

先験情報を用いた政策ポートフォリオの選択と 選択後の診断的評価*

Policy Portfolio Selection with Prior Information and Periodic Diagnosis of the Selected One

中島英喜**
NAKASHIMA Hideki

Portfolio selection with referring to mean-variance efficiency is acutely sensitive to small changes of a set of evaluated values for expectation of returns of investment assets. Additionally it is not known appropriate method for diagnosis of the once selected portfolio. Although Black and Litterman model with Bayesian estimation is effective to restrain the former sensitivity, it has several serious difficulties to apply to policy portfolio selection. Hence we discuss an alternative approach based on Bayesian different from Black and Litterman model. In this approach we are explicitly conscious of two important facts. One is the error in the evaluated values as the deviation from true values. The other is the overestimating to the efficiency of selected portfolio under mean-variance approach relative to alternative portfolios. Due to this understanding we can select more efficient policy portfolio in real terms consistent with our prior information. Besides, we can apply this approach to the diagnosis of the once selected portfolio.

Keywords: Policy portfolio selection, Diagnosis of policy portfolio, Bayesian method, Mean-variance efficiency, Black and Litterman model, Prior information, Overestimation of efficiency in mean-variance approach.

* 本稿はJSPS科研費（研究課題番号21K01578）の助成を受けた研究成果の一部である。

** 名古屋大学大学院経済学研究科
Graduate School of Economics, Nagoya University

I. はじめに

年金保険や共済の加入者は、一般に当該制度に長期間加入し、保険料の払い込みと保険金の受領は数十年に及ぶことが多い。一方、これら制度の加入者の大部分は、当該制度の積立金の運用に関して十分な知識や情報を有していない。このため、これら制度の積立金を運用する機関投資家には、十分に合理的で検証可能な意思決定が求められる。

これら機関投資家の意思決定の合理性を、加入者や外部の第三者が検証することを考えると、その意思決定は体系的かつ簡明であるのが望ましい。また、投資対象となる個別証券は膨大な数に及ぶため、個別証券のポートフォリオ選択に先立ち、まず、これらの証券を少数の資産クラスに区分して、各資産クラスへの資金配分を決めるのが通常である。この資金配分の計画は、政策ポートフォリオ、基本ポートフォリオ、戦略的資産配分などと呼ばれる。本稿ではこれを政策ポートフォリオと呼ぶ。

さて、これら機関投資家が政策ポートフォリオを策定する場合、現代投資理論(MPT)に基づく平均・分散効率性に着目するのが標準的である。また、政策ポートフォリオの適用期間は、数年(3~5年)以上に亘る長期を前提にするため、選択時には長期の1期間モデルで平均・分散効率性を評価することが多い。

平均・分散効率性に基づくポートフォリオ選択は、少数のパラメータ、具体的には、各資産クラスの不確実なリターンの期待値と標準偏差、およびこれら資産クラスのリターンの共分散の値が分かれば機械的に実行できる。これら母数(パラメータ)の値は理念的に不確実ではないが、その真値は一般に未知である。このため、ポートフォリオの平均・分散効率性を評価するには、前提となる未知母数の値を評価(推定)する手続きが必要になる。

さらに厄介なことに、平均・分散効率性に基づくポートフォリオ選択は、パラメータの評価値、特にリターンの期待値の評価値の僅かな違いに対して過敏ともいえる影響を受ける。また、これら母数の評価値は、時間の経過とともに更新されることが多い。すなわち、長期の1期間モデルの平均・分散効率性に依拠する固定的な政策ポートフォリオの選択は、(1)選択時(期初)の未知母数の評価だけでなく、(2)選択後(期中)の評価値の更新に伴う計画の劣化という2つの問題を考える必要がある。本稿では、政

策ポートフォリオの選択や期中の評価に関するこれらの問題への対応を考える。

II. 機関投資家の方法論

ポートフォリオの平均・分散効率性は、当該ポートフォリオの不確実なリターン(確率変数)の期待値と分散の値が分かれば評価できる。教科書的に言えば、投資家は自身のリスク回避度に応じて、効率的なポートフォリオの集合から最適な1つを選択する(Markowitz(1952))。さらに安全資産が存在する場合、最適ポートフォリオの内部構成比率は投資家のリスク回避度に依存せず、投資家は自身のリスク回避度に応じて、リスク資産の投資総額(リスクのスケール)のみ決定する(Tobin(1958)の分離定理)。

ただし、現実の機関投資家の多くは、様々な理由から安全資産を想定した教科書的なポートフォリオ選択を行っていない。また、自身のリスク回避度を評価して、最適ポートフォリオを選択することも明示的には行っていない。代わりに彼等は、まず制度的に求められる積立金の運用利回り(目標値)を明らかにして、ポートフォリオのリターンの期待値がこの目標値を満たすことを制約条件とする。そしてこの制約の下で、リターンの分散の評価値が最小となるポートフォリオを選択する。

さらにこのポートフォリオ選択では、追加の制約として、ショート・ポジションの排除(資金配分の非負制約)とフル・インベストメント(短期金融資産の非保所有制約)の2つを課するのが通常である。教科書的な方法論に対するこれらの制約やアプローチの是非は重要なテーマであるが、この議論は別の機会に譲る。本稿ではこうした現実の意思決定を前提として、上述のアプローチにおける前節の技術的な問題を検討する。

なおこのアプローチでも、ポートフォリオの選択問題を、平均・分散効率性とリスク・スケールの選択に分けて考えることは有効である。この点は、前節の最後に指摘した2つの問題を考える上で重要である。

III. 未知母数の推定方法

確率変数の期待値や分散の真値が未知である場合、これら母数の推定方法は、当該変数の観測値

(標本)を直接参照するか否かによって大きく2つに分けられる。1つは標本の平均や分散を計算し、一定の仮定の下でこれを推定値とする。もう1つは標本は直接参照せず、確率変数の発生構造を明示的に考えて、未知母数の値を評価するものである。

例として、ある安価なサイコロの出目の期待値を考える。このサイコロは正確な立方体でないし、中身が完全に均質とも限らない。さらにこれらの条件を満たしたとしても、目の数に応じて掘られた窪みにより、その重心は立方体の中心から微妙に外れるのはほぼ間違いない。したがって、出目の正確な期待値は3.5ではない。また、その真値は確定的に存在するものの自明ではない。このため推定値として評価することになる。

そこで、上記の1つ目の方法では、現実の試行を多数行い大標本の入手を目指すことになる。一方、2つ目の方法では、問題のサイコロの外寸や重心の位置等を極力正確に測り、これを物理的な理論(モデル)に当てはめて期待値を評価することになる。

これら2つの方法の優劣は、個々の確率変数の属性、発生構造の把握の難易、現実で観測された標本の数や質、関心のある母数に依存する。問題の確率変数が時系列変数(確率過程)である場合、最後の2点は特に重要である。ここでは、トレンドのあるブラウン運動 $X_t = \mu t + \sigma W_t$ (t は時点、 W_t は標準ウィナー過程)を例にこれらを説明する。

ここで X_t の期待値と分散は、それぞれトレンド μ とボラティリティ σ に依存するが、これらの係数は未知だとする。この場合、時点 $t=0$ から $t=T>0$ における高頻度で精密な観測値が利用可能なら、標本抽出の間隔を短くして抽出頻度を増やすことで、大規模な標本を用いて1つ目の推定方法を実行できる。これにより、ボラティリティ σ の推定値は、標本サイズの増大に応じて真値に近づく。これに対し、トレンド μ の推定値は、観測値 X_0 と X_T のみに依存するのでこの標本サイズの増大の恩恵を受けない。

このため、確率過程の未知母数を推定する場合、分散や共分散については観測値を直接参照する1つ目の方法を用い、期待値については観測値を直接参照せず、2つ目の方法で当該変数の発生構造を明示的に捉えて、適当な理論(モデル)の下で推定値を評価するといった戦略も考えられる。

IV. Bayes推定と先行研究

前節では、確率変数の未知母数の推定に関する2つの異なる方法を整理し、関心ある母数によって2つの方法を使い分ける戦略の妥当性を示した。この内、1つ目の方法は確率変数の観測値(標本)を直接参照して利用するので「経験的方法」と言える。これに対し2つ目の方法は確率変数の観測値を直接には参照せず、当該変数の発生構造を明示的に捉えた適当な理論(モデル)に基づくことから「先験的方法」と言える。以下では、これら2つの方法の折衷と言うべきBayes推定から話を始める。

前節では先験的方法の適用例として、安物のサイコロの出目の期待値の評価を考えた。この場合、問題のサイコロの物理的な特徴が明らかであれば、信頼性の高い物理モデルを用いることで、コンセンサスが得られる推定値を求めることができるだろう。これに対し、将来における一国の経済成長率、外国為替レート、株価や金利と言った変数の決定については、十分な信頼やコンセンサスを得た理論やモデルは必ずしも存在しないと思われる。

このため、これらの変数を確率変数と見なしてその期待値を先験的方法で評価する場合、極論すれば、論者の数だけモデルがあると言える。この場合、先験的方法に基づく評価は、「主観的評価」と言うべきものになる。Bayesの定理に基づくBayes推定は、先験的方法による推定値の主観的評価と観測値を直接参照した経験的方法の統合アプローチと考えてまずは差支えない。

Bayes推定は、経験的方法と先験的方法を包含しているため、より柔軟な方法と言える。しかしBayes推定は、長らく経験的方法の立場(頻度論)から批判されてきた。例えば、観測と客観を旨とする科学的方法に主観を持ち込むことの是非や違和感、結論が論者の主観に依存する形式上の問題、さらに未知ではあるが確定的な母数をあたかも確率変数のように扱う(と解釈できる)という原理的な問題などが挙げられる。

これ等の批判の下にあったBayes推定は、Savage(1971)等によって改めて基盤が与えられたがその後も非主流の扱いが続いた。しかし、計算機の利用コストの劇的な低下により、機会学習等の知識発見のアプローチが台頭したことで今や事態は一変している。

先のI節で述べたように、平均・分散効率性に基

づくポートフォリオ選択は、前提とするパラメータの値、特に期待値の評価値に対して過敏とも言える影響を受ける。Black and Litterman (1991, 1992)は、この問題に対して有効な対応策を提案した。彼等は自身提案の方法の根拠を、上述の時代背景を踏まえてかやや特殊な方法(Theil's mixed estimation model)に求めているが、今やBayes推定の素直な(初等的な)適用と見なすのが妥当であろう。

Black and Littermanの方法をBayes推定と見なす場合、各資産クラスのリターンの期待値を確率変数として扱うことに左程の躊躇はないだろう。彼等の数式は一見複雑だが、本質は危険資産の超過リターンの期待値に関する2つの評価値($\mu_j^{Economist}$ と μ^{CAPM})の加重平均である。

$$\mu^{BL} = (1-\theta)\mu_j^{Economist} + \theta\mu^{CAPM} \quad (1)$$

ここで、 $\mu_j^{Economist}$ は機関投資家jの専門家(エコノミスト)による評価値、 μ^{CAPM} はリスク資産の標準的な価格モデル(CAPM: Capital Asset Pricing Model)に基づく評価値である(加重の θ については後述)。

なお、標準的なBayes推定では、主観的な評価値と標本に基づく経験的な評価値が参照される。しかし、上式の2つの評価値については、この分類をそのまま当てはめるのは適当でない。先の説明では、先験的方法でコンセンサスを得たモデルが無い場合、これが主観評価になると述べた。これに対し、 μ^{CAPM} はそれなりにコンセンサスを得たモデル(CAPM)の評価値なので、この評価値を主観評価と見なすのは適当でない。

一方、 $\mu_j^{Economist}$ も、必ずしも観測値を直接参照した経験的方法による評価値である必要はなく、CAPMとは異なる何らかの経済モデルを用いた評価値でも構わない。むしろ使用する経済モデルが評価者(エコノミスト)によって異なることが許容されることから、こちらの方を主観的な評価値と見なすのが適当である。

したがって、Black and Littermanの方法の本質を示した(1)式の加重平均では、観測値の直接的な参照は必ずしも求められない。すなわち、Black and Littermanの方法は、観測値(標本)利用した統計的な意思決定と言うより、Bayes推定の方法論を適用した意思決定のモデル(専門家の意見利用やコンセンサス形成: Morris (1977), Winkler (1981),

Agnew (1985)等)と見なすのが妥当だろう。

次に、(1)式の加重平均の加重 θ について説明する。Bayes推定では資産リターンの期待値を確率変数として扱っても特に問題ない。そこで、(1)式の2つの評価値 $\mu_j^{Economist}$ 、 μ^{CAPM} ともに確率変数と見なせば、尤度に準じた解釈の下で、 $(1-\theta) : \theta$ はそれぞれの分散 $\text{var}(\mu_j^{Economist})$ 、 $\text{var}(\mu^{CAPM})$ の逆数の比になる。

なお、 μ^{CAPM} は理論モデルによる評価値なので、理念的には確率変数ではない。また、 $\mu_j^{Economist}$ についても、標本を直接参照しない代替的な理論モデルに基づく場合、これも理念的には確率変数ではない。 μ^{CAPM} や $\mu_j^{Economist}$ の不確実性を、これらの理論モデルで用いる変数の測定誤差(ノイズ)に求めることもできるが、それは本質的でないだろう。 μ^{CAPM} や $\mu_j^{Economist}$ の不確実性の大部分は、正しくない理論モデルを誤って利用してしまう「モデル選択の誤りのリスク」と捉えるのが適当と思われる。

ただし、モデル選択の誤りのリスク、およびこのリスクが期待値の評価に与える影響を客観的に評価するのはほぼ不可能と言うほど困難である。このため、 μ^{CAPM} や $\mu_j^{Economist}$ の不確実性の程度の評価、すなわち(1)式の加重 θ の評価は専ら投資家の主観に依存せざるを得ない。これは、Black and Littermanの方法を政策ポートフォリオの選択に適用する際、大きな問題の一つになる。

V. Black and Littermanの方法に関する考察

前節では、Black and Littermanの方法の本質を整理して問題点を1つ指摘した。この問題点をとりあえず保留した上で、(1)式の期待値に基づく平均・分散効率的なポートフォリオを求めると、その結果 π_j^{BL} は、教科書的な設定の下で簡明な形で表される。

$$\begin{aligned} \pi_j^{BL} &= (\lambda_j \Sigma)^{-1} \mu^{BL} \\ &= (\lambda_j \Sigma)^{-1} \{ (1-\theta)\mu_j^{Economist} + \theta\mu^{CAPM} \} \\ &= (\lambda_j \Sigma)^{-1} \{ (1-\theta)\mu_j^{Economist} + \theta(\lambda_{social} \Sigma \pi^{market}) \} \quad (2) \\ &= (1-\theta) (\lambda_j \Sigma)^{-1} \mu_j^{Economist} + \theta (\lambda_{social} / \lambda_j) \pi^{market} \\ &= (1-\theta) \pi_j^{Economist} + \theta (\lambda_{social} / \lambda_j) \pi^{market} \end{aligned}$$

(2)式は、市場の均衡条件 $\mu^{CAPM} = \lambda_{social} \Sigma \pi^{market}$ を適用している。なお、ここで π^{market} は市場ポートフォリオ、 Σ は市場ポートフォリオの構成資産のリターンの共分散行列、 λ_j と λ_{social} はそれぞれ投資家jと

社会全体のリスク回避度、 $\pi_j^{Economist}$ は期待値に関する専門家の評価値 $\mu_j^{Economist}$ を使って計算した投資家 j の最適な危険資産ポートフォリオである。

すなわち、Black and Littermanの方法で得られるポートフォリオは、標準的なアプローチで得られる最適な危険資産ポートフォリオ $\pi_j^{Economist}$ と市場ポートフォリオ π^{market} の加重平均になる。そしてこの内、前者のポートフォリオは前提とする期待値の評価値 $\mu_j^{Economist}$ に対して過敏である。そこで、(2)式の $\pi_j^{Economist}$ が λ_j と反比例の関係にあることを踏まえれば、(2)式のポートフォリオ選択でこの評価値 $\mu_j^{Economist}$ の影響を抑えるには、加重 θ の評価値を上限の1に向けて大きくする必要が分かる。

前節で述べたように、加重 θ の評価は専ら主観的に行わざるを得ない。この加重 θ は原理的には期待値の評価に関するモデル選択の誤りのリスクの程度に依存する。このため、加重 θ の主観的な評価は、事実上、(2)式のポートフォリオ π_j^{BL} に対する期待値の評価値 $\mu_j^{Economist}$ の影響を調整するパラメータとして合目的的に実施されることになる。

ところで、Black and Littermanの方法では、コンセンサスの得られた理論モデルに基づく期待超過リターンの評価値として、 $\mu^{CAPM} = \lambda_{social} \sum \pi^{market}$ を用いている。現実の機関投資家は国内の株式だけでなく、外国の株式や国内外の債券も投資対象としているため、彼等がBlack and Littermanの方法を利用する場合、市場ポートフォリオ π^{market} も国際的もしくはグローバルな市場ポートフォリオを参照する必要がある¹⁾。

そこで2つの問題が生じる。1つは債券の市場ポートフォリオに関する理念的な問題であり、もう1つは外国資産に固有の為替リスクの問題である。

一般に市場ポートフォリオにおける各資産の資金配分は、当該資産の時価総額に準じる。株式や社債については、当該企業の資産や営業活動が原資産でありキャッシュフローの源泉になる。これに対し、債券市場の多くを占める国債のキャッシュフローの源泉は、最終的には国民の税金に帰着する。したがって、資産としての国債も負債としての国債も、共にいずれかの国民に帰属することになる。このため、国債の市場規模はネットでゼロになるとも考えられる。このため、株式や社債の市場総額と国債の市場総額を同列に扱うことの妥当性は自明ではない。

次に外国の資産に関する為替リスクの問題を考える。CAPMにおける市場ポートフォリオの効率性は、全ての投資家の投資機会集合が同一であることが条件になる。そして同一の投資機会集合の下で、個々の資産の投資リターンは投資家によらず同一になる。しかし、現実には、ある国の資産に投資する場合、同国の居住者は為替リスクなしに投資できるが、使用通貨が異なる他国の居住者は、為替リスクの負担問題が生じる。

為替予約等のデリバティブを使えば、一次近似的に為替リスクをヘッジできる。しかし、リターンの高次成分はヘッジが困難である上、これらの高次成分の期待値は一般にゼロでない（中島（2017）、Black（1989））。

また、仮に高次成分を無視して一次近似を受けられることができたとして、理論的な市場ポートフォリオ π^{market} は為替リスクをフル・ヘッジしたものになる。一方、内外の機関投資家の政策ポートフォリオを眺めると、伝統的に為替リスクのヘッジに対して一貫して後ろ向きであり、この傾向は外国株式について特に顕著である。

上述のように、(2)式のポートフォリオ選択において、専門家（エコノミスト）による期待リターンの評価値 $\mu_j^{Economist}$ の影響を抑えようとする、選択結果は市場ポートフォリオ π^{market} に近づく。したがって、仮にリターンの一次近似を受け容れたとしても、(2)式のポートフォリオにおける外国の資産は、為替リスクのフル・ヘッジがベースになる。これは内外の機関投資家にとって、現時点では受け入れがたい方針転換だと思われる²⁾。

VI. Black and Littermanの方法の修正

前節の(2)式でみたように、Black and Littermanの方法の結果は、教科書的な前提の下で、標準的なアプローチによるポートフォリオと市場ポートフォリオの加重平均になる。この内、前者のポートフォリオは期待値の評価に関して過敏であるため、これを抑えようとする、必然的に市場ポートフォリオの加重を高めることになり、結果的に得られるポートフォリオは市場ポートフォリオに近いものになる。

一方、株式と債券に分散投資するグローバルな市場ポートフォリオに関しては、債券の市場規模の扱いと為替リスクの扱いが問題になる。特に後者については、リターンの一次近似の下でフル・ヘッジが

ベースとなるが、現実の機関投資家の多くは、為替リスクのヘッジ、特に外国株式に関する為替リスクのヘッジに対して伝統的にネガティブである。

為替リスクのヘッジに関するこれら機関投資家の姿勢や方法論の是非は、改めて議論すべき重要なテーマである。しかしⅡ節で指摘した問題と同様、この議論も別の機会に譲り、ここでは、標準的な機関投資家が当面実行できる技術的な対応策を考える。

既にⅣ節で述べたように、Black and Littermanの方法は、観測値(標本)利用した統計的な意思決定と言うより、Bayes推定の方法論を適用した意思決定のモデル(専門家の意見利用やコンセンサス形成)と見なすのが妥当である。そこで改めて(1)式の期待値評価を見ると、 $\mu_j^{Economist}$ は投資家*j*の専門家(エコノミスト)の意見に他ならない。したがってもう一つの評価値 μ^{CAPM} を、他の専門家の意見 μ^{Alt} に置き換えても特に問題ない。

この置き換えを行う場合、(2)式のポートフォリオは、教科書的な前提の下で次式のように書き改められる。

$$\pi_j^{modBL} = (1 - \theta) \pi_j^{Economist} + \theta (\lambda_{Alt} / \lambda_j) \pi^{Alt} \quad (3)$$

ここで λ_{Alt} は他の専門家の意見 μ^{Alt} を参照する別の機関投資家のリスク回避度である。また π^{Alt} は、他の専門家の意見 μ^{Alt} の下で得られる平均・分散効率的な最適ポートフォリオであり、最適性の1階条件から $\pi^{Alt} = (\lambda_{Alt} \Sigma)^{-1} \mu^{Alt}$ を満たす。

ここで、加重 θ の評価が主観的かつ合目的に行われることを考えると、(3)式第2項の係数については、便宜的に $\lambda_{Alt} / \lambda_j = 1$ を仮定しても差し支えないことが分かる。さらに、他の専門家の意見 μ^{Alt} として、複数の異なる専門家の意見($\mu_1^{Alt}, \mu_2^{Alt}, \dots, \mu_N^{Alt}$)を利用することも可能である。この場合、 $\lambda_{Alt} / \lambda_j = 1$ の仮定の下で、(3)式のポートフォリオ π_j^{modBL} は次式のように書き換えられる。

$$\pi_j^{modBL} = (1 - \sum_{i=1}^N \theta_i) \pi_j^{Economist} + \sum_{i=1}^N \theta_i \pi_i^{Alt} \quad (3a)$$

ここで π_i^{Alt} は他の専門家*i*の意見 μ_i^{Alt} の下で得られる平均・分散効率的な最適ポートフォリオであり、 θ_i はこの意見 μ_i^{Alt} に対する投資家*j*の信頼の程度を表す非負の定数である。したがって、これら部外専門家の意見($\mu_1^{Alt}, \mu_2^{Alt}, \dots, \mu_N^{Alt}$)に対する信頼の程度に差がないとしたら、(3a)式はより簡単

に表記できる。

$$\pi_j^{modBL} = (1 - \theta) \pi_j^{Economist} + \theta (\sum_{i=1}^N \pi_i^{Alt}) / N \quad (3b)$$

さて、(3a)式や(3b)式を用いて自身の政策ポートフォリオ π_j^{modBL} を選択する場合、係数 θ の評価や第1項のポートフォリオ $\pi_j^{Economist}$ の選択はⅤ節で述べた通りである。残りは参照すべき π_i^{Alt} の選択である。考えられる自然な方法は、相対的に能力の高い専門家の意見を使っている他の機関投資家(単数もしくは複数)の政策ポートフォリオをそのまま参照して、その加重平均((3a)式)もしくは単純平均((3b)式)を使用する方法だろう。

専門家の能力を図る指標としては、当該投資家に所属する専門スタッフや調査リソースの量と質、および当該投資家*i*が活用している外部リソース(アナリスト、エコノミスト、コンサルタント等)の量と質などが考えられる。

なお、理念的には、参照する機関投資家*i*の政策ポートフォリオ π_i^{Alt} は、国内の機関投資家に限らず広く海外も含めるべきである。しかし現実には、内外の機関投資家の多くは、外国資産に関する為替リスクの扱いが、理論的な規範と大きく異なる。このため現実には、国内の機関投資家と海外の機関投資家の政策ポートフォリオを同列に扱うのは問題がある。まずは、利用する専門家の意見を国内投資家のそれに限定すれば問題を回避できるが、海外の質の高い専門家の意見の捨象を非効率と考えるなら、何らかの追加的な工夫が求められるであろう。

VII. 代替的な方法の検討動機

これまで、平均・分散効率性に基づく標準的なポートフォリオ選択の技術的な問題点を指摘し、その対応策としてBayes推定を挙げた。さらに、Bayes推定の素直な適用例としてBlack and Littermanの方法を取り上げ、これが専門家の意見利用に関する一般的な道具として使えることを明らかにした。その上で、実際にBlack and Littermanの方法を利用する際の諸問題を紹介し、それぞれ技術的な対応を考えた。

前節の(3a)式や(3b)式は、現実の機関投資家が実際に実行できる方法を、教科書的な前提の下で導いたものである。実際には、これら機関投資家の多くは、Ⅱ節で述べた複数の制約条件の下で政策

ポートフォリオを選択するため、選択されるポートフォリオは、(3a)式や(3b)式ほど簡単ではないが、その本質はこれらの数式の通りである。

ちなみに、(3a)式や(3b)式の第1項は、当該投資家の主体的な調査に基づくが、第2項は他の機関投資家の調査結果を直接参照している。これは効率性の点では優れているかもしれないが、いわゆる受動的なパッシブ運用に準じるものであり、フリー・ライダーとか主体性の不足と言った問題が生じる心配がある。

また、Black and Littermanもしくは(3a)式や(3b)式の方法は、いずれもポートフォリオ選択の方法であり、選択後の効率性低下の診断的な評価方法は必ずしも明らかでない。このため、以下では、Bayes推定の考え方に基づきつつ、Black and Littermanの方法における技術的問題を回避する代替的な方法を考える。この代替的な方法により、各投資家は十分な主体性の下で、先験的に妥当で効率性の高い政策ポートフォリオを選択し、選択後の診断的評価も同じ方法でシームレスに実行できる。

VIII. 代替的な方法

平均・分散効率性に基づく標準的なポートフォリオ選択では、期待値の評価値(入力)は1つの値に限られる(いわゆる点推定)。この評価値の信頼性がその近傍の値に比べて明らかに高いなら特に問題視する必要はない。一方、その信頼性が近傍の値と大差ないとしたら、近傍の値を初めから無視して入力値を限定するのは得策でないかもしれない。

「それでは」ということで、区間推定に準じて近傍の数値も入力候補に加えると、今度は非常に多くの出力に戸惑うことになる。例えば4資産ポートフォリオの選択で、資産毎に3つの評価値を入力候補とすると出力数は81個になる。この中から、先験的に最も妥当な一つを選ぶのは至難の業だろう(いわゆる「ジャムの法則」Iyengar (2010))

標本を直接参照しない先験的な知識や情報は、一般に輪郭が明確でなく主観との切り分けも難しい所がある。このためその特徴を踏まえた利用が重要になる。以下、機関投資家に関する実務家や専門家なら広く有するであろう先験的な知識や情報(緩やかなコンセンサス)を上手く使って、前節の最後に挙げた諸条件を満たす代替的な方法を順を追って説明する。

- ①機関投資家 j は、内部もしくは外部の専門家の先験的な知識や情報に基づき、妥当で効率的な政策ポートフォリオが満たすと思われる条件(緩やかなもので構わない)を整理する。
 - ②次に、各資産クラスのリターンの期待値について、標準的な手法に従って専門家(エコノミスト)の評価値 $\mu_j^{Economist}$ を用意する。
 - ③さらに機関投資家 j は、この専門家に対して、評価値 $\mu_j^{Economist}$ の近傍で評価の信頼性が大差ないと考える区間 $(\mu_j^{EconLower}, \mu_j^{EconUpper})$ を聴取する。
 - ④Ⅱ節で述べた標準的な方法で、制約条件を満たす効率的ポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ を求める。
 - ⑤このポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ が上記①で整理した先験的な条件を満たすか確認する。
 - ⑥ $\pi_j^{EconMinV}$ が①の条件を満たさない場合、先験的な知識や情報を元に適当に修正して当該条件を満たすポートフォリオ $\pi_j^{modEcon}$ に改める³⁾。
 - ⑦ $\pi_j^{EconMinV}$ が①の条件を満たす場合も、端数を含めて切りの良い数字のポートフォリオ $\pi_j^{modEcon}$ に改める(このステップは省略可)。
 - ⑧Ⅱ節の制約条件の下で、⑥や⑦の $\pi_j^{modEcon}$ が効率的になる期待リターンの評価値の集合の中からオリジナルの評価値 $\mu_j^{Economist}$ に最も近い評価値 $\mu_j^{modEcon}$ を求める。
 - ⑨この評価値 $\mu_j^{modEcon}$ が、③の区間に収まるか確認する。
 - ⑩収まっていれば、 $\pi_j^{modEcon}$ を政策ポートフォリオとする。
 - ⑪収まっていなければ、⑥のポートフォリオ $\pi_j^{modEcon}$ を別の代替案に代えて、再度⑨までの手順を実行する。
 - ⑫上記⑨を満たす代替案がどうしても見つからない場合、①の条件もしくは③の区間を少し緩めて⑥以下の手順を改めて実行する(この手順に到るケースは少ないと思われる)。
- この方法では、(3a)式のように他の機関投資家の検討結果 π_j^{Alt} を直接参照しない。このためフリー・ライダーの問題が生じることはない。また、期待リターンの評価値にある程度幅を持たせることで、効率性を確保しながら先験的に妥当で専門家のコンセンサスに沿ったポートフォリオを選択できる。また選択後に②や③の評価値が更新、修正された場合、⑧と⑨の手順を実行することで、政策ポートフォリオの見直しの可否を判断できる⁴⁾。

なお、政策ポートフォリオ選択後の②の評価値の

改訂は、既に選択したポートフォリオの平均・分散効率性の低下(質的劣化)だけでなく、その期待リターンの評価値が当初の目標値から乖離するという問題(量的劣化)も引き起こす。多くの場合、後者の問題はポートフォリオのリスク・スケールの不適合と見なすことができる。上述の方法では、ポートフォリオの劣化をこれら2つの面から同時に評価できる。

さて上記の方法では、Ⅱ節で述べた標準的な方法で用いる情報に加えて、①の先験的な知識や情報に基づく条件と、期待リターンの評価値に関する③の区間を用意する必要がある。前者の用意は、思っているよりたぶん簡単である(後述のⅩ節とⅪ節参照)。後者については、統計で使われる標準的な信頼区間とは少し主旨が違うので注意が必要である。

統計で良く使われるのは95%信頼区間であるが、これは「間違ったことはなるべく言いたくない」というかなり保守的なスタンスに基づく。一方、上記③の区間は「最優等と思われる学生(②)に見劣りしない優等生集団」の扱いである。統計的に言うと、最尤推定の推定値の尤度 L_M に準じる尤度 L_Q の評価値集合の扱いであり、尤度比 L_Q/L_M で0.9以上をボーダーにするとといった基準が適当と思われる。

では、この意味で③の区間を厳密に評価できるかと言うと、現実には難しいことも少なくないだろう。理想は、②の専門家が上記の趣旨と自身が使用する評価手法とを踏まえて、③の区間を柔軟かつ適切に評価することである。しかし、望ましい回答が得られないケースも考えられる。こうしたケースでは、機関投資家 j の見識として、「期待リターンの評価に1割程度のズレは不可避だろう」といった判断を①の先験的な知識に加えれば、③の区間を $(0.9\mu_j^{Economist}, 1.1\mu_j^{Economist})$ のように評価できる。

この方法はやや便宜的に見えるが、②の専門家が上記の趣旨を踏まえて回答したとしても、大きな違いが生じるとは思えない。また、Black and Littermanの方法の本質を示した(2)式や(3)式において、最も重要な変数の一つである加重 θ の決定が、現実には主観的かつ合目的に行われることを考えると⁵⁾、これも十分妥当な評価方法と言えよう。

Ⅹ. 代替的な方法の妥当性

Ⅱ節で述べた現実の機関投資家の標準的なポートフォリオの選択では、リターンの期待値の評価値は

1つに限られる。しかし、この評価値が真値と正確に一致することはない。Ⅱ節の方法で選択したポートフォリオは、選択時点で平均・分散効率性と評価されるがそれは見せかけである。すなわち、Ⅱ節の方法は、選択したポートフォリオの効率性を選択時点において相対的に必ず過大評価する。

また選択後に期待値の評価値が更新、変更された場合、この方法では、選択したポートフォリオの平均・分散効率性は相対的に必ず劣化することになる。しかし、この劣化も見せかけの可能性はある。何故なら、選択時における評価値と真値の乖離が逆に縮小しているかもしれないからである。

前節で紹介した代替的な方法の手順⑥や⑦は、選択時におけるこの効率性の過大評価を明示的に意識したものである。これにより、見せかけの効率性の評価値の僅かな違いによって先験的な知識や情報が無駄になることを回避できる。

また、選択時点における上記の過大評価は、選択時点で採用したポートフォリオが、同時点における真に効率的なポートフォリオに必ず劣後することを意味する。同時にこれは、真値の下で、当該ポートフォリオよりも相対的に効率性が高いポートフォリオの集合が存在することを意味する。すなわち、Ⅱ節の標準的な方法で選択した前節④のポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ は、未だ効率性の改善余地がある。前節①の先験的な知識や情報を利用した同⑥のポートフォリオの修正は、この改善余地に着目した修正にあたる。

しかしこの修正ポートフォリオにしても、真に効率的なポートフォリオと一致することはたぶんない。すなわち、我々が選択するポートフォリオは、選択時点で既に劣化していることになる。前節の代替的な方法では、ポートフォリオの相対的な効率性を一定のレンジで評価するため、選択時点の効率性の評価と同じ基準と手順で、選択後の劣化を診断的に評価できる。

このように、前節の代替的な方法は、Ⅱ節の標準的な制約条件に手順①の条件を追加した制約付き最適化とは本質的に異なる。前節の方法は、こうした最適化と異なり、期待値の評価値の必然的な誤りと、それがもたらすナイーブな「最適」ポートフォリオの効率性の過大評価を明示的に意識している。このため、制約付きの最適化では最適化の結果がゴールになるが、前節の方法では、多くの場合これがスタートになる。この点は後述のシミュレーション

んで確認できる。

X. 先験的な知識や情報

Ⅷ節では、機関投資家の政策ポートフォリオの選択と選択後の診断的な評価について、従来の標準的な方法やBlack and Littermanの方法の問題点を解消できる代替的な方法を紹介した。また前節では、この方法の妥当性を整理、確認した。ここでは、この代替的な方法の手順①で求められる先験的な知識や情報について考える。

ここで先験的な知識や情報とは、リターンの期待値の評価にあたり、過去のリターンの観測値（標本）を直接参照することなく各人が既に保有もしくは利用できる知識や情報を指す。したがってその内容の多くは、正確性や厳密性が必ずしも十分でない大まかな「傾向」とか「水準」の話になる。

また、これらの話の量や質、正確性や厳密性は人によって異なる。しかし、問題が機関投資家の政策ポートフォリオ選択である限り、検証可能性の観点から、この分野である程度キャリアを積んだ人の間でそれなりにコンセンサスが得られているものに限って差支えない。以下、幾つか例を示す。

まずは、期待リターンの評価に関する標準的な手法と、この手法の下で導かれるポートフォリオの構造的な傾向の話から始める。資産クラス別の期待リターンの評価で最も広く用いられているものの一つにビルディング・ブロック法がある。その詳細には立ち入らないが⁶⁾、この手法を用いる場合、近年の低金利状態では、国内外の株式の評価値は債券より年率で3～5%ポイントほど高いことが多い。一方、国内外の同種資産の評価値は比較的近く、外国通貨の評価値も国内短期金利に近いのが通常である。

このため、Ⅱ節で述べた方法でこれら4資産のポートフォリオを選択する場合、目標とする期待リターンの水準によって、2つの資産種別の比率（国内外の株式：国内外の債券）が概略定まることになる。後は、相関が高い資産間の僅かな期待リターンの差が、最適化の中で増幅される。

例えば、為替ヘッジを許容する場合、同じ種別の資産（国内株式と外国株式、もしくは国内債券と外国債券）の相関が高くなる。このため、期待リターンの評価値の少しの違いによって、各資産種別の中で内外資産の比率が大きく変わる。一方、為替ヘッジを許容しない場合、外国の株式と債券の相関が高

まるので、外国株式に比べて期待リターンの評価値が低い外国債券の比率は相対的に抑えられる。

続いて、国内株式と外国株式に関して良く知られている話を紹介する。まず、市場規模については、先進国の株式市場（MSCI World指数）における日本市場の規模比率は随分前に10%を下まわり、2022年末の比率は6.3%である（内外比率6：94）。次に、国内の確定給付型の企業年金の統計を見ると⁷⁾、国内外の株式の比率は、2007年度末では約3：2で国内株式の方が多かったが、2012年度を境に比率が逆転し、2018年度末では約4：5になっている。また、GPIFをはじめとする国内の6つの大規模な機関投資家のポートフォリオ計画を見ても⁸⁾、1：1（2つ）、約3：5（2つ）、1：2（1つ）、1：3（1つ）で、内外イーブン、もしくは外国株式の方が比率が高い。

以上、幾つかの例を具体的な数値とともに挙げた。正確な数字は別として、これ等の大まかな傾向や水準については、機関投資家の資金運用担当者の中で良く知られた情報として、程度の差はあれ広く共有されていると考えて差支えないだろう。

XI. 代替的な方法のシミュレーション

最後に、Ⅷ節からX節の解説を踏まえて、Ⅷ節で紹介した代替的な方法を使った政策ポートフォリオの選択をシミュレートする。前提とする評価値は、GPIFの公表資料を参照する⁹⁾。これによると、GPIFは各資産クラスのリターンの分散と共分散については、これらリターンの観測値（標本）を直接参照した標準的な計算で評価しており、期待値については、ビルディング・ブロック法で評価している。これは、本稿Ⅲ節の見解とX節の先験的な知識の例に準じている。

以下では、年率4%（目標値）の期待リターンの政策ポートフォリオを、Ⅷ節の方法を用いて選択する機関投資家*j*を考える。この機関投資家*j*は、X節で例示した程度の知識をこの分野のコンセンサスと認識しており、まず手順①として、効率的で妥当な政策ポートフォリオが満たすであろう傾向として下記の2つの条件を明記した。

- (A) 国内株式と外国株式の妥当な比率は1：1～1：2程度
- (B) 為替リスク（為替リスクをヘッジしない前提での外国資産の比率）の妥当な水準は15%～35%程度

表1. 代替的な手法（Ⅷ節）のシミュレーションの結果

手順	対象	内容	国内株式	国内債券	外国株式	外国債券
			DE	DB	FE	FB
①	妥当な条件	先験的知識	DE:FE → 1:1 ~ 1:2程度, FE+FB → 15%~35%程度			
②	期待リターン	専門家の評価 $\mu_j^{Economist}$	6.0%	2.6%	6.4%	3.7%
③	(年率)	高信頼区間	(5.4%, 6.6%)	(2.34%, 2.86%)	(5.76%, 7.04%)	(3.33%, 4.07%)
④		最適化 $\pi_j^{EconMinV}$	26.02%	42.32%	6.19%	25.47%
⑤	ポートフォリオ	チェック	DE:FE=1:0.24(×), FE+FB=31.66%(○)			
⑥		修正(1) $\pi_j^{modEcon}$	15.00%	51.00%	19.00%	15.00%
⑦		修正(2)	15%	51%	19%	15%
⑧	期待リターン	⑥が最適になる $\mu_j^{modEcon}$	5.58%	2.60%	6.70%	3.77%
⑨	(年率)	チェック	○	○	○	○

次に手順②で、ポートフォリオの平均・分散効率性の評価に必要な評価値を専門家（エコノミスト）から入手したところ、期待リターンの評価値 $\mu_j^{Economist}$ は表1の手順②の通りであった（注9参照）。

続いて手順③で、評価の信頼性が②の評価値 $\mu_j^{Economist}$ と大差ない値の区間を当該専門家に聴取したところ、「現状では回答が難しい」との回答であった。このため、「期待リターンの評価に1割程度のズレは不可避だろう」という判断を①の先験的な知識に加え、評価の信頼性が $\mu_j^{Economist}$ と大差ない値の区間を表1の手順③のように評価した。

以上で必要な情報が揃ったので、手順④で、従来の標準的な手法を用いて数理的な最適化を行い、表1の手順④のポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ を得た。そして機関投資家 j は、Ⅷ節の知見からこのポートフォリオの相対的な効率性が過大評価されていることを認識した上で、まずは手順⑤の確認を行った。

この結果、手順④で計算したポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ は、手順①で明記した上記(A)の条件から大きく外れていることが分かった。このため機関投資家 j は、手順④のポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ の効率性が相対的に必ず過大評価されることを踏まえ、先験的な観点から、手順④のポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ は実質的な効率性の改善余地があると判断した。そこで手順⑥において、手順①の2つの条件を満たす

代替的な政策ポートフォリオ $\pi_j^{modEcon}$ として、表1の手順⑥のポートフォリオを選択した¹⁰⁾。

また、この代替案 $\pi_j^{modEcon}$ は手順⑦の条件も満たしている。そこで手順⑧に進んで、この代替案が期待リターンの目標値（年率4%）と平均・分散効率性を同時に満たす期待リターンの集合の中から、手順②で得た専門家の評価値 $\mu_j^{Economist}$ に最も近いもの ($\mu_j^{modEcon}$) を逆算した。結果は表1の手順⑧の通りであった。

手順⑨では、この結果が手順③で評価した区間に全て収まっているかチェックした。これによると表1の手順⑧の逆算値は、全て「信頼性が手順②の評価値と大差ない区間」に収まっていることが分かる。

ちなみに、手順⑥で選択した代替案 $\pi_j^{modEcon}$ のリスク（リターンの標準偏差）の評価値は年率8.49%であり、機械的な最適化によるポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ の評価値8.29%よりも僅かに大きい。しかしこれは、ポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ の相対的な効率性が過大評価されていることを踏まえると、特に不自然ではない。

実際、手順②で用意した分散や共分散は、過去25年間（300ヶ月）のリターンの観測値に基づくことから、機械的な最適化によるポートフォリオ $\pi_j^{EconMinV}$ のリスクの評価値（8.29%）は統計的に±0.34%程度の誤差を含む。また、このリスクの評価値の差異は、長期の財政シミュレーションでも、

下方リスクの水準にほとんど影響を与えない。

XII. まとめ

本稿では、機関投資家の政策ポートフォリオの選択と選択後の診断的評価について、標準的な方法の技術的な問題点を幾つか指摘し、これらを解消するための代替的な方法を検討した。

標準的な方法では、平均・分散効率性に基づいてポートフォリオを選択するが、その結果は、投資対象の期待リターンの評価値の僅かな違いに対して過敏ともいえる影響を受ける。また選択後に評価値が更新された場合、ポートフォリオの見直しの要否を判断するための診断的な評価の方法も明らかでない。

Bayes推定の素直な適用と言えるBlack and Littermanの方法は、最初の問題の抑制に有効である。ただし、彼等の方法の本来の目的は、投資家の相場観を利用したアクティブな資産配分の変更である。このため、長期的かつ静的な政策ポートフォリオの選択に彼等の方法を適用する場合、幾つか深刻な問題が生じる。

まず、彼等の方法は、アクティブ運用のベンチマークとして国際的な市場ポートフォリオを仮定している。しかし、国際的な市場ポートフォリオを適切に同定するのは簡単ではない。また為替リスクはヘッジを基本に考えることになる。伝統的に為替リスクのヘッジに対して後ろ向きな多くの機関投資家にとって、これは容易に受け入れ難い方針転換と言える。

一方、市場ポートフォリオに代わる代替的なベンチマーク（参照先）については、広くコンセンサスの得られるものを選ぶのは難しい。意思決定理論におけるエキスパート意見の利用モデルの活用も考えられるが、実際にはいろいろな問題が生じる。さらに、より本質的な問題として、ベンチマークの重視の程度を規定する係数の評価の困難が挙げられる。この係数の評価は極めて重要だが、現実には、投資家が主観的かつ合目的に行わざるを得ない。

本稿の後半では、これらの問題を解消するため、Bayes推定の考え方に基づきつつ、Black and Littermanの方法とは異なる代替的な方法を考えた。この方法は、期待値の評価で必然的に生じる誤り（真値との乖離）を明示的に意識し、(a)評価値の近傍で信頼性に大差ない値の区間を明記する。

また、この評価値の下で最適化したポートフォリ

オの効率性は必ず過大される。これは、真値の下で、当該ポートフォリオよりも相対的に高い効率性のポートフォリオの集合が存在することを意味する。本稿では、この集合の中から適当なものを選ぶために、リターンの観測値を使った機械的な最適化ではなく、業界のコンセンサスに近いと思われる知識や情報（先験的な知識）を用いて、(b)効率的なポートフォリオが備えるであろう特徴や傾向（緩やかなものでも構わない）を明記する。

本稿の代替的な方法では、標準的な方法で用いる情報に加えて、上記(a)と(b)の情報を用意することで、実質的な効率性を維持もしくは改善しつつ、先験的に妥当な政策ポートフォリオを選択できる。また、この方法を使えば、選択後の診断的評価も同じ基準でシームレスに実行できる。

注

- 1) 本文の記述は政策ポートフォリオの選択を前提としている。一方、Black and Litterman (1991, 1992)の目的は、投資家の相場観を用いて、基準となるポートフォリオに対してアクティブな変更（ティルト）を行うことである。この場合、基準ポートフォリオは何でも良い。彼等が市場ポートフォリオを選んだのは便宜的だと考えても差支えないだろう。
- 2) これは本文中に示したアプローチの有効性を否定するものではない。証券リスクと為替リスクの分離によって制御の自由度が増えれば、投資効率の改善余地は相当拡大する。
- 3) 修正後のポートフォリオ $\pi_j^{modEcon}$ に関して、当初の期待リターンの評価値 $\mu_j^{Economist}$ （手順②）の下でⅡ節の目標値の達成を厳密に求める必要はない。
- 4) 現実には、政策ポートフォリオの選択は、相当の人員と時間が必要である。このコストを加味するなら、費用対効果の観点から、当初の選択時と見直し要否の判断時で本文③の区間の幅を少し変えることも考えられる。
- 5) 注1で述べたように、Black and Litterman (1991, 1992)が想定しているのは、資産配分のアクティブな変更である。この場合、加重 θ によってアクティブ運用のリスク・スケールが決まるので、 $1-\theta$ はアクティブ運用に関する投資家のリスク回避度の逆数と解釈できる。
- 6) 国内最大の機関投資家であるGPIFは、ビルディング・ブロック法の採用を2008年には明らかにしてその概要を説明している（下記URLで確認できる）。その後も継続的に採用していることが公表資料で確認できる（2020年度は市場均衡リターンの併用が示されている）。
https://www.gpif.go.jp/operation/state/pdf/h20_q4.pdf
- 7) 「年金資産の運用状況」（企業年金連合会調べ）に基

づく。

<https://www.pfa.or.jp/activity/tokei/shisanunyo/shisanunyo01.html>

- 8) GPIF, 企業年金連合会, 国民年金基金連合会, 農業者年金基金, 小規模企業共済, 中小企業退職金共済の6つ。参照値は本稿執筆時点のもの。企業年金連合会については計画値ではなく実績値。なお国家公務員と地方公務員の共済, および私学職員の共済は, 法令により, GPIFと同じモデル配分の共有が義務づけられている。
- 9) 分散と共分散については, 直近の公開資料(「2021年度業務概況書」)の掲載値, 期待値については, 均衡期待リターンを併用する前のポートフォリオ選択時(2014年)の評価値を参照した。
- 10) ここで選択した表1の代替案は, 手順②の期待リターンの評価値の下で目標値の年率4%を満たしている。しかし, この条件は必ずしも必要ではない(注3参照)。

参考文献

- 中島英喜(2017)「国際証券投資」『証券事典』証券経済学会・公益財団法人日本証券経済研究所(編) きんざい, pp.620-628.
- Agnew, C. E. (1985), "Multiple Probability Assessments by Dependent Experts", *Journal of the American Statistical Association* **80** (390), pp.343-347.

- Black, F. (1989), "Universal Hedging: Optimizing Currency Risk and Reward in International Equity Portfolios", *Financial Analysts Journal* **45** (4), pp.16-22.
- Black, F. and R. Litterman (1991), "Asset allocation: Combining investor views with market equilibrium", *Journal of Fixed Income* **1** (2), pp.7-18.
- Black, F. and R. Litterman (1992), "Global Portfolio Optimization", *Financial Analysts Journal* **48** (5), pp.28-43.
- Iyengar, S. (2010), *The Art of Choosing*, Grand Central Publishing.
- Markowitz, H. M. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance* **7** (1), pp.77-91.
- Morris, P. A. (1977), "Combining Expert Judgments: A Bayesian Approach", *Management Science* **23** (7), pp.679-693.
- Savage, L. J. (1971), "Elicitation of Personal Probabilities and Expectations". *Journal of the American Statistical Association* **66** (336), pp.783-801.
- Theil, H. (1971), *Principles of Econometrics*, Wiley.
- Tobin, J. (1958), "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies* **25** (2), pp.65-86.
- Winkler, R. L. (1981), "Combining Probability Distributions from Dependent Information Sources", *Management Science* **27** (4), pp.479-488.