『経済科学』第70巻第４号（2023年３月発行）
THE ECONOMIC SCIENCE, Vol.70, No.4, March 2023

DOI:10. 18999/ecos. 70. 4. 1

生産非効率が存在する場合の全要素生産性指数の要因分解*

Factorization of Total Factor Productivity Index in the Presence of Productive Inefficiency

根　本　二　郎**
NEMOTO Jiro

* 本稿は令和５年３月３日に経済学部第２講義室で行われた最終講義「生産関数をめぐる実証研究の40年」の一部として準備されたものである。
The manuscript is prepared for the final lecture at School of Economics, Nagoya University, Japan.

** 名古屋大学大学院経済学研究科
Graduate School of Economics, Nagoya University

Ⅰ．はじめに

経済指数の理論は経済統計学の中で古くから研究されてきた分野である。経済指数とは，経済を数量的に記述するため多数の統計を何らかの方法で集計した数値で，多くの場合二つの変数の比率の形をとる。典型的には物価指数と生産数量指数が良く知られている。前者は多数の財・サービスの価格について比較時点の基準時点に対する比率を集計したものであり，後者は生産量について同様に定義される。これらの経済指数は第２次世界大戦前より各国で計測が試みられ，実証的経済分析の礎となった[1)]。

一方，生産性指数はいわば二重の比率という形式をとる。生産主体が複数のインプットを用いて複数のアウトプットを生産しているものとする。このとき生産性は集計されたアウトプットの集計されたインプットに対する何らかの比率として定義され，比較時点における生産性の基準時点の生産性に対する比率が生産性指数である。このように生産に関わるすべてのインプットの貢献を測る生産性のことを全要素生産性といい，労働生産性やエネルギー生産性のように単一あるいは一部のインプットのみに関心を絞る生産性計測とは区別する。以下，本稿では全要素生産性を扱うこととし，生産性と表記する場合は全要素生産性を意味する。

生産性指数の形式で定義された全要素生産性の中で，最も広く利用されているものはTörnqvist生産性指数であろう。これを最初に提案したTörnqvist（1936）では経済学との関係は論じられていなかったが，Törnqvist指数自体は生産関数に基礎を置く成長会計やSolow残差によく似ている。このためTörnqvist指数も経済学の生産者理論と関係を持つであろうことは容易に想像できたが，その問題を探求して生産性指数理論に革新的なフレームワークをもたらしたのがCaves, Christensen and Diewert（1982）である。Cavesらは生産関数や費用関数より一般的な距離関数を用いてMalmquist生産性指数を新たに定義し，距離関数がトランスログ型で，ある条件を満たしかつ生産者行動が効率的な場合に，Malmquist指数がTörnqvist指数に一致することを明らかにした。これをTörnqvist指数の側から見れば，Malmquist指数を通じてその経済学的基礎が与えられたことを意味する。一方，Malmquist指数の側から見れば，生産性指数に効率性要因の影響を取り込む可能性が開けたことを意味する。Malmquist指数が依拠する距離関数が記述するのは，効率的な生産フロンティア上のインプットとアウトプットの関係に限定されないからである。

ここで効率的な生産とは，インプットとアウトプットの組み合わせが生産関数（生産フロンティア）上にあることを指す。Törnqvist指数は効率的な生産に対しては観察されたインプットとアウトプットの価格と数量だけで生産性を計測できるが，非効率が存在する場合には生産性を計測できない。これに対してMalmquist指数は，距離関数が効率的な生産に限らず実行可能なインプットとアウトプットの任意の組み合わせについて定義されるので，距離関数さえ推定できれば非効率が存在する場合にも生産性を計測できる。そこでFäre, Grosskopf, and Roof（1992）はデータ包絡分析（DEA）を用いて距離関数を推定し，Malmquist指数による生産性計測を行った。また，Fuentes, Grifell-Tatjé, and Perelman（2001）は確率フロンティア分析（SFA）を用いる方法でMalmquist生産性指数を計測している。こうして非効率な生産に対する生産性計測が可能となり，さらに生産性を効率性要因と技術進歩要因などに分解する要因分解分析が提案されるようになる。

要因分解を簡単に説明するため，いま単一のインプットから単一のアウトプットが生産されているとものとする。０期のインプットをx^0，０期のアウトプットをy^0，１期のインプットをx^1，１期のアウトプットをy^1とする。基準時点を０期，比較時点を１期とすると生産性指数は（$y^1/x^1/y^0/x^0$）であるが，これは次の(1)のように書ける[2)]。ただし，$y=f(x)$を生産関数とする。

$$\frac{y^1/x^1}{y^0/x^0}=\frac{y^1/f(x^1)}{y^0/f(x^0)}\times\frac{f(x^1)/x^1}{f(x^0)/x^0} \tag{1}$$

右辺１番目の項が効率性要因である。実際のアウトプットyの効率的なアウトプット$f(x)$に対する比率が効率性の程度を表す[3)]。右辺第２項は非効率を除いた生産性の０期から１期への変化を測っている。この項を技術進歩要因，規模要因，さらに必要に応じてインプットとアウトプットの混合効果に分解するのが生産性の要因分解分析である。

現在，生産性の要因分解分析は数多くの研究者によって提案されている。包括的なサーベイを行っているBalk（2018）が示す通り数多くの方法が存在す

る。ただし，要因分解を行う指数としては，Malmquist生産性指数とHicks-Moorsteen-Bjurek生産性指数（以下，HMB指数）のどちらかである場合がほとんどである[4]。要因分解の方法は多種多様であるが，以下ではその一つ一つを見て行くことはしない。本稿の目的は，効率的な生産者行動を前提とするTörnqvist指数を一般化するという観点から，効率性要因を含む生産性指数の要因分解について検討することにある。既にふれたChristensen et al.(1982) によるTörnqvist指数とMalmquist指数の等価性は，読み方を変えるとTörnqvist指数の要因分解と解釈できる。その成立条件は，非効率が存在しないこととトランスログ型距離関数であった。そこで距離関数によって非効率的生産の可能性を導入し，その距離関数をトランスログ型で推定し生産性の要因分解を行うというアプローチでTörnqvist指数の一般化を考える。Nemoto and Goto（2005ab）はこのアプローチにしたがってわが国の47都道府県経済の生産性要因分解を行った実証研究であるが，そこで用いられたHMB生産性指数の要因分解法は付録で要約が示されているのみである。次節以降では，Nemoto and Gotoに依りながら，その後の理論的進展も踏まえてTörnqvist指数の一般化とHMB生産性指数の要因分解をレビューする。

以下，第２節でMalmquist指数とTörnqvist指数，第３節でHMB生産性指数について議論する。第４節ではHMB生産性指数と並んで包括的な要因分解が可能な指数として，錐技術に基づくMalmquist生産性指数をレビューしHMB生産性指数との比較を行う。

Ⅱ．距離関数とMalmquist指数および Törnqvist指数

１．距離関数

m 種類のインプットから n 種類のアウトプットが生産されているものとする。t 期に生産に投入されるインプットの数量を $x^t=(x_1^t, x_2^t,\cdots, x_m^t)'$，生産されるアウトプットの数量を $y^t=(y_1^t, y_2^t, \cdots, y_n^t)'$とする。技術的に生産可能な x^t と y^t の組み合わせすべてからなる集合を S^t として，これを t 期の生産可能集合という。

$$S^t=\{(x^t, y^t)\mid x^t \; can \; produce \; y^t\} \tag{2}$$

S^t は閉集合でかつインプットとアウトプットに関する単調性条件，つまり $(x^t, y^t)\in S^t$ ならば $(\bar{x}, y^t)\in S^t, \bar{x}\geq x^t$ かつ $(x^t, \bar{y})\in S^t, \bar{y}\leq y^t$ である。またインプット集合 $L^t(y)=\{x^t \mid (x^t, y)\in S^t\}$ およびアウトプット集合 $P^t(x)=\{y^t \mid (x, y^t)\in S^t\}$ が共に凸集合であることを仮定する[5]。

アウトプット距離関数を次のように定義する。

$$D_O^t(x^t, y^t)=min\left\{\delta \mid \left(x^t, \frac{y^t}{\delta}\right)\in S^t\right\} \tag{3}$$

アウトプット距離関数は，投入するインプット x^t を固定してアウトプット y^t を何倍まで拡大できるか，その技術的に可能な最大倍率の逆数を与える関数である。距離関数は任意のインプットとアウトプットの組み合わせについて定義され，生産可能集合の境界の上でのみ定義される生産関数よりもはるかに一般的である。すぐわかるように，(x^t, y^t) は $D_O^t(x^t, y^t)\leq 1$ のとき生産可能，$D_O^t(x^t, y^t) > 1$ のとき生産不能，$D_O^t(x^t, y^t)=1$ のときは効率的で，効率的な (x^t, y^t) の集合を生産フロンティアという。$D_O^t(x^t, y^t)\leq 1$ のときは $D_O^t(x^t, y^t)$ はそのまま効率性の指標となり，アウトプットで測った (x^t, y^t) の効率性という。

生産可能集合 S^t の単調性と $P^t(x)$ の凸性および定義(3)より $D_O^t(x^t, y^t)$ は次のような性質を持つ 。

（O1）y^t について増加関数
（O2）x^t について非増加関数
（O3）y^t について１次同次
（O4）生産技術が規模に関して収穫一定のとき，x^t に関して－１次同次
（O5）y^t について凸関数

同様に，距離をインプット方向に測ることでインプット距離関数が次のように定義できる。

$$D_I^t(x^t, y^t)=max\left\{\delta \mid \left(\frac{x^t}{\delta}, y^t\right)\in S^t\right\} \tag{4}$$

インプット距離関数は，y^t を減らすことなく技術的に可能なインプット x^t の最大削減率の逆数を与える関数である。(x^t, y^t) は，$D_I^t(x^t, y^t)\geq 1$ のとき生産可能，$D_I^t(x^t, y^t)<1$ のとき生産不能，$D_I^t(x^t, y^t)=1$ のとき効率的で効率的な (x^t, y^t) は生産フロン

ティアに含まれる。$D_I^t(x^t, y^t) \geq 1$ のときは $1/(D_I^t(x^t, y^t)$ は効率性指標となりインプットで測った (x^t, y^t) の効率性という。

生産可能集合 S^t の単調性と $L^t(y)$ の凸性および定義(4)より，$D_I^t(x^t, y^t)$ は次の性質を持つ[7]。

（I1）x^t について増加関数
（I2）y^t について非増加関数
（I3）x^t について１次同次
（I4）生産技術が規模に関して収穫一定のとき，y^t に関して－１次同次
（I5）x^t について凹関数

２．Malmquist指数

生産性を定義する前にMalmquistアウトプット指数とMalmquistインプット指数を，それぞれアウトプット距離関数とインプット距離関数によって定義する。t期を基準時点，t+１期を比較時点とするMalmquistアウトプット指数は

$$MO^R(y^{t+1}, y^t) = \frac{D_O^R(x^R, y^{t+1})}{D_O^R(x^R, y^t)} \tag{5}$$

である。$MO^R(y^{t+1}, y^t)$ は y^{t+1} と y^t の比の形にはなっていないが，（O3）より任意の $\lambda>0$，$\mu>0$ について $MO^R(\lambda y^{t+1}, \mu y^t) = (\lambda/\mu)MO^R(y^{t+1}, y^t)$ が成立する。これを比例条件というが，Malmquistアウトプット指数が y^{t+1} と y^t の比に準じる性質を保持していることは明らかであろう。R は参照時点である。指数理論では参照時点を基準時点に取る（$R=t$）場合をラスパイレス指数，比較時点に取る（$R=t+1$）場合をパーシェ指数といい。ラスパイレス指数とパーシェ指数の幾何平均をフィッシャー指数という。すぐ後で見るCaves et al.のMalmquist指数とTörnqvist指数の等価定理ではフィッシャー指数が前提であるので，本稿では基本的にフィッシャー指数を採用する。したがって，Malmquistアウトプット指数はあらためて次のようにフィッシャー指数形式で定義する。

$$MO^F(y^{t+1}, y^t) = \left(\frac{D_O^t(x^t, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)}\,\frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^t)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

同様にMalmquistインプット指数を

$$MI^F(x^{t+1}, x^t) = \left(\frac{D_I^t(x^{t+1}, y^t)}{D_I^t(x^t, y^t)}\,\frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^t)}{D_I^{t+1}(x^t, y^t)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

のように定義する。

これに対してMalmquist生産性指数は (x^{t+1}, y^{t+1}) を (x^t, y^t) に比較する形式を取り，アウトプット距離関数とインプット距離関数のどちらを使うかで二通りの指数が定義される。たとえばアウトプット距離関数ベースのMalmquist生産性指数は，フィッシャー指数形式では

$$\begin{aligned}&MP_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)\\ &= \left(\frac{D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)}\,\frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^t, y^t)}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{8}$$

となる。(8)において距離関数 D_O^{t+1}，D_O^t を D_I^{t+1}，D_I^t に置き換えて逆数にすればインプット距離関数ベースのMalmquist生産性指数となる[8]。

フィッシャー指数形式のMalmquist指数は，効率性要因と技術進歩要因に分解することが可能である。簡単な計算により(8)式右辺は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned}&MP_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)\\ &= \underbrace{\left(\frac{D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}\,\frac{D_O^t(x^t, y^t)}{D_O^{t+1}(x^t, y^t)}\right)^{\frac{1}{2}}}_{［技術進歩要因］}\\ &\quad\times \underbrace{\frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)}}_{［効率性要因］}\end{aligned} \tag{9}$$

(9)式右辺第２項はt+１期とt期の効率性の比であり，t期からt+１期にかけての生産性変化に貢献する効率性要因そのものである。右辺第１項は，t期の生産点 (x^t, y^t) とt+１期の生産点 (x^{t+1}, y^{t+1}) それぞれについて，t期とt+１期の技術を参照して計測した効率性の比の幾何平均を取っている。非効率であるほど生産点から生産フロンティアまでの距離が遠いことを意味する。t期からt+１期にかけて技術進歩があれば計測される非効率値が大きく（効率性値は小さく）なるので，右辺１項が大きいほどMalmquist生産性指数は大きくなる。したがって右辺第１項は，生産フロンティアの移動（技術進歩）が生産性に与える効果を測っているものといえ

る[9)]。

式(8)で定義されるMalmquist生産性指数について注意すべきは，比例条件が満たされないことである。実際，(8)は$MP_O^F(\lambda x^{t+1}, \mu y^{t+1}, x^t, y^t) \neq (\lambda/\mu) MP_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$となって比例条件を一般には満たさない[10)]。比例条件が成立するのは参照技術が規模に関して収穫一定のときのみである。この場合，アウトプット距離関数はアウトプットに関して１次同次（O3）であると同時に，インプットに関して－１次同次（O4）となるので比例条件が回復する。したがって，もしｔ期およびｔ+１期の生産技術が規模に関して収穫一定でない場合は，(8)のようなフィッシャー指数形式のMalmquist生産性指数は生産性を計測するのに適しない[11)]。

３．Törnqvist指数

Törnqvistアウトプット指数は次のように定義される。

$$\mathrm{TO}^{\mathrm{R}}(y^{t+1}, y^t) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i^{t+1}}{y_i^t}\right)^{\frac{p_i^R y_i^R}{p^{R'} y^R}} \tag{10}$$

ただしＲ時点のｎ種類のアウトプット価格ベクトルを$p^t = (p_1^t, p_2^t, \cdots, p_n^t)'$としている。また$p^{R'}y^R$は$p^R$と$y^R$の内積である。Törnqvistアウトプット指数は，比較時点ｔ+１の基準時点ｔに対するｎ種類のアウトプットの数量比を，収入シェアをウェイトにした加重平均で集計したものである。

Törnqvistインプット指数も同様にして次のように定義される。

$$\mathrm{TI}^{\mathrm{R}}(x^{t+1}, x^t) = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i^{t+1}}{x_i^t}\right)^{\frac{w_i^R x_i^R}{w^{R'} x^R}} \tag{11}$$

ただしＲ時点のｍ種類のインプット価格ベクトルを$w^t = (w_1^t, w_2^t, \cdots, w_m^t)'$としている。また$w^{R'}x^R$は$w^R$と$x^R$の内積である。Törnqvistインプット指数は，比較時点ｔ+１の基準時点ｔに対するｍ種類のインプットの数量比を，費用シェアをウェイトにした加重平均で集計したものである。

Törnqvist生産性指数はTörnqvistアウトプット指数のTörnqvistインプット指数に対する比率として定義される。

$$\mathrm{TP}^{\mathrm{R}}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{\mathrm{TO}^{\mathrm{R}}(y^{t+1}, y^t)}{\mathrm{TI}^{\mathrm{R}}(x^{t+1}, x^t)} \tag{12}$$

Törnqvist生産性指数が比例条件を満たすことは自明であろう。フィッシャー指数形式のTörnqvist生産性指数は次のように書ける[12)]。

$$\begin{aligned} TP^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) &= \left\{\frac{TO^t(y^{t+1}, y^t)}{TI^t(x^{t+1}, x^t)}\,\frac{TO^{t+1}(y^{t+1}, y^t)}{TI^{t+1}(x^{t+1}, x^t)}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{TO^F(y^{t+1}, y^t)}{TI^F(x^{t+1}, x^t)} \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i^{t+1}}{y_i^t}\right)^{\frac{1}{2}\left\{\frac{p_i^t y_i^t}{p^{t'} y^t} + \frac{p_i^{t+1} y_i^{t+1}}{p^{t+1'} y^{t+1}}\right\}} \Bigg/ \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i^{t+1}}{x_i^t}\right)^{\frac{1}{2}\left\{\frac{w_i^t x_i^t}{w^{t'} x^t} + \frac{w_i^{t+1} x_i^{t+1}}{w^{t+1'} x^{t+1}}\right\}} \end{aligned} \tag{13}$$

(13)式右辺の分子はフィッシャー指数形式のTörnqvistアウトプット指数，分母はフィッシャー指数形式のTörnqvistインプット指数である。

Törnqvist指数はMalmquist指数と異なり直接観察できる価格と数量のデータのみで計測できる反面，生産技術と生産者行動との関係が明確でない。それを明らかにしてTörnqvist指数にミクロ経済学的基礎を与えているのがCaves et al.(1982)による定理が保証するMalmquist指数とTörnqvist指数の等価性である。

４．Malmquist指数とTörnqvist指数の等価性

次のようなトランスログ関数$h^t(x^t, y^t)$を考える。

$$\begin{aligned} lnh^t(x^t, y^t) = {}& \\ \alpha_0^t + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i^t lnx_i^t + \sum_{k=1}^{n}\beta_k^t lny_k^t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\, lnx_i\, lnx_j \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\beta_{kl}\, lny_k\, lny_l + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\, lnx_i\, lny_k \end{aligned} \tag{14}$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji},\ \beta_{kl} = \beta_{lk},\ i, j = 1, 2, \cdots, m,\ \ k, l = 1, 2, \cdots, n$$

(14)では１階のパラメータは時点ｔによって可変，２階のパラメータは時点を通じて一定である。いまアウトプット距離関数が(14)で与えられるものとする。ただしアウトプット距離関数はy^tに関して１次同次であるので，(14)に加えてパラメータは次の制約を満たしている。

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k^t=1,\ \sum_{l=1}^{n}\beta_{kl}=\sum_{k=1}^{n}\beta_{kl}=0,\ \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}=0 \tag{15}$$

このとき次の定理が成立する。

定理1　アウトプット距離関数が制約⒂を伴うトランスログ型⒁であり，生産者がインプット x^t を所与として収入最大化を実現するように y^t を決めるなら $MO^F(y^{t+1},y^t)=TO^F(y^{t+1},y^t)$ である。

証明はCaves et al.(1982)による。

次に，インプット距離関数が⒁で与えられるものとする。ただしインプット距離関数は x^t に関して1次同次であるので，⒁に加えてパラメータは次の制約を満たすものとする。

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^t=1,\ \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}=0,\ \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}=0 \tag{16}$$

このとき次の定理が成立する。

定理2　インプット距離関数が制約⒃を伴うトランスログ型⒁であり，生産者がインプット y^t を所与として費用最小化を実現するように x^t を決めるなら $MI^F(x^{t+1},x^t)=TI^F(x^{t+1},x^t)$ である。

証明はCaves et al.(1982)による。

生産性指数について見る前に，規模弾力性を定義する。規模弾力性は，インプットの限界的変化に対する生産フロンティア上でのアウトプットの弾性値である。アウトプット距離関数では効率的な生産点 $(D_O^t(x^t,y^t)=1$ となるような $(x^t,y^t))$ の上で定義する。よってt期の規模弾性値を ϵ_O^t とすると

$$\epsilon_O^t=\left.\frac{dln\mu}{dln\lambda}\right|_{\lambda=1} \qquad where\ D_O^t(\lambda x^t,\mu y^t)=1 \tag{17}$$

である。アウトプット距離関数の1次同次性（O3）より $\mu=1/D_O^t(\lambda x^t,y^t)$ だから，両辺を λ で微分すれば次を得る[13)]。

$$\epsilon_O^t=-i'\nabla_{lnx}\,lnD_O^t(x^t,y^t) \tag{18}$$

ただし $i=(1,1,\cdots,1)$ である。規模に関して収穫一定の場合は，アウトプット距離関数が x^t に関して－1次同次（O4）となることより $\epsilon_O^t=1$ である。

全く同様にしてインプット距離関数から規模弾力性を得ることもでき，次のようになる。

$$\epsilon_I^t=-1/i'\nabla_{lny}\,lnD_I^t(x^t,y^t) \tag{19}$$

定理3　アウトプット距離関数が制約⒂を伴うトランスログ型⒁であり，生産者が x^t を与えられたものとして収入を最大化するように y^t を決定し，同時に y^t を与えられたものとして費用を最小化するように x^t を決定する場合，

$$\begin{aligned}MP_O^F(x^{t+1},y^{t+1},x^t,y^t)&=TP^F(x^{t+1},y^{t+1},x^t,y^t)\\&\times\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i^{t+1}}{x_i^t}\right)^{\frac{1}{2}\left\{\frac{w_i^tx_i^t}{w^tx^t}(1-\epsilon_O^t)+\frac{w_i^{t+1}x_i^{t+1}}{w^{t+1'}x^{t+1}}(1-\epsilon_O^{t+1})\right\}}\end{aligned} \tag{20}$$

である。

証明はCaves et al.(1982)による。

⒇右辺は，規模弾力性 ϵ_O^t，ϵ_O^{t+1} を除けば観察された数量と価格だけで構成されている。よって規模弾力性の推定値が利用可能でさえあれば，Malmquist生産性指数はトランスログ型距離関数⒁のパラメータについての情報無しで正確に計測できる。特に規模に関して収穫一定の場合は $\epsilon_O^t=\epsilon_O^{t+1}=1$ より $MP_O^F(x^{t+1},y^{t+1},x^t,y^t)=TP^F(x^{t+1},y^{t+1},x^t,y^t)$ となって，Malmquist生産性指数とTörnqvist指数は定理3の条件の下で等価となる。このことを視点を変えてTörnqvist生産性指数の側から見ると，Törnqvist生産性指数の経済学的根拠が明らかにされているともいえる。つまり，規模に関して収穫一定のトランスログ型アウトプット距離関数と生産者の収入最大化行動および費用最小化行動が理論的基礎となり，これらの条件が満たされている場合にTörnqvist生産性指数は正しいといえる。

また，⒇をTörnqvist生産性指数の要因分解と見ることもできる。両辺に対数を取って⒇を次のように書き換える。

$$lnTP^F(x^{t+1},y^{t+1},x^t,y^t)=lnMP_O^F(x^{t+1},y^{t+1},x^t,y^t)$$

［技術進歩要因］

$$+lnRT_O(w^t, w^{t+1}, x^t, x^{t+1}\ \epsilon_O^t, \epsilon_O^{t+1}) \tag{21}$$
［規模要因］

$$\begin{aligned}&lnRT_O(w^t, w^{t+1}, x^t, x^{t+1}, \epsilon_O^t, \epsilon_O^{t+1})\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{w_i^t x_i^t}{w^t x^t}(\epsilon_O^{t-1})+\frac{w_i^{t+1}x_i^{t+1}}{w^{t+1'}x^{t+1}}(\epsilon_O^{t+1}-1)\right\}\\&\quad\times(lnx_i^{t+1}-lnx_i^t)\end{aligned}$$

式(21)右辺第１項のMalmquist生産性指数は，(9)によれば技術効率要因と効率性要因にさらに分解されるはずであるが，Törnqvist生産性指数は定理３の条件にあるような生産者の最適化行動を前提にするため生産に非効率は存在せず $D_O^t(x^t, y^t)=D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})=1$ となって効率性要因は消失する。右辺第２項 RT_O は（規模弾力性－１）とTörnqvistインプット指数の積，つまり

$$\frac{1}{2}(\epsilon_O^t-1)\,lnTI^t(x^{t+1}, x^t)$$
$$+\frac{1}{2}(\epsilon_O^{t+1}-1)\,lnTI^{t+1}(x^{t+1}, x^t) \tag{22}$$

となっている。Törnqvistインプット指数が規模の変化を測っていると考えると，それがもたらすアウトプットの変化によって規模弾力性が１を超える場合には生産性が上昇し，１を下回る場合には下落するということが理解できる。

Malmquist生産性指数とTörnqvist生産性指数の等価性は，インプット距離関数をベースとするMalmquist生産性指数についても同様である。その場合，インプット距離関数が制約(16)を伴うトランスログ型(14)で生産者が収入最大化と費用最小化を同時に行うならば，(21)に対応して次式が成立する。

$$lnTP^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)=lnMP_I^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$$
［技術進歩要因］
$$+lnRT_I(p^t, p^{t+1}, y^t, y^{t+1}, \epsilon_I^t, \epsilon_I^{t+1}) \tag{23}$$
［規模要因］

$$\begin{aligned}&lnRT_I(p^t, p^{t+1}, y^t, y^{t+1}, \epsilon^t, \epsilon^{t+1})\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{p_i^t y_i^t}{p^t y^t}\left(1-\frac{1}{\epsilon_I^t}\right)+\frac{p_i^{t+1}y_i^{t+1}}{p^{t+1'}y^{t+1}}\left(1-\frac{1}{\epsilon_I^{t+1}}\right)\right\}\\&\quad\times(lny_i^{t+1}-lny_i^t)\end{aligned}$$

(23)の証明はCaves et al.(1982)の結果より自明である。

(21)(23)のいずれの場合も，規模弾力性の値さえ得られれば技術進歩要因はTörnqvist指数と規模要因の差として求められるので要因分解は実行可能となる。

5．規模弾力性の推定

規模弾力性の値は距離関数を推定すれば(18)または(19)によって知ることができる。しかしDEAのような非パラメトリックな方法で距離関数を推定した場合，偏微係数が得られないため(18)(19)を使うことができない。

そこで Nemoto and Goto（2005ab）は以下のような方法を提案している。規模弾力性の定義(17)より $\epsilon_O^t=dln\mu/dln\lambda|_{\lambda=1}$，$\mu=1/(D_O^t(\lambda x^t, y^t)$ だから，アウトプット距離関数が微分可能であれば次のように近似できる。

$$\begin{aligned}\left.\frac{dln\mu}{dln\lambda}\right|_{\lambda=1}&=\left.\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\right|_{\lambda=1}=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{D_O^t(\lambda x^t, y^t)}{\Delta\lambda}\\&\quad\times\left\{\frac{1}{D_O^t((\lambda+\Delta\lambda)x^t, y^t)}-\frac{1}{D_O^t(\lambda x^t, y^t)}\right\}_{\lambda=1}\\&\fallingdotseq\frac{1}{\Delta\lambda}\left\{\frac{D_O^t(x^t, y^t)}{D_O^t((1+\Delta\lambda)x^t, y^t)}-1\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

したがって適当に $\Delta\lambda$ を選択して代入すれば，規模弾力性の近似値が得られる。ここで問題は距離関数が微分可能でない場合である。特にDEAの場合，生産可能集合の端点になるような（x^t, y^t）において微分可能ではなく，そのような点では(24)の右側極限と左側極限が一致しない。そこで，正負が反転するように $\Delta\lambda$ を二通り用意して(24)を評価し，右側極限と左側極限それぞれの近似値を求めることとする。Peyrache（2014）では，これら二つの規模弾性値を別々に用いて二通りのHMB生産性指数が定義されている。他方，次節で見るようにNemoto and Goto によるHMB生産性指数の要因分解においては，これら二つの規模弾性値の平均が規模要因の項の中に自然に現れてくる。

Nemoto and GotoとPeyracheの相違は $\Delta\lambda$ の取り方にある。Nemoto and Gotoでは $\Delta\lambda=\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2$ として，まず $\Delta\lambda_1=s^{t+1,t}-1$，ただし $s^{t+1,t}=MI^F(x^{t+1}, x^t)$ とする。近似 $ln(1+x)\fallingdotseq x$ を用いれば次式を得る。

$$\hat{\epsilon}_O^1(t,t+1) = -\frac{ln\left\{\dfrac{D_O^t(s^{t+1,t}x^t, y^t)}{D_O^t(x^t, y^t)}\right\}}{lns^{t+1,t}}$$

$$= -\frac{ln\left\{\dfrac{D_O^t(s^{t+1,t}x^t, y^t)}{D_O^t(x^t, y^t)}\right\}}{ln\left\{\dfrac{D_I^t(s^{t+1,t}x^t, y^t)}{D_I^t(x^t, y^t)}\right\}} \tag{25}$$

二番目の等号はインプット距離関数が x^t について１次同次（I4）であることによる。㉕の分母において $s^{t+1,t}$ はフィッシャー形式のMalmquistインプット指数であるが，これがｔ期からｔ+１期にかけての規模の変化を表している。一方，㉕の分子は性質（O3）より $D_O^t(s^{t+1,t}x^t, y^t/D_O^t(x^t, y^t))$ となる。$y^t/D_O^t(x^t, y^t)$ は x^t から生産可能な最大のアウトプットであり，インプットが $s^{t+1,t}$ 倍になることによってそれをさらに何倍にできるかを測っているのが㉕の規模弾性値 $\hat{\epsilon}_O^1(t,t+1)$ である。

次に，$\Delta\lambda_2=1/s^{t+1,t}-1$として次式を得る。

$$\hat{\epsilon}_O^2(t,t+1) = -\frac{ln\left\{\dfrac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}\left(\dfrac{x^{t+1}}{s^{t+1,t}}, y^{t+1}\right)}\right\}}{lns^{t+1,t}}$$

$$= -\frac{ln\left\{\dfrac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}\left(\dfrac{x^{t+1}}{s^{t+1,t}}, y^{t+1}\right)}\right\}}{ln\left\{\dfrac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^{t+1}\left(\dfrac{x^{t+1}}{s^{t+1,t}}, y^{t+1}\right)}\right\}} \tag{26}$$

$s^{t+1,t}=1$ でない限り $\Delta\lambda_1\Delta\lambda_2<0$ となるので，両側から極限の近似値が求められている。㉖は，㉕とは逆にｔ+１期からt期にかけて見て規模が $1/s^{t+1,t}$ 倍に変化しているのに対し，それに反応してアウトプットがｔ+１期からｔ期にかけて生産フロンティア上で何倍になるかを測っている。すぐ上でも触れたように，このようにするとHMB生産指数の要因分解において規模要因項の中で $\hat{\epsilon}_O^1(t,t+1)$ と $\hat{\epsilon}_O^2(t,t+1)$ の平均が規模弾力性の推定値としての役割を果たす。これは距離関数が微分できない場合の処置としても有効であろう。

しかしBalk（2018）が指摘するように，$\Delta\lambda$ の決め方には無数の選択の余地がある。上記のNemoto and Goto以外に有力な方法は，Peyrache（2014）およびDiewert and Fox（2017）によるもので $D_O^t((1+\Delta\lambda_1)x^t, y^t)=D_O^t(x^{t+1}, y^t)$, $D_O^{t+1}((1+\Delta\lambda_2)x^{t+1}, y^t)=D_O^{t+1}(x^t, y^{t+1})$ を満たすように $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2$ を決めることが提案されている[14]。この方法では，$(1+\Delta\lambda_1)x^t$ と x^{t+1} がともにｔ期の技術で y^t を生産する等生産量曲線上にあること，および $(1+\Delta\lambda_2)x^{t+1}$ と x^t がともにｔ+１期の技術で y^t を生産する等生産量曲線上にあることを意味する。このようにすることの利点は，次節で説明するようにHMB生産指数の要因分解において混合効果が消失することである。

Ⅲ．HMB生産性指数

１．要因分解

HMB（Hicks-Moorsteen-Bjurek）生産性指数は，Malmquistアウトプット指数⑹のMalmquistインプット指数⑺に対する比率として定義される[15]。Malmquist指数の基準時点の取り方によりラスパイレス，パーシェ，フィッシャーの三形式があり得るが，ここではフィッシャー形式のTörnqvist指数の要因分解㉑の効率性要因による拡張を考えるため，同じくフィッシャー形式のHMB生産性指数を取り上げる。これをHMB^Fとすると次のように書ける。

$$HMB^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{MO^F(y^{t+1}, y^t)}{MI^F(x^{t+1}, x^t)} \tag{27}$$

Malmquist生産性指数と異なり，この定義は無条件に生産性の比例条件を満たす。つまり $HMB^F(\lambda x^{t+1}, \mu y^{t+1}, x^t, y^t) = (\mu/\lambda)HMB^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$ が成立する。

HMB生産性指数の要因分解は，まずHMB指数をMalmquist生産性指数と広義の規模要因に分解する。次いで⑼にしたがってMalmquist生産性指数を技術進歩要因と効率性要因に分解することで，HMB指数を技術進歩要因，効率性要因，広義の規模要因に分解したことになる。広義の規模要因はさらに狭義の規模要因とアウトプット・インプットの混合効果に分離される。

その際，Malmquist生産性指数としてアウトプット距離関数ベースを採用するかインプット距離関数ベースを採用するかによって二通りの要因分解が考えられる。どちらにせよ本質的な相違はないが，ここではアウトプット距離関数ベースの要因分解を取り上げる。具体的な分解式は次のように与えられる。ただし対数を取っている。

$$
\begin{aligned}
&lnHMB^{F}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^{t}, y^{t})\\
&\quad=\frac{1}{2}ln\left\{\frac{D_O^t(x^t, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)}\frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^t)}\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}ln\left\{\frac{D_I^t(x^{t+1}, y^t)}{D_I^t(x^t, y^t)}\frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^t)}{D_I^{t+1}(x^t, y^t)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=lnMP_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)\\
&+lnRHMB_O(y^t, y^{t+1}, x^t, x^{t+1}\,\epsilon_O^t, \epsilon_O^{t+1})
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
lnMP_O^F&=\frac{1}{2}ln\left\{\frac{D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}\frac{D_O^t(x^t, y^t)}{D_O^{t+1}(x^t, y^t)}\right\}\\
&\qquad\qquad\text{［技術進歩要因］}\\
&\quad+ln\left\{\frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)}\right\}\\
&\qquad\text{［効率性要因］}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&lnRHMB_O(y^t, y^{t+1}, x^t, x^{t+1}\,\epsilon_O^t, \epsilon_O^{t+1})\\
&\quad=\left\{\frac{\hat{\epsilon}_O^1(t, t+1)+\hat{\epsilon}_O^2(t, t+1)}{2}-1\right\}lns^{t+1, t}\\
&\qquad\qquad\text{［規模要因］}\\
&\quad+\frac{1}{2}ln\left\{\frac{D_O^t(s^{t, t+1}x^{t+1}, r^{t, t+1}y^{t+1})}{D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}\left(\frac{x^{t+1}}{s^{t, t+1}}, \frac{y^{t+1}}{r^{t, t+1}}\right)}\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad\text{［混合効果］}
\end{aligned}
$$

ただし $s^{t+1, t}=MI^F(x^{t+1}, x^t)$，$r^{t+1, t}=MO^F(y^{t+1}, y^t)$ である。

(28)右辺第１項の $MP_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$ はアウトプット距離関数ベースMalmquist生産性指数でTörnqvist生産性指数(21)の第１項と同一である 。要因分解(9)によって技術進歩要因と効率性要因に分解される。(28)右辺第２項 $RHMB_O(y^t, y^{t+1}, x^t, x^{t+1}\epsilon_O^t, \epsilon_O^{t+1})$ は広義の規模要因であり，狭義の規模要因（以下，規模要因）と混合効果に分解される。右側極限と左側極限による規模弾性値の近似値の平均から１を差し引いた部分が規模に関する収益指標で，Malmquistインプット指数で測った規模変化との積が規模要因になる。これはTörnqvist生産性指数の要因分解における規模要因(22)と意味としては基本的に同形である。規模要因は，構成比を変えないままインプット・ベクトルが定数倍で拡大・縮小することに伴う生産性への影響として定義される。それ以外のインプット・ベクトルおよびアウトプット・ベクトルの構成比の変化がもたらす生産性への影響は，混合効果として計測される。混合効果は構成比の影響を測るので，インプットとアウトプットが共に１種類である場合は０となる。

HMB生産性指数は生産非効率を許容する点でTörnqvist生産性指数とは異なる。そこで一つの問題は，観察された生産（x^t, y^t）がすべて効率的で $D_O^t(x^t, y^t)=1$ であるとしたら，HMB生産性指数の要因分解(28)がTörnqvist生産性指数の要因分解(21)に帰着するかどうかである。Törnqvist生産性指数の要因分解(21)の前提は定理３の条件であるので，問題を正確に述べれば定理３の条件の下でHMB生産性指数の要因分解(28)が(21)に一致するかどうかである。もし一致するのであれば，HMB生産性指数は効率性要因の導入によるTörnqvist生産性指数の一般化であるとみなすことができる。

この問題に対してまず自明なことは，(28)第１項と(21)第１項のMalmquist生産性指数は同一なので，すべての生産主体が効率的であれば効率性要因は消失しHMB生産性指数とTörnqvist生産性指数の技術進歩要因は一致する。次に，HMB生産性指数の分子であるMalmquistアウトプット指数 $MO^F(y^{t+1}, y^t)$ と分母であるMalmquistインプット指数 $MI^F(x^{t+1}, x^t)$ については，定理１および２を想起すれば次の事実が明らかである。

定理４　アウトプット距離関数が制約(15)を伴うトランスログ型(14)でありかつインプット距離関数が制約(16)を伴うトランスログ型(14)であるとき，生産者が x^t を与えられたものとして収入を最大化する y^t を決定し，同時に y^t を与えられたものとして費用を最小化する x^t を決定する場合，$HMB^F(x^{t+1}, y^{t+1}), x^t, y^t)=TP^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$ である。

（証明）定理１よりアウトプット距離関数が制約(15)を伴うトランスログ型(14)であり，生産者が収入最大

化行動にしたがうなら $MO^F(y^{t+1}, y^t) = TO^F(y^{t+1}, y^t)$。定理2よりインプット距離関数が制約⒃を伴うトランスログ型⒁であり，生産者が費用最小化行動にしたがうなら $MI^F(x^{t+1}, x^t) = TI^F(x^{t+1}, x^t)$。HMB生産性指数とTörnqvist生産性指数の定義より $HMB^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = MO^F(y^{t+1}, y^t)/MI^F(x^{t+1}, x^t) = TO^F(y^{t+1}, y^t)/TI^F(x^{t+1}, x^t) = TP^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$。

定理4と㉑㉘から直ちに次の系が得られる。

系1　定理4の条件の下で，Törnqvist生産性指数㉑の規模要因はHMB生産性指数㉘の規模要因と混合効果の和に等しい。つまり

$$\begin{aligned} &RT_O(w^t, w^{t+1}, x^t, x^{t+1}\, \epsilon_O^t, \epsilon_O^{t+1}) \\ &\quad = RHMB_O(y^t, y^{t+1}, x^t, x^{t+1}\, \epsilon_O^t, \epsilon_O^{t+1}) \end{aligned}$$

証明は㉑と㉘を比較すれば明らかである。

定理4の条件は非効率が存在しないことに加え，アウトプット距離関数とインプット距離関数がともに一定の制約を満たすトランスログ型となることである。したがって，このような条件がどのような場合に満たされるのかが問題である。Mizobuchi（2017）は，生産技術が a 次同次（$a>0$）の場合にその条件が満たされることを明らかにした。ここで a 次同次の生産技術とは生産可能集合が $S_a^t = \{(kx^t, k^a y^t) \mid (x^t, y^t) \in S^t, k>0\}$ であるような生産技術のことを指す。言うまでもなく $a=1$ のときは規模に関して収穫一定であり，$a>1$ のときは規模に関して収穫逓増，$0<a<1$ のときは規模に関して収穫逓減となる。Mizobuchi（2017, 命題5，6）によれば，a 次同次の生産技術の下で距離関数は次の性質を持つ。

（O4$^+$）生産技術が a 次同次のとき，アウトプット距離関数は x^t に関して $-a$ 次同次

（I4$^+$）生産技術が a 次同次のとき，インプット距離関数は y^t に関して $-1/a$ 次同次

さらに，a 次同次の生産技術の下で次の定理が成立する。

定理［Mizobuchi（2017，命題7）］　生産技術が a 次同次（$a>0$）のとき

$$lnD_O^t(x^t, y^t) = -a lnD_I^t(x^t, y^t)$$

以上のことから次の定理が導かれる。

定理5　生産技術が a 次同次（$a>0$）のとき，アウトプット距離関数が制約⒂と（O4$^+$）を伴うトランスログ型⒁であれば，インプット距離関数は制約⒃と（I4$^+$）を伴うトランスログ型⒁となる。またインプット距離関数が制約⒃と（I4$^+$）を伴うトランスログ型⒁であればアウトプット距離関数は制約⒂と（O4$^+$）を伴うトランスログ型⒁となる。

（略証[17]）a 次同次生産技術の下で，トランスログ型アウトプット距離関数⒁は（O4$^+$）より x^t に関して $-a$ 次同次となるので，$\Sigma_i \alpha_i^t = -a$ および $\Sigma_i \Sigma_j \alpha_{ij} = 0$ が満たされる。制約⒂に加えてこの二つの条件を加えた⒁をMizobuchi定理の中のアウトプット距離関数 に代入すれば，インプット距離関数 が制約⒃と（I4$^+$）を満たすトランスログ型⒁となることが直ちにわかる。ただし⒁をインプット距離関数と見るとき，（I4$^+$）は $\Sigma_k \beta_k^t = -1/a$ および $\Sigma_k \Sigma_l \beta_{kl} = 0$ を意味することに注意せよ。同様にしてインプット距離関数が⒃と（I4$^+$）を満たす⒁である場合に，アウトプット距離関数が⒂と（O4$^+$）を満たす⒁となることも容易に示される。

定理4および5より次の定理6は自明である。

定理6　生産主体が費用最小化行動と収入最大化行動にしたがいかつ生産技術が α 次同次ならば，アウトプット距離関数が制約⒂を伴うトランスログ型⒁であるかまたはインプット距離関数が制約⒃を伴うトランスログ型⒁であれば $HMB^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = TP^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$ である。

定理6の条件の下でも系1が成立するが，a 次同次の生産技術の下ではさらにHMB生産性指数とTörnqvist生産性指数の規模要因が一致することが示される。

定理7　定理6の条件の下でHMB生産性指数の規模要因はTörnqvist生産性指数の規模要因㉒に等しい。

（証明）アウトプット距離関数が x^t に関して $-a$ 次同次であるので，生産主体の効率的な行動の下で規模弾力性値は⒅より $\epsilon_O^t = -x^{t\prime}\nabla_x D_O^t(x^t, y^t) = aD_O^t(x^t, y^t) = a$ である。よって，㉒で与えられているTörnqvist生産性指数の効率要因（対数）は

$$\frac{1}{2}(\alpha-1)lnTI^t(x^{t+1}, x^t) + \frac{1}{2}(\alpha-1)lnTI^{t+1}(x^{t+1}, x^t)$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha-1)lnTI^F(x^{t+1}, x^t)$$

となる。一方，HMB生産性指数の効率要因の対数は，

$$\{(\hat{\epsilon}_O^1(t, t+1) + \hat{\epsilon}_O^2(t, t+1))/2-1\}\, lnMI^F(x^{t+1}, x^t)$$

である。定理6の条件の下では（O4$^+$）より $D_O^t(s^{t+1,t}x^t, y^t) = (s^{t+1,t})^{-a}D_O^t(x^t, y^t)$ であるので規模弾力性の定義㉕より $\hat{\epsilon}_O^1(t, t+1) = a$ となる。同様に $\hat{\epsilon}_O^2(t, t+1) = a$ も示される。加えて定理2より，$MI^F(x^{t+1}, x^t) = TI^F(x^{t+1}, x^t)$ となるからHMB生産性指数の効率要因（対数）は $\frac{1}{2}(\alpha-1)lnTI^F(x^{t+1}, x^t)$ となってTörnqvist生産性指数の効率要因（対数）に一致する。

系2　定理6および7よりHMB生産性指数㉘の混合効果はゼロとなる。

証明は㉑と㉘を比較すれば明らかである。

定理6，7および系2より，生産技術が a 次同次の場合，効率的な生産主体に対してはHMB生産性指数はTörnqvist生産性指数に一致し，㉑と㉘で与えられるそれぞれの要因もすべて一致する。この意味で，a 次同次の生産技術の下ではHMB生産性指数は非効率要因の導入によるTörnqvist生産性指数の一般化であるといえる。

2．トランスログ距離関数モデル

HMB生産性指数の計測は，DEAを使って非パラメトリックに行うのであればアウトプット距離関数，インプット距離関数の値をそれぞれ推定するだけでよい。しかしパラメトリックに距離関数を特定化して計測しようとするのなら，インプット距離関数とアウトプット距離関数を互いに双対な形に定式化しなければならない。特に，HMB生産指数をTörnqvist生産性指数の一般化と捉える立場では，制約⒂を満たすトランスログ型アウトプット距離関数，あるいは制約⒃を満たすトランスログ型インプット距離関数で特定化して推定することも推奨されよう。その際，生産技術が a 次同次の場合は定理5よりトランスログ型距離関数は自己双対であり問題を生じない。しかし，生産技術が a 次同次でない場合はアウトプット距離関数（インプット距離関数）に対し双対なインプット距離関数（アウトプット距離関数）の定式化が問題となる。

この問題に対する解答はNemoto and Goto (2005ab) によって与えられている。いまアウトプット距離関数がトランスログ型⒁で特定化され，制約⒂が満たされているものとする。このときインプット距離関数の定義はアウトプット距離関数の性質を使って次のように書くことができる，

$$D_I^t(x^t, y^t) = max\left\{\delta \mid \left(\frac{x^t}{\delta}, y^t\right) \in S^t\right\}$$
$$= max\left\{\delta \mid D_O^t\left(\frac{x^t}{\delta}, y^t\right) \le 1\right\} \tag{29}$$

$D_O^t(x^t/\delta, y^t)$ がトランスログ型⒁であるので，$D_O^t(x^t/\delta, y^t) \le 1$ は次のような2次不等式となる。

$$\frac{1}{2}(ln\delta)^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij} + \epsilon_O^t\, ln\delta + lnD_O^t(x^t, y^t) \le 0 \tag{30}$$

ただし ϵ_O^t は規模弾力性で

$$\epsilon_O^t = -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial lnD_O^t(x^t, y^t)}{\partial lnx^t}$$
$$= -\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i^t + \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\, lnx_j^t + \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\, lny_k^t\right)$$

である。

$\Sigma_i\Sigma_i\alpha_{ij} > 0$ であれば，インプット距離関数の定義より㉚が定める $ln\delta$ の範囲の上限が $lnD_I^t(x^t, y^t)$ の値となる。したがって

$$lnD_I^t(x^t, y^t) = -\left(\epsilon_O^t - \sqrt{(\epsilon_O^t)^2 - 2lnD_O^t(x^t, y^t)\sum_i\sum_j \alpha_{ij}}\right) \Bigg/ \sum_i\sum_j \alpha_{ij} \tag{31}$$

となる。

$\Sigma_i\Sigma_i\,\alpha_{ij} = 0$ のときは，(30)より直ちに

$$lnD_I^t(x^t, y^t) = -\frac{lnD_O^t(x^t, y^t)}{\epsilon_O^t} \tag{32}$$

であることがわかる。

$\Sigma_i\Sigma_i\,\alpha_{ij} < 0$ のときは(30)によって $ln\delta$ の上限を決めることができない。この場合はアウトプット距離関数に双対なインプット距離関数は存在せず，トランスログ型距離関数モデルによるHMB生産性指数の計測はできない。

なお，インプット距離関数がトランスログ型距離関数(14)で制約(16)とともに与えられている場合は，双対なアウトプット距離関数は次のように与えられる。

$\Sigma_k\Sigma_l\,\beta_{kl} < 0$ のとき

$$lnD_O^t(x^t, y^t) = -\left(\frac{1}{\epsilon_I^t} - \sqrt{\left(\frac{1}{\epsilon_I^t}\right)^2 - 2lnD_I^t(x^t, y^t)\sum_k\sum_l \beta_{kl}}\right) \Bigg/ \sum_k\sum_l \beta_{kl}$$

$\Sigma_k\Sigma_l\,\beta_{kl} = 0$ のとき

$$lnD_O^t(x^t, y^t) = -\epsilon_I^t lnD_I^t(x^t, y^t)$$

ただし ϵ_I^t はインプット距離関数ベースの規模弾力性で

$$\epsilon_I^t = -\left\{\sum_{k=1}^n \frac{\partial lnD_I^t(x^t, y^t)}{\partial lny_k^t}\right\}^{-1} = -\left\{\sum_{k=1}^n\left(\beta_k^t + \sum_{l=1}^n \beta_k^l\, lny_l^t + \sum_{i=1}^m \gamma_{ik}\, lnx_i^t\right)\right\}^{-1}$$

である。

Ⅳ．錐技術に基づくMalmquist生産性指数

1．要因分解

この節では錐技術に基づくMalmquist生産性指数を紹介し，HMB生産性指数との比較について若干の検討を行うこととする。既に見たように，アウトプット距離関数ベースのMalmquist生産性指数(8)は規模に関して収穫一定でなければ比例条件を満たさず，生産性指数として不適である。これに対して Ray and Desli（1997），Balk（2001）は，生産可能性集合が錐であるような技術（錐技術，cone technology）の上で定義された距離関数によってMalmquist指数を定義することで，すぐれた性質を有する生産性指数が得られることを示した。

いま実際の生産可能性集合 S^t を包含する錐 $\bar{S}^t$ を次のように定義する。

$$\bar{S}^t = \{(\lambda x^t, \lambda y^t) | (x^t, y^t) \in S^t, \lambda > 0\} \tag{33}$$

さらに $\bar{S}^t$ を仮想的な生産可能性集合として錐技術に基づくアウトプット距離関数を定義する。

$$\bar{D}_O^t(x^t, y^t) = min\left\{\delta \,\middle|\, \left(x^t, \frac{y^t}{\delta}\right) \in \bar{S}^t\right\} \tag{34}$$

$\bar{D}_O^t(x^t, y^t)$ は通常のアウトプット距離関数の性質（O1）－（O5）を満たす。特に錐技術が規模に関して収穫一定であることから，（O4）より x^t に関して－1次同次となる。錐技術に基づくMalmquist生産性指数（アウトプット距離関数ベース）は次のように定義される。

$$\overline{MP}_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \left(\frac{\bar{D}_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\bar{D}_O^t(x^t, y^t)}\ \frac{\bar{D}_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\bar{D}_O^{t+1}(x^t, y^t)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{35}$$

錐技術に基づくMalmquist生産性指数が，比例条件 $\overline{MP}_O^F(\lambda x^{t+1}, \mu y^{t+1}, x^t, y^t) = (\mu/\lambda)\overline{MP}_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$ を満たすことは，錐技術に基づくアウトプット距離関数が y^t について1次同次かつ x^t に関して－1次同次であることから明らかである。

Balk（2001）にしたがって，錐技術に基づくMalmquist生産性指数の要因分解を次に示す。

$$ln\overline{MP}_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$$

$$= \frac{1}{2} ln \left\{ \frac{\bar{D}_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\bar{D}_O^t(x^t, y^t)} \frac{\bar{D}_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\bar{D}_O^{t+1}(x^t, y^t)} \right\}$$

$$= lnMP_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$$

$$+ lnRM_O(y^t, y^{t+1}, x^t, x^{t+1}) \tag{36}$$

$$lnMP_O^F = \frac{1}{2} ln \left\{ \frac{D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{D_O^t(x^t, y^t)}{D_O^{t+1}(x^t, y^t)} \right\}$$

［技術進歩要因］

$$+ ln \left\{ \frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)} \right\}$$

［効率性要因］

$$lnRM_O = \frac{1}{2} ln \left\{ \frac{\bar{D}_O^t(x^{t+1}, y^t)/D_O^t(x^{t+1}, y^t)}{\bar{D}_O^t(x^t, y^t)/D_O^t(x^t, y^t)} \right.$$

$$\left. \times \frac{\bar{D}_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})/D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\bar{D}_O^{t+1}(x^t, y^{t+1})/D_O^{t+1}(x^t, y^{t+1})} \right\}$$

［規模要因］

$$+ \frac{1}{2} ln \left\{ \frac{\bar{D}_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})/D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\bar{D}_O^t(x^{t+1}, y^t)/D_O^t(x^{t+1}, y^t)} \right.$$

$$\left. \times \frac{\bar{D}_O^{t+1}(x^t, y^{t+1})/D_O^{t+1}(x^t, y^{t+1})}{\bar{D}_O^{t+1}(x^t, y^t)/D_O^{t+1}(x^t, y^t)} \right\}$$

［アウトプット混合効果］

⑶⑹右辺第１項の $MP_O^F(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$ はアウトプット距離関数ベースのMalmquist生産性指数で，Törnqvist生産性指数の要因分解⑵⑴，HMB生産性指数の要因分解⑵⑻の第１項と同一である。右辺第２項の $RM_O(y^t, y^{t+1}, x^t, x^{t+1})$ は規模要因とアウトプット混合効果の和である[18)]。

規模要因は，基本的に錐技術に基づく距離関数と実際の技術に基づく距離関数の比によって規模が生産性に与える効果を測っている。距離関数の比がなぜ規模の効果を測ることになるのかについては，次節で説明する。

アウトプット混合効果は，アウトプットの構成比の変化によって生産性が変化する効果を捉えている。アウトプットが１種類の場合には，アウトプット距離関数も錐技術に基づくアウトプット距離関数も y^t について１次同次であることから，この項が０になることを確認できる。

２．規模要因

錐技術に基づくMalmquist生産性指数の要因分解⑶⑹とHMB生産性指数の要因分解⑵⑻を比較すると，混合効果を除けば相違するのは規模要因のみである。そこで本節では錐技術に基づくMalmquist生産性指数の規模要因について，HMB生産性指数の規模要因との比較も含めて検討することとする。

規模要因⑶⑹はフィッシャー指数形式になっているが，ここでは簡単のため，その中のラスパイレス指数部分についてそれが何を測っているか考える。この部分はまた，アウトプット距離関数の y^t に関する１次同次性より，次のように書き換えられる。

$$\frac{\bar{D}_O^t(x^{t+1}, y^t)/D_O^t(x^{t+1}, y^t)}{\bar{D}_O^t(x^t, y^t)/D_O^t(x^t, y^t)} = \frac{\bar{D}_O^t(x^{t+1}, y^t/D_O^t(x^{t+1}, y^t))}{\bar{D}_O^t(x^t, y^t/D_O^t(x^t, y^t))} \tag{37}$$

この式の右辺の分子において，$y^t/D_O^t(x^{t+1}, y^t)$ は x^{t+1} で生産し得る最大のアウトプットである。よって右辺分子は x^{t+1} における実際の生産フロンティア上の点について，その効率性を錐技術によるフロンティアによって測ったものに他ならない。また分母は同様に，x^t における実際の生産フロンティア上の点について，錐技術によるフロンティアを参照してその効率性を測ったものである。

これを図示するため，単一のインプットと単一のアウトプットの場合に簡単化する。図１はＳ字型の実際の生産フロンティアと，それを包摂する錐による生産フロンティアを描いている。規模はインプットで測られており，t＋１時点の規模 x^{t+1} における生産フロンティア上の点Ｒが $y^t/D_O^t(x^{t+1},\ y^t)$ に相当する。錐技術を参照したときのＲの効率性値は y_b^{t+1}/y_a^{t+1} となる。同様に，t時点における実際の生産フロンティア上の点はＱで，錐技術をフロンティアとしたときのその効率性値は y_b^t/y_a^t である。y_b^{t+1}/y_a^{t+1} および y_b^t/y_a^t は，それぞれt時点とt＋１時点での規模の効率性という。よって，⑶⑺左辺の分母分子がそれぞれ x^{t+1}，x^t における規模の効率性である。規模要因⑶⑺は，x^t から x^{t+1} への規模変化に伴う規模の効率性の変化を計測したものであるといえる。それでは規模の効率性とは何か。

規模の効率性は点Ｐにおいて最大値１を取る。図１に明らかなように点Ｐにおいて生産性は最大となり，点ＰのことをMPS（most productive scale）という。規模の効率性は，個々の規模において最大生

産性を達成する錐技術のフロンティアからの距離を測ることで，実際の生産性の最大生産性からの乖離を評価している。t+１時点のＱ点とｔ時点のＲ点の生産性を比較すれば，Ｒ点の方がＱ点よりもMPSにおける最大生産性に近い。そのことが $t+1$ 時点とｔ時点の規模の効率性 ${y_b}^{t+1}/{y_a}^{t+1}$ と ${y_b}^t/{y_a}^t$ の差として測られている。

錐技術に基づくMalmquist生産性指数の規模要因は，規模効率の変化によって規模の生産性に与える影響を計測するものといえる。このような錐技術に基づくMalmquist生産性指数の規模要因の計測にはMPSが必須である。よってMPSが存在しない場合には，錐技術に基づく生産フロンティア線を引くことができないため，規模要因を計測することができない。たとえば，大域的に規模に関して収穫逓増（生産フロンティアが凸）であるような場合にはMPSが存在せず，錐技術に基づくMalmquist生産性指数では規模要因を計測できない。

Balk（2001）は，生産技術が⒁のようなトランスログ型アウトプット距離関数の場合について，錐技術に基づくMalmquist生産性指数の要因分解と規模効率を計測する方法を示した。それによれば，(x^t, y^t) における規模効率は次のように与えられる。

$$ln\{\bar{D}_O^t(x^t, y^t)/D_O^t(x^t, y^t)\} = -\frac{(\epsilon_O^{t-1})^2}{\Sigma_i\Sigma_i\,\alpha_{ij}}$$

明らかに，$\Sigma_i\Sigma_i\,\alpha_{ij}=0$ の場合には定義できない。

一方，HMB生産性指数は，規模要因の計測にMPSではなく規模弾力性 ϵ_O^t を用いる。図２の左図に明らかなように生産フロンティアが凸の場合は規模弾力性値 ϵ_O^t は１より大きく，その場合は規模の増大とともに生産性は限りなく大きくなる。生産フロンティアが凹の場合（右図）は，ϵ_O^t は１より小さくなり規模の拡大とともに生産性は低下する。図１のようにＳ字型生産フロンティアの場合は，$\epsilon_O^t>1$ の局面では規模とともに生産性が上昇（規模の経済）し，MPSにおいて $\epsilon_O^t=1$ となり，$\epsilon_O^t<1$ の局面では規模とともに生産性が低下（規模の不経済）する。したがって，MPSを参照しなくても規模弾性値の値がわかれば，規模変化に伴う生産性への影響は測ることが可能である。実際，HMB生産性指数㉘の規模要因項では，㉕㉖で推定される規模弾力性を使うことでMPSが存在しない場合についても規模要因を計測できる。それは生産フロンティアの定義域全体に及ぶ大域的情報が必要なMPSに対し，規模弾力性は生産フロンティアの傾きに関する局所的情報のみにより推定可能であるからである。この点がHMB生産性指数の大きな利点といえる。

Ｖ．おわりに

本稿ではCaves et al.（1982）によるTörnqvist生産性指数とMalmquist生産性指数の等価性を

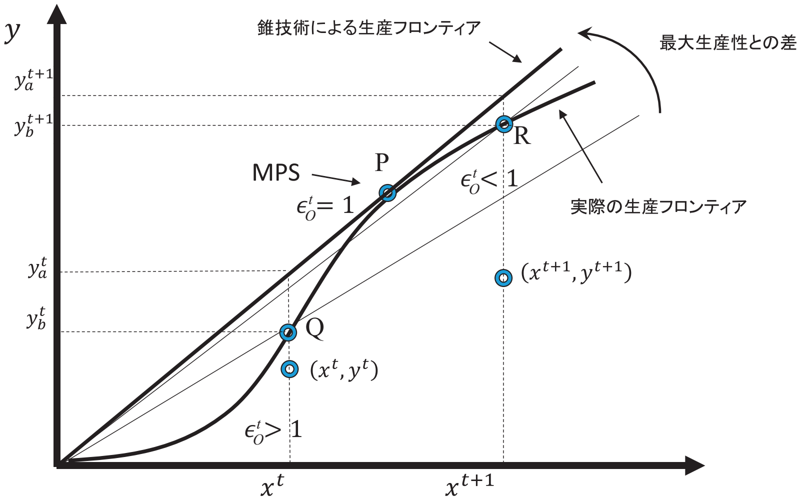

図１　規模効果の計測

Törnqvist生産性指数の要因分解とみなし，そこに非効率性を導入するというアプローチでTörnqvist生産性指数の一般化としてHMB生産性指数を解釈することが可能かどうか検討した。最近の生産性指数理論の研究成果（Mizobuchi（2017））を援用すれば，距離関数がトランスログ型で生産技術がa次同次の場合には，HMB生産性指数の要因分解はTörnqvist生産性指数の要因分解に対し生産非効率の導入による一般化であることが示される。

一方，近年の生産性の要因分解分析では，HMB生産性指数とともに錐技術に基づくMalmquist生産性指数が広く用いられている。本稿ではこの二つの生産性指数について，規模要因の計測法における相違を比較検討した。その結果，錐技術に基づくMalmquist生産性指数は最適な生産効率規模（MPS）が存在しない場合に規模効率が計測できないのに対し，規模弾力性を利用するHMB生産性指数にはその制約がないことが明らかになった。一方，従来から知られているように錐技術に基づくMalmquist生産性指数には推移性を満たすという顕著な性質があり，両者の優劣は一義的には決められない。どちらをどう選択し実証研究に用いるかという問題については，今後の研究の発展を待ちたい。

また今後の研究の目指すべき方向としては，生産性の要因に配分非効率を加えることが必要であろう。現在の要因分解に含まれる非効率は技術非効率である。技術非効率は一定のインプットから技術的に可能な最大のアウトプットが生産されていない，あるいは一定のアウトプットを生産するのに技術的に可能な最小のインプット以上の投入がなされているという状態である。これに対して，配分非効率は政策や市場の不完全性などの歪みに由来する非効率であり，それが生産性に及ぼす影響について計測することは政策的にも意義がある。Nemoto and Goto（2006）は単一アウトプットの自己双対なCES関数を用いた先駆的な研究であるが，トランスログ関数を用いた複数アウトプットへ分析を拡張することが望まれる。

最後に，本稿では生産性要因分解の実証研究をレビューすることができなかった。機会があれば稿をあらためて議論したい。

注

1）名古屋高等商業学校経済調査室（現名古屋大学経済学研究科附属国際経済政策研究センター）で行われた一連の生産数量指数研究は，わが国におけるその代表的成果といえる。ペンローズ（1932），山田（1930）（1933）にその一端を見ることができる。

2）時点ではなく生産主体を基準主体と比較主体にとって生産性指数を定義することは，全く同様にできる。

3）生産関数は生産フロンティアとして定義されている（$y \leq f(x)$）。効率性はアウトプットではなくインプットで測ることもできて，その場合の効率性指標は$f^{-1}(y)/x$となる。

4）Hicks-Moorsteen-Bjurek指数はHicks-Moorsteen指

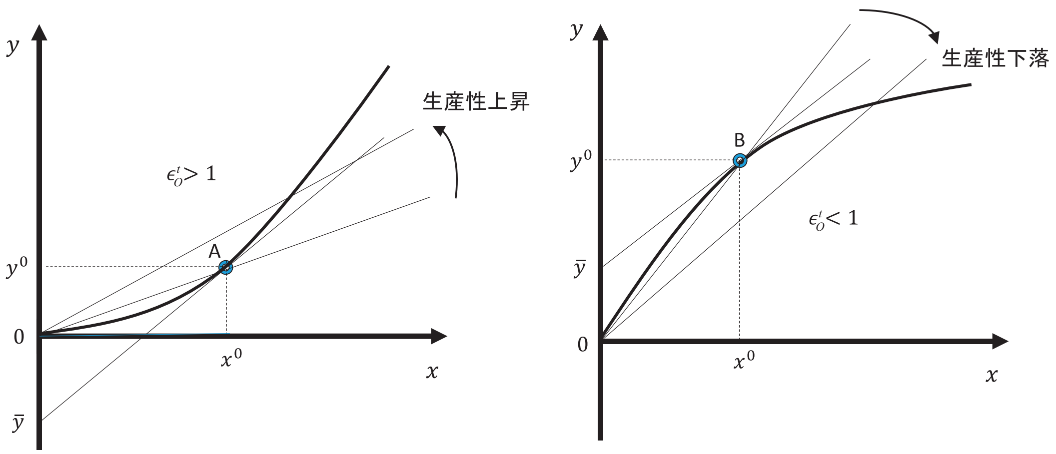

図２　生産フロンティアの形状と規模弾力性

規模弾力性 $\epsilon_O^t = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^0}{y^0}\frac{y^0 - \bar{y}}{x^0} = 1 - \frac{\bar{y}}{y^0}$　点Aでは $\epsilon_O^t > 1$，点Bでは $\epsilon_O^t < 1$

数またはMoorsteen-Bjurek指数と呼ばれることが多いが，本稿では両者をまとめてHMB指数とする。
5）DEAでは S^t が凸集合であることを仮定することが通常だが，経済学の標準的仮定ではインプット集合とアウトプット集合の凸性を仮定する。両者の相違は効率性の値に影響するだけでなく，生産性要因分解においては規模要因に大きな違いをもたらす。後者の仮定に基づく効率性分析については根本・尾関（2006）がある。
6）証明はShephard（1970）の命題61およびFäre and Primont（1995）の第2章を参照。
7）証明はShephard（1970）の命題60およびFäre and Primont（1995）の第2章を参照。
8）インプット距離関数ベースのMalmquist生産性指数はフィッシャー形式では

$$MP_I^F = \{D_I^t(x^t, y^t)/D_I^t(x^{t+1}, y^{t+1}) \cdot D_I^{t+1}(x^t, y^t)/D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})\}^{1/2}$$

となる。(x^t, y^t) が分子に現れるのは比例条件のためである。t+1期にアウトプットが一定でインプットのみt期の λ 倍になったとき生産性が λ^{-1} 倍となるようにしている。
9）式(9)による要因分解について，根本（2004）はアウトプット1種類，インプット2種類の場合について図解している。
10）生産性指数の比例条件は，比較時点でアウトプットとインプットがそれぞれ基準時点の λ 倍，μ 倍になるとき生産性は λ/μ 倍になることをいう。
11）一般的な適用可能性を持たせるためのMalmquist生産性指数の拡張は4節で扱う。
12）$TO^F(y^{t+1}, y^t)$ はフィッシャー指数形式のTörnqvistアウトプット指数，$TI^F(x^{t+1}, x^t)$ はフィッシャー指数形式のTörnqvistインプット指数である。
13）$\nabla_{lnx} lnD_O^t(x^t, y^t) = (\partial lnD_O^t/\partial lnx_1^t, \partial lnD_O^t/\partial lnx_2^t, \cdots, \partial lnD_O^t/\partial lnx_m^t)'$ である。
14）他にLöthgren and Tambour（1996）は，DEAを前提としてその解法である線形計画法の基底解の入れ替えに関わる最小増加限界をΔλとすることを提案している。
15）HMB生産性指数の着想はMoorsteen（1961）に遡るとされる。実際にHMB生産性指数を定式化したのはBjurek（1996），Färe, Grosskopf and Roos（1996），Balk（1998）である。
16）ここにインプット距離関数ベースのMalmquist生産性指数を置けば，インプット距離関数ベースのHMB生産性指数の要因分解が得られる。
17）より詳細な照明はMizobuchi（2017）の命題8および付録を参照。また溝渕（2019）に簡明な解説がある。
18）Ray and Desli（1997）は，この二つの項の和を規模要因としている。
19）この方法の実データへの応用はOrea（2002）により行われている。

参考文献

阿部修人（2017/2018）「公理的アプローチ：フィッシャー指数，トルンクビスト指数の比較」経済セミナー No. 699。

山田保治（1930）「本邦製造業の生産数量指数」『調査報告』No.9，名古屋高等商業学校産業調査室。

山田保治（1933）「本邦生産数量指数総覧－自1874年 至1931年」No.14，名古屋高等商業学校産業調査室。

根本二郎（2004）「公的事業体の運営効率評価」『経済科学』第52巻1号，PP.1-15。

根本二郎・尾関淳哉（2006）「非パラメトリックな一般廃棄物処理事業組合の効率性分析とその経済学的基礎」『会計検査研究』第34号，PP.181-192。

ペンローズ，E.F（1932）「日本農産物の生産数量指数について」『商業経済論叢』第5巻，PP.459-489。

溝渕英之（2019）「生産性指数について」『季刊経済理論』第56巻第3号，PP.31-41。

Balk, B. M.（1998），*Industrial Price, Quantity, and Productivity Indices: The Micro-Economic Theory and an Application*, Kluwer Academic Publishers.

Balk, B.M.（2001），"Scale efficiency and productivity change", *Journal of Productivity Analysis* 15, PP.159-183.

Balk, B.M. and J.J. Zofio（2018），"The many decompositions of total factor productivity change", ERIM Report Series Paper, 2018.

Bjurek, H.（1996），"The Malmquist total factor productivity index", *Scandinavian Journal of Economics* 92, PP.303-313.

Caves, D.W., L.R. Christensen and W.E. Diewert,（1982），"The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity", *Econometrica* 50, PP.1393-1414.

Diewert, W.E., and K.J. Fox（2017），"Decomposing productivity indexes into explanatory factors", *European Journal of Operational Research* 256, PP.275-291.

Färe, R., S. Grosskopf,,B. Lindgren, and P. Roos（1992），"Productivity changes in Swedish pharmacies 1980-1989: A non-parametric Malmquist approach", *Journal of Productivity Analysis* 3, PP.85-101.

Färe, R., and D. Primont（1995），*Multi-output production and duality: theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers.

Färe, R., S. Grosskopf,,B. and P. Roos（1996），"On two definitions of productivity", *Economics Letters* 53, PP.269-274.

Fuentes, H.J., E Grifell-Tatjé and S. Perelman（2001），"A parametric distance function approach for Malmquist productivity index estimation", *Journal of Productivity Analysis* 15, PP.79-94.

Löthgren, M. and M. Tambour（1996），"Alternative approaches to estimate returns to scale in DEA-models", Working Paper No. 90, Stockholm school of economics.

Mizobuchi, H. (2017), "A superlative index number formula for the Hicks-Moorsteen productivity index", *Journal of Productivity Analysis* 48, PP.167-178.

Moorsteen, R. H. (1961), "On measuring productive potential and relative efficiency", *Quarterly Journal of Economics* 75, PP.451-467.

Nemoto, J. and M. Goto (2005a), "Productivity, efficiency, scale economies and technical change: a new decomposition analysis of TFP applied to the Japanese prefectures," *Journal of the Japanese and International Economies* 19, PP.617-634.

Nemoto, J. and M. Goto (2005b), "Productivity, efficiency, scale economies and technical change: a new decomposition analysis of TFP applied to the Japanese prefectures," NBER Working Paper Series 11373.

Nemoto, J. and M. Goto (2006), "Measurement of technical and allocative efficiencies using a CES cost frontier: a benchmarking study of Japanese transmission-distribution electricity," *Empirical Economics* 31, PP.31-48.

Orea, L. (2002), "Parametric Decomposition of a Generalized Malmquist Productivity Index", *Journal of Productivity Amalysis* 18, PP.5-22.

Peyrache, A. (2014), "Hicks-Moorsteen versus Malmquist: A connection by means of a radial productivity index", *Journal of Productivity Analysis* 41, PP.435-442

Ray, S.C., and E Desli (1997), "Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries: comment", *American Economic Review* 87, PP.1033-1039.

Shephard, R.W. (1970), *Theory of cost and production functions*, Princeton University Press.

Törnqvist, L. (1936), "The bank of Finland's consumption price index", *Bank of Finland Monthly Bulletin* 10, PP.1-8.