報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目 On a generalization of the Hörmander condition in the Calderón-Zygmund theory of singular integral operators

(Calderón-Zygmund の特異積分論における Hörmander 条件の一般化について)

氏　　名 鈴木聡一郎

論　文　内　容　の　要　旨

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で有界な特異積分作用素の積分核 K が Hörmander 条件

$$[K]_{H_\infty} := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^d} \sup_{y\in Q} \int_{x\in\mathbb{R}^d\setminus 2Q} |K(x,y)-K(x,c(Q))|\,dx < \infty$$

を満たすならばその作用素は弱 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 有界となり，したがって実補間により任意の $1<p<2$ に対し $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上で有界となることはよく知られている [Hörmander, 1960]．本学位論文では，この Hörmander 条件をより弱い条件に一般化した場合に得られる特異積分作用素の有界性について論じる．本論文では 2 種類の一般化を扱う．

1 つ目は Grafakos and Stockdale [2019] が導入した L^q 積分平均型 Hörmander 条件である $(1\leq q<\infty)$:

$$[K]_{H_q} := \sup_{\substack{Q\subset\mathbb{R}^d \\ Q:cube}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_{y\in Q}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^d\setminus 2Q}|K(x,y)-K(x,c(Q))|\,dx\right)^q dy\right)^{1/q} < \infty.$$

ここで上限は $\mathbb{R}^d$ 内の全ての立方体 Q についてとっており，また $c(Q)$ は Q の中心を，$2Q$ は Q と中心は等しく辺の長さは 2 倍の立方体を表している．Hölder の不等式により，$1<q_1<q_2<\infty$ ならば $[K]_{H_1}\leq[K]_{H_{q_1}}\leq[K]_{H_{q_2}}\leq[K]_{H_\infty}$ が成り立つことは直ちに分かる．すなわち，L^q 積分平均型条件は q が大きいほど強く，q が小さいほど弱い条件となる．Grafakos and Stockdale [2019] は，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で有界な特異積分作用素の積分核が L^q 積分平均型条件を満たすならばその作用素は弱 $L^{q'}(\mathbb{R}^d)$ 有界となり，ゆえに任意の $q'<p<2$ に対し $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上で有界となることを証明した．ただし q' は q の Hölder 共役指数，すなわち $q'=q/(q-1)$ である．彼らの定理は古典的な Hörmander 条件の場合よりも弱い仮定のもと，古典的な場合の $1<p<2$ より狭い $q'<p<2$ の範囲で $L^p(\mathbb{R}^d)$ 有界性を結論するものになっており，そのため彼らはこの結果を ‘limited-range’ 版の定理と呼んでいる．しかし，彼ら自身も指摘しているように，この結果が真に ‘limited-range’ かどうかは不明であった:

問題 1. $[K]_{H_1} < \infty$ かつ $[K]_{H_\infty} = \infty$ を満たす K は存在するか?

問題 2. $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上有界な特異積分作用素であって, その積分核 K は $[K]_{H_1} < \infty$ を満たし, かつある $1 < p < 2$ に対しては $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上で有界ではないようなものは存在するか?

本論文の主定理 I, II は, これらの問題への解答を与える. 主定理 I では, 「$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上有界な特異積分作用素の積分核 K が $[K]_{H_1} < \infty$ を満たすならばその作用素は弱 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 有界となり, したがって任意の $1 < p < 2$ に対し $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上で有界となる」ことを示す. すなわち, 問題 2 は否定的に解決される. 主定理 I の証明のアイデアは Fefferman [1970] が weakly-strongly singular integral operators と呼ばれる特異積分作用素の亜種の弱 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 有界性を証明するために用いた手法に基づいている. 彼の手法は, 簡単にいえば $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ を $f = g + b$ と Calderón–Zygmund 分解し, さらに b のある近似関数 $\tilde{b}$ を構成し $Tf = Tg + T(b - \tilde{b}) + T\tilde{b}$ として評価するというものである. 主定理 I は近似関数 $\tilde{b}$ の構成を適切に変更することで証明することができる. また, この近似関数を構成して差をとる手法を利用することで, (主定理 I ではアプリオリに仮定した) 特異積分作用素の $L^2(\mathbb{R}^d)$ 有界性の十分条件を与えることもできる (定理 7.1). この十分条件は [Benedek et al., 1962] が古典的な Hörmander 条件下で示した結果を L^1 積分平均型条件の場合まで拡張したものである. 主定理 I 及び定理 7.1 は副論文 [Suzuki, 2021] で公表した.

一方, 副論文 [Suzuki, 2021] の出版後に明らかになったことであるが, 実は問題 2 もやはり否定的に解決される (主定理 II). したがって主定理 I や定理 7.1 は実際には古典的な結果と同一の主張を見かけ上異なった形で述べているだけである. この同値性への反省を踏まえて, 本論文では古典的な Hörmander 条件よりも真に弱い条件として BMO 型 Hörmander 条件を導入する:

$$[K]_{H_*} := \sup_{Q \subset \mathbb{R}^d} \frac{1}{|Q|} \int_{y \in Q} \int_{x \in \mathbb{R}^d \setminus 2Q} \left| K(x, y) - \frac{1}{|Q|} \int_{z \in Q} K(x, z)\, dz \right| dx\, dy < \infty.$$

この BMO 型条件は L^1 積分平均型条件と関数空間 BMO の定義を自然に組み合わせたものである. 本論文では, BMO 型条件に関する主定理 III, IV, V を示す.

主定理 III では, BMO 型 Hörmander 条件のもとでも古典的な場合と同じく特異積分作用素の $L^p(\mathbb{R}^d)$ 有界性 $(1 < p < 2)$ が得られることを示す. ただし古典的な場合とは異なり弱 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 有界性はもはや一般には得ることはできないので, 別の論法が必要となる. 本論文では主定理 III の 2 通りの証明を与える. 1 つは Hardy 空間 $H^1(\mathbb{R}^d)$ から $L^1(\mathbb{R}^d)$ への有界性を示して $L^2(\mathbb{R}^d)$ 有界性と補間するもの, もう 1 つは任意の $1 < p < 2$ に対して弱 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 有界であることを示して補間するものである. 主定理 III の証明としては前者の証明のほうがよりよい L^p 評価を与えるが, 一方で次の主定理 IV, V では Hardy 空間を使った議論は機能せず, 後者の証明のアイデアが重要な役割を果たす. 主定理 II, III は副論文 [Suzuki, 2022] で公表した.

主定理 IV, V では, BMO 型 Hörmander 条件下での最大特異積分作用素の有界性について論じる. 主定理 IV では有界性のための十分条件を, 主定理 V では有界性の同値な特徴づけを与える. これらは古典的な Hörmander 条件のもとで最大特異積分作用素の有界性を議論した Grafakos [2003], Hu et al. [2007] の結果を BMO 型 Hörmander 条件の場合に拡張したものとなっている. 主定理 IV, V における主な困難は, BMO 型 Hörmander 条件下では弱 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 有界性は成り立たず, かつ最大特異積分作用素の場合 (古典的な Hörmander 条件のもとでさえも) $H^1(\mathbb{R}^d)$ から $L^1(\mathbb{R}^d)$ への有界性は期待できないという点にある. そのため, もはや端点評価と補間法を用いた標準的な論法は使うことができない. そこで, 主定理 III の 2 つ目の証明と同様に「任意の $1 < p < \infty$ に対して弱 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 有界であることを示して補間する」という手法を用いることで $L^p(\mathbb{R}^d)$ 有界性を示す.