論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　　鈴木　聡一郎

論　文　題　目

On a generalization of the Hörmander condition in the Calderón-Zygmund theory of singular integral operators

（Calderón-Zygmund の特異積分論における Hörmander 条件の一般化について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理学）
植田　好道

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
杉本　充

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
寺澤　祐高

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
中島　誠

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

鈴木氏の本学位論文における研究は，調和解析学の根幹的テーマの一つである特異積分作用素に関するものである．特異積分作用素とは，関数空間上の作用素 $T : f \mapsto Tf$ であって，ある積分核 $K(x, y)$ を用いて $x \in \mathbf{R}^d$ が f の台に属さない場合に，

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x, y) f(y)\, dy$$

と表現されるもののことである．一般に積分核 $K(x, y)$ は対角線 $x = y$ 上で特異性を持っており，よく知られた Hilbert 変換は積分核 $K(x, y) = 1/(x - y)$ から定まる特異積分作用素の典型例である．この Hilbert 変換を始めとして，多くの特異積分作用素は $L^2(\mathbf{R}^d)$-有界性を持つことが知られる．さらに，より一般の $L^p(\mathbf{R}^d)$-有界性 $(p \neq 2)$ が，積分核に対するどのような条件の下で成立するかを追求したのが 1950 年代初頭の Calderón-Zygmund 理論である．

当然のことながら，Calderón-Zygmund 理論を拡張する数々の試みが存在するが，そのようなもののうち，最も基本的な結果の一つとして，1960 年代最初に現れた，いわゆる Hörmander 条件と呼ばれる研究成果が知られている．その条件が導く結論は，弱い意味の $L^1(\mathbf{R}^d)$-有界性の成立であり，したがって補間理論により $1 < p < 2$ に対する $L^p(\mathbf{R}^d)$-有界性が従う．さらに 2019 年には，調和解析学の世界的リーダーの一人である Grafakos 氏と Stockdale 氏が Hörmander 条件を緩めた積分核のクラス H_q $(1 \leq q \leq \infty)$ を導入し，その条件下では $q/(q-1) < p < 2$ に対して $L^p(\mathbf{R}^d)$-有界性が成立することを示した．この H_q は q が大きいほど小さくなるクラスであり，$q = \infty$ の場合が Hörmander 条件に相当する．つまり，積分核に対する仮定の強さに応じて対応する作用素の有界性が成立する p の範囲が制限されるという形で Hörmander 氏の結果を拡張したことになっている．

本学位論文は以上の既存研究の流れを背景としたものであり,「Grafakos 氏と Stockdale 氏の結果は Hörmander 氏の結果をどの程度拡張したものであるかを明らかにしたい」という自然な問題意識に基づき，鈴木氏は次の 2 つの具体的問題を取り上げた：

- Hörmander 条件を満たさないが，Grafakos 氏と Stockdale 氏のクラス H_q $(q \neq \infty)$ に属する積分核は存在するか？
- クラス H_q に積分核を持つ特異積分作用素の $L^p(\mathbf{R}^d)$-有界性における p の範囲の制限 $q/(q-1) < p < 2$ を緩めることは可能であるか？

これらの問題に対して，Grafakos 氏と Stockdale 氏のクラスと Hörmander 条件を満たすクラスは実は同じであるという驚きの事実を示すことにより否定的な解答を与えたのが本学位論文における第 1 の成果である．これまで Grafakos 氏と Stockdale 氏による結果は Hörmander 条件の結果を真に拡張するものであると考えられていただけに，それを覆したという事実は高く評価される．また，この二つのクラスの同値性の帰結として，H_1 のクラスの積分核を持つ特異積分作用素に対しても $1 < p < 2$ における $L^p(\mathbf{R}^d)$-有界性が成立することになるが，この事実に対するクラスの同値性を経由しない直接証明を与えたのが第 2 の成果である．さらに，そこで構築されている方法論を発展させることにより，Hörmander 条件より真に弱い BMO 型の条件を見出し，その条件の下でも $1 < p < 2$ における $L^p(\mathbf{R}^d)$-有界性が成立することを示すとともに，同様の議論を最大特異積分作用素

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

$$(T_* f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y| \geq \varepsilon} K(x,y) f(y)\, dy \right|$$

に対しても展開した．この部分も大変興味深く，その価値は大変高い．

以上のように，鈴木氏の本学位論文で与えた研究成果は調和解析における中心的課題に対する新しい知見を与えたものであり，その意義は明らかで学位論文として十分な価値を持つ．また，以上の成果は副論文において既に公表されていることも指摘する．

令和４年８月１日に行われた学位審査公開セミナーにおいても，申請者は講演・質疑応答を通して，申請者は学位を授与されるに相応しい学識を示した．

よって，学位審査委員会は申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があると判断する．