『経済科学』第70巻第４号（2023年３月発行）
THE ECONOMIC SCIENCE, Vol.70, No.4, March 2023
DOI:10. 18999/ecos. 70. 4. 191

確率フロンティアモデルにおける生産者間の空間的相互依存関係の考慮*

Spatial Stochastic Frontier Models

塚　本　高　浩**
TSUKAMOTO Takahiro

A wide variety of spatial stochastic frontier models, which merge stochastic frontier models and spatial econometric models, have been proposed. However, these models have not been clarified systematically. In this study, we introduce (non-spatial) stochastic frontier models and basic models of spatial econometrics, systematically categorize the spatial stochastic frontier models, and then clarify the characteristics and issues of each. Specifically, we start with the (non-spatial) stochastic frontier models and review the basic models of spatial econometrics—the spatial lag of X model (SLX), the spatial autoregressive model (SAR), and spatial error models (SEM). We then use the category of these three basic models to review the following spatial stochastic frontier models—spatial lag of X stochastic frontier models (SLXSF), spatial autoregressive stochastic frontier models (SARSF), and spatial inefficiency error stochastic frontier models (SIESF). Finally, we discuss the applicability and extensibility of these models.

Keywords: Efficiency, Productivity, Spatial interdependence, Spatial econometrics

* 本稿は，2022年8月30日にマレーシア・ランカウイで行われた28th International Input-Output Association Conferenceで報告した内容の一部を纏めたものである。本研究の遂行にあたっては，JSPS科研費20J30006，21K20139の助成を受けている。
** 中京大学経済学部
School of Economics, Chukyo University

Ⅰ．はじめに

経済学で定義される生産関数は，生産要素のインプットと生産物の技術的に可能な最大のアウトプットとの関係を表す関数であり，費用関数は一定のアウトプットをするために要する最小費用の関数である。よって生産関数も費用関数も実現可能集合のフロンティアであり，通常のミクロ経済学が仮定するような合理的行動を生産者がするならば，フロンティア上で生産活動が行われているはずである。しかしながら，実世界から得られた観測データを見ると，フロンティア上で生産活動を行っていない生産者が存在する。確率フロンティアモデルは，このフロンティアからの乖離を「非効率性」として明示的に取り入れることで，フロンティアと非効率性の推定を行う計量経済学的手法である[1)]。

さて，生産活動は，集積の経済に代表されるような外部性の存在等によって空間的に相互依存関係であることが考えられる。しかし，標準的な確率フロンティアモデルでは，生産者間の独立を仮定しており，推定値にバイアスが含まれる可能性がある。そこで，空間計量経済学の知見を導入することによって空間的相互依存関係を許容した確率フロンティアモデルが近年提案されている。これらのモデルは一般に「空間確率フロンティアモデル」と呼ばれており，生産活動が空間的に相互依存している場合においても，従来の非空間確率フロンティアモデルよりも適切に推定できる。また，生産活動が空間的に相互依存しているかどうかを統計学的に検定することや，空間的相互依存の大きさを推定することが可能になる。

空間確率フロンティアモデルは，想定している空間的相互依存の構造が異なる様々な種類のモデルが提案されている。また，確率フロンティアモデルはその誤差項の構造が複雑であるが故に，空間計量経済学の知見を単純に導入すると発生する特有な問題がある。そこで本稿では，確率フロンティアモデルおよび空間計量経済学の基本モデルを整理した上で，空間確率フロンティアモデルを体系的に分類し，それぞれの特徴や問題点，今後の展望を明らかにすることを目的とする。

本稿の残りの構成は次の通りである。第2節では，空間を考慮しない標準的な確率フロンティアモデルを提示する。第3節では，空間計量経済学の3つの基本モデルを示す。第4節では，空間計量経済学の知見を取り入れた確率フロンティアモデルである「空間確率フロンティアモデル」を分類して提示し，特徴と問題点を示す。第5節では，今後の展望に関して議論する。

Ⅱ．確率フロンティアモデル

確率フロンティアモデルは，Aigner et al.（1977）やMeeusen and van den Broeck（1977）がほぼ同時に最初に提案した[2)]。このモデルの特徴は，通常のノイズを捉える確率変数と非効率性を説明する確率変数の2つから構成される誤差項を有することである。標準的な確率フロンティアモデルには，生産関数モデルと費用関数モデルが存在するが，それらを一般的に表記すると次のように表せる。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{v} \mp \boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{v} \sim \ (\boldsymbol{0}, \sigma_v^2 \boldsymbol{I}_n), \qquad \boldsymbol{u} \sim^{+} (\boldsymbol{\mu}, \sigma_u{}^2 \boldsymbol{I}_n).$$

本稿では，複号∓は，確率フロンティア生産関数モデルの場合はマイナス，確率フロンティア費用関数モデルの場合はプラスを意味する。なお，複号±は，確率フロンティア生産関数モデルの場合はプラス，確率フロンティア費用関数モデルの場合はマイナスを意味する（復号同順）。生産関数モデルの場合，$\boldsymbol{y}$ はアウトプットのベクトル，$\boldsymbol{X}$ はインプットや生産技術に影響を与える変数などの行列（定数項を含む）を表し，費用関数モデルの場合は，$\boldsymbol{y}$ は費用のベクトル，$\boldsymbol{X}$ はインプットや生産要素価格などの行列（定数項を含む）を表す。$\boldsymbol{v}$ は観測誤差などを説明する互いに独立な確率分布であり，正規分布を仮定することが多い。$\boldsymbol{u}$ は非効率性を説明する互いに独立な非負の確率分布である。この非効率性は，生産関数モデルの場合は技術非効率性，費用関数モデルの場合には費用非効率性（技術非効率性と投入要素の配分非効率性の両方を含んだ非効率性）と解釈される。通常，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ も互いに独立を仮定する。確率フロンティアモデルにおいて非効率性を説明する確率変数 $\boldsymbol{u}$ にAigner et al.（1977）は半正規分布，Meeusen and van den Broeck（1977）は指数分布を仮定した。これらの分布は単一のパラメーターしか持たないため，その後よりフレキシブルな複数のパラメーターを持つ分布を仮定したモデルが開発された。例えばStevenson（1980）は（トランケイトされた）切断正規分布を仮定したモデルのほ

かに，ガンマ分布を仮定した確率フロンティアモデルを提案した。

確率フロンティアモデルでは，フロンティアの推定に加えて生産者ごとの効率性のスコアが計算できる。コブ＝ダグラス型生産（費用）関数などのように被説明変数を対数値にして推定する場合，生産者 i の効率性は $\exp(\mp u_i)$ で与えられる。しかし，u_i は観測不能である。そこで，Jondrow et al.（1982）は観測可能な $\varepsilon_i \coloneqq v_i \mp u_i$ を条件付きとした u_i の期待値を用いることを提案した。つまり，Jondrow et al.（1982）タイプの効率性スコア ES_i^{JLMS} は次のようである。

$$ES_i^{JLMS} = \exp(E(\mp u_i | \varepsilon_i)).$$

また，Battese and Coelli（1988）は ε_i を条件付きとした $\exp(\mp u_i)$ の期待値を用いることを提案した。つまり，Battese and Coelli（1988）タイプの効率性スコア ES_i^{BC} は次のようである。

$$ES_i^{BC} = E(\exp(\mp u_i) | \varepsilon_i).$$

これらの効率性スコアは，推定値を用いて計算される。Kumbhakar and Lovell（2003）で言及されているように，ES_i^{BC} は分析者が知りたい効率性の定義そのものの条件付き期待値であるから，特に u_i が0に近くない場合に，ES_i^{JLMS} よりも望ましい。

以上のように確率フロンティアモデルでは，生産者ごとの効率性のスコアが計算できるので，その決定要因を探ろうとする研究が多くなされている。Kalirajan（1981）などの非効率性の決定要因を知るための初期の研究では，最初に確率フロンティアモデルを用いて非効率性スコアを計算し，それを被説明変数として回帰分析をするという２段階手法が採られた。しかし，この２段階手法は，u が互いに独立という１段階目の推定で用いる仮定に矛盾している。その後の研究の進展によって，フロンティアと非効率性の決定要因モデルを同時推定する１段階手法が提案された（Kumbhakar et al., 1991; Reifschneider and Stevenson, 1991; Huang and Liu, 1994; Caudill et al., 1995; Battese and Coelli, 1995）。

Kumbhakar and Lovell（2003）で言及されているように，非効率性の決定要因が存在し，それが説明変数 X と相関するならば，それを考慮しない通常の確率的フロンティアモデルを用いた生産可能性フロンティアのパラメーターの推定値はバイアスを持つ。このことは効率性のスコアにも当然影響を与える。ゆえに，例え非効率性の決定要因に関心がないとしても，非効率性の決定要因が存在し得るならばそれを考慮した１段階手法のモデルの使用が望ましい。本稿では１段階手法の代表的なモデルとして Battese and Coelli（1995）が提案したモデルを行列表記に書き直して紹介する[3]。

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{v} \mp \boldsymbol{u}, \qquad (1) \\ &\boldsymbol{v} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma_v^2 \boldsymbol{I}_n), \qquad \boldsymbol{u} \sim N^+(\boldsymbol{\mu}, \sigma_u^2 \boldsymbol{I}_n), \\ &\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{Z\delta}, \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{Z}$ は非効率性の決定要因変数の行列（定数項を含む）であり，$\boldsymbol{\delta}$ は未知のパラメーターのベクトルである。非効率性を説明する確率変数は，$\boldsymbol{Z\delta}$ で規定される $\boldsymbol{\mu}$ を平均とする正規分布を0でトランケイトした非負の切断正規分布である。$\boldsymbol{\mu}$ の値が大きい場合，非効率性の期待値は大きくなる。このモデルは，最尤法を用いて推定することが出来る。推定に必要な対数尤度関数とその導出方法は，補論を参照されたい。

Ⅲ．空間計量経済学の基本モデル

確率フロンティアモデルを含む多くの計量経済学モデルは，一般に，観察の対象になる経済主体が互いに独立した関係にあると仮定している。生産行動に関して効率性を分析しようとする場合，地理的に近接する生産者は様々な外部性の存在等によって相互に依存した関係にあることが考えられるならば，経済主体は互いに独立した関係にあるとするこの仮定は不適切である。空間計量経済学は，経済主体が空間的に依存した関係（空間依存）にあることを前提としたうえで，それらの行動をモデルによって捉えて推定しようとする計量経済学のサブフィールドである。

空間計量経済学の基本モデルは，説明変数間に空間的自己回帰構造を導入するSpatial lag of X model（SLX），被説明変数間に空間的自己回帰構造を導入するSpatial autoregressive model（SAR[4]）と誤差項に空間構造を導入するSpatial error model（SEM）の３つのモデルおよびそれらの統合モデルである（Elhorst, 2014）。本節ではこの３つのモデルの特徴

を概観する。

1．Spatial lag of X model（SLX）

説明変数の空間ラグ項を持つSpatial lag of X model（SLX）は次のように表せる。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\tau} + \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma_v^2 \boldsymbol{I}_n),$$

ここで $\boldsymbol{y}$ は被説明変数ベクトル，$\boldsymbol{X}$ は定数項を含む説明変数行列。$\boldsymbol{\beta}$ は推定される未知のパラメーターのベクトル，$\boldsymbol{W}$ は空間重み行列，$\boldsymbol{\tau}$ は空間依存の強さを規定する推定される未知のパラメーターのベクトルである。空間重み行列 $\boldsymbol{W}$ は地域間の関係性の強さを描写する非負の非確率的な行列である。自地域への直接的な影響は取り除くために，対角行列は0とする。空間計量経済学の分野では様々な空間重み行列の決め方は提案されており，例えば境界を接しているか否かや，地域間の地理的または経済的な距離の減少関数などの利用が提案されている。SLXは説明変数の空間ラグ項 $\boldsymbol{WX\tau}$ が導入されたモデルであり，ある地域の説明変数が周辺地域の被説明変数に影響を及ぼす構造となっている（なお，しばしば実施される行基準化（各行和を1に基準化）を施した空間重み行列を使用した場合，空間ラグ項は他地域の変数の加重平均となる）。SLXでは空間ラグ項は外生的であるため，特筆すべき推定上の問題は生じず，最小二乗法（OLS）を用いることで最良不偏推定量を得ることができる。

空間計量経済学モデルでは，ある地域の説明変数が当該地域だけでなく周辺地域の被説明変数に影響を及ぼすことがあるため，次のような説明変数の限界効果行列を議論することが多い。

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}^{r\prime}} = \boldsymbol{I}_n \beta_r + \boldsymbol{W} \tau_r,$$

ここで $\boldsymbol{x}^r$ は r 番目の説明変数ベクトル，τ_r は $\boldsymbol{\tau}$ の r 番目の要素を意味する。この行列の対角要素は自地域に関する偏導関数 $\partial y_i / \partial x_i^r$ であり，非対角要素は異なる地域に関する偏導関数 $\partial y_i / \partial x_j^r$, for $i \neq j$ である。この行列の非対角要素が0でなければ，空間的スピルオーバーが生じていると解釈される（LeSage and Pace; 2009）。よって，SLXは $\tau_r = 0$ でない限り空間的スピルオーバーが存在するモデルである。$\boldsymbol{W}$ の対角要素は全て0であるので，SLXにおける自地域に関する限界効果は $\boldsymbol{\beta}$ で規定されることがわかる。なお，SLXでは，ある地域の説明変数が周辺地域の被説明変数に影響を及ぼすが，その効果がさらに波及することはない。このような波及形態はローカルなスピルオーバーと呼ばれる。

2．Spatial autoregressive model（SAR）

被説明変数の空間ラグ項を持つSpatial autoregressive model（SAR）は次のように表せる。

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma_v^2 \boldsymbol{I}_n),$$

ここで，ρ は空間依存の強さを規定する未知のパラメーターである。SARは，被説明変数の空間ラグ項 $\rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$ が導入されているモデルであり，ある地域の被説明変数が周辺地域の被説明変数に影響を及ぼす構造となっている。空間ラグ項が内生的であるため，そのことを考慮しない最小二乗法（OLS）等の推定方法を用いた推定量はバイアスを持つ。一致性のある推定方法として，最尤法や二段階最小二乗法が用いられる。Kelejian et al.（2006）やLeSage and Pace（2009）などが言及しているように，通常の線形モデルと異なりSAR構造を有するモデルでは，$\boldsymbol{\beta}$ は説明変数の限界効果を意味しないので注意が必要である。説明変数の限界効果行列は次のように表せる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}^{r\prime}} = (\boldsymbol{I}_n - \rho \boldsymbol{W})^{-1} \beta_r = (\boldsymbol{I}_n + \rho \boldsymbol{W} + \rho^2 \boldsymbol{W}^2 + \cdots) \beta_r.$$

SARは $\rho = 0$ でない限り空間的スピルオーバーがあるモデルである。なお，SARでは，ある地域の被説明変数が周辺地域の被説明変数に影響を及ぼすとともにそれがさらにその周辺地域の被説明変数にも影響を及ぼす。このように無限に波及が続いていく波及形態はグローバルなスピルオーバーと呼ばれる。この無限に波及する過程は逆行列を無限級数展開することによっても理解できる。

なお，SARには容易にSLXに含まれる説明変数の空間ラグ項を導入できる。このモデルはSpatial Durbin model（SDM）と呼ばれるが，推定方法はSARのための手法を利用すればよい。

3．Spatial error model（SEM）

誤差項に空間構造を持つSpatial error model（SEM）は，いくつかの定式化が提案されているが，一般化すると次のように表現できる。

$$\boldsymbol{y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{v},\qquad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{W}),\qquad \boldsymbol{\varepsilon}\sim(\boldsymbol{0},\ \sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{I}_n).$$

誤差項の構造が，（他地域を含む）確率変数 $\boldsymbol{\varepsilon}$ と空間重み行列 $\boldsymbol{W}$ で構造化されていることに特徴がある。SEMの中でも代表的なモデル（本稿では，狭義のSEMと呼ぶ）は誤差項に空間自己回帰構造を導入されてものであり，次のように表せる。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon},\\&\boldsymbol{\varepsilon}=\lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{v},\qquad \boldsymbol{v}\sim N(\boldsymbol{0},\ \sigma_v^2\boldsymbol{I}_n),\end{aligned}$$

ここで，λ は空間依存の強さを規定する推定される未知のパラメーターである。狭義のSEMは，誤差項に空間ラグ項 $\lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{\varepsilon}$ が導入されているモデルであり，ある地域の誤差項が周辺地域の誤差項に影響を及ぼす構造となっている。正規分布の再生性より，$\boldsymbol{\varepsilon}$ もまた正規分布 $N(\boldsymbol{0},\ \sigma_v^2(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{W}')^{-1})$ に従う。説明変数の限界効果行列は次のように表せる。

$$\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{x}^{r\prime}}=\boldsymbol{I}_n\beta_r.$$

この行列の非対角成分は全て0である。よってSEMは，SLXやSARと異なり，LeSage and Pace（2009）の定義する空間的スピルオーバーがないモデルである。これは，空間依存を考慮する箇所（すなわち誤差項）が説明変数の影響を受けないからである。誤差項の構造は誘導形では次のように表せる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{I}_n+\lambda\boldsymbol{W}+\lambda^2\boldsymbol{W}^2+\cdots)\boldsymbol{v},$$

この表現からわかる通り，$\lambda=0$ でない限り誤差項内部でグローバルなスピルオーバーが表現されているが，これは説明変数に関連するものではない。このスピルオーバーは潜在的な厄介な変数（Glass et al., 2016）の存在などで生じるものであり，経済学的な解釈には困難を伴う。推定には最尤法や実行可能なGLS法が用いられる。なお，このモデルが正しい場合に，誤差項の空間依存を無視してOLSで推定した場合でも不偏推定量が得られるが，有効性を持たない。

Ⅳ．空間確率フロンティアモデル

確率フロンティアモデルに空間計量経済学モデルの知見を導入したモデルがいくつか提案されている。本節では，これらのモデルを導入された空間計量経済学モデルの区分で体系的にまとめるとともに，各モデルの特徴と問題点を整理する。また，通常の線形モデルでの誤差項は，経済学的な意味をほとんどもたないが，確率フロンティアモデルでは，誤差項を構成する１つである非負の確率変数が，非効率性という重要な意味を持つ。そこで本稿では，ある地域の非効率性が周辺他地域の変数に与える影響も併せて議論する。

1．Spatial lag of X stochastic frontier model（SLXSF）

確率フロンティアモデルとSLXを統合させたSpatial lag of X stochastic frontier model（SLXSF）は次のように一般的に表現できる。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{W}X\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{v}\mp\boldsymbol{u},\\&\boldsymbol{v}\sim(\boldsymbol{0},\ \sigma_v^2\boldsymbol{I}_n),\qquad \boldsymbol{u}\sim^{+}(\boldsymbol{\mu},\ \sigma_u^2\boldsymbol{I}_n).\end{aligned}$$

このモデルにおける説明変数に関する限界効果行列は次の通りである。

$$\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{x}^{r\prime}}=\boldsymbol{I}_n\beta_r+\boldsymbol{W}\tau_r.$$

このように，SLXSFはSLXと同様に $\tau_r=0$ でない限りローカルなスピルオーバーがあるモデルである。説明変数は自地域だけでなく周辺他地域のフロンティアも経由して被説明変数に影響を及ぼす構造になっている。社会資本など説明変数に外部性が存在する場合に適している。

次に，非効率性に関する限界効果行列は次の通りである。

$$\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{u}'}=\mp\boldsymbol{I}_n.$$

明らかに，この行列の非対角成分は0であるので，SLXSFはある地域の非効率性は周辺他地域に影響を与えない構造である。なお，SLXSFに含まれる空間ラグ項は外生的であるので，推定には特筆すべき問題は生じず，通常の非空間確率フロンティアモデルのための推定手法を用いればよい。

2．Spatial autoregressive stochastic frontier model（SARSF）

確率フロンティアモデルとSARを統合させたSpatial autoregressive stochastic frontier model（SARSF）は次のように一般的に表現できる。

$$\boldsymbol{y}=\rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{v}\mp\boldsymbol{u}, \qquad (2)$$
$$\boldsymbol{v}\sim(\boldsymbol{0},\sigma_v^2\boldsymbol{I}_n), \qquad \boldsymbol{u}\sim^{+}(\boldsymbol{\mu},\sigma_u^2\boldsymbol{I}_n).$$

ある地域の被説明変数が周辺他地域のフロンティアを経由して被説明変数に影響を及ぼすモデルである。生産活動の外部性が存在する場合に適している。(2)式を誘導形にすると次のように表せる。

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{v}\mp(\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{u}.$$

このことから，説明変数に関する限界効果行列は次のように表現できる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}^{r\prime}}=(\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\beta_r=(\boldsymbol{I}_n+\rho\boldsymbol{W}+\rho^2\boldsymbol{W}^2+\cdots)\beta_r.$$

よってSARと同様に，SARSFは$\rho=0$でない限りグローバルなスピルオーバーがあるモデルである。次に，非効率性に関する限界効果行列は次のようになる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{u}'}=\mp(\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W})^{-1}=\mp(\boldsymbol{I}_n+\rho\boldsymbol{W}+\rho^2\boldsymbol{W}^2+\cdots).$$

よって，SARSFでは，$\rho=0$でない限りある地域の非効率性の変化は周辺他地域の被説明変数に影響を及ぼすことがわかる。非効率性の変化は周辺他地域のフロンティアのシフトを導くことで被説明変数に影響を及ぼす構造になっているので，周辺他地域の非効率性に対して影響を及ぼす構造ではない。

SARSFは，様々な特定化したモデルが提案されている。非効率性を意味する非負の確率変数$\boldsymbol{u}$に，Glass et al.（2016）は半正規分布仮定している。また，Ramajo and Hewings（2018）は，Battese and Coelli（1992）が提案した非空間の確率フロンティアモデルの誤差構造を導入し，非効率性が時間の経過で変化することを許容したSARSFを開発した。また，Tsukamoto（2019）は，先述したBattese and Coelli（1995）の誤差構造を導入し，非効率性の決定要因モデルを導入したSARSFを提案した。最尤推定に必要な対数尤度関数とその導出方法は，補論を参照されたい。

3．Spatial inefficiency error stochastic frontier model（SIESF）

これまでのモデルでは，ある地域の非効率性が周辺他地域の非効率性に影響を及ぼす構造ではなかった。そこでこの非効率性における空間依存をモデリングするために，SEMの誤差項の構造を確率フロンティアモデルの非効率性を説明する誤差項に導入したモデルであるSpatial inefficiency error stochastic frontier model（SIESF）を紹介する。SIESFは次のように一般化して表される。

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{v}\mp\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi},\lambda,\boldsymbol{W})\geq\boldsymbol{0}.$$

SIESFは非効率性の空間依存をモデリングしていることに特徴がある。ある地域の非効率性が周辺他地域の非効率性に影響を及ぼす定式化であり，非効率性の変化がフロンティアのシフトを導くことはない。また，説明変数$\boldsymbol{X}$は周辺地域に影響を与えない（つまり空間的スピルオーバーがない）。$\boldsymbol{\beta}$は限界効果を表す（$\partial\boldsymbol{y}/(\partial\boldsymbol{x}^{r\prime})=\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{\beta}_r$）。狭義のSEMと同様に空間自己回帰プロセスを非効率性に仮定したモデル（Straightforward SIESFと呼ぶことにする）は次のように表せる。

$$\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\xi},$$
$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{\xi}.$$

空間計量経済学の狭義のSEMとは異なり，Straightforward SIESFでは確率フロンティアモデルの仮定から$\boldsymbol{u}$が非負の確率変数でなければならない。$\boldsymbol{\xi}$は非負の確率変数であり，かつ空間的自己相関を規定するパラメーターが非負であれば（$\lambda\geq0$），$\boldsymbol{u}$は非負の確率変数となる。しかしながら，$\lambda<0$の時は，$\boldsymbol{u}$はもはや非負の確率変数ではない。

このことは，この定式化が負の空間自己相関を許さないことを意味する。Areal et al.（2012）はStraightforward SIESFを推定しているが，上記の理由により，彼らの定式化は負の空間的自己相関$\lambda<0$を許さない。

確率フロンティアモデルを用いた多くの経済学の実証研究では，非効率性の分布に非負の0近傍での確率密度が高い半正規分布や切断分布を仮定している。しかしながら，Straightforward SIESFでは$\lambda>0$の場合においても，非効率性を表す非負の確率変数$\boldsymbol{u}$は0近傍で極めて小さい値となる。もし，$\boldsymbol{\xi}$が切断正規分布（半正規分布含）に従うとしても，$\boldsymbol{u}$は切断正規分布にはならない（正規分布と異なり切断正規分布には再生性はない）。非効率性の分布の0付近の確率密度が極めて小さい場合，推定されるフロンティアの解釈に困難をもたらす。フロンティア付近で生産活動できる確率がほぼないことを意味するからである。

Vidoli et al.（2016）は，狭義のSEMと同様に正規分布に従う確率変数が空間自己回帰すると仮定した場合に導かれる誤差項の分布を0でトランケイトした非負の半正規分布$N^{+}(\boldsymbol{0}, \sigma_u^2(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}(\boldsymbol{I}_n-\lambda\boldsymbol{W}')^{-1})$を非効率性の分布として利用している。この定式化により，0近傍における低い確率密度の問題が回避される。しかし，空間的自己回帰プロセスの前提がトランケイトにより崩壊してしまっているといった問題が残る。

また，これまで紹介したSIESFの最も重大な問題点は，非効率性の空間依存の要因がわからないことであろう。確率フロンティアモデルの説明で述べた通り，非効率性の決定要因が存在している可能性がある。観測される多くの変数が空間依存しているといわれている（Pace and Zhu, 2012）。非効率性の決定要因が空間依存している場合，非効率性も見かけ上空間依存する。しかしこれは，ある地域の非効率性が他地域の非効率性に影響を及ぼすことを意味しない。空間依存している非効率性の決定要因の脱落したモデルでは，ある地域の非効率性が周辺他地域の非効率性に影響を及ぼしている（真の空間的スピルオーバー）のか，非効率性の決定要因が空間的に相関しているのか（見かけ上の空間的スピルオーバー）を識別できない。この両者の識別は経済学的に重要である。前者は外部性が生じていることを示すものであるが，後者はそうではない。このように，既存モデルは非効率性が空間依存している理由がブラックボックスになってしまう重大な問題がある。そこで，こうした問題に対処できるSIESFもSkevas（2020）やTsukamoto and Maeda（2021）などで提案されている。このように，SIESFは確率フロンティアモデルの誤差構造に起因する特有の問題が生じるため，注意を要する.

V．今後の展望

本稿で紹介したように，様々な空間確率フロンティアモデルの開発が行われている。しかしながら実証分析は，例えばイタリアのワイン産業（Vidoli et al., 2016）や宿泊産業（Bernini and Galli, 2022），日本の製造業（Tsukamoto, 2019）などが存在するものの，未だ数は少ない。統計ソフトにおける空間確率フロンティアモデルを推定するための信頼できるパッケージも皆無であり，推定するためには基本的には分析者自身でコードを書いて推定する必要があることも影響しているだろう。また，地理情報を含んだ統計情報のさらなる整備も重要であろう。過去には確率フロンティアモデルを第1段階として推定して効率性スコアを計算し，それを被説明変数として空間計量経済学モデルを用いて空間依存を調べるという，統計学的には望ましくない2段階手法を用いている実証研究もある（例えば，Geys; 2006）。空間確率フロンティアモデルを用いてこうした過去の研究結果の検証をすることも期待される。

統計モデルのさらなる改良も重要である。例えば，本稿で紹介したモデルに使用されている空間重み行列は先験的に与える必要があるが，定義の仕方は無数に存在するため，必ずしも正しい空間重み行列を与えることはできない。空間計量経済学の分野では，空間重み行列それ自体を推定する研究も行われており（例えばBhattacharjee and Jensen-Butler, 2013），こうした知見の空間確率フロンティアモデルへの導入が期待される。また本稿では，空間計量経済学の知見を導入した確率フロンティアモデルを紹介したが，空間計量経済学以外の空間統計手法を導入することも考えられる。例えば，地球統計学的な手法や，スパースモデリングの手法の導入が考えられる。こうした空間統計手法は日進月歩で開発されている。

A. 補論

A1．非空間確率フロンティアモデルの対数尤度関数の導出

本節では，Battese and Coelli（1995）が提案した確率フロンティアモデルの対数尤度関数の導出方法を誌面の許す限り丁寧に示す。⑴式をスカラー形式で表現すると次のようになる。

$$y_{it}=x_{it}{}'\beta+v_{it}\mp u_{it},\qquad i=1,2,\cdots,N,\ t=1,2,\cdots,T_i,$$
$$v_{it}\sim N(0,\sigma_v^2),\ u_{it}\sim N^+(\mu_{it},\sigma_u^2),$$
$$\mu_{it}=z_{it}{}'\delta.$$

ここで，２つの確率変数から成る誤差項を

$$\varepsilon_{it}\coloneqq v_{it}\mp u_{it}$$

と置く。また，

$$\sigma^2\coloneqq{\sigma_v}^2+{\sigma_u}^2,\qquad \gamma\coloneqq\frac{{\sigma_u}^2}{{\sigma_v}^2+{\sigma_u}^2}$$

とパラメーター化する。いま，$N(0,\sigma_v^2)$に従う v_{it} の確率密度関数は，

$$f_v(v_{it})=\frac{1}{\sqrt{2\pi{\sigma_v}^2}}\exp\left(-\frac{v_{it}^2}{2{\sigma_v}^2}\right).$$

また，０でトランケイトされた非負の切断正規分布 $N^+(\mu_{it},\sigma_u^2)$ に従う u_{it} の確率分布は，$u_{it}\geq 0$ の区間において

$$f_u(u_{it})=\frac{1}{\sqrt{2\pi{\sigma_u}^2}\cdot\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)}\exp\left(-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2{\sigma_u}^2}\right).$$

仮定により，v_{it} と u_{it} は独立なので，

$$f_{uv}(u_{it},v_{it})=f_v(v_{it})\cdot f_u(u_{it})$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)}\exp\left(-\frac{v_{it}^2}{2{\sigma_v}^2}-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2{\sigma_u}^2}\right)$$

である。$\varepsilon_{it}=v_{it}\mp u_{it}$ であるので，$v_{it}=\varepsilon_{it}\pm u_{it}$ を代入すると

$$f_{u\varepsilon}(u_{it},\varepsilon_{it})=\frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_v}\right)}\cdot\exp\left(-\frac{(\varepsilon_{it}\pm\mu_{it})^2}{2{\sigma_v}^2}-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2{\sigma_v}^2}\right)$$

となる。これを用いて周辺確率密度関数を求めることで ε_{it} の確率密度関数 $f_\varepsilon(\varepsilon_{it})$ を導ける。積分範囲に注意すると

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(\varepsilon_{it})&=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)}\cdot\exp\left(-\frac{(\varepsilon_{it}\pm\mu_{it})^2}{2{\sigma_v}^2}-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2{\sigma_u}^2}\right)du_{it}\\
&=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)}\cdot\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2{\sigma_v}^2{\sigma_u}^2}\left[u_{it}^2-2\left(\frac{\mu_{it}{\sigma_v}^2\mp\varepsilon_{it}{\sigma_u}^2}{\sigma^2}\right)u_{it}\right]-\frac{{\mu_{it}}^2{\sigma_v}^2+{\varepsilon_{it}}^2{\sigma_u}^2}{2{\sigma_v}^2{\sigma_u}^2}\right\}du_{it}\\
&=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)}\cdot\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2{\sigma_v}^2{\sigma_u}^2}\left(u_{it}-\left(\frac{\mu_{it}{\sigma_v}^2\mp\varepsilon_{it}{\sigma_u}^2}{\sigma^2}\right)\right)^2-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu_{it}\pm\varepsilon_{it})^2\right\}du_{it}\\
&=\left[\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma_v\sigma_u\sigma^{-1})}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(\sigma_v\sigma_u\sigma^{-1})^2}\left(u_{it}-\left(\frac{\mu_{it}\sigma_v^2\pm\varepsilon_{it}\sigma_u^2}{\sigma^2}\right)\right)^2\right\}du_{it}\right]\\
&\quad\cdot\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{\mu_{it}\pm\varepsilon_{it}}{\sigma}\right)\cdot\left(\Phi\,\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

となる。ただし，ϕ と Φ はそれぞれ標準正規分布の確率密度関数と分布関数を表わす。いま積分部分に着目する。$z_{it}^{\mathrm{A}}=\left\{u_{it}-\frac{\mu_{it}{\sigma_v}^2\mp\varepsilon_{it}{\sigma_u}^2}{\sigma^2}\right\}/(\sigma_v\sigma_u\sigma^{-1})$ とおくと，$du_{it}/dz_{it}^{\mathrm{A}}=(\sigma_v\sigma_u\sigma^{-1})$ である。また，$0\leq u_{it}<\infty$であることから，

$$-\frac{\mu_{it}\sigma_v{}^2 \mp \varepsilon_{it}\sigma_u{}^2}{\sigma_v\sigma_u\sigma} \le z_{it}^{\mathrm{A}} < \infty$$

である。よって

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma_v\sigma_u\sigma^{-1})} \exp\left\{-\frac{1}{2(\sigma_v\sigma_u\sigma^{-1})^2}\left(u_{it}-\left(\frac{\mu_{it}\sigma_v{}^2 \mp \varepsilon_{it}\sigma_u{}^2}{\sigma^2}\right)\right)^2\right\} du_{it}$$

$$= \int_{-\frac{\mu_{it}\sigma_v{}^2 \mp \varepsilon_{it}\sigma_u{}^2}{\sigma_v\sigma_u\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma_v\sigma_u\sigma^{-1})} \exp\left\{-\frac{z_{it}^{\mathrm{A}2}}{2}\right\} dz_{it}{}^{\mathrm{A}} \cdot |\sigma_v\sigma_u\sigma^{-1}|$$

$$= \int_{-\frac{\mu_{it}\sigma_v{}^2 \pm \varepsilon_{it}\sigma_u{}^2}{\sigma_v\sigma_u\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_{it}^{\mathrm{A}2}}{2}\right\} dz_{it}{}^{\mathrm{A}}$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{it}\sigma_v{}^2 \mp \varepsilon_{it}\sigma_u{}^2}{\sigma_v\sigma_u\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_{it}\sigma_v{}^2 \mp \varepsilon_{it}\sigma_u{}^2}{\sigma_v\sigma_u\sigma}\right).$$

ゆえに，誤差項の確率密度関数$f_\varepsilon(\varepsilon_{it})$は次のようになる。

$$f_\varepsilon(\varepsilon_{it}) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{\mu_{it} \pm \varepsilon_{it}}{\sigma}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_{it}\sigma_v{}^2 \mp \varepsilon_{it}\sigma_u{}^2}{\sigma_v\sigma_u\sigma}\right) \cdot \left(\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{\mu_{it} \pm \varepsilon_{it}}{\sigma}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_{it}(1-\gamma) \mp \varepsilon_{it}\gamma}{\sigma\sqrt{(1-\gamma)\gamma}}\right) \cdot \left(\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma\sqrt{\gamma}}\right)\right)^{-1}.$$

ε_{it}は互いに独立であるから，$\boldsymbol{\varepsilon}$の同時確率密度関数は

$$f_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{t=1}^{T_i}\left[\frac{1}{\sigma}\phi\,\frac{\mu_{it} \pm \varepsilon_{it}}{\sigma} \cdot \Phi\left(\frac{\mu_{it}(1-\gamma) \mp \varepsilon_{it}\gamma}{\sigma\sqrt{(1-\gamma)\gamma}}\right) \cdot \left(\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma\sqrt{\gamma}}\right)\right)^{-1}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{N}\prod_{t=1}^{T_i}\left[\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{it} \pm \varepsilon_{it}}{\sigma}\right)^2\right\} \cdot \left(\Phi\left(\frac{\mu_{it}(1-\gamma) \mp \varepsilon_{it}\gamma}{\sigma\sqrt{(1-\gamma)\gamma}}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma\sqrt{\gamma}}\right)\right)^{-1}\right].$$

$d\boldsymbol{\varepsilon}/d\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{I}_{NT}$であるから$\boldsymbol{y}$の同時確率密度関数$f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y})$は$f_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon})$と等しい。これに対数をとって，パラメーターを変数とみなすと次の対数尤度関数が得られる。

$$LL(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \gamma, \sigma^2; \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} T_i\right)[\ln\sigma^2 + \ln 2\pi]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i}\left(\frac{\boldsymbol{z}_{it}'\boldsymbol{\delta} \pm y_{it} \mp \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)^2$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i}\ [\ln\Phi(d_{it}) - \ln\Phi(d_{it}^{*})],$$

ただし，

$$\mu_{it}^{*} \coloneqq \boldsymbol{z}_{it}'\boldsymbol{\delta}(1-\gamma) \mp (y_{it} - \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta})\gamma$$

$$\sigma^{*} \coloneqq \sigma\sqrt{(1-\gamma)\gamma}$$

$$d_{it}{}^{*} \coloneqq \frac{\mu_{it}^{*}}{\sigma^{*}}$$

$$d_{it} \coloneqq \frac{\boldsymbol{z}_{it}'\boldsymbol{\delta}}{\sigma\sqrt{\gamma}}.$$

A2. SARSFの対数尤度関数の導出

本節では，SARSFの対数尤度関数の導入方法を示す。⑵式に示した一般のSARSFの誤差項を$\boldsymbol{\varepsilon} \coloneqq \boldsymbol{v} \mp \boldsymbol{u}$とすると

$$\boldsymbol{y} = \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

と表現できる。これを式変形すると

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I}_{NT} - \rho\boldsymbol{W})y - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

となる。$d\boldsymbol{\varepsilon}/d\boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{I}_{NT} - \rho\boldsymbol{W})$であるから，$\boldsymbol{y}$の同時確率密度関数$f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y})$は

$$f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot |\boldsymbol{I}_{NT} - \rho\boldsymbol{W}|$$

となる。Battese and Coelli（1995）と同じ誤差項の構造を想定すると，SARSFの対数尤度関数は次の通りとなる。

$$
\begin{aligned}
LL(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \gamma, \sigma^2; \boldsymbol{y}) &= \ln |\boldsymbol{I}_{NT} - \rho \boldsymbol{W}| \\
&- \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} T_i\right)[\ln \sigma^2 + \ln 2\pi] \\
&- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i}\left(\frac{\boldsymbol{z}_{it}'\boldsymbol{\delta} \pm y_{it} \mp \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta} \mp \rho \Sigma_{j=1}^{N} w_{ij} y_{it}}{\sigma}\right)^2 \\
&- \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} [\ln \Phi(d_{it}) - \ln \Phi(d_{it}^{**})],
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\mu_{it}^{**} := \boldsymbol{z}_{it}'\boldsymbol{\delta}(1-\gamma) \mp \left(y_{it} - \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt}\right)\gamma
$$

$$
d_{it}^{**} := \frac{\mu_{it}^{**}}{\sigma^*}.
$$

謝辞

筆者は，学部3年のゼミ配属から現在に至るまで，根本二郎先生から多大なるご指導を賜った。本稿の内容においても，マレーシアでの学会などにて根本先生には有益なご助言を頂いた。凡才な筆者が研究者の道に進むことができたのは，偏に根本先生のお力添えに依るものである。ここに記して感謝の意を表したい。

注

1）効率性や生産性の概念や分析手法の概要は根本（2007）を参照されたい。

2）標準的な確率フロンティアモデルの詳細は Kumbhakar and Lovell（2003）を参照されたい。

3）このモデルは，Rのパッケージ「frontier」やソフトウェア「FRONTIER4.1」を用いて推定可能であり，非常に多くの実証研究で用いられている。

4）空間計量経済学の主要な文献でも被説明変数の空間ラグが入るモデルの呼び方にも差異があるので注意されたい。本稿ではLeSage and Pace（2009）や空間確率フロンティアモデルの文献（Glass et al., 2016; Tsukamoto, 2019など）に従い，spatial autoregressive model（SAR）と呼ぶが，mixed regressive spatial autoregressive model（Anselin, 1988）やspatial lag model（Elhorst, 2014）と呼ばれることもある。

参考文献

根本二郎.（2007）「非営利事業の生産性と効率性を測る」. 名古屋大学情報連携基盤センターニュース, 6(3-2007), pp.242-248.

Aigner, D., Lovell, C. K., & Schmidt, P.（1977）, "Formulation and estimation of stochastic frontier production function models." *Journal of econometrics*, 6(1), pp.21-37.

Anselin, L.（1988）, *Spatial econometrics: methods and models*（Vol. 4）. Springer Science & Business Media.

Areal, F. J., Balcombe, K., & Tiffin, R.（2012）, "Integrating spatial dependence into stochastic frontier analysis." *Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*, 56(4), pp.521-541.

Battese, G. E., & Coelli, T. J.（1988）, "Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalized frontier production function and panel data." *Journal of econometrics*, 38(3), pp.387-399.

Battese, G. E., & Coelli, T. J.（1992）, "Frontier production functions, technical efficiency and panel data: with application to paddy farmers in India." *Journal of productivity analysis*, 3 (1), pp.153-169.

Battese, G. E., & Coelli, T. J.（1995）, "A model for technical inefficiency effects in a stochastic frontier production function for panel data." *Empirical economics*, 20(2), pp.325-332.

Bernini, C., & Galli, F.（2022）, "How much does satisfaction affect tourism expenditure during and post recessions?." *Current Issues in Tourism*, 25(6), pp.937-954.

Bhattacharjee, A., & Jensen-Butler, C.（2013）, "Estimation of the spatial weights matrix under structural constraints." *Regional Science and Urban Economics*, 43(4), pp.617-634.

Caudill, S. B., Ford, J. M., & Gropper, D. M.（1995）, "Frontier estimation and firm-specific inefficiency measures in the presence of heteroscedasticity." *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(1), pp.105-111.

Elhorst, J. P.（2014）, *Spatial Econometrics From Cross-Sectional Data to Spatial Panels*. Springer, Berlin, Heidelberg.

Geys, B.（2006）, "Looking across borders: A test of spatial policy interdependence using local government efficiency ratings." *Journal of urban economics*, 60(3), pp.443-462.

Glass, A. J., Kenjegalieva, K., & Sickles, R. C.（2016）, "A spatial autoregressive stochastic frontier model for panel data with asymmetric efficiency spillovers." *Journal of Econometrics*, 190(2), pp.289-300.

Huang, C. J., & Liu, J. T.（1994）, "Estimation of a non-neutral stochastic frontier production function."

Journal of productivity analysis, 5(2), pp.171-180.

Jondrow, J., Lovell, C. K., Materov, I. S., & Schmidt, P. (1982), "On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model." *Journal of econometrics*, 19(2-3), pp.233-238.

Kalirajan, K. (1981), "An econometric analysis of yield variability in paddy production." *Canadian Journal of Agricultural Economics/Revue canadienne d'agroeconomie*, 29(3), pp.283-294.

Kelejian, H. H., Tavlas, G. S., & Hondroyiannis, G. (2006), "A spatial modelling approach to contagion among emerging economies." *Open economies review*, 17(4), pp.423-441.

Kumbhakar, C. A. & C.A.K. Lovell (2003), *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kumbhakar, S. C., Ghosh, S., & McGuckin, J. T. (1991), "A generalized production frontier approach for estimating determinants of inefficiency in US dairy farms." *Journal of Business & Economic Statistics*, 9(3), pp.279-286.

LeSage, J., & Pace, R. K. (2009), *Introduction to spatial econometrics*. Chapman and Hall/CRC.

Meeusen, W., & van Den Broeck, J. (1977), "Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error." *International economic review*, pp.435-444.

Pace, R. K., & Zhu, S. (2012), "Separable spatial modeling of spillovers and disturbances." *Journal of Geographical Systems*, 14(1), pp.75-90.

Ramajo, J., & Hewings, G. J. (2018), "Modelling regional productivity performance across Western Europe." *Regional Studies*, 52(10), pp.1372-1387.

Reifschneider, D., & Stevenson, R. (1991), "Systematic departures from the frontier: a framework for the analysis of firm inefficiency." *International economic review*, pp.715-723.

Skevas, I. (2020), Inference in the spatial autoregressive efficiency model with an application to Dutch dairy farms. *European Journal of Operational Research*, 283(1), pp.356-364.

Stevenson, R. E. (1980), "Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation." *Journal of econometrics*, 13(1), pp.57-66.

Tsukamoto, T. (2019), "A spatial autoregressive stochastic frontier model for panel data incorporating a model of technical inefficiency." *Japan and the World Economy*, 50, pp.66-77.

Tsukamoto, T., & Maeda, I. (2021), Yardstick Competition and Spatial Interdependence of Cost Efficiency in Local Governments: Development and Application of an Interpretable Spatial Inefficiency Stochastic Frontier Model. Available at SSRN 3993631.

Vidoli, F., Cardillo, C., Fusco, E., & Canello, J. (2016), "Spatial nonstationarity in the stochastic frontier model: An application to the Italian wine industry." Regional Science and Urban Economics, 61, pp.153-164.