論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

氏　　　　　名　　　TSAI Daniel

論　文　題　目

Palindromes and v-Palindromes

（回文数と v-回文数）

論文審査担当者

主　査　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
岡田　聡一

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松本　耕二

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　Ph.D
藤江　双葉

委　員　　東北大学大学院理学研究科　教授　博士（理学）
大野　泰生

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

この学位申請論文は，申請者である蔡氏が新たに導入した概念である「v-回文数」に関する初等整数論的問題を扱ったものであり，5 編の単著論文（うち 1 編はすでに出版済みであり，1 編は掲載が決定している）に基づいている．

例えば 15451 のように，反対から読んでも同じ数になる整数のことを回文数 (palindrome) と呼ぶ．この概念は古くから初等整数論的な関心を呼び， 10 進展開以外の場合にも拡張され，その性質や分布について多くの研究がなされている．

蔡氏は，この回文数の概念に示唆された独自の着想によって，v-回文数という新しい概念を導入した．10 進展開の場合にその定義を述べる．数論的関数 v を，素数 p に対しては $v(p) = p$，素数べき p^α $(\alpha \geq 2)$ に対しては $v(p^\alpha) = p + \alpha$，そして一般の自然数 n に対しては $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ と素因数分解したとき

$$v(n) = v(p_1^{\alpha_1}) + \cdots + v(p_k^{\alpha_k})$$

として定める．また，自然数 n を 10 進表示して反対から読んだ数を $r(n)$ と表す．このとき，n が v 回文数であるとは，$v(n) = v(r(n))$ が成り立つことと定義する.（ただし，議論を簡単にするため，$10 \nmid n, n \neq r(n)$ も条件に加える.）例えば，$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ と $r(198) = 891 = 3^4 \cdot 11$ に対して，

$$v(198) = 2 + (3 + 2) + 11 = 18, \quad v(891) = (3 + 4) + 11 = 18$$

と一致するので，198 は v-回文数である．10 進展開以外の場合にも同様にして v-回文数を定義することができる．

この定義は，素数べき p^α に対する v の定義が $\alpha = 1$ のときだけ α を足さない，という点で一見して不自然で人工的な印象を与えるが，蔡氏はこの定義の下で，v-回文数の全体のなす集合 $\mathbb{V}$ が意外なほど豊かな数学的構造をもっていることを見出した．以下，この学位申請論文の主要な結果について述べる．

第 1 の主結果は，$\mathbb{V}$ のもつ周期性である．例えば $18, 1818, 181818, \ldots$ はすべて v-回文数である．自然数 n の 10 進表示を k 回繰り返してできる自然数を $n(k)$ と表す．このとき，主結果は，n が 10 の倍数でもなく，回文数でもないとき，ある自然数 ω が存在して，任意の自然数 k に対して，

$$n(k) \in \mathbb{V} \iff n(k + \omega) \in \mathbb{V}$$

が成り立つ，というものである (Theorem 1.2)．また，その周期 ω の 1 つを具体的に与える公式も得ている (Theorem 4.4)．

第 2 の主結果は，上記の周期性の最小周期 ω_0 に関するものである．自然数 n を固定したとき，$n(k)$ が v-回文数であるかどうかを表す indicator function I を，

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

$I(k) = 1$ （$n(k)$ が v-回文数であるとき），0（そうでないとき）として導入する．一方，自然数 c に対して，$I_c(k) = 1$（k が c の倍数であるとき），0（そうでないとき）によって定まる $c\mathbb{Z}$ の indicator function I_c を考える．すると，I は有限個の I_c たちの線型結合として $I = \lambda_1 I_{c_1} + \cdots + \lambda_q I_{c_q}$ と一意的に書けることがわかる．このとき，主結果は，最小周期 ω_0 が $\mathrm{LCM}(c_1, \ldots, c_q)$ で与えられることを主張している (Theorem 6.14)．また，初等的だが巧妙な議論によって，I を I_c たちの線型結合として表すアルゴリズムを編み出しており，$n(k)$ が v-回文数となる最小の自然数 k を与える公式も提示している．この最小周期を決定する議論の中で，$\mathbb{Z}$ 上の一般の周期関数に対してその最小周期を与える P. P. Vaidyanathan の公式（と同等な結果）を再発見しており，学位申請論文には蔡氏自身による証明も含まれている．

その他にも，この学位申請論文は v-回文数に関する多くの結果を含んでいる．例えば，v-回文数を分類する「タイプ」という概念を導入し，繰り返し回数に関するタイプの不変性を証明している (Theorem 7.1)．また，古典的な回文数と v-回文数とを繋ぐ結果として，0 と 1 のみから構成される回文数の 18 倍が v-回文数になることも示している（Theorem 1.8)．

以上は 10 進展開の場合の結果であるが，一般の b を底とする b 進展開に対する v-回文数も考えることができ，蔡氏はこの方向でも，周期性，最小周期に関する結果だけでなく，v-回文数が存在するような底 b が無限個存在すること，底 b での v-回文数が一つでも存在すれば同じ底での v-回文数が無限に多く存在することも証明している．さらに，剰余類 $a + m\mathbb{Z}$ がいつ $n(k)$ の形の数を含むのかという問題も考察している．

このように，この学位申請論文は，今まで誰も考えていなかった新しい概念を初等整数論に導入し，その概念が十分に豊かな数学的内容を持つことを全くの独力で証明したものであり，学位論文として十分な内容を備えている．8 月 4 日に行われた学位審査公開セミナーにおいても，この新概念を導入した経緯から始めて，主結果とその証明の概要などが明快に示され，審査委員からの質問にも的確な応答がなされた．

以上の理由により, 学位審査委員会は申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．