盛土の建設が完了後、20 年に亘って沈下が継続していて、現在でもまだ止まっていない。

この盛土は、実際には、沈下があまりにひどいので、盛土完成後もアスファルト舗装の overlay を繰り返し、このため、盛土荷重が建設当初に比べて、約 20% 増加している。

沈下～時間曲線はスムーズではなくて、図 7.23 中の矢印で示すように、幾度も途中で沈下速度を速めたり、また遅くなったりを繰り返している。しかしその間隔はしだいに長くなっている。図 7.24 には、圧密沈下が進行中に観測された間隙水圧の上昇の事例を示している。これは土骨格の塑性圧縮をともなう軟化に起因する。すなわち図 7.23 の圧密沈下は「構造を劣化させつつ進行する圧密」の事例のひとつと考えてよい。

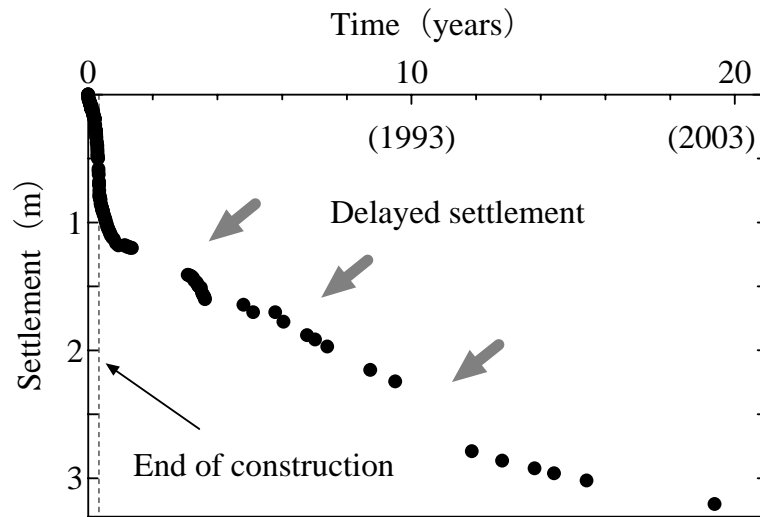


図 7.23 常磐自動車道における長期沈下

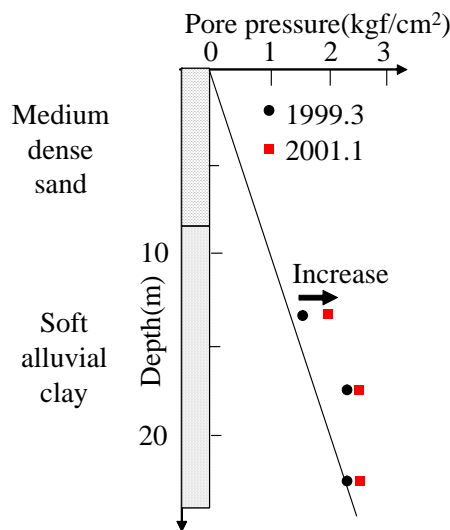


図 7.24 間隙水圧の上昇事例

この節では「構造を劣化させつつ進行する2次元平面ひずみ圧密」の計算を実施し、ここで見られる典型的な「2次圧密」や「遅れ圧縮」の特徴を調べる。

図 7.25 は地盤の有限要素図と盛土荷重の形を示している。図 7.26 は計算に用いた荷重～時間関係を示す。10mの高さの盛土を120日で建設し、その後は荷重を一定に保っている。盛土材料の単位体積重量は 17kN/m^3 としている。図 7.25 と図 7.26 とは、図 7.23 の盛土と地盤に合わせている。但しアスファルト舗装の over lay による荷重増加は考慮していないので注意する。

表 7.7 は、計算に用いた土質定数の一覧表である。図 7.27 は地盤の初期条件を示したものである。砂は典型的な medium dense sand であるとして、初期過圧密比は5にしている。粘土は構造の発達した初期過圧密比が3の自然堆積粘土であるとしている。表 7.7 と図 7.27 は著者らが想定したものであって、必ずしも図 7.23 のサイトの地盤とその初期条件を厳密に調査して得られたものではない。

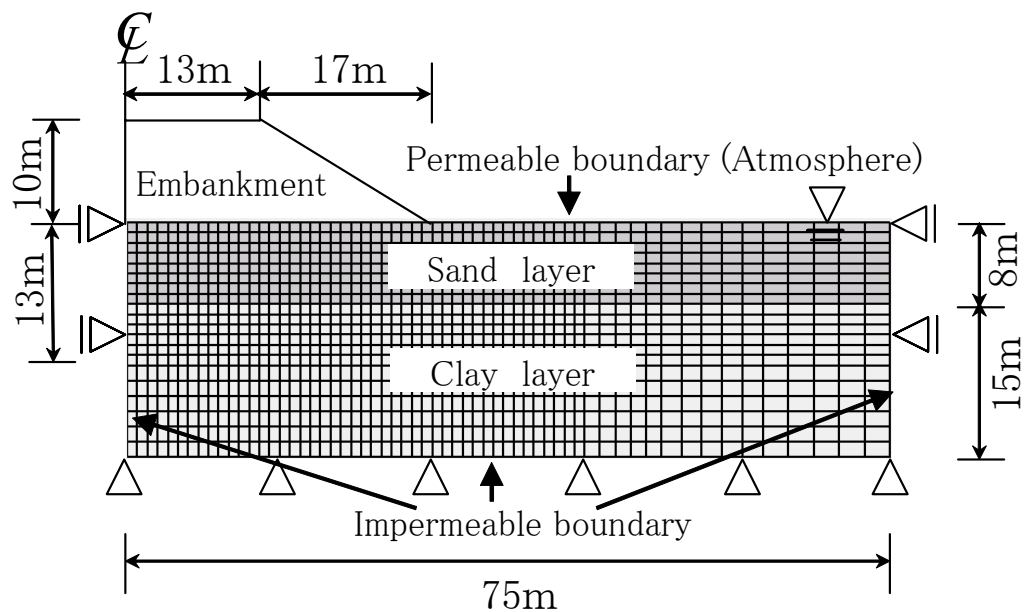


図 7.25 地盤の境界条件

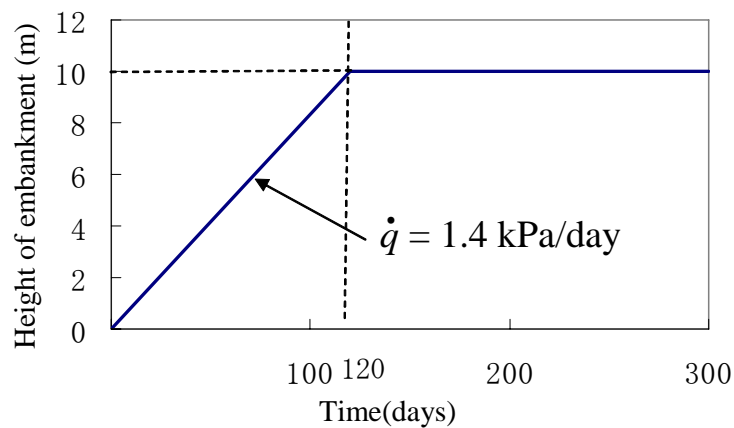


図 7.26 荷重～時間関係

表 7.7 材料定数と初期値

Elasto-plastic parameters	Clay	Sand
Compression index $\tilde{\lambda}$	0.25	0.042
Swelling index $\tilde{\kappa}$	0.13	0.012
Critical state constant M	1.20	1.08
Void ratio at $p'=98.1\text{kPa}$ on NCL N	1.97	1.99
Poisson's ratio ν	0.2	0.3
Evolution parameters		
Degradation parameter of overconsolidation state m	7.0	0.04
Degradation parameter of structure a ($b=c=1.0$)	1.25	1.5
Evolution parameter of β b_r (see APPENDIX A)	10^{-3}	0.51
Limit of rotation m_b (see APPENDIX A)	1.0	0.5
Permeability k (cm/sec)		
	7.4×10^{-8}	4.1×10^{-2}
Density of soils ρ_s (t/m^3)		
	2.60	2.65

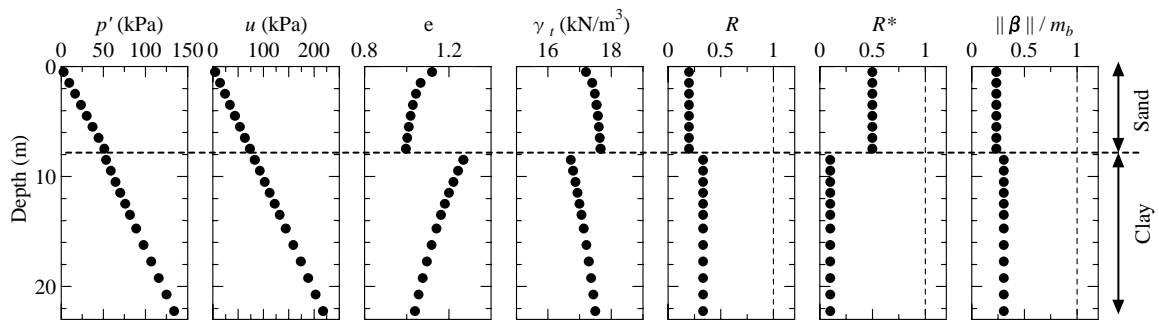


図 7.27 各物性値の初期分布

2次元平面ひずみの圧密計算の結果は図 7.28 と図 7.29 に示す。圧密沈下の計算は百年先まで実行した。図 7.29 は時間を log scale で表している、内容は図 7.28 と同じである。沈下が進行中に沈下速度が急変したりする様子は、図 7.23 の観測と極めてよく似ている。圧密沈下が進行中に観測される間隙水圧の上昇は図 7.28、7.29 の中に矢印で示している。

構造の発達した自然堆積粘土の圧密沈下は、決して exponential curve のようにスムーズに進行するのではない。構造の劣化が進行性破壊のように地盤内に広がってゆく。これは図 7.30 に示した。このために沈下の曲線はギクシャクとする。

図 7.28 と図 7.29 は圧密沈下の終了に百年以上かかっている。図 7.23 の実際の地盤でも、沈下はまだまだ継続すると考えられる。

このような「2次圧密」や「遅れ圧縮」は、盛土荷重の大きさがある閾値を越えたためであることは、7.3節までの1次元圧密の考察からも、容易に想像がつく。図 7.28, 7.29 には盛土高さが 6m のときの圧密沈下の様子を破線で示している。盛土荷重が小さい時は「2次圧密」や「遅れ圧縮」は観測されない。発泡スチロール EPS などによる軽量盛土は「2次圧密」や「遅れ圧縮」の防止に極めて有効であることが分かる。

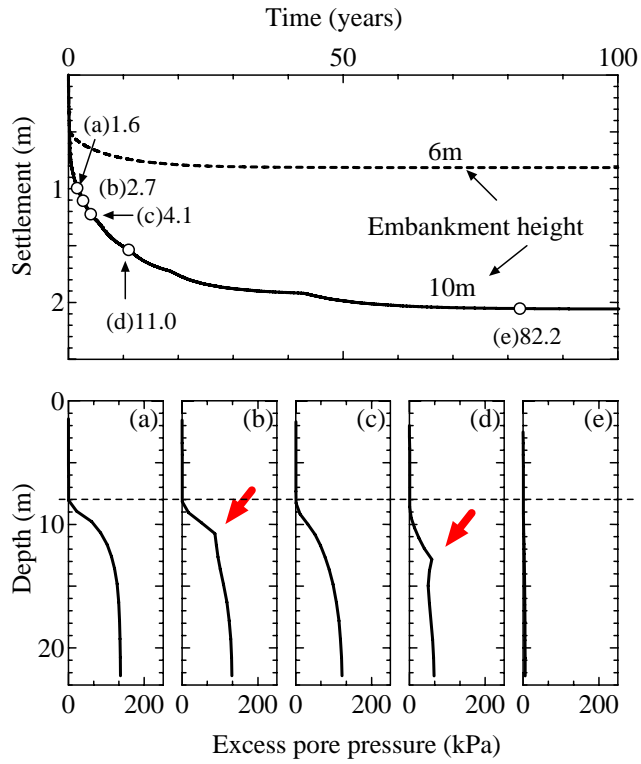


図 7.28 時間～沈下関係

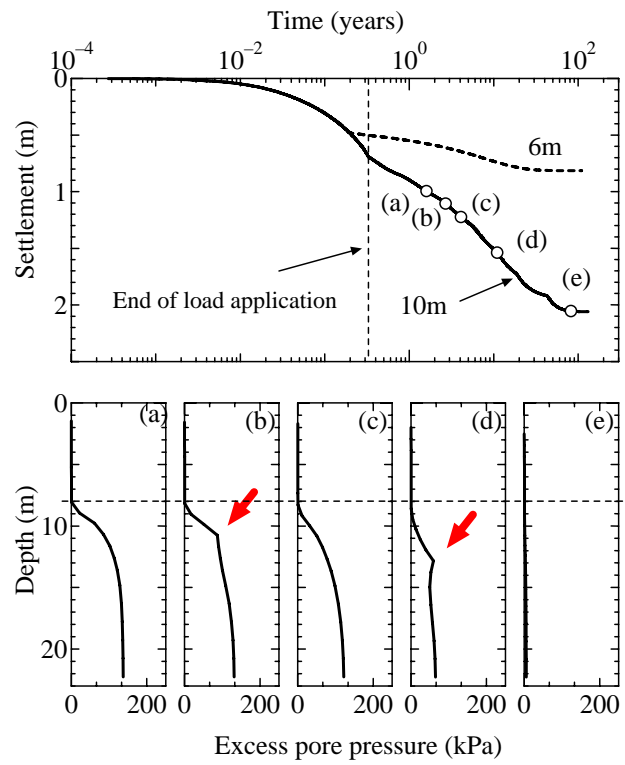


図 7.29 時間～沈下関係 (log scale)

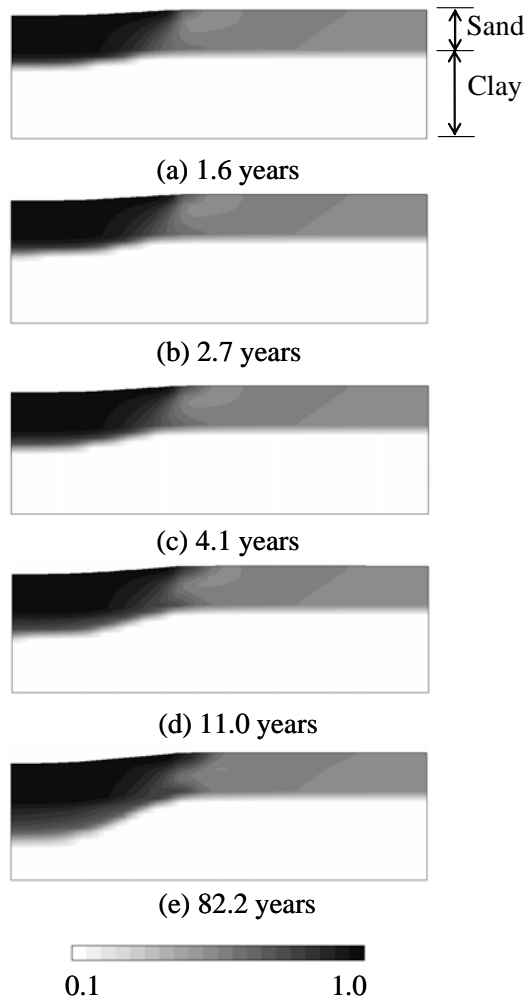


図 7.30 骨格構造の地盤内での進行性破壊の様子

図 7.24 のように、粘土層の上に厚い砂層が堆積していたことも、図 7.23 のような miserable な沈下を起こしたひとつの原因になっている。この砂層が、押さえ盛土の役割を果たし、高さ 10m の盛土という大荷重にもかかわらず軟弱粘土層のすべり破壊を起こさせなかったからである。もし砂層が薄くて、すべり破壊が起こっていれば、別の工法が採用され、図 7.23 のような沈下は起こっていなかったかもしれない。これらのことはすべて計算で確かめているが、詳細はここでは省略する (see Noda ., 2003b)。

8 結論

(1) 自然堆積粘土や砂の「構造」と「過圧密」の作用ないし働きを弾塑性学によって記述するために、Cam-Clay model に上負荷面 superloading yield surface と、橋口による下負荷面 subloading yield surface を導入した。この新しいモデル, Super/subloading Yield Surface model, では、これら二つの負荷面の形は、Cam-Clay model の yield surface と応力空間の原点に関して相似としている。そしてこのモデルでは、構造の状態は、上負荷面と Cam-Clay model の yield surface との相似比で表され、過圧密の状態（過圧密比）は上負荷面と下負荷面の相似比で表される。

構造の状態も過圧密の状態も、ともに土の「力学状態」であり、だから同じ土でも負荷と除荷によってこれらの状態は変化する。

Super/subloading Yield Surface model はつぎの二つの力学挙動を記述することができる。すなわち、①構造の劣化ないし破壊は塑性変形の進展とともに進行し、ついにはどの土も完全に乱された状態に達する。②過圧密状態の喪失も塑性変形の進展とともに進行し、ついにはどの土も正規圧密状態に達する。さらにモデルは③構造の劣化は塑性体積圧縮を増加させる方向に作用し、④過圧密の喪失は塑性堆積膨張を増加させる方向に働く、ことを説明する。

新しいモデルではさらに、 $p' \square q$ 応力空間を硬化領域と軟化領域に分ける閾（しきい）線 $q = M_s p'$ の係数 M_s は塑性変形とともに変化する変数で、このため土は硬化しつつ膨張することもあるし、軟化しつつ圧縮することもありうることを示される。

以上の新しいモデルの特徴は、このモデルが、これまで粘土と砂の圧縮・せん断試験で知られていたほとんどすべての力学特性を記述しうることを示す。

(2) 同じ塑性変形の進展に対して、粘土では、過圧密状態の喪失が構造の劣化より速く進行し、砂では構造の劣化ないし破壊のほうが過圧密状態の喪失よりも速く進行する。これらは、構造の状態と過圧密の状態の二つの発展則の速度のパラメータを操作して制御できる。このような砂と粘土の区別をすれば、砂と粘土のこれまでに知られていたほとんどすべての力学応答の違いを、ほとんど完全に説明することができる。

(3) ゆるい砂の繰り返しせん断による急激な圧縮と高密度化は、微小な塑性変形でも構造の破壊が急速に進行することによって説明される。ゆるい砂の繰り返しせん断による過圧密状態の蓄積は、微小な塑性変形では過圧密状態の喪失がほとんど進行しないことによって説明される。

(4) 構造の発達した粘土の「2次圧密」や「遅れ圧縮」は、過圧密状態がほとんど喪失したあとの、残存する構造の劣化によって説明される。過圧密状態がほとんど喪失しているので、残存する高位の構造は M_s を小さくして、このために、1次元圧縮状態で見られるような低い応力比のもとでさえも、塑性圧縮をとまなう軟化を可能にする。このために間隙水圧の消散が著しく遅れ、圧密沈下は長期に継続することになる。

なお、誘導異方性の発展則もとりに入れた、客観性を満たす有限変形に対応するこの新しいモデルの詳細は APPENDICES A～D に与えた。

参考文献

- Asaoka, A., Nakano, M and Noda, T. 1994. Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol.34, No.1: 91-106.
- Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. 1998. Super loading yield surface concept for the saturated structured soils, *Proc. of the fourth European conference on numerical methods in geotechnical engineering-NUMGE98*: 232-242.
- Asaoka, A. 2000. Recent topics in soil-water coupled problems, *J. of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol.85: 46-49.
- Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. 2000a. Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior, *Soils and Foundations*, No.40, Vol.2: 99-110.
- Asaoka, A., Nakano, M., Noda, T. and Kaneda, K. 2000b. Delayed compression/consolidation of naturally clay due to degradation of soil structure, *Soils and Foundations*, No.40, Vol.3: 75-85.
- Asaoka, A., Nakano, M and Noda, T. 2000c. Elasto-plastic behavior of structured overconsolidated soils, *J. Appl. Mech. JSCE*, Vol.3: 335-342.
- Asaoka, A., Noda, T., Yamada, E., Kaneda, K. and Nakano, M. 2002. An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils, *Soils and Foundations*, Vol.42, No.5: 47-57.
- Bishop, A. W. and Henkel, D. J. 1962. The Measurement of Soil Properties in the Triaxial Test, *Edward Arnold*, London.
- Castro, G. 1969. Liquefaction of sands, *ph.D. Thesis, Harvard Soil Mech. Series*, No.81.
- Green, A. E. and Naghdi, P. M. 1965. A general theory of an elastic-plastic continuum, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol.18: 251-281.
- Hashiguchi, K. 1978. Plastic constitutive equations of granular materials, *Proc. of US-Japan Seminar on Continuum Mechanics and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials (Cowin, S.C. and Satake, M. eds.)*, Sendai, JSSMFE: 321-329.
- Hashiguchi, K. 1989. Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.25: 917-945.
- Hashiguchi, K. and Chen, Z. -P. 1998. Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.22: 197-227.
- Henkel, D. J. 1960. The shear strength of saturated remolded clay, *Proc. of Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils at Boulder, Colorado*: 533-540.
- Leroueil, S., Kabbaj, M., Tavenas, F. 1985. Stress-strain-strain rate relation for the compressibility of sensitive natural clays, *Geotechnique*, Vol.35, No.2: 159-180.
- Leroueil, S. 1996. Compressibility of clays; fundamental and practical aspects, *J. of Geotech. Engrg.*, ASCE, Vol.122, No.7: 534-543.
- Muir Wood, D. 1995. Soil behavior and critical state soil mechanics, Cambridge.
- Nakano, M. and Nakai, K. 2003a. Description of undrained behaviors of sands with some kinds of grain size distributions based on soil skeleton structure at work, *Soils and Foundations*, under contribution.

- Nakano, M., Nakai, K., Noda, T. and Asaoka, A. 2003b: Simulation of shear and one-dimensional compression behaviors of natural deposited clays by Super/subloading yield surface model, *Soils and Foundations*, under contribution.
- Noda, T., Yamada, S. and Asaoka, A. 2003a. Effects of destructuration and overconsolidation during sampling of clay on the subsequent mechanical behavior, *Soils and Foundations*, under contribution.
- Noda, T., Yamada, E., Nakano, M., Tashiro, M. and Asaoka, A. 2003b. Delayed consolidation behavior of naturally deposited clayey soil under embankment loading, *Soils and Foundations*, under contribution.
- Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Wroth, C. P. 1958. On the yielding of soils, *Geotechnique*, Vol.8: 22-53.
- Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. 1963. Yielding of clays in state wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13: 211-240.
- Roscoe, K. H., and Burland, J. B. 1968. On the generalized stress-strain behavior of 'wet' clay, in J. Heyman and F. A. Leckie (eds.), *Engineering plasticity* (Cambridge: Cambridge University Press): 535-609.
- Schmertmann, J. H. 1953. Estimating the True Consolidated Behavior of Clay from Laboratory Test Results, *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.*: 79-311.
- Sekiguchi, H. and Ohta, H. 1977. Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive Equations of Soils (Proc, 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session9)*, Tokyo: 229-238.
- Suklje, L. 1957. The analysis of the consolidation process by the isotaches method, *Proc of the IV-th I. C. S. M. F. E.*, Vol.1: 200-206.
- Tatsuoka, F. and Kohata, Y. 1995. Stiffness of hard soils and soft rocks in engineering applications, *Proc. of 1st int. conf. on Pre-failure deformation characteristics of geomaterials*, Sapporo, Japan, Vol.2: 947-1063.

付録 A 回転硬化上・下負荷面修正カムクレイモデル

A-1 繰返し正規圧密土の弾塑性応答 ～ η^* を用いた修正カムクレイモデル～

十分に繰返された土の弾塑性応答は、修正カムクレイモデルに従うとする。限界状態の土質力学において、応力比 η は一般に次のように定義される。

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}} \quad (\text{A-1})$$

しかしここでは、塑性ポテンシャルの回転を表現するために、 η に代わって関口・太田 (1977) が提案した次の不変量を用いる。

$$\eta^* = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}} \quad (\text{A-2})$$

式(A-1), (A-2)より

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{S}}{p'}, \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}' + p' \boldsymbol{I}, \quad p' = -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{T}' \quad (\text{A-3})$$

ここで \boldsymbol{I} と \boldsymbol{T}' はそれぞれ、単位テンソル、有効コーシー応力テンソル（引張が正）で、 $\boldsymbol{\beta}$ は回転硬化変数と呼ばれるテンソルである。 η^* の導入により、修正カムクレイの塑性ポテンシャルの形状は次式で与えられる。

$$f(p', \eta^*) = MD \ln \frac{p'}{\tilde{p}'_0} + MD \ln \frac{M^2 + \eta^{*2}}{M^2} = \varepsilon_v^p \quad (\text{A-4})$$

ここで D （ダイラタンシー係数）は材料定数であり、式(A-4)の \tilde{p}'_0 は修正カムクレイ降伏面上の平均有効応力であり、初期状態における平均有効応力 p'_0 と同じである。初期間隙比を e_0 としたとき、 D は $\tilde{\lambda}$ 、 $\tilde{\kappa}$ 、 M によって次のように定義される。

$$D = \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M(1 + e_0)} \quad (\text{A-5})$$

なお、 N と Γ の関係は

$$N - \Gamma = (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 \quad (\text{A-6})$$

で与えられて、オリジナルカムクレイモデルのそれとは異なる。修正カムクレイモデルのエッセンスについては、Muir Wood (1995)も参照にされたい。

以上のように、 η の代わりに η^* を用いて異方性を持つ土の塑性変形を記述する。この異方性の発展は、塑性変形の進展に伴って起こるため（応力誘導異方性）、式(A-3)の $\boldsymbol{\beta}$ の共回転速度をHashiguchi and Chen (1998)に従って、塑性ストレッチングの関数として与える（ $\boldsymbol{\beta}$ の発展則）。詳細はA-4述べる。

A-2 構造を有する過圧密土の弾塑性モデルの定式化

ここからは、客観性を有する有限変形理論に基づき定式化を行う。

自然堆積した土は一般に構造を有していて、過圧密状態にあると考え、式(A-4)に上・下負荷面概念を導入する。一般に、現応力状態は下負荷面上にあると考えられるため、下負荷面は以

下のように定式化される。

$$\begin{aligned} & f(p', \eta^*) + MD \ln R^* - MD \ln R + \int_0^t J \text{tr} \mathbf{D}^p d\tau \\ & = MD \ln \frac{p'}{\tilde{p}'_0} + MD \ln \frac{M^2 + \eta^{*2}}{M^2} + MD \ln R^* - MD \ln R + \int_0^t J \text{tr} \mathbf{D}^p d\tau = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

ここに \mathbf{D}^p はストレッチングテンソル \mathbf{D} の塑性成分であり、 \mathbf{D} と \mathbf{D}^p は共に引張を正とする。上式の J は変形勾配テンソル \mathbf{F} のヤコビアンであり、比体積を用いて以下のように表現できる。

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{1+e}{1+e_0} \quad (\text{A-8})$$

$1+e$ と $1+e_0$ はそれぞれ、現時刻 (時刻 t) と初期時刻 (時刻 $t=0$) における比体積である。

R は過圧密状態(その逆数 $1/R$ は過圧密比)を、 R^* は構造の程度を表す。数学的には R は上負荷面に対する下負荷面の大きさの比で、

$$R = \frac{p'}{\bar{p}'} = \frac{q}{\bar{q}}, \quad 0 < R \leq 1 \quad \text{and} \quad \bar{\eta} (= \frac{\bar{q}}{\bar{p}'}) = \eta \quad (\text{A-9})$$

で与えられる。同様に R^* についても上負荷面に対する正規降伏面の大きさの比を表し、次式で与えられる。

$$R^* = \frac{\tilde{p}'}{\bar{p}'} = \frac{\tilde{q}}{\bar{q}}, \quad 0 < R^* \leq 1 \quad \text{and} \quad \tilde{\eta} (= \frac{\tilde{q}}{\tilde{p}'}) = \bar{\eta} (= \eta) \quad (\text{A-10})$$

上負荷面と修正カムクレイ面はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} & f(\bar{p}', \bar{\eta}^*) + MD \ln R^* + \int_0^t J \text{tr} \mathbf{D}^p d\tau \\ & = MD \ln \frac{\bar{p}'}{\tilde{p}'_0} + MD \ln \frac{M^2 + \bar{\eta}^{*2}}{M^2} + MD \ln R^* + \int_0^t J \text{tr} \mathbf{D}^p d\tau = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

(上負荷面)

$$f(\tilde{p}', \tilde{\eta}^*) + \int_0^t J \text{tr} \mathbf{D}^p d\tau = MD \ln \frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}'_0} + MD \ln \frac{M^2 + \tilde{\eta}^{*2}}{M^2} + \int_0^t J \text{tr} \mathbf{D}^p d\tau = 0 \quad (\text{A-12})$$

(正規塑性ポテンシャル面)

軸対称条件下では、 p' - q 応力空間において上・下負荷面及び正規面は図 A-1 の様に描くことができる。

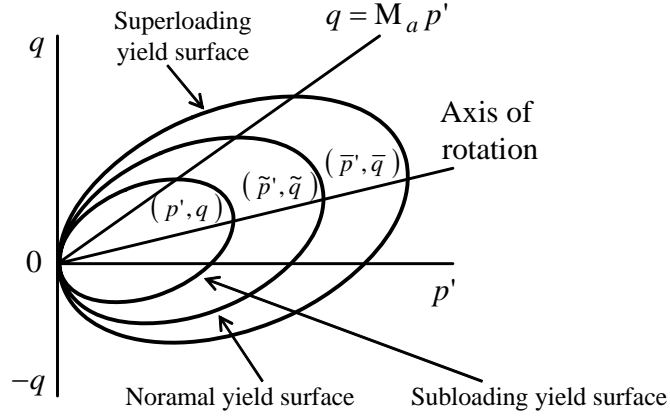


図 A-1 3つの負荷面

A-3 関連流れ則と適合条件式

土の塑性変形は、次式に示す関連流れ則に従うと仮定する。

$$\mathbf{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \quad (\lambda > 0) \quad (\text{A-13})$$

ここで λ は塑性乗数である。塑性論に従うと、Prager の適応条件式

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \text{Jtr} \mathbf{D}^p + \text{MD} \frac{\dot{R}^*}{R^*} - \text{MD} \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (\text{A-14})$$

により後続塑性ポテンシャル面の大きさは決定される。ここで \mathbf{T}' と $\boldsymbol{\beta}$ の共回転速度である

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\beta} \quad (\text{A-15})$$

$$\dot{\mathbf{T}}' = \dot{\mathbf{T}}' + \mathbf{T}' \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{T}' \quad (\text{A-16})$$

を式(A-14) に導入すると

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \text{Jtr} \mathbf{D}^p + \text{MD} \frac{\dot{R}^*}{R^*} - \text{MD} \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (\text{A-17})$$

となる(詳細は付録 B に示す)。 $\dot{\mathbf{T}}'$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ は Green-Naghdi (1965) の客観性を有する速度テンソルで、 $\boldsymbol{\Omega} = \dot{R} R^T$ の R は回転テンソルである。上付き “T” は転置作用を表す。

A-4 R, R^*, β の発展則

R と R^* の発展則は塑性ストレッチングの正のスカラー関数として、次式のように物質時間微分が定義される。塑性変形の進展尺度としては、塑性ストレッチングのノルム $\|\mathbf{D}^p\|$ を適用する。

R の物質時間微分は次式で表す。

$$\dot{R} = \text{JU} \|\mathbf{D}^p\| \quad (\text{A-18})$$

ここで正のスカラー関数 U は R の関数であり次の条件を満たす。

$$U(0) = \infty \quad \text{and} \quad U(1) = 0 \quad (\text{A-19})$$

本研究では Hashiguchi(1989)に従い、

$$U = -\frac{m}{D} \ln R \quad (\text{A-20})$$

と定式化する。ここで m は正の材料定数(正規圧密土化指数)である。

一方、本文 6 章以降の計算で用いた R^* の発展則は粘土と砂について、塑性測度を変えて与えている。粘土は

$$\dot{R}^* = JU^* \|\mathbf{D}^p\| \quad (\text{A-21})$$

また、砂は

$$\dot{R}^* = JU^* \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}_s^p\| \quad (\text{A-22})$$

としている。ここで $\mathbf{D}_s^p = \mathbf{D}^p - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D}^p \mathbf{I}$ 。 U^* はともに R^* の正のスカラー関数であり、 U^* の満たすべき条件が

$$U^*(0) = 0 \quad \text{and} \quad U^*(1) = 0 \quad (\text{A-23})$$

であることよりベータ関数を用いて

$$U^* = \frac{a}{D} R^{*b} (1 - R^*)^c \quad (\text{A-24})$$

と定式化する。 a, b, c は正の材料定数(構造劣化指数)であり、本研究では簡単のため $b = c = 1.0$ として扱う。

β の発展則は、客観性を有する物質時間微分 $\dot{\beta}$ を次の 4 つの仮定に基づき定式化する (Hashiguchi and Chen, 1998)。

1) 異方性の発展は $\|\mathbf{D}_s^p\|$ の進展に従う。ここで $\mathbf{D}_s^p = \mathbf{D}^p - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D}^p \mathbf{I}$ 。

2) 塑性ポテンシャルの回転には

$$\|\dot{\beta}\| = m_b \quad (\text{A-25})$$

で定義される限界が在り、 Hashiguchi and Chen (1998) に倣って“回転硬化限界面”または単に“回転限界面”と呼ぶ。

3) 回転硬化変化率 $\dot{\beta}$ は次式で定義されるテンソルと同じ方向を有する。

$$\eta_b = m_b \frac{\hat{\eta}}{\|\hat{\eta}\|} - \beta \quad (\text{A-26})$$

4) 異方圧密過程のように、 $\eta =$ 一定の単調載荷の場合には、 β は η に漸近し $\|\hat{\eta}\| = 0$ となる。以上の結果、 $\dot{\beta}$ は次のように定式化される。

$$\dot{\beta} = J \frac{br}{D} \sqrt{\frac{2}{3}} \|D_s^p\| \|\hat{\eta}\| \eta_b \quad (\text{A-27})$$

ここに br (回転硬化指数) は異方性の発展速度を決める。

A-5 応力速度で表した塑性乗数 λ

発展則 (式(A-18), 式(A-21), 式(A-26)) を式(A-17) に代入し、式(A-13)の関連流れ則を適用すると、 λ は次式のようになる。

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial T'} \cdot T'}{J \frac{MD}{p'(M^2 + \eta^{*2})} (M_s^2 - \eta^2)} \quad (\text{A-28})$$

ここで粘土は

$$\begin{aligned} M_s^2 = & M_a^2 + br \frac{4M\eta^{*2}}{M^2 + \eta^{*2}} (m_b \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta) \\ & - MD \left(\frac{U^*}{R^*} - \frac{U}{R} \right) \sqrt{6\eta^{*2} + \frac{1}{3} (M_a^2 - \eta^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

砂は、

$$\begin{aligned} M_s^2 = & M_a^2 + br \frac{4M\eta^{*2}}{M^2 + \eta^{*2}} (m_b \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta) \\ & - MD \left\{ \frac{U^*}{R^*} 2\eta^* - \frac{U}{R} \sqrt{6\eta^{*2} + \frac{1}{3} (M_a^2 - \eta^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-30})$$

$$M_a^2 = M^2 + \zeta^2 \quad (\text{A-31})$$

また

$$\zeta = \sqrt{\frac{3}{2} \beta \cdot \beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\beta\| \quad (\text{A-32})$$

である。誘導異方性が現れる構造を有する過圧密土に対する新しいパラメータ M_s は、構造の劣化、過圧密の解消、及び異方性の発展に伴い変化するが、“限界状態定数” M は一定である。

A-6 土の軟化と硬化の境界線

土が負荷状態にあるとき、塑性理論から

$$\lambda > 0 \quad (\text{A-33})$$

が言える。式(A-28) から、土は負荷状態において以下の3つの状態に分類される。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' &> 0 \quad \text{when } \eta^2 < M_s^2 \quad \dots \text{ 硬化} \\
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' &= 0 \quad \text{when } \eta^2 = M_s^2 \quad \dots \text{ 完全塑性} \\
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' &< 0 \quad \text{when } \eta^2 > M_s^2 \quad \dots \text{ 軟化}
\end{aligned} \tag{A-34}$$

η は定義から正であるため、 $\eta = M_s$ は軟化と硬化の境界線であることが分かる。

A-7 構成式と負荷基準

式(A-28)に弾性応答の式

$$\dot{\mathbf{T}}' = \mathbf{E} \mathbf{D}^e \tag{A-35}$$

を代入し、 λ について解くと、ストレッチングで表記された塑性乗数を得ることができる。

$$\Lambda = \lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \mathbf{E} \mathbf{D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} + J \frac{\text{MD}}{p'(M^2 + \eta^{*2})} (M_s^2 - \eta^2)} \tag{A-36}$$

式(A-35)において、 \mathbf{D}^e はストレッチングの弾性成分であり、 \mathbf{E} は弾性係数テンソルである。ストレッチングで表記された塑性乗数 Λ を用いて、式(A-17) を考慮すると、式(A-35)から弾塑性構成式を得る。

$$\dot{\mathbf{T}}' = \mathbf{E} \mathbf{D} - \Lambda \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \tag{A-37}$$

式(A-37) の詳細は付録 C に記す。

Λ の分母を正にするような土質定数を考慮すると、負荷基準

$$\Lambda > 0 \tag{A-38}$$

は、 Λ の分子を用いて次式のように書き改められる。

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \mathbf{E} \mathbf{D} > 0 \tag{A-39}$$

本文ではこのような条件を満たすパラメータ群のことを改めて土質定数と呼ぶこととする。

A-8 塑性圧縮と塑性膨張

塑性ポテンシャル面は塑性変形の進展に伴って形が回転するため、塑性圧縮と塑性膨張の境界線は塑性変形の進展に伴って変化する。さて、

$$-\text{tr} \mathbf{D}^p = -\lambda \text{tr} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} = \lambda \frac{\text{MD}}{p'(M^2 + \eta^{*2})} (M_a^2 - \eta^2) \tag{A-40}$$

であるから、応力比 $\eta^2 = M_a^2$ によって表記される塑性圧縮と塑性膨張の境界線は、以下のように分類される。

$$\begin{aligned}
-\text{tr}\mathbf{D}^p > 0 & \text{ when } \eta^2 < M_a^2 & \cdots \text{ 塑性圧縮} \\
-\text{tr}\mathbf{D}^p = 0 & \text{ when } \eta^2 = M_a^2 & \cdots \text{ 完全塑性} \\
-\text{tr}\mathbf{D}^p < 0 & \text{ when } \eta^2 > M_a^2 & \cdots \text{ 塑性膨張}
\end{aligned} \tag{A-41}$$

また、回転硬化限界面が存在するため、 M_a には次式の条件が課せられる。

$$M_a^2 \leq M^2 + \frac{3}{2}m_b^2 \tag{A-42}$$

A-9 モデルの特徴

古典的な限界状態土質力学では、限界状態定数 M は硬化と軟化、そして塑性圧縮と塑性膨張に共通の境界線である。そのため、硬化には必ず塑性圧縮が、軟化には必ず塑性膨張が伴う。さらには、限界状態定数 M は負荷過程を通じて一定である。しかし、土の構造と過圧密の発展則を考慮に入れると、 M_s によって定まる硬化と軟化の境界線は塑性変形の進展に伴って変化する。同じことが塑性圧縮と塑性膨張の境界線にも当てはまる。回転硬化概念を考慮すると、塑性変形の進展に伴い異方性が発達・消滅し、塑性圧縮と塑性膨張の境界線 M_a が変化する。さらに式(A-29)、式(A-30)から、 M_s と M_a の大小関係は常に明確でないことが分かる。つまり、硬化は塑性膨張とともに起こり得るし、軟化も塑性圧縮とともに起こり得ることになる。

M_s の動き方については以下のように説明できる。本文全体で共通のことなのだが、簡単のため、式(A-24)で $b=1$ の場合を考えると、式(A-20)と式(A-24)を代入し、 $b=1$ の場合に $U^*/R^* - U/R$ を具体的に表すと次式となる。

$$\frac{U^*}{R^*} - \frac{U}{R} = \frac{1}{D} \left\{ a(1-R^*)^c - \frac{m \ln R}{R} \right\} \tag{A-43}$$

右辺は $R^* \rightarrow 1$ のとき増加し、 $R \rightarrow 1$ のとき減少する。そのため、式(A-29)において、構造の喪失 ($R^* \rightarrow 1$) は M_s を増加させ、逆に過圧密の解消 ($R \rightarrow 1$) は M_s を減少させることが分かる。

M_s と M_a における異方性の発達の効果は、完全に繰り返された正規圧密状態 ($R^*=1$, かつ $R=1$) の土の場合に明確である。この場合、式(A-29)は次式となる。

$$M_s^2 = M_a^2 + br \frac{4M\eta^{*2}}{M^2 + \eta^{*2}} (m_b \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta) \tag{A-44}$$

付録 D の式(D-1)を考慮に入れると

$$M_a^2 \leq M_s^2 \tag{A-45}$$

が成立する。これは、

$$M_a^2 < \eta^2 < M_s^2 \tag{A-46}$$

を満足する応力比のとき、塑性膨張とともに硬化が起き得ることを示している。高応力比での塑性膨張を伴う硬化は典型的な過圧密土の特徴なので、異方性の存在のために生じた「擬似過圧密の効果」と言うことができる。言い換えれば、応力誘導異方性が十分に発展すると、正規圧密土は高応力比において過圧密土的挙動を取る。

ここで重要なのは、 M_s と M_a の変化による全ての効果は、塑性変形の進展に伴う、構造の喪失、過圧密の解消、異方性の発達・消失が織り成す効果であるということである。

付録 B 共回転速度の使用

式(A-4)で定義されるスカラー関数 $f(p', \eta^*)$ について

$$\frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' = \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' \quad (\text{B-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = -\frac{\partial f}{\partial \beta} \left(= \frac{\partial f}{\partial (\eta - \beta)} \right) \quad (\text{B-2})$$

ならびに、 \dot{T}' と $\dot{\beta}$ (式(A-15)と式(A-16)に関して)

$$\frac{\partial f}{\partial (\eta - \beta)} \cdot (\dot{\eta} - \dot{\beta}) = \frac{\partial f}{\partial (\eta - \beta)} \cdot (\dot{\eta} - \dot{\beta}) \quad (\text{B-3})$$

が成立するので、以下の式が成り立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial T'} \cdot \dot{T}' + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} = \frac{\partial f}{\partial T'} \cdot \dot{T}' + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} \quad (\text{B-4})$$

上式により D に関する線形な構成式を導くことができる。

付録 C 構成式的具体形

回転硬化上・下負荷面修正カムクレイモデルの速度型構成式(式(A-37))の具体形を以下に示す。

$$\dot{T}' = \left(\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G} \right) \text{tr} D \mathbf{I} + 2 \tilde{G} D - \frac{(2\sqrt{3} \tilde{G} \hat{\eta} \cdot D - \tilde{K} \bar{\alpha} \text{tr} D)(2\sqrt{3} \tilde{G} \hat{\eta} - \tilde{K} \bar{\alpha} \mathbf{I})}{4\eta^{*2} \tilde{G} + \tilde{K} \bar{\alpha}^2 + h} \quad (\text{C-1})$$

ここに、

$$\tilde{K} = \frac{1+e}{\tilde{\kappa}} p' \left(= \frac{J(1+e_0)}{\tilde{\kappa}} p' \right), \tilde{G} = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \tilde{K} \quad (\text{C-2})$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} (M_a^2 - \eta^2) \quad (\text{C-3})$$

および

$$h = \frac{J p' M^2 + \eta^{*2}}{3} \frac{MD}{MD} \left\{ M_a^2 + br \frac{4M\eta^{*2}}{M^2 + \eta^{*2}} (m_b \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta) \right. \\ \left. - MD \left(\frac{U^*}{R^*} - \frac{U}{R} \right) \sqrt{6\eta^{*2} + \frac{1}{3} (M_a^2 - \eta^2)^2 - \eta^2} \right\} \quad (\text{C-4})$$

である。

付録 D 式(A-43)の不等式の証明

$$m_b \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta} \geq \|\boldsymbol{\beta}\| \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\beta}\| \eta^* \left(1 - \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\|\hat{\boldsymbol{\eta}}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}\right) \geq 0 \quad (\text{D-1})$$