

心理学実験における推定精度の観点からの実験刺激選択法

藤田 和也

要旨

心理学実験、特に実験刺激を実験者がコントロールでき、認知モデリングの手法を利用する実験室実験において、参加者の特性などのパラメータを推定精度高く測定することは検定などの側面においても重要となる。サンプルサイズや実験刺激などの実験デザインはパラメータの推定精度などを規定する要因となり、かつ実験者側がコントロールできるという意味で着目すべきものである。しかし、とりわけ実験刺激に関しては、推定精度などの観点から統計的に最適な刺激選択を行ったという記述のある研究は少なく、どのように実験デザインを決定したのか不明瞭な場合もある。そこで本研究では、学力測定や質問紙調査に主に利用されてきた、推定精度を最大化するような刺激選択法の一つである Computerized Adaptive Testing (CAT) に着目した。

研究 1 では CAT で提案されているフィッシャー情報量 (F 情報量) を基準として刺激を選択する手法を、時系列依存を含んだ認知モデルである Q 学習モデルに対して適用した。第一ステップで計算負荷の低い F 情報量で膨大な刺激の中から推定精度が高くなりそうな刺激を絞り込み、第二ステップで Markov Chain Monte Carlo (MCMC) 推定により精密に刺激デザインの良さを評価するという two-step procedure を提案した。F 情報量で予測された刺激間での推定精度の大小関係は、MCMC ベースでのシミュレーションにおける刺激間での推定精度の大小関係と一致しており、two-step procedure が有効に機能することを支持する結果が得られた。また、刺激により推定精度を向上させると相関係数のバイアスが抑えられることや、Q 学習モデルにおける CAT の効果も一定程度確認された。

研究 2 では、単一のモデルを仮定して刺激選択を行う従来の CAT を、複数のモデルを同時に考慮して刺激選択を行える手法に拡張した。この提案手法ではモデルの不確実性を考慮するために Model averaging という手法と CAT を組み合わせた。シミュレーション実験の結果、誤ったモデルを仮定した CAT は推定精度の向上が、真のモデルを仮定した CAT より悪かった。また提案手法は、真のモデルを仮定した CAT と同等のパフォーマンスを示した。実際の実験場面では真のモデルは基本的に未知であるため、提案手法はモデル仮定に関して頑健に刺激選択を行える手法であるという点で望ましい。

研究 3 では、階層モデルにより集団レベルパラメータを推定する時に、従来の CAT が及ぼす影響を検討した。従来の CAT は個人ごとに分析するためのモデルを仮定しており、反復測定状況で得られたネストデータに適用する階層モデルを仮定してはいないという意味でモデル誤指定の問題が存在する。しかし、シミュレーション実験の結果、従来の個人レベルモデルを仮定した CAT を行っても、階層モデルにおける集団レベルパラメータの推定精度も向上することが明らかとなった。

研究 4 では、研究 3 を踏まえ、薬学領域で提案されている集団レベルパラメータの推定精度を直接最大化する刺激選択法 (集団レベル CAT) を、認知モデルに適用した。さらに、従来の個人レベルモデルを仮定する CAT が集団レベル CAT と比べて、推定精度の意味で損失がどれくらいあるかを確認した。その結果、集団レベル CAT は、集団レベルパラメータの推定精度を最も良くすることが経験的に分かった。また個人レベルモデルを仮定する従来の CAT は、理論的に最適な集団レベル CAT に比べても損失がほとんどないことが分かった。これは研究 3 の結果を補強する結果であり、反復測定状況においても、より実装のコストが低い個人レベル CAT で代用できる可能性が示された。

本研究では、複雑な認知モデルにおいても CAT が適用可能であり、また推定精度を効率的に向上させることを確認した。また、モデル誤指定に着目し、モデル誤指定が問題にならない状況や、問題になりうる際に刺激選択法の効果を保つ手法を提案した。今後は、階層モデルにおける刺激選択法および検出力やモデル選択の観点からの刺激選択法の精緻化、および推定精度とモデル選択の関連などに関する更なる研究を行うことが必要だろう。

目次

1. 第1章: イントロダクション	6
1.1 実験刺激選択の重要性	6
1.2 学力測定場面における Computerized Adaptive Testing	7
1.3 認知実験への適用.....	8
1.3.1 認知実験における実験刺激選択	8
1.3.2 Adaptive design optimization	8
1.3.3 認知実験における CAT	9
1.4 実験刺激選択の問題.....	9
1.4.1 統計的基準による刺激選択法.....	9
1.4.2 モデル仮定の影響.....	10
1.4.3 反復測定状況におけるモデル仮定の影響.....	10
1.5 本研究の目的.....	10
1.6 本博士論文の構成.....	11
2. 第2章: 方法.....	12
2.1 CAT の統計的根拠.....	12
2.2 ADO	13
2.3 CAT.....	15
2.4 F 情報量による刺激選択	15
3. 第3章: 研究1.....	16
3.1 イントロダクション	16
3.2 方法	17
3.2.1 Q 学習モデル.....	17
3.2.2 Fixed design のための F 情報量の導出	18
3.2.3 adaptive design のための F 情報量の導出.....	19
3.3 シミュレーション実験	19
3.3.1 SS1-1.....	19
3.3.1.1 方法	19
3.3.1.2 結果と考察	20
3.3.2 SS1-2.....	23
3.3.2.1 方法	23
3.3.2.2 結果と考察	23
3.3.3 SS1-3.....	25
3.3.3.1 方法	25
3.3.3.2 結果と考察	26
3.3.4 SS1-4.....	27
3.3.4.1 方法	27
3.3.4.2 結果と考察	28
3.4 考察	30

4. 第4章: 研究2.....	31
4.1 イントロダクション	31
4.2 方法	31
4.2.1 Model averaging	31
4.2.2 D最適化と MA の組合せ	32
4.3 シミュレーション実験	33
4.3.1 SS2-1: 回帰分析	33
4.3.1.1 モデル.....	33
4.3.1.2 方法	34
4.3.1.3 結果と考察	35
4.3.2 SS2-2: CPT とプロスペクト理論.....	36
4.3.2.1 モデル.....	36
4.3.2.2 方法	38
4.3.2.3 結果と考察	38
4.3.3 SS2-3: Tversky and Kahneman (1992) モデルと Prelec (1998) モデル.....	39
4.3.3.1 モデル.....	39
4.3.3.2 方法	40
4.3.3.3 結果と考察	40
4.4 考察	42
5. 第5章: 研究3.....	44
5.1 イントロダクション	44
5.2 方法: HADO.....	45
5.3 シミュレーション実験	45
5.3.1 SS3-1.....	45
5.3.1.1 モデル.....	45
5.3.1.2 方法	46
5.3.1.3 結果と考察	47
5.3.2 SS3-2.....	48
5.3.2.1 モデル.....	48
5.3.2.2 方法	48
5.3.2.3 結果と考察	49
5.4 考察	50
6. 第6章: 研究4.....	52
6.1 イントロダクション	52
6.2 方法	53
6.2.1 PFIM.....	53
6.2.2 スタイン推定量.....	54
6.3 シミュレーション実験	55
6.3.1 SS4-1.....	55
6.3.1.1 方法	55
6.3.1.2 結果と考察	55

6.3.2 SS4-2.....	57
6.3.2.1 方法	57
6.3.2.2 結果と考察	58
6.3.3 SS4-3.....	58
6.3.3.1 方法	58
6.3.3.2 結果と考察	59
6.4 考察	60
6.4.1 本研究の限界.....	61
7. 第7章: 総合考察.....	62
7.1 研究結果のまとめ.....	62
7.2 統計的基準による刺激選択の必要性	63
7.3 モデル誤指定による推定精度への影響.....	65
7.4 モデル誤指定によるモデル選択への影響	66
7.5 本博士論文のまとめ	67

1. 第1章: イントロダクション

1.1 実験刺激選択の重要性

実際にデータを取得し、データ分析を行い何らかの結論を出す心理学研究のようなタイプの領域の場合、統計的行為が伴う場合がある。その際に、どのようにデータを取得しどのような分析を行うのかは、研究の妥当性を左右する。心理学研究あるいは心理統計学の中では、真のパラメータの値を推測する推定、主にはある操作の効果があるかどうかの2値判断を行う検定、どのモデルが尤もらしいかを判断するモデル選択という統計的行為が主要である。推定に関しては、特性パラメータの推定値や幅を持って推定を行う区間推定、あるいは主にはある操作の効果の大きさを表す効果量の推定も含む。検定に関しては、現在の心理学研究の多くが、検定結果をベースにして議論を行っているだろう。モデル選択とは、例えば認知心理学研究において、複数のモデルを用意して、どのモデルが尤もらしいかをデータから判断する統計的手法である。回帰分析において組み込む説明変数を選択する変数選択もモデル選択の一種と考えることができる。この中でも、(パラメータの)推定精度(推定量の分散の逆数)は検定にもモデル選択にも関連する。区間推定で算出された信頼区間が0を含むかどうかと、0を帰無仮説とする検定が有意であるかどうかという結果が対応する(南風原, 2002)ことを考えると、推定精度と検出力が対応することは予想できる。また基本的にはその値が小さいモデルを選択することになる、モデル選択の規準の一つである Akaike Information Criterion (AIC) などを見ると、尤度関数などの基準で推定(最適化)された推定値を使っている(Akaike, 1973)ことなどから、推定とモデル選択が関連することも予想できる。本研究では、先行研究の蓄積や理論的な解析のしやすさから、まずは推定精度に着目する。推定精度と検出力については両者は同時に最大化できる。また推定精度とモデル選択の関連については第7章で触れる。なお本博士論文では、推定精度と言った場合、パラメータの推定精度を表す。「パラメータの」という部分は明らかであるものとして省略する。

これら推定、検定、モデル選択に影響する要因は様々なものがあるが、実験者側がコントロールできる要因として推定法、モデル、そして実験刺激などがある(Heck & Erdfelder, 2019; Murphy & Brincke, 2018)。推定法は多くの場合、最尤法(Myung, 2003)かベイズ推定法(Gelman et al., 2014; Lee & Wagenmakers, 2013; 渡辺, 2012)で考えることが多いだろう。最尤法が分からない読者は Myung (2003) や久保(2012)を参照して欲しい。ベイズ推定については上記の引用(e.g., Gelman et al., 2014)や豊田(2015)、松浦(2016)を参照して欲しい。モデルは、研究者の表現したい認知プロセスによって定まる。これらが固定された状況でも、実験刺激などの実験デザインによって、推定、検定、モデル選択のパフォーマンスは異なる。なお、本研究で言う実験刺激とは、質問紙調査における質問項目、学力測定におけるテスト問題、認知実験における参加者に提示する刺激である。認知実験の例で言えば、単語の記銘課題であれば覚えてもらう単語、意思決定課題であれば各選択肢の内容(報酬額や報酬がもらえる確率)、光や音などの物理刺激の知覚課題であれば、光や音の強さなど定量化された物理刺激の強さや性質である。要するに実験刺激とは、参加者の反応を探るため提示する刺激全般のことである。本研究では特に、実験刺激が推定精度に及ぼす影響に着目する。実験刺激は実験者が自由にコントロールできる要因であるため、実験の最適化を考える時に重要な要因であるからである。

本研究で扱う実験刺激選択と、実験デザインを統計的な観点から決定するという意味で類似し、かつ一般的に普及している領域としては、サンプルサイズ設計(Lakens, 2022; 村井・橋本, 2017; 永田, 2003; Schonbrodt & Wagenmakers, 2018)が挙げられる。サンプルサイズ設計、検出力分析では、必要な検出力を得るためのデータ数が分かるため、データ数が十分かを判断したり、仮にデータ数が多すぎた場合には、取得するデータを減らし、データ収集コストを減らすことができる。統計的な観点から実験をデ

ザインすることで、客観的で手続きの透明性が高くなるためサンプルサイズ設計などは望ましい手法である。さらに、実験刺激などの実験デザインを適切なものを使用すれば、データ数が同じでも推定精度や検出力が向上する (e.g., Bak & Pillow, 2018)。より少ないデータ数で十分な状況になり、データ収集コストを減らせる可能性がある。重要なことは、統計的基準を用いることで、サンプルサイズや実験刺激などの実験デザインを最適化し、客観的で透明性の高い手続きで実験を実施できることである。

1.2 学力測定場面における Computerized Adaptive Testing

推定精度を効率的に向上させるための項目選択法として Computerized Adaptive Testing (CAT; Chang 2015; Cheng and Morgan 2013; Gibbons et al., 2012; Gusten et al., 2022; McGlohen & Chang, 2008; Meijer and Nering 1999; Segall 1996, 2004; Tian et al. 2007; Triantafillou et al. 2008; van der Linden, 2018; Weiss and Kingsbury 1984) が研究されている。質問紙調査や学力測定場面で利用されるモデルとして、項目反応理論 (Item Response Theory, IRT; van der Linden & Hambleton, 1997; 加藤・山田・川端, 2014) がある。この IRT の中で、CAT は項目選択法として研究されている。項目とは、質問項目やテスト問題などのことであり、本研究で言う実験刺激のことである。質問紙調査や学力測定など CAT の文脈では、項目 (item) と呼ばれることが多いが、本研究ではまとめて刺激と呼ぶ。

なお CAT の adaptive とは、参加者の反応データを見てから、参加者に適応的に合わせて刺激を選択する手法を意味する (adaptive design)。例えば、10 試行分データを取った時に、そのデータから暫定的に参加者の学力や特性パラメータは推定できる。その推定値を見てから、次の 11 試行目の刺激を選択するという意味である。この手法では、推定値によって参加者に提示される刺激が異なるため、参加者間で別の刺激が提示されることになる。一方で、従来の心理実験では、実験実施前に実験刺激を決定し、全ての参加者が同一の実験刺激を提示されることが多い。これを fixed design と本研究では呼ぶ。本研究では、adaptive design も fixed design も両方扱うが、重要なことは、どちらのデザインにおいても、刺激選択の基準として統計的な基準を採用しているという点である。刺激選択法に関して統計学的な正確な説明は 2 章で行うとし、1.2 節では直感的な説明を行う。

多くの心理学研究においては、何等かの実験刺激を提示し、参加者から反応データをもらい、参加者の何等かの特性パラメータを推定することになる。例えば、学力測定では、テスト問題を提示し、反応データとして回答 (あるいは正誤データ) を取得し、参加者の学力パラメータを推定することになる。反応データは、刺激の性質と参加者の特性の組合せによって定まる。この刺激と参加者パラメータという入力と、反応データという出力の関係を表すのがモデルである。例えば学力測定場面における IRT (豊田, 2012) では、テスト問題 (刺激) の性質として難易度 (困難度パラメータ) が定量化されており、参加者の学力パラメータ θ が困難度パラメータ β より大きい場合には正答率が上がり、小さければ正答率が下がることが仮定される。このように、刺激と参加者パラメータの組合せによって、各反応データが得られる確率あるいは得られる情報量 (推定の良さ) は変わることに注意が必要である。

参加者パラメータの推定では、個人差を測定することを目標としている。つまり、反応データが個人差を反映していなければならない。IRT では学力パラメータは標準正規分布を仮定することが多い。例えば、学力パラメータ θ が $\theta = 0.5$ あたりの参加者がいたとする。学力が少し高い別の参加者 (e.g., $\theta = 0.6$) は正答率が急激に増加し、学力が少し低い別の参加者 (e.g., $\theta = 0.4$) は正答率が急激に減少するようなテスト問題だった場合、そのテスト問題は個人差を反映した良い問題である。一方で、この問題は極端に学力が高いあるいは低い参加者 (e.g., $\theta = -2$ や $\theta = 2.5$) に対しては、良い問題とは言えない。なぜならその周辺で正答率が変化しづらい、つまりその周辺の個人差を捉えづらいからである。すなわち、そのパラメータの値付近で、正答率や反応データが急激に変化する刺激が良い刺激 (問題) である。

このような正答率の曲線の傾きが急激に変化する値が、学力パラメータの次元上でどこなのかを考えることが重要である。つまり、傾きの傾きである 2 階微分が重要な量となることが予想できる。2 章で紹介するフィッシャー情報量は正にそのような量である。また、ロジスティック関数を仮定した一部のシンプルなモデルについては、選択確率が 50% の時、傾きの変化量は最大になるため、選択確率が五分五分となるような刺激が望ましい (Matching probability, MP; Chen et al., 2019)。厳密には、より複雑なモデルの場合は、選択確率が五分五分となる刺激ではなく、フィッシャー情報量を基準にして刺激選択は行われる。

1.3 認知実験への適用

1.3.1 認知実験における実験刺激選択

CAT は従来、質問紙調査や学力測定場面で使われることが多かった。一方で、2 章で説明する理論的背景を考えると、認知実験場面においても同様に使える手法である。ここでは、認知実験における実験刺激選択の例を挙げる。例えば、確率 1 (100%) で x 円もらえるギャンブル A と、確率 p で y 円もらえるギャンブル B の間での意思決定課題を考える。この時に、何等かの特性パラメータの推定に関して適切な (x, y, p) という刺激の組合せが存在するはずである。あるいは、今すぐ x 円もらえる選択肢 A と、 d 週間後に y 円もらえる選択肢 B の間での意思決定を考える遅延価値割引課題を考え、遅延価値割引モデル (Madden et al., 2003) を適用する状況を考える。この時、興味がある特性パラメータは、遅延によって価値が割り引かれる程度である。この課題では報酬額 x, y そのものや、遅延の長さ (遅延時間) d によって、それぞれの選択肢の価値が変動する。価値の違いによって選択確率が変化するため、結果として選択確率の変化が大きい刺激 (x, y, d) の組合せを考えることができる。

1.3.2 Adaptive design optimization

古くは実験から得られる情報量に関する考察 (Lindley, 1956) から始まり、QUEST (Watson & Peri, 1983) と呼ばれる刺激選択法や、推定精度の観点からの刺激選択法として Ψ メソッド (Kontsevich & Tyler, 1999) やその類似手法 (DiMattina, 2015; Doll et al., 2014; Kujala & Lukka, 2006; Toubia et al., 2013) が提案されてきた。その後続の研究として、一般的な刺激選択の枠組みである Adaptive design optimization (ADO; Cavagnaro et al. 2010; Cavagnaro et al. 2013a, b; Myung & Pitt 2009; Myung et al. 2013) が提案された。これらの手法は、CAT のような教育測定場面というよりは、むしろ精神物理測定などの認知実験領域で議論されてきた手法である。本節でこの刺激選択法について概観する。

認知実験、認知モデルの中でシンプルな部類としては、精神物理測定で使用される関数がある。ロジスティック回帰分析を利用することはその一種であると言える。とりわけ初期段階の研究においては、このような精神物理測定において、傾きや閾値を効率的に精度高く測定することを目的に刺激選択の研究が行われた (Kontsevich & Tyler, 1999; Villarreal et al., 2022)。 Ψ メソッド (DiMattina, 2015) などの手法により、傾きなどの推定が効率よく行えることが示されている。これらの手法は多くがエントロピーを使用した手法である。エントロピーとは乱雑さ、無秩序さや不確実性の程度を表す量という理解で本博士論文を読む上では問題ない。ベイズ推定の枠組みで言えば、不確実性とある程度関連する量である事後分布の標準偏差ができるだけ小さくなるように、つまりエントロピーの減少量が大きくなるように刺激を選択するというのが基本方針である。

その後一般的な刺激選択の枠組みとして ADO が提案された。刺激選択法においては、何等かの統計的基準により刺激の良さ (効用) を定義して、その効用が最大となる刺激を選択すれば良い。ADO は効用の定義を特に指定せず、刺激選択の問題を定義したという意味で、一般的な枠組みである。刺激選択法の性質は、どのような量を効用として定義するかによって変わる。例えば、推定精度の観点からは

Ψメソッドのようにエントロピーの減少量を基準にすることが考えられる (Myung et al., 2013) し、モデル選択の観点からは Kullback-Leibler (KL) 情報量 (Cavagnaro et al., 2010) を基準とすることが考えられる。KL 情報量とは、モデル A とモデル B の違いや離れ具合を表す量である。本研究では、ADO を直接的に扱うわけではないが、ADO は刺激選択研究において重要な位置を占めることや、一般的な ADO の中で CAT を議論することで、CAT の性質が見やすくなる部分があるため、2 章では ADO の説明を加えた。

1.3.3 認知実験における CAT

CAT は従来、質問紙調査や学力測定場面で利用されることが多かった。しかし 2 章で統計学的な背景を説明するが、その背景理論を考えると、心理実験、認知モデルへの適用も同様に行えるような手法である。また ADO の枠組みで考えると、効用としてフィッシャー情報量を採用した手法であり、ADO の特殊ケースと言うこともできる。ADO の枠組みから言っても、自然な手法である。

さらに、CAT を認知実験、認知モデルへ適用することは、学力測定や質問紙調査への適用に比べ、以下の 2 点のメリットも存在する。1 点目は、金銭や物理刺激などそのスケールが予め定まっている刺激を利用する実験の場合、学力測定で行うような項目プールの作成が必要ないため、コストが低く CAT を実施できるという点である。例えば質問紙調査で使う場合、事前に数百人規模のデータを取り項目の性質をパラメータ推定値として数値に対応付ける必要がある。金銭などではスケール(例えば 0 が絶対的な基準として存在する)が初めから決まっているため、いきなり CAT を用いた実験を実施できる。2 点目は、実験課題を用いる方が実験刺激のパターンや課題が複雑になりやすいため、客観的な刺激選択方法である CAT の効果が顕著になりやすい点である。例えば、学力測定では項目プールの項目数だけ刺激のパターンがあることになる。一方、2 選択肢での意思決定課題では、例えば各選択肢の報酬額と報酬確率を操作する場合で、報酬額と報酬確率の値の候補が 10 種類ずつあった場合、単純に考えて $10^4 = 1$ 万通りの刺激パターンの中から選ぶ必要がある。選択肢が増えたり課題が複雑になれば、さらに大量の刺激パターンの中から刺激を適切に決めることは困難になると予想できるため、刺激選択の効果が顕著になりやすい。

1.4 実験刺激選択の問題

1.4.1 統計的基準による刺激選択法

実験刺激の選定基準としては、研究者の経験による、パイロット研究を行い刺激の良さを評価する、先行研究を真似る、選択肢の期待値(期待価値)を揃えるなど何等かの理論的根拠に基づいて決めるなどの方法が考えられる。前半の 2 つはなぜその刺激を選んだかが不明であるし、後半 2 つも手続きは透明性があるが、その刺激が本当に良いのか評価ができない。

そのため、少なくとも統計的な基準においては、最適な刺激を客観的で透明性の高い手続きで選択することが望ましい。少なくとも、統計的にある刺激がどの程度良いのかを評価できれば、その情報は実験デザイン設計の時に有用となるだろう。先行研究のデザインや、経験などによって決めた現在使用している刺激デザインを評価することができる。またパイロット研究を行う時もパイロット研究自体で使用する刺激を、最初から良い刺激に当たりを付けて始めることができるようになる。

現状、より複雑な認知モデルに対して CAT を適用するという研究は多くない。ADO などのエントロピーベースの手法はいくつか研究が存在するが (Ahn et al., 2020; Lesmes et al., 2015; Toubia et al., 2013)、フィッシャー情報量ベースの CAT を複雑な認知モデルに適用するという研究は藤田・岡田 (2019) を除き、著者の知る限りでは存在しない。本博士論文の研究 1 では、Q 学習モデルという時系列依存を含んだ認知モデルに対して CAT を適用し、その効果を検証する。

1.4.2 モデル仮定の影響

1.2 節で説明した通り、刺激と参加者パラメータの組合せと反応データの結びつきを、モデルが決定づける。そのため、刺激により反応データに乗る情報量は、モデルにも依存する。2 章で説明するが、フィッシャー情報量は対数尤度関数を特定しなければ計算できないため、CAT はモデルベースの手法となる。ある実験デザイン、実験刺激の良さは、仮定するモデルによって異なる場合もあるということである。

CAT を実行する際に仮定したモデルが誤っていた時に、刺激選択がどれくらい推定精度を改善できるかは不明である。モデルが事前に既知である状況は実際の心理学研究ではほとんどないため、モデル誤指定により、刺激選択のパフォーマンスがどのように変化するかは検討されるべきである。本博士論文の研究 2 において、モデル誤指定による刺激選択の影響の検討および、複数のモデルを同時に考慮できる刺激選択法の提案を行う。

1.4.3 反復測定状況におけるモデル仮定の影響

実際の心理学研究では、複数の参加者に参加してもらい、各参加者は複数試行を行ってもらい、いわゆる反復測定状況である場合が多い。このような状況で得られるネストデータ、階層データの場合は、マルチレベル分析、Generalized linear mixed model (GLMM)、階層ベイズ (久保, 2012; 清水, 2014; 豊田編, 2017) などの階層モデルを使用することが推奨されている。各参加者内でのデータが似るといふ、級内相関を無視した分析を行うと、タイプ I エラーが上昇することが理由の一つである (Walsh, 1947)。

一方でフィッシャー情報量に基づく CAT は階層モデルを仮定しているわけではない。例えば、学力測定場面の例で言えば、あくまで生徒個人の学力推定のみに関心があり、データは 1 人の生徒の複数試行のデータしか扱わない。あるいは、各生徒のデータは完全に独立に扱われる。本研究では、このようなネストしていないデータ構造に対する個人のためのモデルを個人レベルのモデルと呼ぶ。統計的には (通常の意味での) フィッシャー情報量は、個人レベルのモデルに対して適用される概念である。以降、個人レベルのモデルを仮定して行う CAT を個人レベルの CAT と呼ぶことがある。

反復測定状況に対して CAT を適用する場合、自然に考えられるのは、個人ごとに CAT を適用してデータを収集して、最後に全参加者のデータが揃ったら階層モデルで分析する方法である。このような状況では、CAT は厳密には階層モデルを仮定していないため、モデルを誤指定していると考えられる。一方で、個人のパラメータ推定の精度を高くできれば、階層モデルで推定した全体平均などの集団パラメータも精度が高くなると考えることもできる。個人レベルの CAT が集団レベルのパラメータに及ぼす影響は、現状不明であるため、本博士論文の研究 3 では、この問題を扱う。さらに本博士論文の研究 4 では、集団パラメータの推定精度を直接最大化する手法を提案し、個人レベルの CAT の損失を評価する。これにより、個人レベルのモデルを仮定する CAT を、階層モデルを適用する実験に利用することが問題ないのかどうか分かる。

1.5 本研究の目的

本研究全体の動機は、推定精度の観点から適切な刺激選択を行うことである。主に学力測定場面に使われてきた CAT を、より現実に即した手法となるよう、仮定を緩めたり適用箇所を広げていく流れを取る。研究 1 では Q 学習モデルに対してフィッシャー情報量に基づく刺激選択を適用する。ここでは、単一のモデルを仮定した上で刺激選択を行う。研究 2 では、複数のモデルを同時に考慮した上で刺激選択を行う手法を提案する。研究 3, 4 においては、個人レベルのモデルではなく、階層モデルに対して CAT が及ぼす影響を検討する。

研究1では、Q学習モデルにおいて、報酬額および報酬確率という実験刺激が、推定精度に及ぼす影響を検討する。研究1ではfixed designにおける実験刺激の影響を主に検討する。さらに、実験刺激によりQ学習モデルのパラメータと別の特性パラメータの間の相関係数の推定値が変化するか、およびQ学習モデルにおけるCAT (adaptive design) の影響を検討する。

研究2では、モデル誤指定によって、刺激選択のパフォーマンスが悪化するかどうかを検討する。つまり誤ったモデルを仮定したCATと、正しいモデルを仮定したCATで、どのくらい推定精度に違いが生じるかを確認する。その上で、複数のモデルを同時に考慮したCATという新たな手法を提案し、この提案手法のパフォーマンスを確認する。

研究3では、個人レベルのモデルを仮定したCAT (個人レベルのCAT) が、集団パラメータの推定精度に及ぼす影響を検討した。研究1,2では個人レベルのパラメータの推定精度に着目していたが、研究3では集団平均などの集団パラメータに着目する。

研究4では、研究3を踏まえ、集団レベルのパラメータの推定精度を直接最大化する刺激選択法 (集団レベルCAT) を提案し、その効果を検証する。この集団レベルCATが理論的には集団パラメータの推定精度の観点から最適な刺激選択法となる。その上で、この最適な集団レベルCATと比べて、個人レベルCATはどの程度損失があるのか、つまり個人レベルCATの推定精度はどのくらい低下するのかを確認する。

1.6 本博士論文の構成

本博士論文では第2章でCATやADOの刺激選択法の統計的な説明を行う。第3章でQ学習に関する研究1、第4章で複数のモデルを同時に考慮したCATに関する研究2を説明する。第5,6章では、階層モデルに対してCATを適用する研究を紹介する。第7章において総合考察を行う。付録Aにおいて、適用の際に必要な補足情報を説明する。

2. 第2章: 方法

2.1 CATの統計的根拠

2.1節では、そもそも推定とはどのような行為なのかを含め、最尤法の漸近有効性などのCATの統計的背景について説明する。

推定とは、統計的にはとりうるデータの集合に対して、なんらかの値を対応させる行為である。N人分のデータ $x_i \sim p(x), i = 1, \dots, N$ に対して、取り得るN人分のデータのパターンを χ とすると、推定 γ は $\gamma(\chi) = \xi$ のように何等かの値 ξ を与えることに対応する。この説明から分かるように、データを収集して何等かの値を対応させれば何でも推定(量)と呼べる。例えば、当たりを確率 θ で出すマシンがあるとすると、この確率 θ を推定したいとする。T回このマシンを試してデータ $x = (x_1, \dots, x_T)$ が得られたとする。例えば、(1) データ x に関係なく $1/2$ を返す関数 γ も推定(量)と呼べる。(2) 当たりを1、はずれを0として、その標本平均つまり当たりが出た頻度、割合 $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i$ を算出することも推定と呼べる。(3) ベイズ推定的に(2)のようにデータのみから決まる部分と(1)のように(データに関係なく)事前の信念で推定値を引っ張る部分の合成を推定値とすることも推定と呼べる。これら3つ以外にも無数に推定方式というのは考えられるため、各推定法の良さを評価する必要がある。

$x_i \sim p(x|\xi^*)$ のように、確率変数 X が真のパラメータ ξ^* を持つ確率密度関数 $p(x|\xi^*)$ の確率分布に従うとする。この時、推定量 $\gamma(\chi)$ の評価指標を考える。この推定量 $\gamma(\chi)$ は真値 ξ^* に近いほど良いので、平均的に真値 ξ^* から推定量 $\gamma(\chi)$ がどれくらい離れているかの指標として平均二乗誤差

$$MSE = E[(\gamma(\chi) - \xi^*)^2] \quad (1)$$

を考える。これを少し変形すると

$$MSE = Var[\gamma(\chi)] + (E[\gamma(\chi) - \xi^*])^2 \quad (2)$$

となる。この式の右辺は、第一項が推定量の分散 $Var[\gamma(\chi)]$ を、第二項が推定量の期待値 $E[\gamma(\chi)]$ とパラメータの真値 ξ^* のバイアスの二乗を表しており、「MSE = 推定量の分散 + 推定量のバイアスの二乗」となる。他にも評価指標はありうるものの、基本的にはこのMSEが小さい推定方式ほど望ましいと考えられる。なぜなら推定の目的は真値 ξ^* に近い推定値 $\gamma(\chi)$ を得ることであり、MSEが小さいことは真値と推定値が近いことを表すからである。MSEを小さくする考え方の一つとして、バイアスが0の推定量を考えることがある。バイアスが0となる、つまり推定量の期待値が、パラメータの真値に一致する推定量のことを不偏推定量と呼ぶ。すなわち不偏推定量は

$$E[\gamma(\chi)] = \xi^* \quad (3)$$

となる推定量 γ を表す。不偏推定量に限定した場合、MSEは第二項が0となり消えるため、推定量の分散のみが(MSEと一致するため)評価基準となる。つまり、推定量の分散が小さい推定量の方がより望ましいということが言える。不偏推定量に限らなければ、MSEは分散とバイアスの二乗のバランスで決まるため、このような単純なことは言えないことに注意が必要である。

以上の説明から、不偏推定量に限定すれば、推定量の分散 $Var[\xi]$ が小さければ小さいほど良いことが分かる。ただし、分散はどこまでも小さくできるわけではない。その限界(分散の下限)を与えるのが、以下のCramer-Raoの定理あるいは情報量不等式と呼ばれる式である。パラメータ ξ^* の任意の不偏推定量を $\hat{\xi}$ 、フィッシャー情報量を $F(\xi^*)$ とすると、1次元パラメータの場合、適当な条件の下で

$$Var[\hat{\xi}] \geq \frac{1}{F(\xi^*)} \quad (4)$$

が成り立つ(久保川, 2017)。t試行目におけるF情報行列 $F_t(\xi)$ (チュートリアル論文: Ly et al., 2017) は

$$F_t(\xi) = E \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \log p(y_{it}|\xi) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \log p(y_{it}|\xi) \right\}' \right] \quad (5)$$

と定義される。ただし、 y_{it} は参加者 i の試行 t における観測データ、 $\log p(y_{it}|\xi)$ は対数尤度関数、「 $'$ 」は

転置記号である。 $\left\{\frac{\partial}{\partial \xi} \log p(y_{it}|\xi)\right\}$ はパラメータ数 $\times 1$ の列ベクトルであり、F 情報行列はパラメータ数 \times パラメータ数の行列となる。全試行数分の F 情報行列 $F(\xi)$ は、各試行の F 情報行列の単純和で計算できる。つまり、 $F(\xi) = \sum_{t=1}^T F_t(\xi)$ が成り立つ。期待値 E は、観測データに関して取っている。そのため解析的に F 情報行列を求めておけば、観測データに関して数値的に期待値を取る必要はない。また、F 情報量は参加者パラメータだけでなく、実験刺激にも依存するが、慣習的に対数尤度関数や F 情報量 $F(\xi)$ に関しては、刺激の項は省略する。なお本研究では基本的に事前分布の項 (Ferrando & Lorenzo-Seva, 2007) は入れずに計算を行う。データ数が多くなればなるほど、事前分布の項の影響は相対的に小さくなるからである。

式 (4) は、不偏推定量に限定すれば、分散 $Var[\hat{\xi}]$ が小さいほど良いが、分散はフィッシャー情報量の逆数よりも小さくはできないということである。つまり、(パラメータが 1 次元の場合) フィッシャー情報量の逆数とその限界で、逆に言うと分散がフィッシャー情報量の逆数と一致する推定方式が(不偏推定量の中で) 最適な推定方式と言える。なお、 $Var[\hat{\xi}] = \frac{1}{F(\xi^*)}$ となる推定量、つまり最小の分散を与える推定方式を、有効推定量と呼ぶ。以降、フィッシャー情報量 (フィッシャー情報行列) は F 情報量 (F 情報行列) と略記する場合がある。パラメータが 1 次元の場合 F 情報量、多次元の場合 F 情報行列と呼ぶ。

最尤推定量 $\hat{\xi}$ は適切な条件の下で

$$\hat{\xi} \xrightarrow{d} Norm(\xi^*, F(\xi^*)^{-1}) \quad (6)$$

を満たす (Chang, 2015)。ただし、 $F(\xi^*)$ は点 ξ^* における F 情報行列である。 \xrightarrow{d} は分布収束を表し、本博士論文では推定量 $\hat{\xi}$ の分布が正規分布という分布に収束するという程度の理解で問題ない。つまり、最尤推定量は漸近的に最良であり、漸近分散は F 情報行列で与えられる。最尤推定量は漸近的に有効推定量の性質を満たすため、漸近有効性を持つと言われる。

式(6) について簡単にするためパラメータが 1 次元の場合で説明すると、F 情報量を大きくすればするほど、推定量 $\hat{\xi}$ の推定精度が高まることを表している。そのため、CAT では F 情報量を最大化するような刺激を選択すれば良いことになる。これを Maximum Fisher information (MFI) 基準と呼ぶ。先述した通り、F 情報量は刺激ごとに変わるため、刺激候補ごとの F 情報量を求めておいて、その F 情報量が最大となる刺激を探索すれば良いわけである。パラメータが多次元の場合や、探索法については 2.3 節以降で説明する。

2.2 ADO

Adaptive design では、試行ごとに基本的に以下の 3 ステップを経る: (1) 現在の推定値に基づいて最適な刺激を選ぶ刺激選択ステップ; (2) 最適刺激を参加者に提示し反応データを取得する実験ステップ; (3) 観測データを利用し推定を行う推定ステップ (Myung et al., 2013)。このプロセスは全ての試行において行われる。また、基本的に個人レベルの CAT では各参加者に関して、独立にこの CAT あるいは ADO の手続きは実施される。

刺激選択ステップにおいては、刺激の効用や情報量が最大である刺激を探索する最適化問題を解くことになる。つまり、刺激選択ステップは

$$d^* = \operatorname{argmax}_d U(d) \quad (7)$$

となる d^* を探す最適化問題として捉えることができる。ただし、 d は刺激デザイン、 $U(d)$ は刺激 d の (大域的) 効用を表す。ADO では大域的効用は

$$U(d) = \sum_m p(m) \int \int u(d, \xi_m, y_m) p(y_m | \xi_m, d) p(\xi_m) dy_m d\xi_m \quad (8)$$

と定義される。ただし、 m はモデルのインデックスを表す、 $p(m)$ はモデル m の事前確率、 $p(y_m | \xi_m, d)$

はモデル m の尤度モデル、 \mathbf{y}_m はモデル m が仮に真だった場合における（仮想的）データ、 ξ_m はモデル m のパラメータ、 $p(\xi_m)$ はパラメータに関する事前分布である。 $u(d, \xi_m, \mathbf{y}_m)$ はパラメータ ξ_m 、データ \mathbf{y}_m の下での、刺激 d の局所効用である。つまり、大域的効用 $U(d)$ は、局所効用 $u(d, \xi_m, \mathbf{y}_m)$ についてモデル、仮想的データ、パラメータに関して平均的挙動（積分）を取った量として定義される。なお、モデルの確率 $p(m)$ およびパラメータの事前分布 $p(\xi_m)$ はベイズの定理により更新していく。

局所効用の定義次第で、刺激選択の性質は変わる。推定精度を効率的に向上させるためには、局所効用として

$$u(d, \xi_m, \mathbf{y}_m) = \log \frac{p(\xi_m | \mathbf{y}_m, d)}{p(\xi_m)} \quad (9)$$

と定義されることがある (Myung et al., 2013)。つまり、事前分布と事後分布の比率を取っており、事後分布の不確実性が減るほど効用が高くなると言える。これはエントロピー減少量を最大化するエントロピーベースの手法と一致するとされている (Myung et al., 2013)。

モデル選択のパフォーマンスを効率的に向上させるためには、局所効用として KL 情報量を使用すると良い (Cavagnaro et al., 2010)。KL 情報量は、真の分布を q 、仮定した分布を p とした時、

$$KL(q; p) = \int q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} dx \quad (10)$$

と定義される (小西・北川, 2004)。KL 情報量は、真のモデル q と仮定したモデル p の近さを測る測度と捉えられている。要するに KL 情報量は、対数尤度比の平均挙動を表している。選択肢数 2 の意思決定モデルの場合は、KL 情報量は

$$E_q \left[\log \frac{p(\mathbf{y} | \xi_q^*)}{p(\mathbf{y} | \xi_p^*)} \right] = \sum_t \eta_t^* \log \frac{\eta_t^*}{\eta_t} + (1 - \eta_t^*) \log \frac{1 - \eta_t^*}{1 - \eta_t} \quad (11)$$

となる。ただし、 ξ_q^*, ξ_p^* はそれぞれ真の分布、仮定した分布でのパラメータ真値、 η_t^*, η_t はそれぞれ真の分布、仮定した分布での選択確率である。

また CAT は ADO の特殊ケースである。従来の CAT では、モデルは単一モデルを仮定し、モデル m に関する \sum は消える。ただし単一モデルを仮定することに関しては、推定精度の観点からの ADO でも同様である (e.g., Ahn et al., 2020; Kim et al., 2014)。さらに慣習的に、パラメータ値としては点推定値を利用するためパラメータの事前分布 $p(\xi_m)$ に関する積分も消える。点推定値ではなくベイズ的な考えに基づいて分布全体や特定の範囲を利用する手法も存在する (Chang & Ying, 1996; van der Linden, 1998)。局所効用は F 情報量を利用し、F 情報量の定義から観測データに関する期待値は既に解析的に計算しているため、尤度モデル $p(\mathbf{y}_m | \xi_m, d)$ に関する積分も消える。つまり、積分や \sum の計算は全て消え、大域的効用は単に F 情報量 (あるいは 2.3 節で説明するが F 情報行列の行列式) となる。このように、エントロピーベースの ADO に比べ、F 情報量ベースの CAT は積分計算が必要ないため、計算負荷が低いというメリットがある。ただし F 情報行列自体は解析的に計算する必要がある。意思決定モデルの場合は一般的な式が求められている (Fujita, Okada, & Katahira, 2022b)。

2.1 節では基本的に最尤推定法を仮定して説明を行った。一方で、3 章以降では、MCMC によるベイズ推定を行い、点推定値として事後分布の MAP (maximum a posteriori) あるいは EAP (expected a posteriori) 推定値を利用して F 情報量を計算する。ベイズ推定を利用する理由は 2 点ある。1 点目は、複雑な認知モデルや階層モデルへの拡張を考えた場合、ベイズ推定の方が事前分布を導入するなどにより、より複雑なモデルでも推定できることが多いからである。2 点目は、Stan と呼ばれる MCMC 推定をするためのツールを使うと、様々なモデルをコードで表現するだけで、ほとんど自動的に推定を行ってくれるからである。

また、2.1 節では最尤推定量の分散が、F 情報量の逆数となるという説明を行った。一方で、3 章以降

では、事後分布の標準偏差 (posterior standard deviation; PSD) を指標とし、また F 情報量の逆数が PSD を予測できることを示す。この根拠は 2 点ある。1 点目は、パラメータの(最尤) 推定量の分散 (SE^2) に対応するベイズ的な量は、パラメータの事後分布の分散 (PSD^2) だと考えられるからである。どちらもパラメータの推定量のばらつきを表しているからである。2 点目は、ベイズ統計における点推定値、特に MAP 推定量は、事前分布が無情報事前分布に近いあるいは事前分布の影響度合いがデータからの情報に比べて弱いほど、最尤推定値に近づくからである。

2.3 CAT

パラメータが多次元の場合、F 情報行列はスカラーではないため、1 次元のスカラー量に変換する必要がある。F 情報行列や分散共分散行列のトレースを基準とする A 最適化や T 最適化なども提案されている (Chalmers, 2016; Mulder & van der Linden, 2009)。様々な基準の中で主要な手法として、F 情報行列の行列式を最大化する D (determinant) 最適化が良いとされている (Segall, 1996)。本研究では基本的に D 最適化を利用した CAT を対象とする。

Adaptive design における刺激選択について説明する。つまり、t 試行目までのデータが得られた時に、参加者の t 試行目までの反応データを見てから、t+1 試行目の提示刺激を選択する状況を考えている。 $F_{1:t}(\hat{\xi}_i)$ を t 試行目までの F 情報行列とする。ただし、推定値 $\hat{\xi}_i$ は 1 から t 試行目までのデータから推定した推定値である。t 試行目までの F 情報量は各試行の単純和で計算できる。t+1 試行目で特定の刺激を提示した場合の F 情報行列を $F_{t+1}(\hat{\xi}_i)$ と書くと、D 最適化では

$$\det(F_{1:t}(\hat{\xi}_i) + F_{t+1}(\hat{\xi}_i)) \quad (12)$$

という量を刺激選択基準として、これを最大化する刺激を t+1 試行目の刺激として提示する。なお、式 (12) が刺激選択基準となり、この量を刺激を変えて計算する必要がある。この時、刺激の項は省略していることに注意が必要だが、t+1 試行目の刺激候補の値によって $F_{t+1}(\hat{\xi}_i)$ の値が変わる。t 試行目までは刺激も反応データも確定しているため、 $F_{1:t}(\hat{\xi}_i)$ は t+1 試行目の各刺激候補間で変わらない。 $F_{t+1}(\hat{\xi}_i)$ だけだと今回のモデルの場合、行列式が 0 に退化してしまう (Mulder & van der Linden, 2009) ため、 $F_{1:t}(\hat{\xi}_i)$ も含めて計算している。

2.4 F 情報量による刺激選択

本節では CAT による刺激選択ステップについて説明する。F 情報量はパラメータ値だけでなく、刺激にも依存するため、本節においては、刺激に依存することを強調する目的で $F(\xi, s_l)$ と刺激の項 s_l を明示する。なお、多次元の場合は行列式を基準とするが、適宜 $F(\xi, s_l)$ を F 情報行列の行列式と読み替えて欲しい。 $s_l, l = 1, \dots, L$ は刺激の値を表しており、刺激の候補は L 種類あるとする。例えば、確率 p_A で報酬額 x_A が貰える選択肢 A と、確率 p_B で報酬額 x_B が貰える選択肢を対提示する課題の場合、 $s_l = (p_A, x_A, p_B, x_B)$ となる。例えば、 $s_1 = (0.05, 10, 0.1, 20), s_2 = (0.1, 10, 0.1, 20)$ などと刺激を変えていく。例えば、 p_A, p_B が 10 種類ずつの値、 x_A, x_B が 9 種類ずつの値が刺激の候補値としてある場合は、 $L = 10 * 10 * 9 * 9 = 8100$ である。この 8100 種類の刺激パターン s_l における F 情報量 $F(\xi, s_l)$ を計算して、F 情報量が最大となる推定精度の意味で最も良い刺激を探索する。ただし、パラメータ ξ については、adaptive design の場合は、現在取得済みのデータから推定した推定値を利用する。Fixed design の場合は、パラメータの事前分布を設定し、その分布から生成したパラメータの値で代用する。基本的に、fixed design の場合は、パラメータの生成と F 情報量の計算を複数回繰り返し、F 情報量の平均を算出した上で、その (平均的な) F 情報量を最大化する刺激を選択する。あるいは必要な試行数分のパラメータを生成して、その各パラメータの値を仮定して、試行数分の刺激選択を行う。

3. 第3章：研究1

3.1 イントロダクション

強化学習 (Reinforcement learning, RL; e.g., Daw, 2011; Sutton & Bart, 2018; Watkins & Dayan, 1992) モデルはフィードバックを含んだ人の意思決定行動を説明する理論として研究されてきた。その中でも特に、Q 学習モデルは心理学や神経科学で注目されてきた。Q 学習モデルでは選択枝の価値 (Q 値) を、実際にフィードバックされた報酬額と選択枝の価値の乖離 (報酬予測誤差) に基づいて更新すると仮定される。抑うつなどの臨床的な指標と、Q 学習モデルにおけるパラメータが関連するなどの理由で、臨床心理学の領域でも注目されている (Huys et al., 2013; Robinson & Chase, 2017)。

Q 学習モデルは、多腕バンディット課題によく適用される。この課題では、複数の選択枝の内どれか一つを選択してギャンブルを行う。ギャンブルで勝てば報酬がもらえ、負ければ報酬はもらえない。実験者は、勝った場合にフィードバックされる報酬額の候補値と、報酬が得られる確率である報酬確率をコントロールできる。参加者は、報酬確率は明示されないため、報酬確率を学習し複数試行における報酬最大化を目指す。本研究では選択枝が2つの2腕バンディット課題を扱う。

本研究で扱う問題点は、先行研究における実験刺激 (報酬額, 報酬確率) の選定法が不明瞭であるという点である。例えば、バンディット課題において、実験途中で報酬確率を変化させた方が良いのかどうかは不明である。いくつかの研究 (e.g., Dezfouli et al., 2019; Katahira et al., 2019) は報酬確率を途中で変化させており、また別の研究 (e.g., Beevers et al., 2013) では報酬確率は実験中一定であった。特に、バンディット課題では、選択枝 A と選択枝 B の報酬確率を入れ替える報酬確率逆転の操作を行うことが多い。また、報酬額に関しては、いくつかの研究 (e.g., Gershman, 2016) では各選択枝の報酬額を1に設定することが多い。これらの実験刺激は研究者がコントロールできる要因にも関わらず、実験刺激と推定精度の関連は分かっておらず、推定精度の意味で最適な実験刺激も不明瞭である。

そこで本研究では F 情報量ベースの刺激選択 (CAT) を Q 学習モデルに適用する。従来、学力測定によく用いられてきた F 情報量ベースの刺激選択は、時系列依存を含んだ認知モデルである Q 学習モデルでも機能することを示す。Q 学習モデルにおいても、Wilson and Collins (2019) が”良い実験”デザインについて議論しており、また Daw (2011) では対数尤度関数の2階微分 (i.e., ヘッシアン) により推定精度を評価することにも言及されている。しかし、Daw (2011) においてはヘッシアンにより具体的にどのように実験や推定精度を評価できるのかは示されていない。Wilson and Collins (2019) では、真のパラメータとシミュレーションデータから推定したパラメータの推定値がどれくらい似るかを確認するパラメータリカバリを説明している。これは本研究で提案する two-step procedure (詳しくは後述) における第二ステップに対応する。対数尤度関数の2階微分、特に F 情報量を利用する評価方法の方が、計算負荷が低いというメリットがある。

F 情報量により、事後分布の標準偏差 (事後標準偏差, posterior standard deviation, PSD) が解析的に予測できる。しかし予測性能は、試行数、刺激、パラメータ値に依存し、高くない可能性がある。正確な評価という意味で言うと、MCMC 推定により事後分布を導出し PSD を確認する方が精密な評価である。一方で、MCMC 推定ベースのシミュレーションは、F 情報量の計算に比べ計算負荷が高いという問題点がある。

そこで本研究では、fixed design の方法として、two-step procedure という実験デザイン方法を提案する。Two-step procedure の第一ステップでは、様々な実験刺激の値における F 情報量を計算し刺激の良さを評価する。F 情報量は解析的な計算により計算負荷が低いので、より多くの刺激候補の値について評価を高速に行うことができる。第一ステップでは、大量の刺激候補値の中から推定精度を高めそうな

良い刺激を見つける。Two-step procedure の第二ステップでは、第一ステップで絞り込んだ少数の良い刺激に関して、MCMC ベースで推定精度の評価を行う。つまり、two-step procedure では第一ステップで計算負荷は低い近似的な計算である F 情報量ベースで刺激の候補値を絞り込んでおき、第二ステップで計算負荷は高い正確な評価である MCMC ベースの方法で推定精度の評価を行う。

本研究の刺激選択研究および Q 学習を使用する研究に対する主な貢献は、Q 学習モデルにおける F 情報行列を導出し two-step procedure の提案および評価を行うことである。シミュレーション実験（以下 Simulation Study, SS）では Q 学習モデルにおいて、推定精度と報酬確率（SS1-1）および報酬額（SS1-2）の関連を検討する。さらに以下の 2 つの側面についても検討を行う。一つは、Q 学習モデルのパラメータと別の特性パラメータとの相関係数の推定場面における実験刺激の影響を SS1-3 で検討する。相関係数の希薄化の問題を考えると（e.g., Fleiss & Shrout, 1977; Liu, 1988）、実験刺激により推定精度が低い状況においては相関係数の推定もバイアスが大きくなると予想される。第二に、Q 学習モデルにおける adaptive design (CAT) の効果を検証する（SS1-4）。SS1-1 から SS1-3 までは実験実施前に全ての刺激を決定しておく fixed design の状況でのシミュレーション実験だが、SS1-4 ではデータを見てから刺激を変更する adaptive design での効果検証を行う。

3.2 節では Q 学習モデルの説明を行う。また Q 学習モデルにおける F 情報量の導出も説明する。3.3 節では 4 つのシミュレーション実験を行い、3.4 節において Q 学習モデルにおける刺激選択について総合考察を行う。

3.2 方法

3.2.1 Q 学習モデル

2 腕バンディット課題では、参加者は選択肢 A あるいは B のどちらかを選択し、ギャンブルに勝てば報酬をもらえる（Steyvers et al., 2009）。 k を選択肢のインデックスとし、 $k = 1$ を選択肢 A、 $k = 2$ を選択肢 B とする。 $RP_{t,k}, Re_{t,k}$ をそれぞれ試行 t の選択肢 k における報酬確率および報酬額とする。実験者側は、刺激 $RP_{t,k}, Re_{t,k}$ および試行数 T を操作できる。先行研究では、 $Re_{t,k} = 1$ および $RP_{t,2} = 1 - RP_{t,1}$ の制約を入れることが多い（e.g., Gershman, 2016）。試行 t において選択肢 k を選んでギャンブルを行った時のフィードバックを $r_{t,k}$ で表す。ギャンブルで勝った場合 $r_{t,k} = Re_{t,k}$ となり、負けた場合は $r_{t,k} = 0$ となる。上記の報酬額が 1 の制約がある場合は、 $r_{t,k}$ は 1（あたり）か 0（はずれ）である。 $Re_{t,k}$ と $r_{t,k}$ を区別することに注意が必要である。本研究のクエスチョンは、 $RP_{t,k}$ や $Re_{t,k}$ （および試行数 T ）をどのように最適に選択すれば良いかということである。

Q 学習モデルでは、選択肢の価値を表す Q 値とフィードバックされた報酬額の誤差、 $r_{t,k} - Q_{t,k}(\theta)$ 、が Q 値の更新量を規定すると仮定する。ただし、 $Q_{t,k}(\theta)$ は試行 t の選択肢 k における Q 値、 $\theta = (\alpha, \beta)$ は特性パラメータベクトルであり、標準的な Q 学習モデルの場合は学習率パラメータ α ($0 \leq \alpha \leq 1$) および逆温度パラメータ β ($0 < \beta$) である（Daw, 2011）。標準的な Q 学習モデルにおいては、前試行で選択肢 k が選ばれた場合、選択肢 k の Q 値は

$$Q_{t,k}(\theta) = Q_{t-1,k}(\theta) + \alpha (r_{t-1,k} - Q_{t-1,k}(\theta)) \quad (13)$$

で更新される。なお前試行で選択されなかった選択肢の Q 値は更新されないと仮定される。つまりそれぞれの選択肢の Q 値は

$$Q_{t,1}(\theta) = \begin{cases} Q_{t-1,1}(\theta) + \alpha (r_{t-1,1} - Q_{t-1,1}(\theta)), & \text{if } y_{t-1} = 1 \\ Q_{t-1,1}(\theta), & \text{if } y_{t-1} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$Q_{t,2}(\theta) = \begin{cases} Q_{t-1,2}(\theta) + \alpha (r_{t-1,2} - Q_{t-1,2}(\theta)), & \text{if } y_{t-1} = 0 \\ Q_{t-1,2}(\theta), & \text{if } y_{t-1} = 1 \end{cases} \quad (15)$$

と表される。ただし y_t は試行 t における意思決定データを表し、 $y_t = 1$ は選択肢 A を選んだことを、 $y_t =$

0は選択肢 B を選んだことを表す。すなわち、Q 値は報酬予測誤差, $r_{t,k} - Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta})$, に比例した上で学習率 α にコントロールされて更新される。学習率 α は報酬予測誤差をどれくらい学習して反映させるかを決定するパラメータである。コード実装やF情報量などの計算においては、場合分けよりまとめて1つの式で表現した方が扱いやすい。上記の式をまとめると

$$Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta}) = Q_{t-1,k}(\boldsymbol{\theta}) + I_A(k-1+y_{t-1})\alpha(r_{t-1,k} - Q_{t-1,k}(\boldsymbol{\theta})) \quad (16)$$

と書ける。ただし, $I_A(x) = 1, \text{if } x = 1$ で $I_A(x) = 0, \text{if } x \neq 1$ である。 $I_A(k-1+y_{t-1})$ は要するに $t-1$ 試行目(前試行)で選択肢 k を選んでいたら1を, 選んでいなかったら0を返す関数である。前試行で選択肢 k を選んでいたらQ値を更新し, 選んでいなかったらQ値を更新しないことを表現できている。以降, $I_A(k-1+y_{t-1})$ を $I_A(k, y_{t-1})$ と省略することがある。

2肢意思決定モデルの多くは, 選択肢の価値の差分を説明変数とするロジスティック回帰分析のようなモデル形をしている。試行 t において選択肢Aを選ぶ選択確率 $p(y_t = 1|\boldsymbol{\theta})$ は

$$p(y_t = 1|\boldsymbol{\theta}) = \text{logit}^{-1}\left\{\beta(Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta}))\right\} = \frac{1}{1 + \exp\left(-\beta(Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta}))\right)} \quad (17)$$

と仮定される。そして, 観測データ y_t は

$$y_t \sim \text{Bernoulli}(p(y_t = 1|\boldsymbol{\theta})) \quad (18)$$

とデータ生成されると仮定する。

Q学習モデルにおけるfixed designを検討する場合には上記のモデル表現で問題ない。一方で, Q学習モデルにおけるCAT(adaptive design)を考える場合には, モデル表現を報酬フィードバック $r_{t,k}$ の生成プロセスが明示的に含まれる形に少し変更する必要がある。CATをする上では, $r_{t,k}$ は未知の確率変数として捉えF情報量計算の際に期待値がとられるべき対象であるからである。つまり, $r_{t,k}$ を y_t と同様に確率的に生成される従属変数として捉え, その期待値を計算できるようにする。データ取得プロセスを考えれば

$$r_{t,k} = Re_{t,1}y_t\epsilon_{1,k} + Re_{t,2}(1-y_t)\epsilon_{2,k}, \quad (19)$$

$$\epsilon_{1,k} \sim \text{Bernoulli}\left((2-k)RP_{t,1}\right), \epsilon_{2,k} \sim \text{Bernoulli}\left((k-1)RP_{t,2}\right) \quad (20)$$

と表現できる。上記の式は, 例えば選択肢Aを選んだ場合には, 確率 $RP_{t,1}$ で $r_{t,1} = Re_{t,1}$ となり確率 $1 - RP_{t,1}$ で $r_{t,1} = 0$ となることを表している。また選択肢Bは選んでいないため必ず $r_{t,2} = 0$ となることを表している。

3.2.2 Fixed designのためのF情報量の導出

Q学習モデルは時系列依存を持つものの, 他の時系列モデルと同様に(e.g., カルマンフィルタ, Cavanaugh & Shumway, 1996), y_t は前試行における $(r_{t-1,k}, y_{t-1}, Q_{t-1,k})$ を条件づければ条件付き独立(局所独立)となる。そのため対数尤度関数は

$$\log p(\mathbf{y}_{1:T}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{1:T}) = \sum_{t=1}^T \{y_t \log p(y_t = 1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{t-1}) + (1-y_t) \log(1 - p(y_t = 1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{t-1}))\} \quad (21)$$

となる。ただし, $\mathbf{z}_t = (r_{t,k}, y_t, Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta}))$, $\mathbf{z}_{1:T} = (\mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_T)$, $\mathbf{y}_{1:T} = (y_1, \dots, y_T)$ である。 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} p(y_t = 1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{t-1})$, $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y}_{1:T}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{1:T})$ を計算し, 局所独立性を考えればF情報行列は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1:T}(\boldsymbol{\theta}) &= E_{\mathbf{u}_{1:T}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y}_{1:T}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{1:T}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y}_{1:T}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{1:T}) \right)^T \right] \\ &= \sum_{t=1}^T p(y_t = 1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{t-1}) (1 - p(y_t = 1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{t-1})) \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$X_{11} = \beta^2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})) \right]^2, \quad (23)$$

$$X_{12} = \beta \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})) \right] [Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})], \quad (24)$$

$$X_{22} = [Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})]^2. \quad (25)$$

また $\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta})$ は Daw (2011) に示唆されているように

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta}) = (1 - I_A(k, y_{t-1})\alpha) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_{t-1,k}(\boldsymbol{\theta}) \right] + I_A(k, y_{t-1}) (r_{t-1,k} - Q_{t-1,k}(\boldsymbol{\theta})) \quad (26)$$

で再帰的に計算できる。他の時系列モデルと同様に (e.g., Cavanaugh & Shumway, 1996; Shumway & Stoffer, 1982), Q 学習モデルにおける F 情報量も再帰的な計算となる。また, β の F 情報量は Q 値の差分 $Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})$ のみに明示的に依存しており, α の F 情報量は報酬予測誤差 $r_{t-1,k} - Q_{t-1,k}(\boldsymbol{\theta})$ あるいはその偏微分にも依存してくることが分かる。

3.2.3 adaptive design のための F 情報量の導出

CAT を行うためには, 計算負荷の点から, 将来の報酬フィードバックに関する期待値を解析的に計算しなければならない。観測データ (報酬フィードバック) の期待値を解析的に計算できず, コンピュータ上で数値計算する場合, 観測データのパターンを全て計算しなければならないからである。例えば, 10 試行分の刺激を決める場合, 観測データが 2 値とすると 10 試行分の観測データパターン $2^{10} = 1024$ 通りの計算を行うことになり計算負荷が高くなる。報酬フィードバック $r_{t,k}$ を確率変数として扱くと, F 情報量の定義から, y_t および $r_{t,k}$ に関して期待値を取ることとなる。この状況において F 情報量は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1:T}(\boldsymbol{\theta}) &= E_{(\mathbf{y}_{1:T}, \mathbf{r}_{1:T})} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y}_{1:T}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{1:T}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y}_{1:T}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{1:T}) \right) \right] \\ &= \sum_{t=1}^T p(y_t = 1 | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{t-1}) (1 - p(y_t = 1 | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{t-1})) \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$X_{11} = \beta^2 E_{(\mathbf{y}_{1:t-1}, \mathbf{r}_{1:t-1})} \left[\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})) \right]^2 \right], \quad (28)$$

$$X_{12} = \beta E_{(\mathbf{y}_{1:t-1}, \mathbf{r}_{1:t-1})} \left[\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})) \right] [Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})] \right], \quad (29)$$

$$X_{22} = E_{(\mathbf{y}_{1:t-1}, \mathbf{r}_{1:t-1})} \left[[Q_{t,1}(\boldsymbol{\theta}) - Q_{t,2}(\boldsymbol{\theta})]^2 \right], \quad (30)$$

となる。 $E_{(\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t})}[\cdot]$ は $\mathbf{y}_{1:t} = (y_1, \dots, y_t)$ と $\mathbf{r}_{1:t} = (r_{1,k}, \dots, r_{t,k})$ に関する期待値を表す。この F 情報量を計算するためには, $E_{(\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t})}[r_{t,k}]$, $E_{(\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t})}[r_{t,k}^2]$, $E_{(\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t})}[Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta})]$, $E_{(\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t})} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta}) \right]$, $E_{(\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t})}[Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta})Q_{t,k'}(\boldsymbol{\theta})]$, $E_{(\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t})} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta}) \right) Q_{t,k'}(\boldsymbol{\theta}) \right]$, $E_{(\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t})} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_{t,k}(\boldsymbol{\theta}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_{t,k'}(\boldsymbol{\theta}) \right) \right]$, $k' = 1, 2$ を計算する必要がある。この詳しい計算式については Fujita, Okada, and Katahira (2022a) の Appendix で導出されている。

3.3 シミュレーション実験

3.3.1 SS1-1

3.3.1.1 方法

SS1-1 では, two-step procedure の第一ステップにおいて推定精度を上げられるような適切な刺激を F 情報量により選択できるかを確認することを目的とする。SS1-1 では, 報酬確率と推定精度の関連について検討する。とりわけ, 報酬確率逆転の効果について調べる。SS1-1(a) では各刺激の値における PSD の予測を計算し, 推定精度が良さそうな刺激を選択し, SS1-1(c) で MCMC ベースでの推定精度の評価を行う。SS1-1(a) が two-step procedure の第一ステップ, SS1-1(c) は第二ステップに対応する。特に SS1-1(a) における PSD の予測値に関する刺激間での順序関係と, SS1-1(c) における順序関係が一致するかを確認する。もし SS1-1(c) における精密な PSD 評価における順序関係と SS1-1(a) における予測的な PSD 評価における順序関係が一致しているなら, F 情報量ベースで刺激選択を行う two-step

procedure が有効に機能することの証左となるだろう。同時に、これらのチェックを行う際には、Q 学習モデルにおける報酬確率の効果を考察するために必要な情報が手に入るため、Q 学習モデルにおける実験刺激の推定精度への影響についても議論する。

シミュレーションの流れは以下の通りである。:1. 試行数, 実験刺激, パラメータ真値などを固定する。;2. Q 学習モデルによりデータ生成を行う。;3. SS1-1(a), (b) では F 情報量を, SS1-1(c) では MCMC 推定により PSD を計算する。上記のシミュレーションの流れを 50 回繰り返して, F 情報量あるいは PSD の平均値を出した。このシミュレーションを実験刺激を変えて繰り返した。

SS1-1(a)では, 報酬確率を様々に変化させた時の F 情報量を計算した。選択肢 A の報酬確率の候補値は, 0.05 から 0.95 を 7 等分する各値および 0.5 の計 9 種類であった。選択肢 B は, 選択肢 A, B の確率の総和が 1 になるように設定した。この設定は状況をシンプルにするためのものであり, この制約を外すことは可能である。また報酬確率逆転があり条件となし条件それぞれでシミュレーションを行った。ただし報酬確率の逆転は 10 試行ごとに行った。報酬額は(1, 1)に固定した。 $(Re_{t,1}, Re_{t,2})$ は選択肢 A の報酬額候補値が $Re_{t,1}$ で選択肢 B の報酬額が $Re_{t,2}$ であることを示す。パラメータの値は, $\alpha \sim \text{Beta}(12, 12), \beta \sim U(1.5, 2.5)$ で生成した。 α に関しては平均が 0.5, sd が 0.1 のベータ分布である。試行数は $T=80$ とした。F 情報量は上記の分布で生成した値を直接利用したため, MCMC などによる推定は必要ない。これは計算負荷が低いことを意味する。

後述する SS1-1(a)の結果に基づいて, SS1-1(b), (c) における報酬確率条件を(0.5, 0.5), (0.8, 0.2), および(0.8, 0.2)で報酬確率逆転あり条件の 3 条件に設定した。ただし, $(RP_{t,1}, RP_{t,2})$ は選択肢 A の報酬確率が $RP_{t,1}$, 選択肢 B の報酬確率が $RP_{t,2}$ を表す。後述するが(0.5, 0.5) 条件は推定精度が良いわけではなかったため, 実際の two-step procedure では第二ステップでの評価対象に入れる必要はない。しかし, 本研究は報酬確率の影響および two-step procedure の妥当性評価を行うため, (0.5, 0.5)条件を含めている。第二ステップである SS1-1(c)を行う前に, $t+1$ 試行目において t 試行目と比べた時の F 情報量の増加量を検討する SS1-1(b) を行った。SS1-1(b) は two-step procedure に直接対応するわけではないが, なぜ特定の刺激が推定精度の意味で望ましいのかを説明する必要がある場合には, SS1-1(b) のようなシミュレーションが必要となる。SS1-1(c) では MCMC 推定により直接的に PSD を計算することで評価を行った。MCMC 推定は, 5000 回サンプリングし最初の 2000 回をバーンイン期間として捨て, 間引きは 1 で, 3 チェイン回した。事前分布は $\alpha \sim U(0, 1), \beta \sim \text{Student's } t(4, 0, 3)_{>0}$ とした。ただし, $\text{Student's } t(4, 0, 3)$ は自由度 4, 位置パラメータ 0, スケールパラメータ 3 の t 分布を表す。

3.3.1.2 結果と考察

SS1-1(a) に関して, Figure 3-1A から 3-1D は報酬確率逆転なし条件およびあり条件における α, β の F 情報量から予測した PSD を表す。 α に関しては, 確率逆転なし条件では確率(0.5, 0.5)条件で推定精度が良くなっている (Figure 3-1A)。一方で確率逆転あり条件では, 極端な報酬確率 (e.g., 0-0.2, 0.8-1) の方が推定精度が良い (Figure 3-1C)。また確率逆転あり条件ではなし条件よりも推定精度が高い。

β に関しては, 報酬確率逆転に依らず, 報酬確率が極端な方が推定精度が高い (Figures 3-1B, 3-1D)。また確率逆転あり条件の方がなし条件よりも推定精度が低い。これらの結果から, SS1-1(b), (c) では確率(0.8, 0.2)条件を良い刺激条件として利用する。これより極端な値にしなかったのは, あまりに報酬確率が極端になると課題が簡単すぎたり F 情報量の計算が安定しないからである。

F 情報量ベースのシミュレーションは計算負荷が低い。Dell Latitude E6510; CPU: Intel Core i5-560M 2.66GHz; R version: 4.0.4; OS: Ubuntu 20.04 という計算環境で, MCMC ベースのシミュレーションに

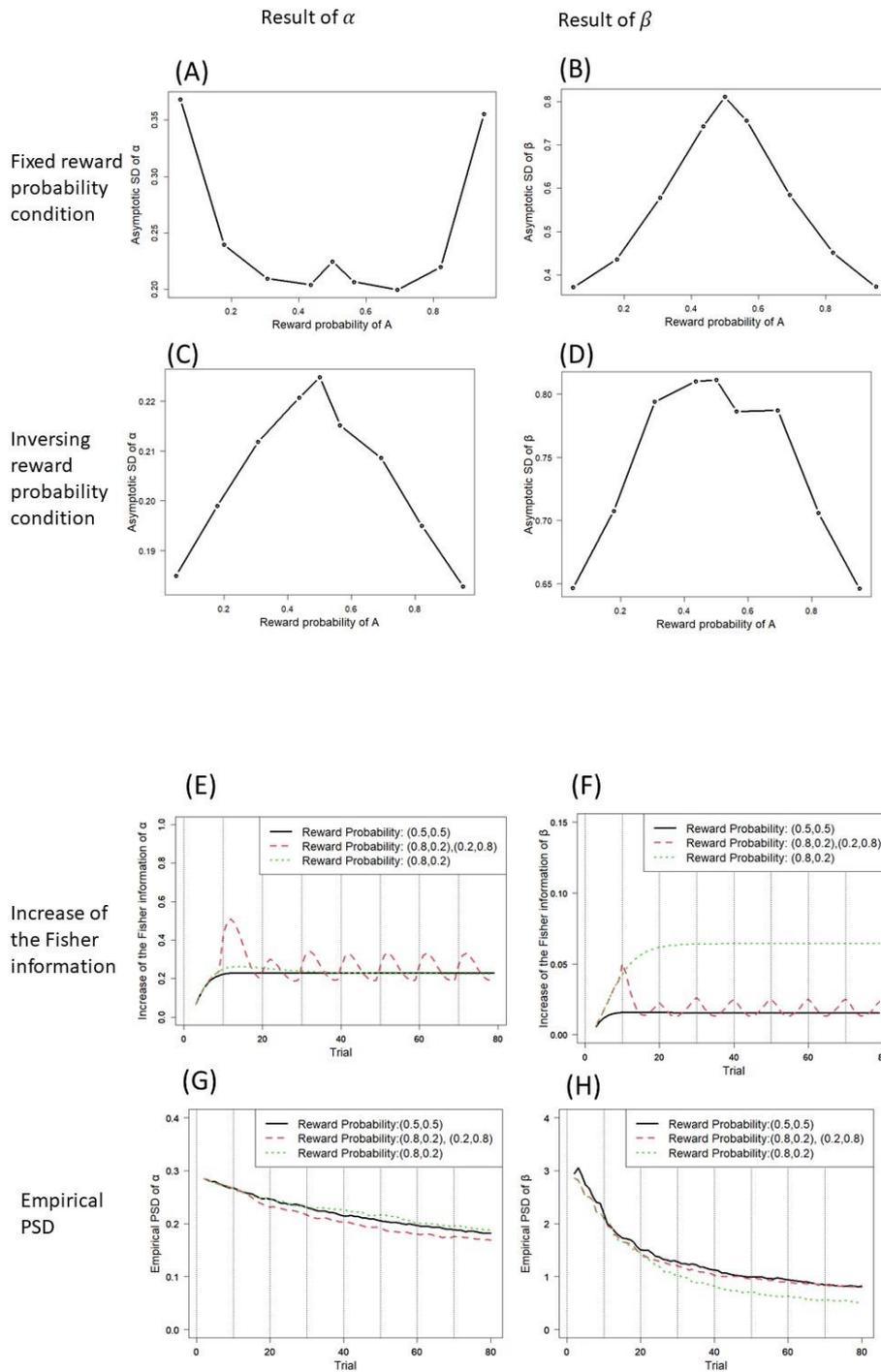


Figure 3-1

SS1-1 の結果

SS1-1(a): (A)から(D)に各報酬確率の値におけるF情報量から予測したPSDの予測値 (Asymptotic SD)を示す。Figures 3-1A, 3-1B は確率逆転なし条件, Figures 3-1C, 3-1D は確率逆転あり条件に対応する。左図が学習率 α , 右図が逆温度 β の結果である。; SS3-1(b): (E), (F) に各試行でのF情報量の増加量を示す。縦の点線は確率逆転あり条件において報酬確率を逆転した試行を表す。(黒の)線は確率(0.5, 0.5)条件を,(緑の)細い点線は確率(0.8, 0.2)条件を,(赤の)点線は確率(0.8, 0.2)かつ確率逆転あり条件を表す。; SS1-1(c): (G), (H) に各報酬確率条件におけるMCMCから計算したPSD (Empirical PSD)の結果を示す。縦の点線は確率逆転あり条件において報酬確率を逆転した試行を表す。

おける一つの刺激条件は 1.92 分かかったが、同様の設定においてこの F 情報ベースのシミュレーションでは 1.13 秒しかかからなかった。例えば、SS1-2(a) では 90 刺激条件試すが、その場合 F 情報量ベースのシミュレーションは、MCMC ベースのシミュレーションより 175 分早いことになる。もし、試行ごとに挙動を調べたり、パラメータの値を変えたり、試行数自体も決定したり、他のデザイン変数も最適に設計する場合、条件数は増加する。そのため、MCMC ベースのシミュレーションは、現実的でなくなることが予想される。例えば、試行数 16 種類 (e.g., 50, 60, ..., 200), 報酬確率逆転条件において逆転するまでの試行数 6 種類 (e.g., 5, 10, 15, ..., 30) の中から適切なデザインを決める場合、175(分) x 16 x 6 = 16800 (分) で約 11.7 日かかる。F 情報量の計算では 1.13 (秒) x 90 x 16 x 6 = 9763 (秒) で約 163 分で終わる。調べる条件が増えるほど、MCMC ベースのシミュレーションの計算負荷に関するデメリットは大きくなる。

SS1-1(b)に関して、Figures 3-1E, 3-1F は F 情報量の増加量, $F_{1:t}(\theta) - F_{1:t-1}(\theta)$, を表す。大きな値は、その試行における観測データがパラメータ推定により寄与したことを意味する。 α に関しては、報酬確率逆転した場合に F 情報量の増加量は増えている (Figure 3-1E)。つまり、確率逆転は α の推定精度に対しては良い影響を及ぼす。 α の F 情報量の式(23), (26) を見ても、報酬予測誤差の項を含むため、確率逆転により予測誤差が増え、F 情報量が増えたと考えると自然である。一方で β に関しては、確率逆転した場合には F 情報量の増加量は減少している (Figure 3-1F)。 β の推定精度に対しては、確率逆転は悪い影響を及ぼしており、むしろ報酬確率の差の方が重要であることが分かる。 β の F 情報量の式 (25) を見ても、Q 値の差分の項を含むため、確率逆転により一時的に Q 値の差分が小さくなり、F 情報量が小さくなったと考えると自然である。

SS1-1(c)に関して、Figures 3-1G, 3-1H は MCMC 推定ベースにおける α, β の PSD の結果を表す。確率逆転あり条件はなし条件よりも、10 試行目あたりから、 α の PSD が小さくなっている (Figure 3-1G)。つまり、 α の推定精度に関しては確率逆転は良い影響を及ぼすことが MCMC ベースのシミュレーションでも示された。これは SS1-1(a)と一貫した結果である。 β の PSD に関しては、報酬確率逆転の推定精度への悪影響が確認された (Figure 3-1H)。確率(0.8, 0.2)で確率逆転なし条件が同じ確率値で逆転あり条件よりも PSD が小さかった。これは SS1-1(a) と同様の結果である。

上記の結果では、SS1-1(a) での F 情報量ベースの刺激間の順序関係の予測 (Figures 3-1A から 3-1D) と SS1-1(c)における MCMC ベースのシミュレーションにおける推定精度の順序関係の予測 (Figures 3-1G, 3-1H) はほぼ一致していた。つまり two-step procedure の第一ステップにおいて最良に近い刺激を絞り込むことは有効に行えると期待できる。ただし、F 情報量ベースの PSD 予測は過少あるいは過大評価することがある。すなわち、刺激の良さ (推定精度) は MCMC ベースの正確な評価によっても、評価されるべきことを示している。これらの結果から、本研究では two-step procedure を推奨する。

SS1-1(a) でも SS1-1(c)でも示されたが、報酬確率が推定精度に及ぼす影響はパラメータ (i.e., α か β) によって変わる。つまり、最適な実験デザインというのは、研究者がどちらのパラメータに着目しているかで異なる。研究者は目的や方法 (e.g., α, β どちらのパラメータと別の特性のパラメータの相関を取るのか) を理解し、今回の結果や理論的な性質を理解した上で、実験デザインを組んでいく必要がある。今回の研究からは、(0.8, 0.2)条件やより極端な報酬確率の値で実験を行うのが望ましいと予想される。確率逆転を行うかどうかは、 α と β どちらに興味があるかによって異なる。

3.3.2 SS1-2

3.3.2.1 方法

SS1-2 では、SS1-1 同様に two-step procedure の評価を行うことを目的に、F 情報量による予測と MCMC ベースのシミュレーションによる刺激間の順序関係の予測が一致するかを確認する。SS1-1 と異なるのは、SS1-2 では報酬額の設定も変更することである。リサーチクエスチョンとしては、よく使用される設定である報酬額(1, 1)よりも例えば(1, 10)の方が望ましいのかどうかを確認することである。SS1-2(a) は two-step procedure の第一ステップに、SS1-2(b)は確率逆転なしと制約した状況における two-step procedure の第二ステップ、SS1-2(c)は確率逆転あり条件における第二ステップに対応する。

3つのシミュレーション実験 SS1-2(a), (b), (c)を行う。SS1-2(a)に関しては、SS1-1(a)のシミュレーションの流れと同様であるが、報酬確率だけでなく、選択肢 B の報酬額 $Re_{t,2}$ も変化させる。 $Re_{t,2}$ の値は、0.5 から 10 を 3 等分する各値および 1 の計 5 種類用意した。つまり刺激条件は 9 (報酬確率) × 5 (報酬額) × 2 (報酬確率逆転あり/なし) の 90 条件である。選択肢 A の報酬額は、実際の実験ではリスケール可能なため、1 で固定した。試行数は 200 で固定した。 $RP_{t,1}$ やパラメータ値などの他の設定は SS1-1 と同様である。

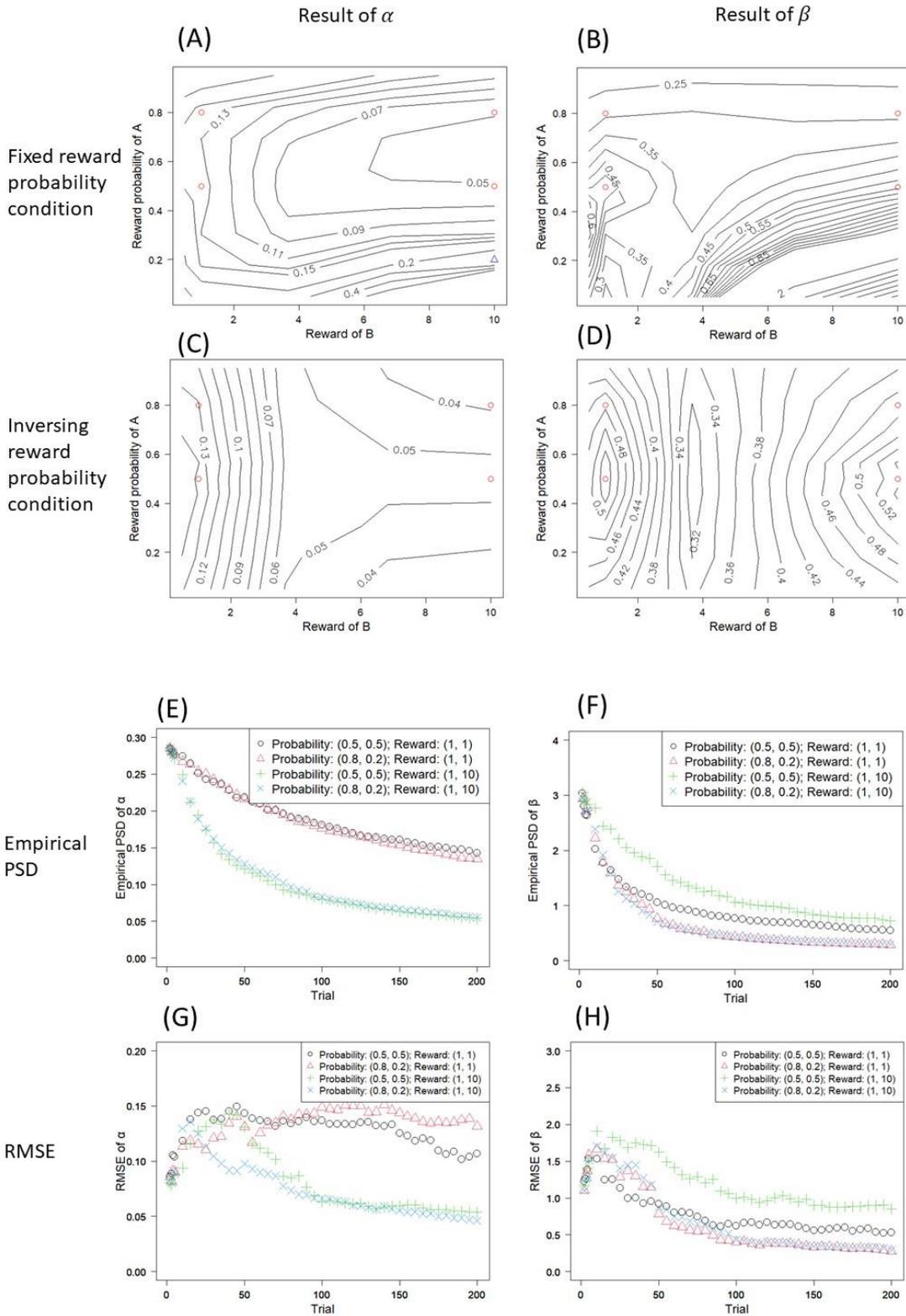
SS1-2(b) は MCMC ベースの PSD と root mean square error (RMSE) を計算した。シミュレーションの流れは SS1-1(c)と同様である。試行数は 200 で、刺激条件は 2 (報酬額) × 2 (報酬確率) の 4 条件であった。SS1-2(a) の結果に基づいて、報酬額は(1, 1) と (1, 10)の 2 条件、報酬確率は(0.5, 0.5)と(0.8, 0.2) 条件の 2 条件を設定した。ただし報酬確率逆転はなしである。シミュレーションは 50 回繰り返した。SS1-2(c) は SS1-1(c) と同様であるが、報酬額が(1, 10) の設定で行った。報酬確率逆転あり条件を含めて行った。

3.3.2.2. 結果と考察

SS1-2(a) に関して、 α, β の PSD の予測値の等高線プロットを表したのが Figure 3-2A から 3-2D である。 α に関しては、報酬額のスケールを大きくすると推定精度が上がるのが分かる (Figures 3-2A, 3-2C)。また Figure 3-2A は報酬確率と報酬額の交互作用を示している。すなわち、報酬額が(1, 10)の時、確率(0.8, 0.2)条件 (赤い○) は確率(0.2, 0.8)条件 (青い△) より推定精度が高い。各選択肢の期待値がより近いほど推定精度が高くなると予想される。Figure 3-2A と Figure 3-2C を比べると、報酬額(1, 10) 条件においても報酬確率逆転により推定精度が高まるのが分かる。

β に関しては、大きい報酬額の値が常に高い推定精度に結び付くわけではないのが分かる (Figures 3-2B, 3-2D)。確率逆転なし条件では、確率(0.8, 0.2)条件では確率(0.5, 0.5)条件よりも推定精度が高く、また報酬額の効果は顕著ではない。さらに、確率逆転あり条件において報酬確率の効果は小さく (Figure 3-2D)、確率逆転は低い推定精度に繋がる場合がある。

SS1-2(b) に関して、MCMC により計算した PSD と RMSE の結果を示したのが Figure 3-2E から 3-2H である。結果は概ね SS1-2(a)から予測されるものであった。 α に関しては、大きい報酬額は PSD を下げる効果があった。特に、報酬額(1, 10)条件においては、報酬額(1, 1)条件の約半分程度まで PSD が下がっていた。RMSE に関しては、報酬額(1, 1)条件においては RMSE が減っていかないという不自然な挙動であったが、報酬額を大きくすると RMSE がだんだんと減っていくようになった (Figure 3-2G)。一方で β に関しては、報酬額よりも報酬確率の方が影響していた。報酬確率(0.8, 0.2)条件の方が、確率(0.5, 0.5)条件よりも PSD や RMSE のパフォーマンスが良かった。



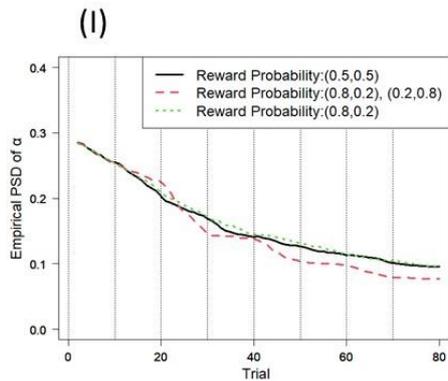


Figure 3-2

SS1-2 の結果

SS1-2(a): (A)から(D)に各刺激の値における PSD の予測値を示す。Figures 3-2A から 3-2D は、x 軸が報酬額を y 軸が報酬確率を示すことを除いて、Figures 3-1A から 3-1D と同様である。赤い○は SS1-2(b), (c) で用いられた刺激条件を表す。; SS1-2(b): (E)から(H) に各刺激条件における MCMC ベースの PSD および RMSE の結果を示す。○, △は報酬額(1, 1)条件の、報酬確率(0.5, 0.5) および(0.8, 0.2)条件を表す。+と×は報酬額(1, 10)条件の、報酬確率(0.5, 0.5)および(0.8, 0.2)条件を表す。; SS1-2(c): Figure 3-2I は報酬額が(1, 10)であることを除いて Figure 3-1G と同様である。

SS1-2 でも SS1-1 と同様に、F 情報量は SS1-2(b) での刺激間の推定精度の順序関係を上手く予想できるものであった。一方で、SS1-1 と同様に、F 情報量ベースの PSD の予測は過少あるいは過大評価することもあった。そのため、two-step procedure は有効に機能すると期待できる。

SS1-2(c)に関して、Figure 3-1G と同様に α の PSD の結果を示しているのが Figure 3-2I である。報酬額(1, 10)条件においても、確率逆転の操作により、 α の PSD が減少することが示された。また確率逆転による改善の程度は報酬額(1, 1)条件のものよりも大きかった。また、報酬確率が(0.2, 0.8)の時には改善は顕著ではなかったが、(0.8, 0.2)の時、特に 20 から 30 試行目において推定精度の改善が顕著であった。

よく利用される報酬額(1, 1)という設定が望ましいものかは不明であった。Broomell and Bhatia (2014) では、累積プロスペクト理論 (Cumulative prospect theory, CPT) モデルにおいて、報酬額を増やすことで推定精度が上がることを示されている。報酬額に依らず β が不変であるならば、Q 学習モデルにおいても報酬額を上げると推定精度が上がるということが SS1-2 では示された。実際に報酬額を上げた方が良いのかは、 β と報酬額の関係に依存する。

これらの結果から、報酬額は(1, 10)のようにアンバランスさを持たせて、報酬確率 (0.8, 0.2) とし、 α に関心があるのなら、報酬確率逆転あり条件で実験をするのが望ましいかもしれない。本研究のシミュレーションからは、統計的な基準を持たない従来の実験デザインが推定精度の意味で望ましくない可能性を示している。また本研究では、F 情報量によって計算負荷低く推定精度に対する刺激の効果を予測できることを強調したい。

3.3.3 SS1-3

3.3.3.1 方法

SS1-3 では、Q 学習モデルのパラメータと他の特性パラメータの相関係数を推定する時に、刺激選択

が及ぼす影響を検討する。実際の研究では推定だけでなく、相関係数を計算して何等かの結論を導き、議論を行うことが多いからである。相関係数の希薄化を考えると (e.g., Katahira, 2016), 高い推定精度に結び付く刺激は、相関係数のバイアスの絶対値も小さくなると予想できる。シミュレーションの流れは SS1-1(c)と同様である。パラメータ生成に関しては、真の相関係数が 0.5 程度になるように生成した。参加者数は 100, 試行数は 50 の状況でシミュレーションを行った。実験刺激条件は SS1-2(b), (c)と同様である。シミュレーションは 100 回繰り返し相関係数の平均値を算出した。

3.3.3.2 結果と考察

相関係数の真値と推定値のズレ (バイアス) を示したのが Table 3-1 である。全体的に相関係数の希薄化の問題で、相関係数は過少評価されている。 α に関しては、報酬額(1, 10)条件は(1, 1)条件よりバイアスの絶対値が小さい。さらに、報酬額(1, 10)条件においては、確率逆転あり条件で最もバイアスの絶対値が小さい。 β に関しては、報酬額に関わらず、報酬確率(0.8, 0.2)条件が最もバイアスの絶対値が小さい。

これらの結果は推定精度に関する SS1-1(c), SS1-2(b), SS1-2(c)の結果と整合的である。つまり、高い推定精度に結び付く刺激は、相関係数のバイアスの絶対値が小さくなることが分かった。SS1-1, SS1-2でも示したように、研究者が α, β どちらに関心があるかによって、最適な刺激デザインは異なる。また、 α と別の特性の相関と、 β と別の特性の相関のどちらが大きくなりやすいかは、実験刺激デザインにも依存することも分かる。例えば、先行研究では抑うつとQ学習モデルでのパラメータの相関は一貫しない結果になっている。いくつかの研究 (e.g., Beevers et al., 2013; Chase et al., 2010)では学習率 α との関連が見られ、別の研究 (e.g., Kunisato et al., 2012) では β との関連が見られている (レビュー: Robinson & Chase, 2017)。相関係数の推定に影響する要因は様々なものがあるが (e.g., 抑うつなど対象とする概念, 測定用の質問紙, 健常群か臨床群か), 刺激デザインも一つの要因となる。刺激選択が相関係数の推定にどのように影響するのかを知ったうえで、実験を組むことが重要となる。

Table 3-1. Bias of Correlation coefficient between Q learning model parameter and other trait parameter

(a). Bias of Correlation about α				(b). Bias of Correlation about β			
		Reward				Reward	
		(1, 1)	(1, 10)			(1, 1)	(1, 10)
Reward	(0.5, 0.5)	-0.18 (0.07)	-0.10 (0.05)	Reward	(0.5, 0.5)	-0.22 (0.07)	-0.20 (0.08)
	(0.8, 0.2)	-0.23 (0.08)	-0.09 (0.05)		Probability	(0.8, 0.2)	-0.15 (0.06)
Changeable	-0.17 (0.06)	-0.05 (0.04)	Changeable	-0.19 (0.07)		-0.19 (0.07)	

Note. The numbers in the table represent the estimate of correlation coefficient - the true correlation coefficient. The number of parentheses means standard deviation. Each row represents each reward probability conditions, and each columns represents each reward conditions. Changeable condition means reversing reward probability from (0.8, 0.2) each 10 trials.

参考情報として、各相関係数について無相関検定を行う際に、検出力 80%を達成するために必要なサンプルサイズ (左図) およびサンプルサイズが 100 人の時の検出力 (右図) を Figure 3-3 に示した。各値は R の pwr パッケージにおける `pwr.r.test()`関数で求めた。真の相関係数は 0.5 付近の値であり、例えば α については、バイアスの絶対値が最も小さい刺激条件 (報酬が(1, 10)で報酬確率が確率逆転あり条件)で-0.05, 中程度のバイアス (報酬が(1, 10)で報酬確率逆転なし条件)で-0.1 程度, バイアスの絶対値が最も大きい条件で-0.2 程度であった。つまり、真の相関係数 (0.5) に近い順に、相関係数の値はおおよそ 0.45, 0.4, 0.3 である。左図において検出力 80%を達成するために必要な人数は、相関係数が 0.45, 0.4, 0.3 の時にそれぞれ 36 人, 46 人, 85 人であった。他の質問紙などで測定した特性パラメータ

は真値を使っているため、実際には少し数字は異なるはずだが、この例では報酬額(1, 10) 条件においては報酬確率を工夫するだけでサンプルサイズ 10 人分のコストカットができることになる。また、右図においてサンプルサイズが 100 人の時の検出力は、相関係数が 0.45, 0.4, 0.3 の時にそれぞれ 99.8%, 98.7%, 86.5%でいずれも高い値であった。

ただし、Q 学習モデルのパラメータと他の質問紙などで測定した特性パラメータの相関を算出する際には、Q 学習モデルのパラメータは点推定値を固定値として利用して相関係数を算出することを想定している。点推定値を使って相関を算出する場合は、パラメータの推定に関する誤差を無視することになるため、本来は個人パラメータの推定に関する誤差も含めたモデルを使用して相関の分析を行うべきという意見もあるかもしれない。Figure 3-3 における情報は相関の計算において点推定値を使用することを推奨するものではなく、あくまで大まかな参考情報として提示していることに注意して欲しい。

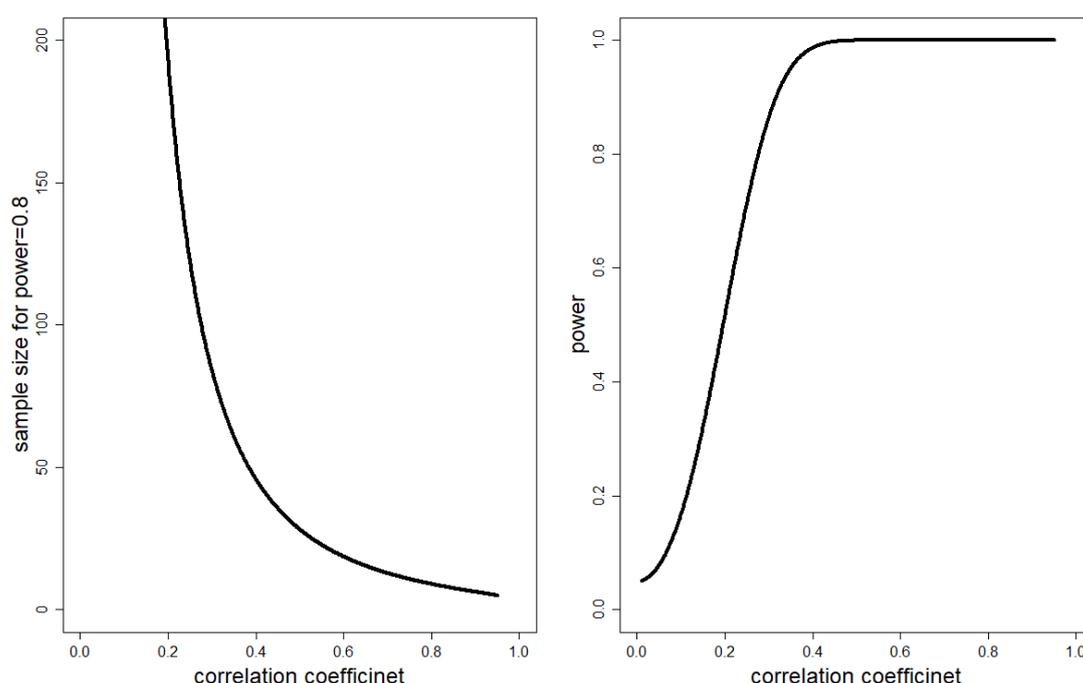


Figure 3-3

無相関検定の検出力に関する補足情報

左図は無相関検定における検出力 80%を達成するために必要なサンプルサイズを表す。横軸は相関係数の値、縦軸は必要なサンプルサイズを表す。右図はサンプルサイズが 100 人の時の検出力を表す。横軸は相関係数の値、縦軸は検出力を表す。

3.3.4 SS1-4

3.3.4.1 方法

本節では、Q 学習における adaptive design (CAT) の効果を検証する。本来は、CATの方が参加者パラメータを見てから刺激を選択できるため、fixed design よりも精度は高くなるはずである。一方で、Q 学習モデルはフィードバックにより報酬確率を学習するという課題構造上、1 試行ごとに報酬確率を操作することはできないため adaptive design で、速やかに刺激を変更していく手法はあまり馴染まないと言える。そのため、Q 学習モデルにおいて CAT の効果がどれほどのものかは分からない。SS1-4 では、Q 学習において CAT を行う方がランダム刺激選択より推定精度が高いかどうかを確認することを目的とする。

シミュレーションの流れは以下の通りである。:1. 20 試行を初期試行として刺激を固定してデータ生成を行い、暫定的な推定値を取得する。;2. CAT あるいはランダム刺激選択により刺激を選択する。ランダム刺激選択では離散一様分布からランダムに選択した。刺激は 10 試行ごとに変更する。;3. 200 試行遂行したら全試行分のデータからパラメータ推定を行い PSD を算出する。第二ステップの刺激選択においては、 t 試行目までの F 情報行列は観測データ $\mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{r}_{1:t,k}$ を利用して計算 (3.2.2 節) し、 $t+1$ 試行目から $t+10$ 試行目の F 情報行列は $\mathbf{y}_{t+1:t+10}, \mathbf{r}_{t+1:t+10}$ の期待値を利用して計算 (3.2.3 節) を行う。

シミュレーションの設定に関しては以下の通りである。パラメータ真値は $\alpha \sim \text{Beta}(12, 12), \beta \sim U(1.5, 2.5)$ 、初期試行の刺激は報酬額(1, 1)、報酬確率(0.5, 0.5)である。報酬額は(1, 1), (1, 5), (1, 10)の3条件のいずれかで固定し、CAT あるいはランダム刺激選択では報酬確率のみを刺激選択した。これは CAT では報酬額が最大のを常に選んでしまうからである。報酬確率の候補値は 0.1, 0.2, ..., 0.9 の 9 条件であった。MCMC 推定の設定は SS1-1 と同様である。シミュレーションは 50 回繰り返し PSD, RMSE を計算した。

3.3.4.2 結果と考察

α の PSD に関する結果を示したのが Figure 3-4A である。左から報酬額(1, 1)条件, (1, 5)条件, (1, 10)条件の結果である。また α の RMSE, β の PSD, RMSE の結果を示したのが Figures 3-4B, 3-4C, 3-4D である。 α に関しては、CAT の効果は特に報酬額(1, 5)では見られた (Figure 3-4A)。ただし報酬額(1, 1), (1, 10)条件では CAT の効果は顕著ではなかった。標準的な Q 学習モデルはシンプルすぎるモデルであったことが原因かもしれない。RMSE に関しても、報酬額(1, 5)条件において CAT の方が RMSE が低かった (Figure 3-4B)。報酬額の値によって CAT の効果は変わるということである。

β の PSD に関しては、報酬額がアンバランスな(1, 5), (1, 10)条件においては CAT の効果が見られた (Figure 3-4C)。 β の RMSE に関しては報酬額(1, 5)においては CAT の効果が見られた (Figure 3-4D)。ただし、著者が試した別のシミュレーション設定では、 β における CAT の効果はやや不安定であった。これは、 β の F 情報量のスケールが α のそれと比べて小さいことが原因と考えられる。

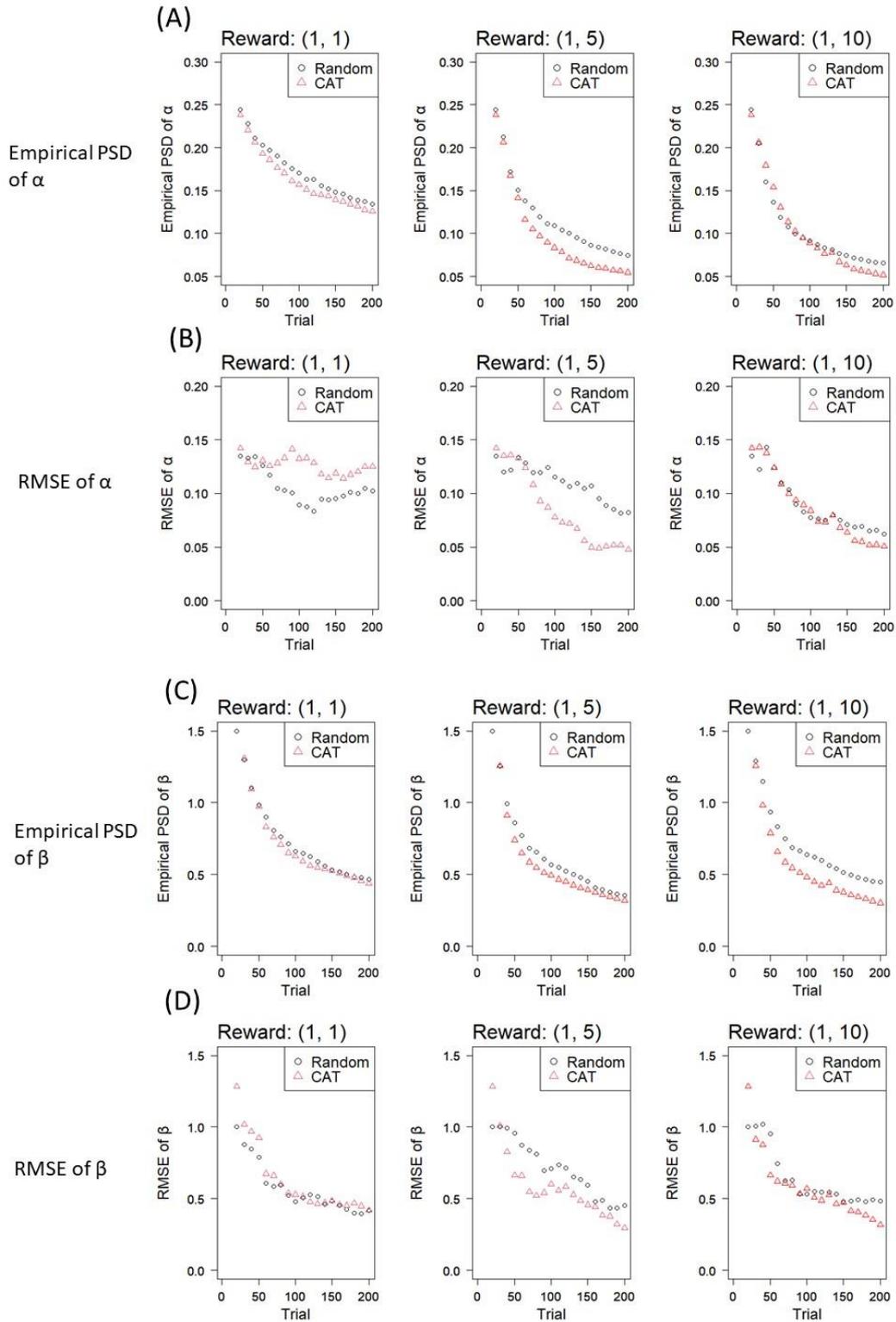


Figure 3-4

SS1-4 の結果

各刺激選択条件における PSD (Figures 3-4A, 3-4C) および RMSE (Figures 3-4B, 3-4D) の結果を示す。Figures 3-4A, 3-4B は α の, Figures 3-4C, 3-4D は β の結果を表す。左, 真ん中, 右のパネルはそれぞれ報酬額 (1, 1), (1, 5), (1, 10) の条件を表す。

3.4 考察

本研究では、統計的基準である F 情報量および MCMC ベースのモンテカルロシミュレーションを使って実験デザイン、特に実験刺激を設計するための two-step procedure を提案した。Q 学習モデルにおいて、F 情報行列を導出した後に、F 情報量の挙動や刺激と推定精度の関連を調べた。シミュレーション実験によって、刺激選択が推定精度 (SS1-1, 1-2) や相関係数の推定値 (SS1-3) に影響することを示した。さらに、刺激の影響はパラメータによって異なることも示した。そのため、最適な刺激というのは研究者の目的や方法 (どのパラメータに着目するか) によって異なることが分かった。

SS1-1, 1-2 からは、報酬額のスケール、報酬確率の選択枝間の差分、および確率逆転操作が推定精度に影響すること、また影響の度合いはパラメータに依存することが分かった。そのため、研究者は自らの研究の目的や方法および上記の理論的挙動を理解した上で最適な刺激デザイン設計を行う必要がある。特に、報酬額のスケールが学習率に及ぼす影響は評価が難しい部分がある。Q 学習モデルでは報酬額のスケールは、何等かの数で割ることで 1 にリスケールすることができる。リスケールするかしないかで逆温度パラメータ β の推定値は変化する。しかし本研究のシミュレーションでは、 β は不変の状態で行っていた。実際に、報酬額を大きくした方が推定精度が高くなるかは、提示される報酬額と β の関数関係次第であり、今後はこの関数関係を明らかにする必要がある。

SS1-3 では、刺激選択が相関係数の推定のバイアスに影響することを確認した。基本的に測定誤差により相関係数は過少推定される。大きい報酬額あるいは確率逆転操作により、学習率 α と別の特性との相関係数のバイアスは軽減された。また選択枝間の確率の差分が大きいほど、逆温度 β と別の特性との相関係数のバイアスは軽減された。相関係数を見た先行研究で結果が一貫しない場合がある。原因の 1 つとして刺激デザインが不適切であったり、相関係数の希薄化の修正を行っていないことが考えられる。SS1-3 のようなシミュレーションは、研究者が実験を実施したり解釈したりする際に、バイアスがどれくらい生じるのかに関する情報を与えてくれる。

SS1-4 からは、特に報酬額(1,5)条件で、CAT により少ない試行数で PSD を減少させられることが分かった。今回の場合は、報酬額のスケールにも、CAT の効果は影響されていた。多くの試行を参加者がこなすことにより方略の変化やケアレスミスが誘発されるとするならば、CAT は推定に必要な試行数を減らすことにより、この問題の解決策の一部を提供できる。

研究 1 では、Q 学習モデルにおける F 情報量を導出し、two-step procedure により推定精度の観点から望ましい刺激デザインを設計できることを示した。この手法はより発展的な Q 学習モデル (忘却モデル: Ito & Doya, 2009; Toyama et al., 2017, 2019; 学習率の非対称モデル: Chase et al., 2010; 固執性ありモデル: Katahira, 2018) やその他のモデルにも同様に適用可能である。研究 1 では、時系列依存を含んだ認知モデルでも同様に F 情報量ベースの刺激選択が有効に機能することを示した。これは、認知モデルにおいて有効に CAT が利用できることを支持する。

4. 第4章：研究2

4.1 イントロダクション

背景にある統計理論を考えると認知モデルに対しても CAT は変わりなく適用できる。前章のように時系列依存のある認知モデルにも同様に F 情報量ベースの刺激選択は適用できた。基本的に認知課題、認知モデルの方が刺激構造などが複雑化、拡張しやすいので、CAT の効果は認知モデルの方が高いと期待できる。しかし、認知モデルへの適用を考えると深刻化する問題が存在する。それが、誤ったモデルを仮定して計算してしまうというモデル誤指定の問題である。

CAT も推定精度の観点からの ADO (e.g., Kim et al., 2014; Gu et al., 2016; Ahn et al., 2020; Yang et al., 2021) も基本的に、事前に特定のモデルが真であるという仮定の下で刺激選択を行う。つまりモデルに関する不確実性を無視した手法となってしまっており、モデルが誤っていた場合には、推定時および刺激選択時においてエラーが生じると考えられる。CAT で利用される F 情報量や、推定精度の観点からの ADO で利用されるエントロピーはモデル仮定の下で計算されるモデルベースの量である。そのためモデル誤指定により刺激選択基準に偏りが生まれ、結果として刺激選択も不適切になる可能性がある。また推定も同様に、モデル仮定の下で行われる。仮定するモデルが AIC (Akaike 1973; Symonds & Moussalli, 2011) などの規準によりデータから選択される場合であっても、一つのモデルを真のモデルと仮定するという点で、モデルの不確実性を無視している。モデルの不確実性を無視することにより、区間推定の幅が楽観的に狭くなってしまうことが知られている (Rights et al., 2018)。現実の実験場面においては研究者は真のモデルは知らないため、刺激選択時のモデルの不確実性は考慮されるべきである。

推定時においてモデルの不確実性を考慮する統計的手法としては、モデル平均化 (Model averaging, MA) が提案されている (Banner & Higgs, 2017; Hinne et al., 2020; Hoeting et al., 1999; Wasserman, 2000)。MA では、MA 推定量は各モデルの推定量の重みづけ平均として定義され、重みはより尤もらしいモデルの重みが大きくなるように定義される (Rights et al., 2018)。単一のモデルを仮定した推定よりも、MA 推定量の方が予測性能が高いことが知られている (Kaplan & Lee, 2016)。またベイジアン MA (BMA) も経済、医学、生態学、そして心理学など多くの領域で適用されている (Fragoso et al., 2018)。頻度主義的な MA 推定に関する理論も研究されている (Mitra et al., 2019; Moral-Benito, 2013; Wang et al., 2009)。ベイジアン MA と頻度主義的 MA の違いは後述する。これらの MA 推定に関する研究は、刺激選択時における MA ではなく、あくまで推定時における MA であることに注意する。

刺激選択時にモデルの不確実性を考慮するには、CAT における D 最適化と MA の手法を組み合わせることが考えられる。そこで本研究 2 では MA-D 最適化 (Model averaged D-optimal stimulus selection, MA-DO) を提案する。3つのシミュレーション実験により、MA-DO が、従来の単一のモデルを仮定する CAT (conventional DO) よりも推定精度が高くなることを示す。

4.2 節では MA の説明を行った後に、MA-DO の提案を行う。4.3 節では回帰分析と 2つの認知モデルにおける 3つのシミュレーション実験を行う。4.4 節では総合考察を行い、提案手法の特徴について議論する。

4.2 方法

4.2.1 Model averaging

多くの研究では、単一のモデルを仮定して推定量を構成することが多い。単一のモデルを仮定して推定する状況においては 2つのパターンが主には存在する。一つは、他の候補モデルなどは考えずに、研究者が事前に真だと仮定したモデルの下で推定を行うことである。これを本研究では a prior selected model-based estimator (ASME) と呼ぶ。二つ目は、AIC などの情報量規準を元にしてモデル選択を行

った後に、複数のモデル候補の中から選ばれた単一のモデルを仮定して推定を行う方法である。この推定量を post-model-selection estimator (PMSE; Leeb & Pötscher, 2006) と呼ぶ。

一方で MA 推定においては複数のモデルを同時に考慮し、モデルの不確実性を考えた上で推定を行う。 $\{M_1, \dots, M_K\}$ を K 個のモデル候補とする。本研究では $K=2$ の場合でシミュレーションを行うが、 K が 3 以上の場合でも同様の議論が成り立つ。 $\hat{\xi}_{ik}$ をモデル M_k における参加者 i の参加者パラメータに関する推定量とする。この時 MA 推定量 $\tilde{\xi}_i$ は

$$\tilde{\xi}_i = \sum_{k=1}^K c(M_k) \hat{\xi}_{ik} \quad (31)$$

で定義される。ただし、 $c(M_k)$ はモデル M_k の重みであり、 $\sum_{k=1}^K c(M_k) = 1$ という制約を満たすとする。この MA 推定の枠組みから考えると、ASME や PMSE はある一つのモデルの重みが 1 で、それ以外が 0 であるという特殊ケースであることが分かる。

このモデルの重み $c(M_k)$ の計算方法によって、MA 推定にもいくつかのバリエーションがある。ベイジアン MA の場合、 $c(M_k)$ は事後モデル確率 (Wasserman, 2000) として計算される。事後モデル確率を計算するために、モデル M_k の周辺尤度

$$p(\mathbf{y}_i | M_k) = \int L(\mathbf{y}_i | \xi_{ik}, M_k) p(\xi_{ik} | M_k) d\xi_{ik} \quad (32)$$

を計算する必要がある。ただし、 $p(\xi_{ik} | M_k)$ はパラメータの事前分布である。この式の計算を閉形式で行うことは一般に難しいため数値的に計算することになる。モンテカルロ的手法や数値近似のやり方が提案されているものの (Fragoso et al., 2018)、強い制約が必要であったり計算負荷が高かったりする。そのため本研究では頻度主義的な MA (Hjort & Claeskens, 2003; Wang et al., 2009) に着目する。この MA では事後モデル確率であるモデルの重み $c(M_k)$ は、AIC や BIC を利用して

$$c(M_k) = \frac{\exp\left(-\frac{BIC_k}{2}\right)}{\sum_{l=1}^K \exp\left(-\frac{BIC_l}{2}\right)} \quad (33)$$

あるいは

$$c(M_k) = \frac{\exp\left(-\frac{AIC_k}{2}\right)}{\sum_{l=1}^K \exp\left(-\frac{AIC_l}{2}\right)} \quad (34)$$

と近似される。ただし AIC_k, BIC_k はそれぞれモデル M_k の AIC, BIC である。なお、 $AIC_k = -2 \log L_k(\mathbf{y}_i | \hat{\xi}_{ik}, M_k) + 2p_k, BIC_k = -2 \log L_k(\mathbf{y}_i | \hat{\xi}_{ik}, M_k) + p_k \log T$ という定義を利用する。ただし、 $\log L_k(\mathbf{y}_i | \hat{\xi}_{ik}, M_k)$ はモデル M_k の最大対数尤度、 p_k はモデル M_k のパラメータ数、 T は試行数である。これらの量は、smooth BIC や smooth AIC weight (Claeskens & Hjort, 2008, 7 章) と呼ばれる。この定義の利点の一つは計算負荷の低さである。周辺尤度の計算に比べ、AIC や BIC の計算ははるかに楽である。また式(33) は事後モデル確率の近似値として見なすこともできるとされている (Buckland et al., 1997; Wasserman, 2000)。さらに、4.3 節でのシミュレーション実験のように、モデル間でパラメータ数が同一かつデータ数が同一であれば、BIC ベースの式 (33) と AIC ベースの式 (34) は値が一致することが分かる。つまり、smooth AIC weight は、(1) BIC が (ベイズファクターの対数の) 良い近似として機能しており、(2) パラメータ数も試行数も同一である、という二つの条件を満たすならば、事後モデル確率の良い近似として機能すると考えられる。BIC の近似性能の議論などについては本研究では扱わない (参考論文: Kass & Raftery, 1995)。本研究では AIC ベースの式を利用して MA を行う。

4.2.2 D 最適化と MA の組合せ

先述の通り、従来の CAT では刺激選択時には単一のモデルを仮定する。つまりモデルの不確実性を無視している。D 最適化の枠組みの中で複数のモデルを同時に考慮する、あるいはモデルの不確実性を

考慮するために、model-averaged D-optimal 基準を考える。すなわち刺激選択基準 (Stimulus selection criterion, SSC) を

$$SSC = \sum_{k=1}^K c(M_k) \det(\mathbf{F}_{1:t,k}(\hat{\xi}_{ik}) + \mathbf{F}_{t+1,k}(\hat{\xi}_{ik})) \quad (35)$$

として定義する。ただし $\mathbf{F}_{1:t,k}(\hat{\xi}_{ik})$ は、1 から t 試行目までのデータから計算した、モデル M_k の F 情報行列である。 $\hat{\xi}_{ik}$ は 1 から t 試行目までのデータからのモデル M_k の推定値である。この推定値自体は MA 推定値ではないことに注意が必要である。 $\mathbf{F}_{t+1,k}(\hat{\xi}_{ik})$ も同様に、t+1 試行目でのモデル M_k の F 情報行列である。 $c(M_k)$ はモデルの重みである。従来の CAT (conventional DO) は研究者が仮定したモデルの重みを 1 とした特殊ケースであることが分かる。MA-DO における SSC を見ると、真のモデルの不確実性が少ない時にはモデルの重みは 1 に近づき、真のモデルを仮定した CAT という理想的状況に近づくため、提案手法は合理的であると言える。モデルの重み $c(M_k)$ は smooth AIC weight により計算する。

MA-DO の特殊ケースの一つとして、AIC ベースのモデル選択によって選ばれたモデルの重みを 1 とし、それ以外の重みを 0 とする方法もある。この手法を本研究では PMSE-DO と呼び、刺激選択条件の一つとして含める。PMSE-DO は MA-DO と比べるとモデルの不確実性を無視している部分もあるが、従来の CAT と比べるとデータ取得後 (実験中) にモデル選択を考えている点で異なる。著者の知る限りこの PMSE-DO の効果を検証する研究も見当たらない。PMSE-DO は MA-DO と平均的には同じくらいのパフォーマンスを示すと予測している。なぜなら、真のモデルを選択できた場合には、PMSE-DO は MA-DO より推定精度が良くなり、真のモデルを選択できなかった場合には、PMSE-DO は MA-DO より推定精度が悪くなると予測されるからである。最悪の結果を避けるという観点から言うと、特にモデルの重みが極端ではない (0 や 1 に近くない) 場合には MA-DO の方が望ましいと考えられる。

3 つのシミュレーション実験により提案手法の効果を検証する前に、注意点に触れておく。Minimum description length (MDL) 規準に関する研究 (e.g., Myung et al., 2006) においては、 $\log\left(\int \sqrt{\det(\mathbf{F}(\xi_k))} d\xi_i\right)$ で定義されるモデルの複雑さはモデルによって異なることが知られている (Pitt et al., 2002)。また、F 情報行列の行列式のスケールも一般にはモデル間で異なる場合がある。これは、モデルの不確実性に関わらず、より複雑さの高い (F 情報行列の行列式の高い) モデルを重視して刺激選択を行ってしまう危険性があることを示唆する。この問題に対処するために、シミュレーションでは、最初に全刺激条件で $\det(\mathbf{F}_{1:t,k}(\hat{\xi}_{ik}) + \mathbf{F}_{t+1,k}(\hat{\xi}_{ik}))$ を計算し、リスケールのために $\det(\mathbf{F}_{1:t,k}(\hat{\xi}_{ik}) + \mathbf{F}_{t+1,k}(\hat{\xi}_{ik}))$ の刺激間での最大値で、各刺激候補値での行列式の値を割ることにより SSC を計算する。つまり各モデルにおける行列式の値を 0~1 のスケールに変換してから、MA によって合成するということである。このやり方がユニークかつ最適であるかどうかは不明であるが、少なくとも上記のスケールが揃わないことによる問題は防ぐことができると考えられる。著者の知る限り、CAT や推定精度の観点からの ADO では、このような議論が行われているわけではないため、どのようにスケールを調整するかは今後議論される必要がある。

4.3 シミュレーション実験

4.3.1 SS2-1: 回帰分析

4.3.1.1 モデル

このシミュレーションでは、提案手法である MA-DO が、誤ったモデルを仮定する CAT よりも推定のパフォーマンスが高いことを示すことを目的とする。これを示せば、現実場面では真のモデルは不明なため、提案手法の優位性が示されたことになるだろう。SS2-1 では、計算や推定の挙動がシンプルな重回帰分析を扱う。実際の場面では重回帰分析の利用場面は認知実験では限られているが、計算や手法の特徴を調べる上では良い例となることが期待されるため、利用した。本研究で特に注目する認知モデ

ルを使用したシミュレーションは 4.3.2 節以降で扱う。

t 試行目におけるデータ生成に関しては以下の二つのモデルを想定する：

$$M_1: y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim \text{Norm}(0,1), \quad (36)$$

$$M_2: y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_3 x_{t3} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim \text{Norm}(0,1). \quad (37)$$

ただし $\mathbf{x}_t = (x_{t1}, x_{t2}, x_{t3})$ は説明変数, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ は傾きパラメータである。実験刺激は \mathbf{x}_t に対応する。精神物理測定などを考えるならば, t+1 試行目の刺激 \mathbf{x}_{t+1} をコントロールできると考えても問題ない。また M_1 のパラメータを $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_1, \beta_2)$, M_2 のパラメータを $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_1, \beta_3)$ と書く。各モデルの F 情報行列は

$$\mathbf{F}_{1:t,1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^t x_{l1}^2 & \sum_{l=1}^t x_{l1}x_{l2} \\ \sum_{l=1}^t x_{l1}x_{l2} & \sum_{l=1}^t x_{l2}^2 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{F}_{1:t,2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^t x_{l1}^2 & \sum_{l=1}^t x_{l1}x_{l3} \\ \sum_{l=1}^t x_{l1}x_{l3} & \sum_{l=1}^t x_{l3}^2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

となる。

4.3.1.2 方法

本研究では以下の 4 つの刺激選択条件を考える：提案手法である式(35) を刺激選択基準とする MA-DO；AIC ベースのモデル選択結果により特定のモデルの重みを 1 として式 (35) を刺激選択基準とする PMSE-DO；真のモデルを仮定した従来の CAT (correctly-specified DO)；誤ったモデルを仮定した従来の CAT (misspecified DO)。一般性を失わず, M_1 が真の場合のみの結果を示す。

さらに全てのデータが収集し終わった後に全データを用いて推定を行う際における, 推定方法に関して 3 つの推定条件を設定する。MA 推定条件では, MA 推定を行う。PMSE 条件では, AIC ベースのモデル選択の結果選ばれたモデルを仮定して推定を行う。ASME 条件では, 刺激選択で仮定したモデルと同一のモデルを仮定して推定を行う。つまり, correctly-specified DO 条件では真のモデルである M_1 を仮定して推定を行い, misspecified DO 条件では M_2 を仮定して推定を行う。また MA-DO 条件においては, MA 推定を利用する。刺激選択条件と, 推定条件は区別されていることに注意して欲しい。

これら 3 つの推定条件に関して, MA 推定条件は刺激選択に固有の効果を調べるのに向いている。なぜなら, データ収集後の推定におけるモデル誤指定の影響は, 全ての刺激選択条件間でほぼ同等となるはずだからである。そのため, 推定におけるモデル誤指定の影響と刺激選択時におけるモデル誤指定の影響を極力分離して評価することができる。一方で ASME 条件は従来の単一のモデルを仮定した CAT を使う場面を考えると自然な条件である。なぜなら, 推定時も刺激選択時も研究者が事前に決めた単一のモデルのみを考えて実験およびデータ分析を行うからである。Correctly-specified DO 条件で推定は MA 推定条件の場合, データ収集プロセスは単一のモデルのみを考慮し, 最後の推定時には複数のモデルを考慮するという意味で不自然な部分がある。PMSE 推定条件は両者の真ん中ぐらいの手法であり, 実験実施前は妥当なモデルが不明であったが, データにより妥当そうなモデルが分かったという状況である。

さらにモデルの不確実性の程度を操作するために, $\boldsymbol{\beta}$ の真値に関して二つの条件, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 0.1, 0.1)$ を設定した。前者の条件はモデル間で異なるパラメータである β_2, β_3 が比較的大きいため, モデル弁別が容易でモデルの不確実性は低くなると予想される。後者は逆に二つのモデルの違いが顕著ではないため, モデルの不確実性は相対的に高くなると予想される。刺激 (x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}) の候補値は $[-5, 5]$ の

値を 20 等分する各値とした。最初の 5 試行は初期試行として刺激選択条件によらずランダムに刺激を生成した。条件としては 4 (刺激選択条件) × 3 (推定条件) × 2 (パラメータ真値) の計 24 条件ある。

最尤推定値 (MLE) を R (R Core Team, 2018) で算出した。試行数は 20 でシミュレーションは 200 回繰り返して RMSE の平均を算出した。また各モデルの F 情報行列の行列式およびモデルの重みを算出した。

4.3.1.3 結果と考察

Table 4-1 は各パラメータ条件における、傾きパラメータの RMSE, F 情報行列の行列式, モデル M_1 の重みを表す。ASME 推定条件における RMSE を見ると, misspecified DO 条件で推定が最も悪い。これは推定時および刺激選択時におけるモデル誤指定による推定のパフォーマンスが悪くなったと考えられる。さらに MA 推定, PMSE 推定条件においても, とりわけモデル間で異なるパラメータである β_2 に関して, misspecified DO において RMSE が高かった。Correctly-specified DO 条件は MA-DO 条件と同等かややパフォーマンスが高い程度で, MA-DO は misspecified DO 条件ほど推定のパフォーマンスが悪いわけではなかった。PMSE-DO 条件は MA-DO 条件よりやや良い (Table 4-1A) か, 同等程度 (Table 4-1B) であった。これらの結果から, MA-DO (あるいは PMSE-DO) 条件によりモデルの不確実性を考慮することで, 刺激選択時におけるモデル誤指定による推定精度の悪化を防ぐことができると考えられる。

また F 情報行列の行列式に着目すると, 従来の単一のモデルを仮定した CAT はどれか一つの行列式が大きいただけであったが, MA-DO 条件では両方の行列式が大きかった。モデルの重みについては, correctly-specified DO 条件で真のモデルの重みがやや重く, MA-DO 条件の重みは misspecified DO 条件のものと同等であった。重要なのは, MA-DO 条件と misspecified DO 条件はモデルの重みはほぼ同等にもかかわらず, MA-DO 条件の方が misspecified DO 条件よりも MA 推定条件においてすら RMSE が小さいことである。つまり, この推定のパフォーマンスの違いは推定時におけるモデル誤指定の問題ではなく, 刺激選択時におけるモデル誤指定の影響であると主張できる。

Table 4-1A. Comparison of four item selection methods on accuracy of estimation ($\beta = (1, 1, 1)$ condition)

	RMSE									Determinant of the Fisher information matrix		Weight of M_1
	β_1			β_2			β_3			M_1	M_2	
	MA	PMSE	ASME	MA	PMSE	ASME	MA	PMSE	ASME			
Proposed MA-DO	0.053	0.053	0.053	0.053	0.048	0.053	0.017	0.001	0.017	176,592	177,384	1.00
PMSE-DO	0.048	0.048	0.048	0.043	0.043	0.043	0.000	0.000	0.000	176,086	73,772	1.00
correctly-specified DO	0.048	0.050	0.048	0.043	0.047	0.043	0.000	0.000	0.000	176,221	73,613	1.00
misspecified DO	0.049	0.055	0.134	0.081	0.083	1.000	0.000	0.000	0.159	73,796	176,670	1.00

Note. True model is M_1 . Each row corresponds to the stimulus selection method. The columns of MA (PMSE, and ASME) represent results of MA (PMSE, and ASME) estimation condition. The correctly-specified CAT condition use conventional CAT assuming the true model, and the misspecified CAT assumes misspecified model. MA means model averaging estimation. PMSE means post-model-selection estimator. ASME means a priori selected model-based estimation. True β values are (1, 1, 1).

Table 4-1B. Comparison of four item selection methods on accuracy of estimation ($\beta = (1, 0.1, 0.1)$ condition)

	RMSE									Determinant of the Fisher information matrix		Weight of M_1
	β_1			β_2			β_3			M_1	M_2	
	MA	PMSE	ASME	MA	PMSE	ASME	MA	PMSE	ASME			
Proposed MA-DO	0.053	0.053	0.053	0.058	0.058	0.058	0.047	0.047	0.047	176,599	177,393	0.62
PMSE-DO	0.049	0.049	0.049	0.060	0.060	0.060	0.038	0.038	0.038	146,181	103,709	0.74
correctly-specified DO	0.048	0.048	0.048	0.052	0.052	0.043	0.046	0.058	0.000	176,221	73,613	0.78
misspecified DO	0.050	0.050	0.048	0.081	0.090	0.100	0.029	0.035	0.051	73,796	176,670	0.66

Note. True model is M_1 . Each row corresponds to the stimulus selection method. The columns of MA (PMSE, and ASME) represent results of MA (PMSE, and ASME) estimation condition. The correctly-specified CAT condition use conventional CAT assuming the true model, and the misspecified CAT assumes misspecified model. MA means model averaging estimation. PMSE means post-model-selection estimator. ASME means a priori selected model-based estimation. True β values are (1, 0.1, 0.1).

4.3.2 SS2-2: CPT とプロスペクト理論

4.3.2.1 モデル

SS2-2 ではより複雑な意思決定モデルにおいて MA-DO の効果検証を行う。ギャンブル A_{it} では確率 $p_{it1}^{(A)}$ で報酬 $x_{it1}^{(A)}$ がもらえ確率 $1 - p_{it1}^{(A)}$ で報酬 $x_{it2}^{(A)}$ がもらえるとする (Lauriola et al., 2007; Nilsson et al., 2011)。多くの研究ではギャンブル B_{it} も同様の構造として、つまり客観確率が分かった選択肢を提示してリスクテイキング行動を研究している。一方で本研究では不確実性下の意思決定と呼ばれる (Ellsberg, 1961; Fox & Tversky, 1995; Kilka & Weber, 2001; Lauriola et al., 2007; Tversky & Fox, 1995; Wakker, 2004) 選択肢 B の確率が未知の状態での意思決定課題を考える。課題の例を Figure 4-1 に示す。客観確率が分かっている選択肢 A をリスククジ、客観確率が提示されていない選択肢 B を曖昧クジと呼ぶ。ただし、選択肢 B の確率自体は試行間で一定であると参加者には教示され、それを主観確率パラメータとして推定する課題を考える。リスククジの客観確率は試行間で実験者が動かす。表記の簡潔さのために以降では (A) や (B) などの添え字を省略する場合がある。Q 学習モデルとは異なり報酬額 (ギャンブル結果) のフィードバックは参加者には提示されない。

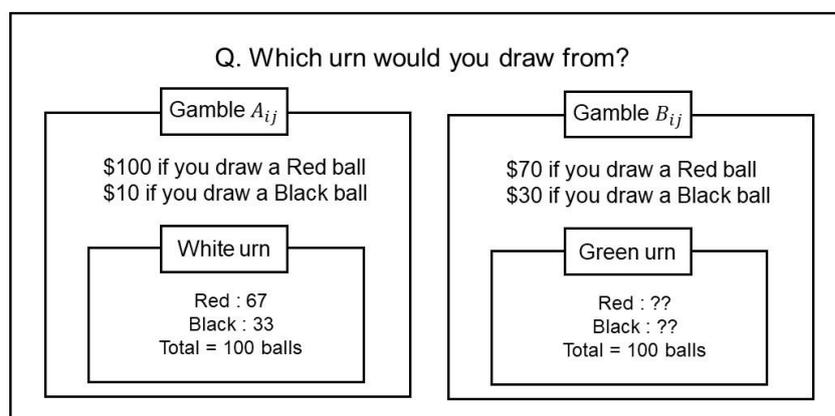


Figure 4-1

意思決定課題の例。この課題は Lauriola and Levin (2001) および Lauriola et al. (2007) を参考に作成した。

この課題におけるデータ生成モデルを考えるため、Tversky and Kahneman (1979) はプロスペクト理論 (Prospect theory, PT) を提案した。PT モデルにおいては、ギャンブル A の価値は

$$V(A_{ij}) = v(x_{it1})w(p_{it1}) + v(x_{it2})w(1 - p_{it1}) \quad (40)$$

で定義される。ただし、 $v(\cdot)$ は客観的な金銭の主観価値を表す価値関数、 $w(\cdot)$ は客観確率を意思決定の重みに変換する確率加重関数である (Gonzalez & Wu, 1999)。これらの関数のよくある設定としては

$$v(x_{itk}) = \begin{cases} x_{itk}^{\alpha_i} & \text{if } x_{itk} \geq 0, \\ -\lambda_i(-x_{itk})^{\beta_i} & \text{if } x_{itk} < 0, \end{cases} \quad (41)$$

$$w(p_{it1}) = \begin{cases} \frac{p_{it1}^{\gamma_i}}{(p_{it1}^{\gamma_i} + (1 - p_{it1})^{\gamma_i})^{\frac{1}{\gamma_i}}} & \text{if } x_{it1} \geq 0, \\ \frac{p_{it1}^{\delta_i}}{(p_{it1}^{\delta_i} + (1 - p_{it1})^{\delta_i})^{\frac{1}{\delta_i}}} & \text{if } x_{it1} < 0, \end{cases} \quad (42)$$

がある (Tversky & Kahneman, 1992)。ただし、 α_i, β_i は 0 から 1 の値をとるパラメータ、 γ_i, δ_i は確率加重関数の曲率を定めるパラメータ、 λ_i は損失忌避の程度を表すパラメータである。Figure 4-2 に、 γ_i が 1 より小さい場合 (逆 S 字) と 1 の場合 (線形) における確率加重関数の例を示す。本シミュレーション実験では獲得状況、 $x_{itk} \geq 0$ 、のみを扱うため $\beta_i, \delta_i, \lambda_i$ については考えない。損失状況を含んでもほぼ同様である。また、不確実性下の意思決定として、Abdellaoui et al., (2005) は

$$w(\theta_{i1}) = \frac{\theta_{i1}^{\gamma_i}}{(\theta_{i1}^{\gamma_i} + (1 - \theta_{i1})^{\gamma_i})^{\frac{1}{\gamma_i}}} \quad (43)$$

を提案している。ただし、 θ_{i1} は曖昧クジにおける主観確率パラメータである。つまり、単に客観確率の値に主観確率パラメータを入れて、関数形自体は共通のものを使用するという考えである。藤田・岡田 (2019) ではこの拡張モデルにおいては、CAT を適用しないと、単一課題からパラメータ推定しようとした時に、特に γ_i のバイアスが大きくなりやすいことが示されている。不確実性下の意思決定においては、パラメータ γ_i に注目することが多いため、この推定上の問題は重大である。

参加者 i が試行 t で選択肢 A を選んだら $y_{it} = 0$ 、選択肢 B を選んだら $y_{it} = 1$ とする。PT モデルにおいては、

$$y_{it} \sim \text{Bernoulli}(p(y_{it} = 1 | \xi_i)) \quad (44)$$

$$p(y_{it} = 1; \xi_i) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\phi_i \left(V(B_{ij}) - V(A_{ij})\right)\right)} \quad (45)$$

が仮定される。ただし、 $\xi_i = (\theta_i, \gamma_i, \alpha_i, \phi_i)$ である。

PT モデルの拡張として累積プロスペクト理論 (CPT, Tversky & Kahneman, 1992) モデルがある。CPT モデルでは選択肢 A の価値は

$$V(A_{ij}) = v(x_{it1})w(p_{it1}) + v(x_{it2})(1 - w(p_{it1})) \quad (46)$$

で計算される。構成要素 (e.g., $v(\cdot), w(\cdot)$) 自体は PT モデルと同じ関数形を仮定できる。第二項部分が PT モデルでは $w(p_{it2}) = w(1 - p_{it1})$ だったが、CPT モデルでは $w(p_{it2}) = 1 - w(p_{it1})$ になっていることに注意して欲しい。曖昧クジを含んだ意思決定課題に適用するために CPT モデルは提案されているが、これらのモデル間でどちらが尤もらしいかを比較した研究は少ない。CPT モデルにおける F 情報行列の計算については、藤田・岡田 (2019) で導出されている。

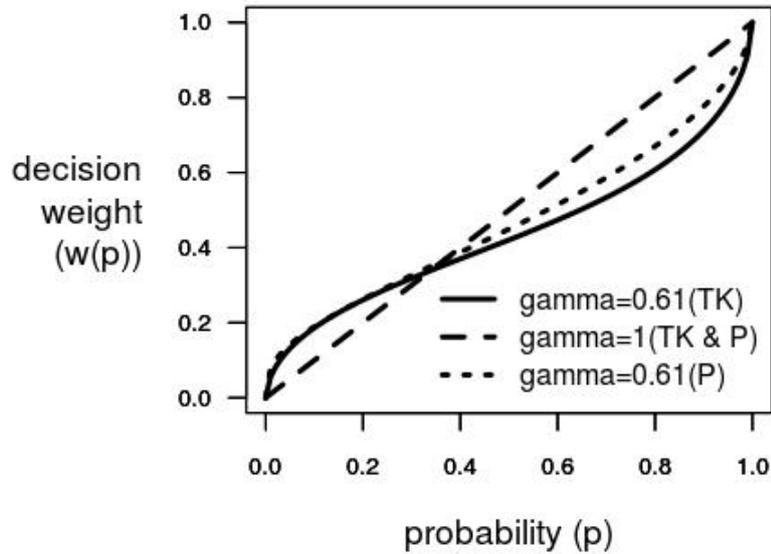


Figure 4-2

確率加重関数の例。実線は Tversky and Kahneman のモデルにおいて $\gamma_i = 0.61$ の場合である。点線は $\gamma_i = 1$ の場合である。細い点線は Prelec (1998) のモデルにおいて $\gamma_i = 0.61$ の場合である。

4.3.2.2 方法

真のパラメータ値は、先行研究 (e.g., Liu & Onculer, 2015; Tversky & Kahneman, 1992) を参考にし、 $\theta_i \sim U(0.75, 0.85)$, $\gamma_i \sim U(0.55, 0.65)$, $\alpha_i \sim U(0.85, 0.95)$, $\phi \sim U(0.9, 1.1)$ とした。真のモデルは PT モデルか CPT モデルである。刺激の候補値については、報酬額は 10 から 100 の値を 5 ずつ増加させた各値、客観確率については 0.01 から 0.99 の値を 16 等分する各値を候補値とした。また、計算負荷を減らすため $x_{it1}^{(A)}, x_{it2}^{(B)}$ はランダムに刺激選択し、 $x_{it1}^{(B)}, x_{it2}^{(A)}, p_{it1}^{(A)}$ のみ F 情報量ベースでの刺激選択を行った。つまり、5 次元全ての刺激空間を探索するのは計算負荷が高すぎるので、2 次元はランダムに決めて 3 次元空間のみを探索した。3 次元分の刺激選択だけであれば、数秒程度で終わるため参加者を待たせてしまう危険性も少ない。最初の 5 試行は初期試行として、刺激選択条件間に依らず同一の刺激を提示した。ただし γ_i の F 情報量が大きくなるように初期試行の刺激は固定した。これはランダムに選んだ場合には γ_i の推定精度を上げることが難しいからである。

SS2-1 と同様に、4 つの刺激選択条件 (MA-DO, PMSE-DO, correctly-specified DO, misspecified DO), 3 つの推定条件 (MA 推定, PMSE 推定, ASME 推定) を用意した。モデルが複雑になったため推定は MCMC 推定により行った。試行数は 30 試行で、シミュレーションは 200 回繰り返した。点推定値は基本的に事後平均値 (expected a posteriori, EAP) を利用したが、 ϕ_i だけは事後モード値 (maximum a posteriori, MAP) を利用した。これは ϕ_i が正の歪度を持つ歪んだ分布だったからである。また F 情報行列の行列式と CPT のモデルの重みも計算した。

4.3.2.3 結果と考察

Table 4-2 に RMSE, 行列式, CPT モデルの重みの結果を示す。ASME 推定条件の RMSE の結果を見ると、misspecified DO 条件において特に γ_i の RMSE が高くなっている。MA 推定および PMSE 推定

条件においても、とりわけ真のモデルが PT モデルの時、misspecified DO 条件は MA-DO 条件より RMSE が高く、また MA-DO 条件は correctly-specified DO 条件と同等のパフォーマンスであった。これらの結果から、MA-DO は刺激選択時のモデル誤指定による推定のパフォーマンス低下を防ぐことが期待できる。これは SS2-1 と同様の結果である。また、PMSE-DO 条件は真のモデルが PT モデルの状況で、misspecified DO 条件と同じくらい RMSE が高かった。PMSE-DO 条件では、推定値と真値のズレの最大値が MA-DO 条件のものより大きいことが確認されており、この最悪の結果に引っ張られて RMSE の平均が大きくなったと考えられる。これは PMSE-DO よりも MA-DO の方が望ましい手法であることを意味する。他のパラメータ ($\theta_i, \alpha_i, \phi_i$) に関しては刺激選択間での顕著な違いは見られない。これは、 γ_i に関する F 情報量のバラつきが大きく、刺激選択による影響は γ_i に対する影響が大きいためであると考えられる。

CPT モデルの F 情報行列の行列式に関しては、元々は、CPT モデルを仮定した CAT > MA-DO > PT モデルを仮定した CAT の順序を予測していた。しかし、Table 4-2 の結果では、完璧にそのような関係になっているわけではない。原因としては MA-DO 条件においてはリスケールしたため行列式そのもののスケールでは刺激選択を行わなかったことが挙げられる。モデルの重みについては、misspecified DO 条件で真のモデルの重みが小さい傾向が見られた。

Table 4-2. Comparison of four item selection methods on accuracy of estimates (CPT, PT)

		RMSE												Determinant of the fisher information matrix		Weight of CPT model		
		θ				γ				α				ϕ			CPT	PT
		MA	PMSE	ASME		MA	PMSE	ASME		MA	PMSE	ASME		MA	PMSE			
True Model = CPT	Proposed MA-DO	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.08	0.08	0.08	0.96	0.96	0.96	16,641,482,247	2,281,375,720	0.93		
	PMSE-DO	0.03	0.03	0.03	0.05	0.04	0.04	0.09	0.09	0.09	0.94	0.95	0.95	18,617,199,423	1,593,708,983	0.95		
	correctly-specified DO	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.09	0.09	0.09	0.97	0.98	0.95	18,821,888,886	1,347,668,642	0.9		
	misspecified DO	0.03	0.03	0.04	0.05	0.05	0.13	0.09	0.08	0.17	0.96	0.98	0.87	673,962,000	1,860,070,599	0.89		
True Model = PT	Proposed MA-DO	0.03	0.03	0.03	0.08	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07	0.79	0.79	0.79	3,311,576,675	41,930,336,461	0.1		
	PMSE-DO	0.04	0.04	0.04	0.15	0.16	0.16	0.08	0.08	0.08	0.92	0.92	0.92	1,904,413,700	33,397,993,886	0.1		
	correctly-specified DO	0.03	0.03	0.03	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08	0.08	0.74	0.74	0.74	1,190,773,737	17,092,991,701	0.07		
	misspecified DO	0.04	0.04	0.05	0.14	0.15	0.19	0.07	0.07	0.08	1.02	1.05	0.88	31,364,303,617	2,031,118,596	0.29		

Note. As is the case in SS2-1, each row corresponds stimulus selection method, and the columns of MA (PMSE, and ASME) represent results of MA (PMSE, and ASME) estimation condition. The correctly-specified CAT condition use conventional CAT assuming the true model, and the misspecified CAT assumes misspecified model. MA means model averaging estimation. PMSE means post-model-selection estimator. ASME means a priori selected model-based estimation.

4.3.3 SS2-3: Tversky and Kahneman (1992) モデルと Prelec (1998) モデル

4.3.3.1 モデル

本節のシミュレーション実験では、二つのモデル間で関数形の違いがそれほど大きくない場合における MA-DO の効果を検討する。実験課題は SS2-2 と同様である。想定するモデルの一つは確率加重関数を Tversky and Kahneman (1992) で提案されたものとする CPT モデルである。本節のシミュレーション実験では、もう一方のモデルにおける確率加重関数を Prelec (1998) で提案された

$$w(p_{it1}) = \exp(-(-\log(p_{it1}))^{\gamma_i}) \quad (47)$$

とする CPT モデルとする。確率加重関数の形については Figure 4-2 に例示している。

4.3.3.2 方法

パラメータ真値, 刺激候補値, 刺激選択条件, 推定条件, 試行数, シミュレーションの繰り返し数, 評価指標 (e.g., RMSE) などは SS2-2 と同様である。SS2-2 との違いは, 真のモデル (確率加重関数) が Tversky and Kahneman (1992) モデルあるいは Prelec (1998) モデルを考えるということである。

4.3.3.3 結果と考察

RMSE, F 情報行列の行列式, Tversky and Kahneman (1992) モデルの重みを表すのが Table 4-3 である。ASME 推定条件における RMSE を見ると, misspecified DO 条件では他の条件より特に γ_i の RMSE が大きい。この結果は SS2-1, SS2-2 と同様である。MA 推定, PMSE 推定条件における γ_i の RMSE を見ると, misspecified DO 条件は MA-DO 条件や correctly-specified DO 条件と同等のパフォーマンスである。つまり, 今回の状況では, 刺激選択時におけるモデル誤指定は RMSE に関して重大な問題を引き起こしていない。ただし, MA-DO 条件は少なくとも misspecified DO 条件よりパフォーマンスが悪くなることはなかった。F 情報行列の行列式やモデルの重みに関する結果は, SS2-2 とほぼ同様であった。

SS2-3 において, MA 推定条件においては, なぜ刺激選択条件間で RMSE が同等となったのかの原因を検討することは重要である。そのために, 各モデルを仮定した時に選択された刺激を具体的にチェックした。Figure 4-3 は, 各モデルを仮定して CAT を行った時 (i.e., correctly-specified DO と misspecified DO) に, 各刺激が選択された頻度のモデル間の乖離度を表す。この Figure からは, SS2-2 では, 仮定するモデルによって選択される刺激は SS2-3 と比べて, より異なるものになりやすいことが分かる。実際に各刺激における乖離度の総和を取ると, SS2-2 では, 真のモデルが CPT モデルの時 1812 で, 真のモデルが PT モデルの時 1806 であった。一方で SS2-3 では, 真のモデルが Tversky and Kahneman (1992) モデルの時 280 であった。そのため, SS2-3 においては, CAT で仮定するモデルが違ってても選択される刺激が類似したものになることにより, 刺激選択条件間での違いが顕著にならなかったと考えられる。

Table 4-3. Comparison of four item selection methods on accuracy of estimates (Tversky & Kahneman, Prelec)

		RMSE												Determinant of the fisher information matrix		Model weight
		θ			γ			α			ϕ			CPT	PT	
		MA	PMSE	ASME	MA	PMSE	ASME	MA	PMSE	ASME	MA	PMSE	ASME			
True Model = Tversky & Kahneman	Proposed MA-DO	0.03	0.03	0.03	0.05	0.05	0.05	0.10	0.10	0.10	1.07	1.07	1.07	12,359,524,667	2,706,981,823	0.54
	PMSE-DO	0.03	0.03	0.03	0.05	0.06	0.06	0.10	0.10	0.10	1.29	1.34	1.34	26,017,054,759	3,818,029,816	0.57
	correctly- specified DO	0.03	0.03	0.03	0.05	0.07	0.04	0.10	0.10	0.09	1.04	1.08	0.95	13,568,817,909	1,894,864,140	0.62
	misspecified DO	0.03	0.03	0.03	0.05	0.07	0.08	0.10	0.10	0.13	1.11	1.16	1.32	6,092,070,634	3,929,609,051	0.48
True Model = Prelec	Proposed MA-DO	0.02	0.02	0.02	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.96	0.96	0.96	20,445,828,789	10,535,703,218	0.36
	PMSE-DO	0.03	0.03	0.03	0.08	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07	1.14	1.18	1.18	23,862,817,431	22,008,943,210	0.38
	correctly- specified DO	0.03	0.03	0.03	0.07	0.07	0.06	0.08	0.08	0.08	0.99	1.03	1.01	9,016,058,629	12,439,530,692	0.34
	misspecified DO	0.02	0.02	0.02	0.08	0.08	0.12	0.08	0.08	0.08	1.05	1.09	0.97	13,950,105,126	7,042,905,168	0.45

Note. As with the case of SS2-2, each row corresponds to stimulus selection method, and the columns of MA, PMSE, and ASME represent the results of MA, PMSE, and ASME estimation conditions. The correctly-specified CAT condition use conventional CAT assuming the true model, and the misspecified CAT assumes misspecified model. MA means model averaging estimation. PMSE means post-model-selection estimator. ASME means a priori selected model-based estimation.

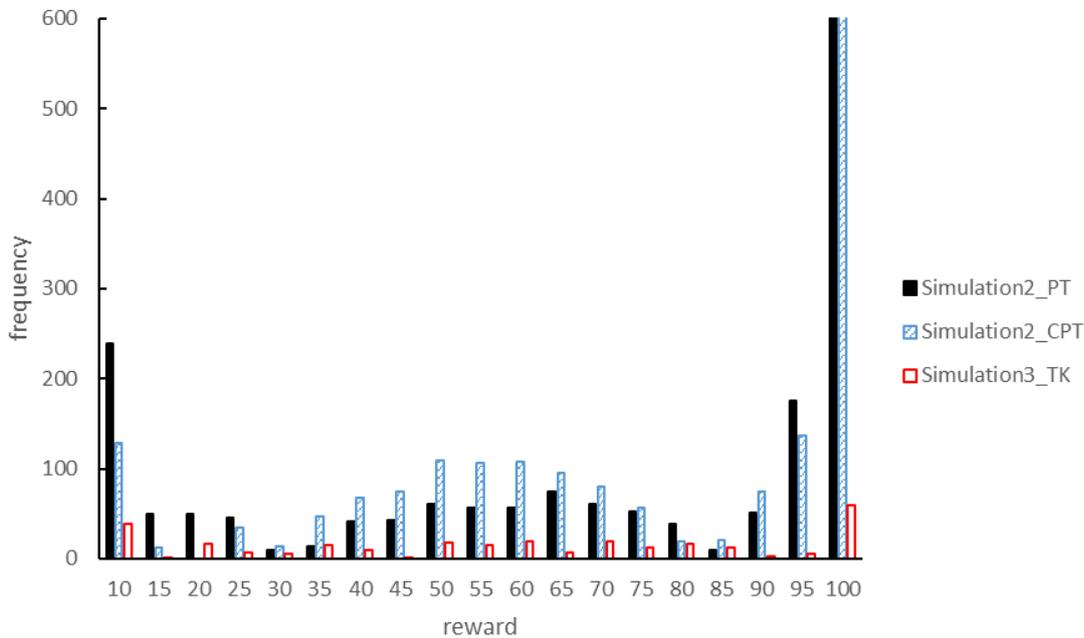


Figure 4-3

各モデルを仮定した時に選択された刺激の頻度における乖離度。x 軸は報酬額候補値 ($x_{it2}^{(A)}$)を, y 軸は各モデルを仮定して D 最適化をした際に選択された刺激の頻度に関する差分の絶対値を表す。Simulation2_PT, Simulation2_CPT, Simulation3_TK はそれぞれ, SS2-2 において真のモデルが PT モデル, SS2-2 において真のモデルが CPT モデル, SS2-3 において真のモデルが Tversky and Kahneman (1992) モデルの時の結果を表す。

4.4 考察

従来の単一のモデルを仮定する CAT ではモデルの不確実性が無視されているため、モデル誤指定により推定精度が効率的に向上しないことがあると考えられる。実際、シミュレーション実験において、誤ったモデルを仮定した CAT は、真のモデルを仮定した CAT よりも推定のパフォーマンスが悪かった。さらに、本研究で提案した複数のモデルを同時に考慮した MA-DO は、単一のモデルを真のモデルであると仮定することなく高い推定精度を保てることを確認した。

ASME 条件においては、SS2-1 から SS2-3 を通して、misspecified DO 条件の推定が最も悪かった。これは、刺激選択時および推定時におけるモデル誤指定の悪影響を示している。さらに MA 推定、PMSE 条件においても、misspecified DO 条件は SS2-1, SS2-2 では推定のパフォーマンスが最も悪いことが多かった。この結果は、刺激選択時におけるモデル誤指定により推定精度が上昇しなかったことを示している。MA-DO でモデルの不確実性を考慮することによって、この問題は回避できることも示されている。

さらに SS2-3 では、刺激選択時のモデル誤指定がそれほど推定の問題に繋がらない場合があることを示した。これは、各モデルを仮定した元での刺激選択が類似した刺激を選ぶからであると考えられる。真のモデルと誤ったモデルの関数形の違いが顕著ではないというのが原因だと考えられる。モデル誤指定により推定のパフォーマンスにどの程度悪影響を及ぼすかどうかは、モデル依存であるだろう。場合によってはモデル誤指定による悪影響が小さく (Markon & Chmielewski, 2013)、誤ったモデルを仮定した CAT でもなお比較的適切な刺激を選んでいる状況も生じ得る。

シミュレーション実験において重要な結果の一つは、MA-DO が真のモデルを仮定した CAT と同等のパフォーマンスを達成できた点である。真のモデルを仮定した CAT は、真のモデルが既知の場合でしか利用できない理想的な状況における CAT であると言える。現実場面では、常に CAT を適用する際にモデル誤指定の危険がある。そのため、真のモデルが未知の状況でも、MA-DO によって頑健に適切な刺激選択が行えるという点で MA-DO は望ましい。また、PMSE-DO は SS2-2 において比較的大きいエラーを生じてしまうことがあった。そのため、最悪の結果を確実に避けるという観点からも、MA-DO がより望ましい手法ということが言えるだろう。

本研究の制約として、シミュレーション実験において、候補モデルの中に真のモデルがあることを仮定している点が挙げられる。実際の研究では研究者の設定した候補モデルの中に厳密に真のモデルは含まれていないことが多いからである。そのため MA-DO を行う際に、真のモデルを含まない時に、推定精度などがどのようになるのかも今後検討されるべきである。MA-DO やモデル選択が機能するかどうかを判断するためには、複数の候補モデルの中で真のモデルに最も近いモデル (近似モデル) が、どの程度真のモデルと乖離しているかが重要となるであろう。この点を踏まえ、モデルセット (複数の候補モデル全体) の良さを評価することができると良い。モデルセットの評価については、7.3 節において少し触れる。

また MA 推定あるいは MA-DO に関する注意点として、モデルの重みの式 (33), (34) は AIC, BIC の定義におけるスケールに依存する。ここでスケールとは、 $AIC_k = -2(\log L_k(\mathbf{y}_i | \hat{\xi}_{ik}, M_k) - p_k)$, $BIC_k = -2(\log L_k(\mathbf{y}_i | \hat{\xi}_{ik}, M_k) - \frac{p_k}{2} \log T)$ における -2 のことである。例えば計算を簡単にするため、パラメータ数がモデル間で同一であるとすると、スケールを一般に a と表した時、式(33), (34) はともに $c(M_1) = \text{logit}^{-1} \left\{ \frac{a}{2} (\log L_2(\mathbf{y}_i | \hat{\xi}_{i2}, M_2) - \log L_1(\mathbf{y}_i | \hat{\xi}_{i1}, M_1)) \right\}$ となる。モデルの重みが最大対数尤度の差分に依存することは直感に合っているが、差分がどれくらいのモデルの重みにつながるかをスケール a がコントロールしている。最大対数尤度の差分が同じ値でも、 a の絶対値が小さい時は、 a の絶対値が大きい時に比

べて、不確実性がより大きいと判断して (i.e., モデルの重みは 0.5 に近い値となり) MA 推定を行うことになる。研究者が恣意的に決められるスケール a によって、モデルの重みが変わってしまうことには注意が必要である。少なくともスケール a によって、MA 推定や MA-DO で使用するモデルの重みが変わるということは知っておくことが望ましい。どのような値が最適であるかを判断することは難しいが、スケールを明示することと、できる限りスケールを研究間で統一することが望ましいと考えられる。

5. 第5章：研究3

5.1 イントロダクション

従来の CAT および ADO は基本的に個人レベルのモデルにおける個人のパラメータのみを考慮している。5.2 節で説明するが、CAT も推定精度の観点からの ADO も個人レベルのパラメータの推定精度を最大化するための手法である。一方で、実際の認知心理実験などでは、研究者は個人のパラメータ自体よりも、集団平均あるいは条件操作による集団平均値差などの集団レベルのパラメータに関心があることが多い。そのため、実際の研究者の関心と、CAT や ADO で仮定されている状況の間には隔たりが存在すると言える。反復測定状況であるならば、その構造を反映するために一般化線形混合モデル (Generalized linear mixed model, GLMM) や階層ベイズモデルを適用することが推奨されている。級内相関などで表現される、サンプリングプロセスにおける非独立性を無視した場合、検定におけるタイプ I エラーが増大することが理由の一つである (Walsh, 1947)。つまり、個人レベルのモデルは、反復測定データをモデリングするには不十分である。そのため、刺激選択手法においても、集団レベルのモデルを仮定する、あるいは集団レベルのパラメータを考慮した手法が必要となる。

しかし、集団レベルパラメータの推定精度を直接的に最大化する刺激選択は計算負荷の観点から実装が難しい。本研究と最も関連する先行研究である Kim et al. (2014) および Gu et al. (2016) では hierarchical adaptive design optimization (HADO) が提案されている。ここで言う hierarchical とは、1 人目から n-1 人目までのデータから事後分布を導出しておいて、それを n 人目の参加者の実験における事前分布として利用することを意味する。つまり、各参加者に対して独立に CAT や ADO を適用するのではなく、本人以外の参加者のデータも積極的に利用する点が特徴である。彼らは集団レベルパラメータを直接的に最適化する刺激選択基準にも言及しているが、実際に実装されてはいない。刺激選択基準自体は相変わらず個人レベルパラメータの推定精度を最大化するというものである。著者の理解が正しければ、彼らが提案した集団レベルパラメータを直接最適化するための刺激選択基準では計算負荷の観点で実行不可能である。先行研究では、1 回の階層ベイズモデルによる推定に 11 秒かかることが報告されている (詳しい計算環境は Kim et al., 2014 を参照)。Kim et al. (2014) で提案されている集団レベルパラメータのための刺激選択基準を利用すると考えると、刺激候補値の数だけその階層ベイズモデルによる推定を行わないといけない。これは実際の実験では、11 秒×刺激数だけ参加者を各試行ごとに待たせてしまうことになるため、現実的に利用できない。

集団レベルパラメータを直接最適化する手法は計算負荷の観点から現実的ではない可能性がある。一方で個人レベルのパラメータの推定精度を高めれば、間接的に集団レベルパラメータの推定精度も改善されると直感的には考えられるかもしれない。本来は階層モデルが真である場合には、個人レベルの CAT はモデル誤指定の問題を孕んでいる。しかし、個人レベルパラメータは集団レベルの分布から生成されることを考えると、個人レベルパラメータの推定精度が上がれば、集団レベルパラメータ (e.g., 集団平均) の推定精度も向上するだろう。集団レベルパラメータは心理実験において興味を持たれやすい対象であるにもかかわらず、ADO や CAT の刺激選択研究においては、集団レベルパラメータへの影響がシミュレーション実験などで明示的に検討されることは著者の知る限りなかった。

そこで本研究では、実際の実験での関心と刺激選択手法のギャップを埋めるため、個人レベル CAT が集団レベルパラメータの推定精度に及ぼす影響を検討する。もし個人レベル CAT が集団レベルパラメータの推定精度を高めるならば、反復測定状況においてさえ個人レベル CAT を利用することを推奨することができる。このために、本研究では集団レベルパラメータの推定精度をランダム刺激選択と個人レベル CAT で比較するための 2 つのシミュレーション実験を行う。本研究では認知モデルを利用する。一つ目のシミュレーション実験は、遅延価値割引モデル (Delay discounting, DD; Madden et al.,

2003) 課題を利用したものである。二つ目のシミュレーション実験は、CPT モデルを利用したものである。

先行研究と比べ本研究の特徴は、集団レベルパラメータの推定精度を対象とする点である。HADO は反復測定状況において階層モデルを適用することを想定しているが、集団パラメータを直接最適化する刺激選択法は実装されておらず、また RMSE や PSD をチェックすることに関しても、個人レベルパラメータの RMSE, PSD を確認している。一方で本研究では集団レベルパラメータの RMSE, PSD を確認する。また、多くの推定精度の観点からの ADO の研究と異なるのは、計算負荷がより低い F 情報量ベースの刺激選択 (i.e., CAT) を利用して検討する点である。

5.2 節では HADO の説明を行い、5.3 節ではシミュレーション実験により集団レベルパラメータへの個人レベル CAT の影響を検討する。5.4 節において考察を行う。

5.2 方法: HADO

2.2 節では推定精度の観点からの ADO では、事前分布と事後分布の比の対数を局所効用として考える方法を説明した。この手法の拡張として HADO がある。HADO では、パラメータの事前分布 $p(\xi_m)$ の代わりに、それまでの参加者のデータ $y_{1:(n-1)}$ を条件づけた事前分布 $p(\xi_{m,n}|y_{1:(n-1)})$ を利用する。つまり hierarchical とは n 人目の事前分布を設定する時に、1 から n-1 人目までのデータを利用することを指す。一方で個人レベルの ADO あるいは CAT では事前分布を設定する際には他の参加者のデータは使用しない。さらに、集団レベルのパラメータにおける事前分布と事後分布の比を局所効用として定義することもできる。つまり $u(d, \mu_m, y_m) = \log \frac{p(\mu|y_m, d)}{p(\mu_m)}$ を局所効用とする (Kim et al., 2014)。ただし、 μ は集団レベルパラメータである。しかし、この手法では個人レベルの ADO と同様に、全ての刺激点で (階層ベイズモデルによる) 推定を行わなければならないため、計算負荷の点で問題が生じる。つまり、階層ベイズ推定が 1 秒で終わったとしても刺激の候補点が 100 種類程度あれば計 100 秒参加者を待たせてしまうことになるため、実際の実験において刺激選択に利用することはできない。個人レベルの CAT は 2 章で説明した手法を利用する。

5.3 シミュレーション実験

本節では、個人レベル CAT は集団レベルパラメータの推定精度を、ランダム刺激選択より効率的に向上させることができるかを確認することを目的とする。対象となる認知モデルは DD モデルと CPT モデルである。シンプルなロジスティック回帰分析などと比べると、これら 2 つのモデルは比較的複雑な認知モデルであるため、適切な刺激を何の基準もなく選択することは難しいと言える。

5.3.1 SS3-1

5.3.1.1 モデル

DD 課題では参加者が少額の即時報酬を多額の遅延報酬に比べどの程度好むかを評価する。時間的な遅延により報酬の価値は割り引かれると考えられている。この割引はある種の衝動性を測っていると考えられ、個人内で一貫しているとされている (Odum, 2011)。また割引率と他の認知能力が関連したり (Shamosh & Gray, 2008)、将来の成功や臨床的な症状を予測できることから着目されている。

DD 課題は、遅延報酬と即時報酬が提示され、参加者はどちらか一方を選ぶ 2 値意思決定課題である。 $A_{it}^{(d)}, A_{it}^{(s)}$ をそれぞれ参加者 i の試行 t における遅延報酬の選択肢、および即時報酬の選択肢とする。即時選択肢 $A_{it}^{(s)}$ は遅延なしで報酬額 $x_{it}^{(s)}$ をもらえ、遅延選択肢 $A_{it}^{(d)}$ は遅延時間 $time_{it}$ で報酬額 $x_{it}^{(d)}$ がもらえる。刺激は $(x_{it}^{(s)}, x_{it}^{(d)}, time_{it})$ の 3 次元である。

DD モデルでは

$$y_{it} \sim \text{Bernoulli}(p_{it}(y_{it} = 1|\xi_i)), \quad (48)$$

$$p_{it}(y_{it} = 1|\xi_i) = \text{logit}^{-1} \left\{ \beta_i \left(u(A_{it}^{(d)}) - u(A_{it}^{(s)}) \right) \right\}, \quad (49)$$

$$u(A_{it}^{(s)}) = x_{it}^{(s)}, \quad (50)$$

$$u(A_{it}^{(d)}) = \frac{x_{it}^{(d)}}{1 + k_i \text{time}_{it}}, \quad (51)$$

という生成モデルを仮定する。ただし、 $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}) = (k_i, \beta_i)$ 、 k_i ($0 \leq k_i \leq 1$) は割引率パラメータ、 β_i ($0 \leq \beta_i$) は逆温度パラメータである。 $u(A_{it}^{(s)})$ は即時選択肢における主観的価値であり報酬額がそのまま価値として計算される。 $u(A_{it}^{(d)})$ は遅延選択肢における主観的価値であり、双曲線関数で報酬額が割引かれた形となる。双曲線関数は指数形の関数より当てはまりがよいとされている (Madden et al., 2003) が、他のモデルを仮定することもできる。

シミュレーションでは、N 人分の全てのデータが集まったら、集団レベルおよび個人レベルのパラメータ推定を行うために以下の集団レベルのモデル (階層モデル) を適用する。変量効果を含んだ階層モデルは

$$\xi_{iq} \sim N(\mu_q, \sigma_q^2), q = 1, 2. \quad (52)$$

が仮定される。ただし、 μ_q, σ_q は q 番目のパラメータにおける平均および標準偏差である。階層ベイズは各群で別々に適用されたため、群のインデックスである g は省略する。CAT のシミュレーションは、研究 1, 2 とほぼ同様の形で試行数 T, 参加者 N 人分の全データが集まるまで行い、最後に全データに対して階層モデルを適用した。

研究者は集団平均や、臨床群と健常群や実験群と統制群の集団平均値差を見ることで実験操作等の効果を検討できる。共分散の項を考えなければ、群間差の推定のバラつきは各群のパラメータの推定のばらつきの和となる。そのため本研究では、一つの群の集団平均の推定精度と、2つの群の集団平均値差の推定精度の両方に着目する。特に割引率が興味の対象となることが多い。

5.3.1.2 方法

シミュレーションの流れは以下の2つに分けることができる：(A) 個人レベルのシミュレーション；(B) 集団レベルのシミュレーション。(A) 個人レベルのシミュレーションでは、まず最初の5試行を初期試行としてランダムに刺激を選びデータ生成を行った。その後、通常の ADO や CAT と同様に(1) 刺激選択、(2) 実験ステップ、(3) ベイズ推定を繰り返し行った。この個人レベルのシミュレーションは各参加者で独立に行った。刺激選択ステップでは個人レベル CAT (本研究では ADO-D, ADO based on D-optimality と呼ぶことがある) あるいはランダム刺激選択により行った。(B) 集団レベルのシミュレーションでは、N 人全員分のデータを(A)によりデータ生成した後に、集団レベルパラメータを推定するため階層モデルを適用した。最後に、集団レベルおよび個人レベルのパラメータにおける RMSE と PSD を算出した。

シミュレーションの設定は以下の通りである。試行数 T, 参加者数 N, 群数 G はそれぞれ 20, 20, 2 であった。各群は N/2 人とした。(1) 刺激選択ステップに関しては、報酬額の候補値は 1, 2, ..., 20, 遅延時間の候補値は 1, 2, ..., 10 とした。(2) 実験ステップに関しては、群 1 における真の集団平均および標準偏差は $\mu_1 \sim N(0.2, 0.05^2)$, $\mu_2 \sim N(1, 0.1^2)$, $\sigma_1 \sim N(0.05, 0.01^2)$, $\sigma_2 \sim N(0.25, 0.05^2)$, 群 2 における真の集団平均および標準偏差は $\mu_1 \sim N(0.3, 0.075^2)$, $\mu_2 \sim N(1.5, 0.2^2)$, $\sigma_1 \sim N(0.05, 0.01^2)$, $\sigma_2 \sim N(0.25, 0.05^2)$ とした。つまり割引率の真の群間差は平均 0.1 である。これらのパラメータ値の設定は、特に割引率は分散が大きいことが示されており設定が難しいが、Ahn et al. (2020) の Supplement 情報を参考にした。例えば、何人かの参加者は割引率 0.01 以下の推定値となる場合もあれば、何人かの参加者は 0.9 以上の推定値となる場合もあった。基本的には、0 から 1 の間で低い値に偏っていたため平均は 0.2, 0.3 程度とし

た。各個人レベルのパラメータの真値は式(52) から生成した。これらの個人レベルのパラメータ真値は (2)実験ステップでデータ生成する時に利用した。(3) ベイズ推定ステップに関しては、MCMC 推定は 5000 回サンプリングしバーンイン期間として 2000 個を捨て、間引きは 1 で 3 チェインを回した。 β_i の事前分布は $\beta_i \sim Student's t(4, 0, 3)$ で割引率は一様分布 $U(0, 1)$ を使用した。また階層ベイズモデルの MCMC 推定では、集団レベルパラメータの事前分布は $\mu_1 \sim U(0, 1), \mu_2 \sim U(0, 100), \sigma_1, \sigma_2 \sim U(0, 100)$ とした。最後に集団レベルパラメータにおける RMSE を計算した。また追加的分析のために階層ベイズモデルで推定された個人レベルパラメータの RMSE も算出した。シミュレーションは 100 回繰り返した。

5.3.1.3 結果と考察

Table 5-1 は、各刺激選択条件における集団レベルパラメータの RMSE, PSD を示す。CAT 条件において、ランダム刺激選択条件より集団レベルパラメータの RMSE も PSD も小さい。割引率パラメータに注目する。Figures 5-1a, 5-1b は k_i の集団平均の RMSE および PSD を表す。RMSE, PSD 両方に関して、CAT 条件でランダム刺激選択条件より推定のパフォーマンスが良い。

集団平均値差に関しては、CAT 条件はランダム刺激選択条件よりも推定精度が良い (Figure 5-1c)。また個人レベルパラメータにおける刺激選択条件間の RMSE の違い (ランダム選択 - CAT 条件) は 0.01, 2.96 であった。PSD の違いは 0.06, 0.73 であった。全て正であるため、CAT 条件の方が RMSE, PSD が小さいことを意味する。

Table 5-1. RMSE and PSD of each stimulus selection condition					
		Random		ADO-D	
		group mean	group sd	group mean	group sd
RMSE	k	0.06	0.06	0.02	0.02
	β	1.56	1.01	0.46	0.44
PSD	k	0.06	0.06	0.02	0.02
	β	1.00	0.91	0.40	0.42

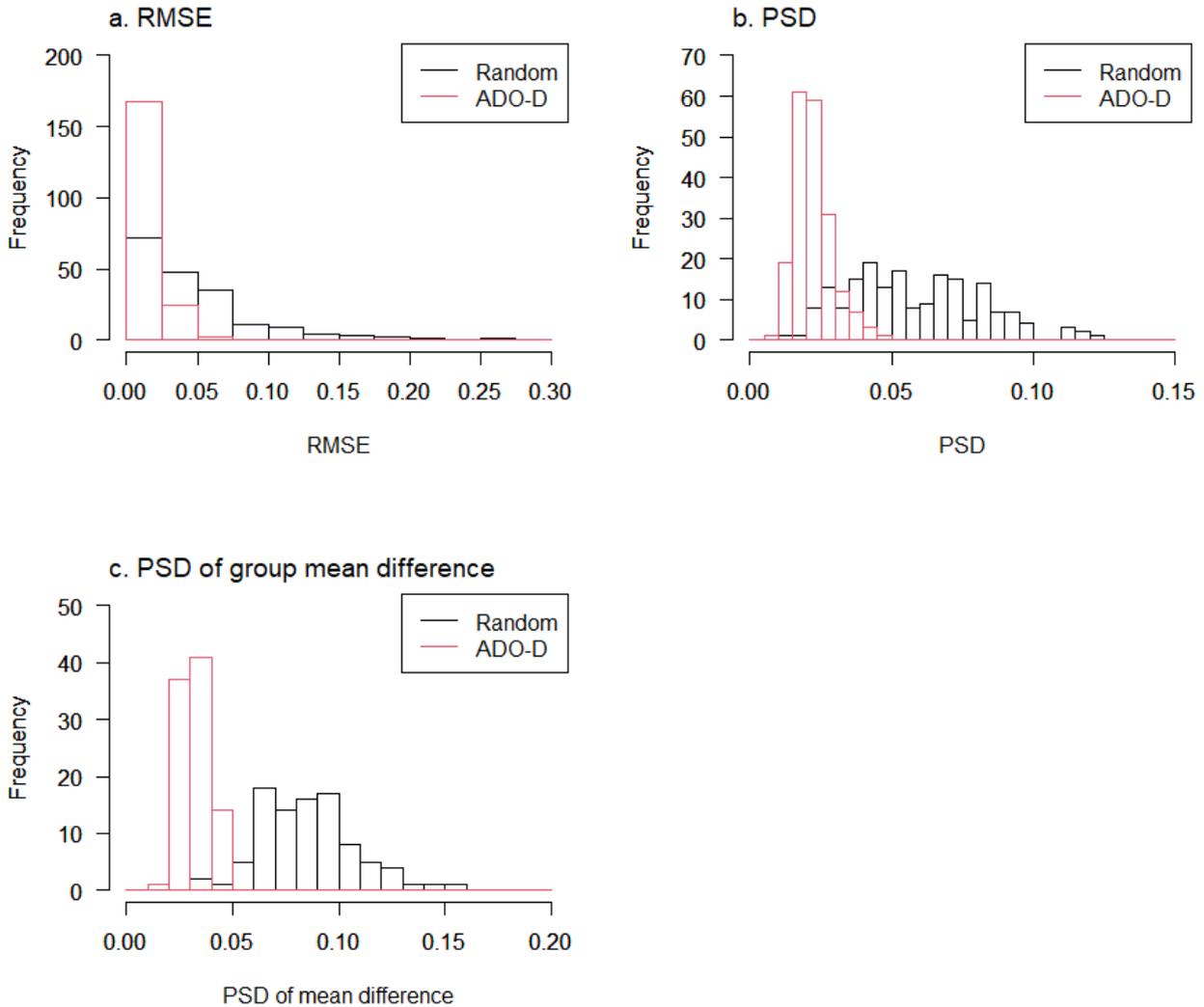


Figure 5-1

DD 課題における割引率 k_i の集団平均に関する RMSE, PSD

(a), (b): k_i の集団平均に関する RMSE, PSD。黒 (赤) 枠のヒストグラムはランダム刺激選択条件 (CAT 条件) の結果を表す。; (c): k_i の集団平均値差に関する PSD。

5.3.2 SS3-2

5.3.2.1 モデル

使用する認知課題および認知モデルは、研究 2 で使用した CPT モデルである。パラメータは $\xi_i = (\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}, \theta_{i4}) = (\eta_i, \gamma_i, \alpha_i, \phi_i)$ である。ただし η_i は主観確率パラメータである。階層モデルは SS3-1 と同様

$$\theta_{iq} \sim N(\mu_q, \sigma_q^2), q = 1, 2, 3, 4. \quad (53)$$

が仮定される。

5.3.2.2 方法

シミュレーションの流れは SS3-1 と同様である。試行数 T, 参加者数 N, 群数はそれぞれ 20, 20, 2 である。各群 N/2 とした。(1) 刺激選択に関しては、報酬額の候補値は 10, 15, 20, ..., 100, 客観確率の候補

値は 0.01 から 0.99 を 16 等分する各値とした。(2) 実験ステップに関しては、群 1 の集団平均および標準偏差は、 $\mu_1 \sim N(0.5, 0.1^2)$, $\mu_2 \sim N(0.61, 0.025^2)$, $\mu_3 \sim N(0.8, 0.025^2)$, $\mu_4 \sim N(1.7, 0.5^2)$, $\sigma_1 \sim N(0.1, 0.01^2)$, $\sigma_2 \sim N(0.05, 0.01^2)$, $\sigma_3 \sim N(0.05, 0.01^2)$, $\sigma_4 \sim N(0.25, 0.05^2)$, 群 2 の集団平均および標準偏差は、 $\mu_1 \sim N(0.55, 0.05^2)$, $\mu_2 \sim N(0.7, 0.05^2)$, $\mu_3 \sim N(0.75, 0.05^2)$, $\mu_4 \sim N(1.5, 0.25^2)$, $\sigma_1 \sim N(0.1, 0.01^2)$, $\sigma_2 \sim N(0.05, 0.01^2)$, $\sigma_3 \sim N(0.05, 0.01^2)$, $\sigma_4 \sim N(0.25, 0.05^2)$ とした。つまり γ_i に関する集団平均値差は平均約 0.1 である。これらのパラメータ値の設定は Nilsson et al. (2011) および Tversky and Kahneman (1992) を参考にした。(3) ベイズ推定ステップに関しては、SS3-1 と同様の設定である。 α_i, ϕ_i の事前分布はそれぞれ *Student's t*(4, 1, 0.25), *Student's t*(4, 0, 3) を利用した。 η_i, γ_i に関しては $\eta_i \sim U(0, 1)$, $\gamma_i \sim U(0, 2)$ とした。階層ベイズモデルの MCMC 推定においては、集団レベルパラメータの事前分布は $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \sim U(-1000, 1000)$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \sim U(0, 1000)$ とした。シミュレーションは 50 回繰り返した。

5.3.2.3 結果と考察

Table 5-2 は各刺激選択条件における集団パラメータの RMSE と PSD を示す。RMSE については、CAT 条件 (ADO-D 条件) における集団平均の RMSE は、ランダム刺激選択条件よりも小さかった。PSD については、 α_i, ϕ_i を除いて、CAT 条件はランダム刺激選択条件よりパフォーマンスが良かった。

パラメータ γ_i に着目する。Figures 5-2a, 5-2b は γ_i の集団平均の RMSE および PSD を表す。RMSE, PSD 両方に関して、CAT 条件でランダム刺激選択条件より推定のパフォーマンスが良い。藤田・岡田 (2019) の推定精度に関する結果と比べると、ランダム刺激選択条件においてさえ、階層モデルによる今回の推定精度は、個人レベルのモデルを使用したモデルでの推定精度より高いものであった。それでもなお、CAT 条件はランダム刺激選択条件よりパフォーマンスが良かった。

集団平均値差に関しては、CAT 条件はランダム刺激選択条件よりも推定精度が良い (Figure 5-2c)。また個人レベルパラメータにおける刺激選択条件間の RMSE の違い (ランダム選択 - CAT 条件) は 0.01, 0.02, 0.07, 78.13 であった。PSD の違いは 0.05, 0.06, 0.02, 0.02 であった。全て正であるため、CAT 条件の方が RMSE, PSD が小さいことを意味する。

		Random		ADO-D	
		group mean	group sd	group mean	group sd
RMSE	η	0.05	0.05	0.03	0.04
	γ	0.13	0.10	0.05	0.04
	α	0.30	0.09	0.15	0.10
	ϕ	0.85	0.14	0.52	0.25
PSD	η	0.06	0.06	0.04	0.04
	γ	0.07	0.08	0.03	0.03
	α	0.08	0.07	0.07	0.07
	ϕ	0.20	0.13	0.33	0.29

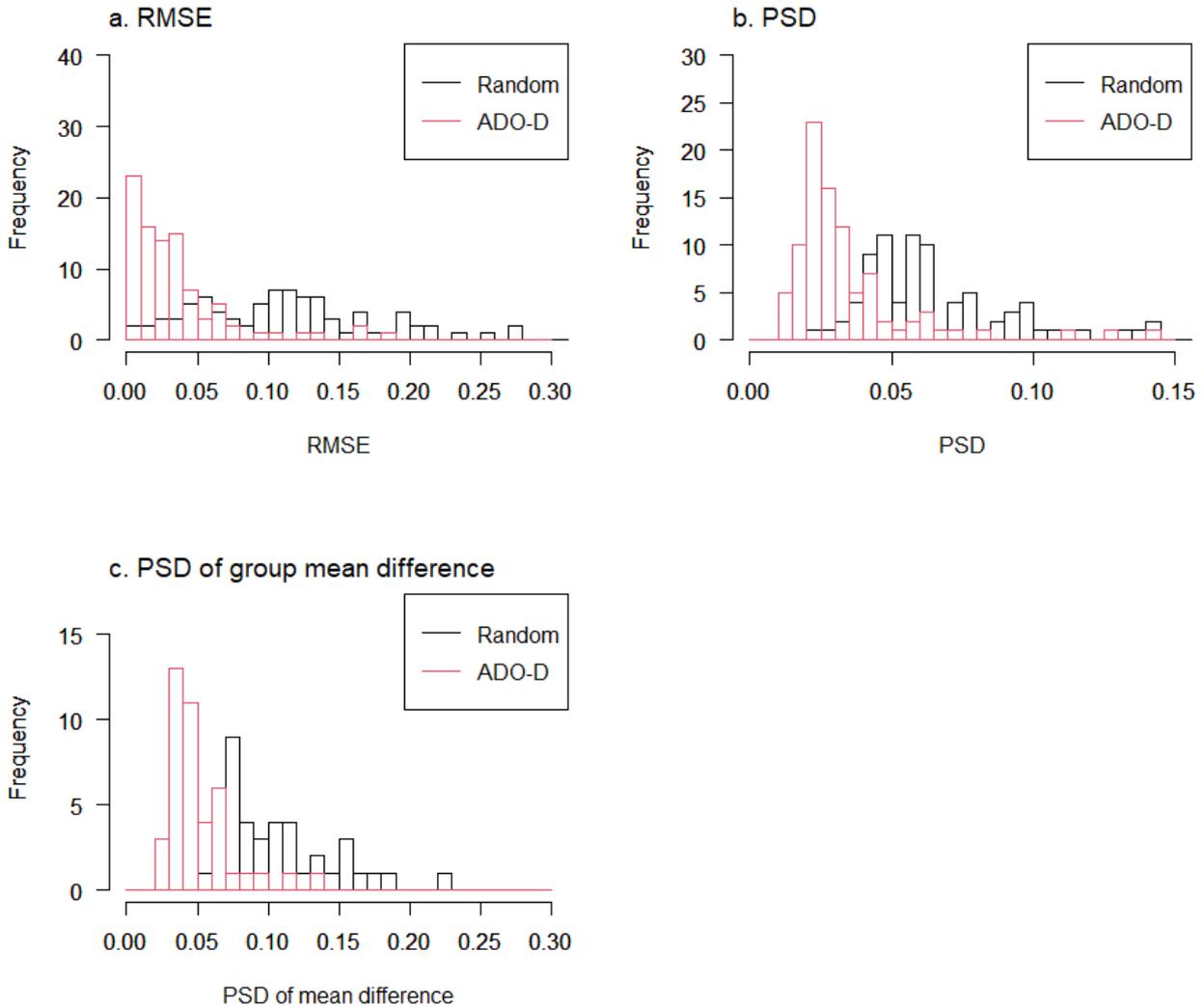


Figure 5-2

CPT モデルにおける γ_i の集団平均に関する RMSE, PSD

(a), (b): γ_i の集団平均に関する RMSE, PSD。黒（赤）枠のヒストグラムはランダム刺激選択条件 (CAT 条件) の結果を表す。; (c): γ_i の集団平均値差に関する PSD。

5.4 考察

本研究では個人レベル CAT が集団レベルのパラメータにおける推定精度に及ぼす影響を調べた。集団レベルパラメータは多くの心理実験で関心の対象になるはずであるが、個人レベル CAT が集団レベルパラメータに対して高い推定精度を与えるのかは不明であった。シミュレーション実験の結果、認知モデルにおいて、個人レベル CAT は集団レベルパラメータの推定精度を向上させることが分かった。

集団レベルパラメータの RMSE や PSD に関して、CAT 条件はランダム刺激選択条件よりも多くのパラメータにおいて推定精度が高かった。特に心理学的な関心に基づき、SS3-1 では k_i 、SS3-2 では γ_i に着目した。これらパラメータに関して CAT 条件により推定精度は高まった。また階層モデルで推定した個人レベルのパラメータについても、CAT により RMSE や PSD は下がった。

先行研究 (Kim et al., 2014; Ahn et al., 2020) では、個人レベル CAT により個人レベルのパラメータの推定精度が向上することが確認されている。本研究の結果もそれと一貫した結果であった。さらに本研究では、個人レベル CAT により集団レベルパラメータの推定精度さえも向上することが示された。

このことから、反復測定状況における複数の参加者がいる集団的な実験においてさえも、個人レベル CAT を推奨することができる。

研究 3 の限界として、個人レベル CAT は集団レベルパラメータを直接最適化する手法ではないことが挙げられる。厳密には、集団レベルパラメータの推定精度に対して、最適な刺激選択ではないということである。本研究では、集団レベルパラメータを直接最適化する手法を導出することは難しいと考え、階層構造を無視するような個人レベル CAT を利用して刺激選択を行った。もし、漸近有効性を満たすような集団レベルパラメータの推定量あるいはバラつきを予測する情報量が存在するならば、集団レベルパラメータに対して最適な刺激選択や、最適パフォーマンスから比べた際の個人レベル CAT の損失が議論できるようになる。

また、研究 3 では、ランダム刺激選択条件と CAT 条件を比較している。実際の実験で完全にランダムに刺激を選ぶことは想定しづらい。ここでは、個人レベル CAT によって集団レベルパラメータの推定精度が向上するというを示すため、ランダム刺激選択条件はベースラインとして使用している。実際の実験では、選択肢間の価値をできるだけ近づける (i.e., 選択確率を 0.5 に近づける; MP 法) 刺激選択法などが考えられる。この点については研究 4 で MP 法を含めてシミュレーションを行い、MP 法と比べても CAT 条件では推定精度が向上するかも確認する。また MP 法を含めて刺激選択条件間でパフォーマンスがどの程度変化するかを付録 A でも説明する。

6. 第6章：研究4

6.1 イントロダクション

研究3で明らかにしたことは、階層化していない個人レベルCATが、モデル誤指定はあるもののランダム刺激選択条件よりかは推定精度が良かったということである。集団レベルパラメータの推定精度を直接最適化する集団レベルCATは、著者の知る限り少なくとも心理統計学領域においては提案されていない。個人レベルCATも、集団パラメータの推定精度の観点からは最適な刺激選択法ではない可能性が存在する。

研究4では、集団レベルパラメータの推定精度を最大化する刺激選択法を検討する。また個人レベルCATが、理論的に集団パラメータの推定精度を最大化する集団レベルCATと同等であるのかを確認する。つまり、個人レベルCATは、集団レベルCATと比べて、推定精度の意味でどれくらい損失があるのかを経験的に確認する。現実の心理実験場面では、反復測定状況が多いため、集団レベルパラメータを直接最適化する手法があれば利用価値が高いと考えられる。また、仮に個人レベルCATの損失がほとんどないならば、先行研究の蓄積や刺激選択研究領域においての手法の普及度合いを考えると、個人レベルCATが推奨されるべきである可能性もある。

そこで研究4では、薬学領域の一部である pharmacokinetics/pharmacodynamic (PK/PD) と呼ばれる領域で提案されている、population-level Fisher information matrix (PFIM; Bazzoli et al., 2009; Breslow & Clayton, 1993; Foracchina et al., 2004; Gagnon & Leonov, 2005; Longford, 1994; Montre et al., 1997; Ogungbenro & Aarons, 2008, 2011; Wand, 2007) を利用して D 最適化を行うという手法に着目する (Hooker & Vicini, 2005; Ogungbenro et al., 2007; Retout et al., 2007)。この PFIM の行列式を最大化するという刺激選択法を集団レベルCATと本研究では呼ぶ。この PFIM ベースの刺激選択を、より複雑な認知モデルに適用する。

研究1~3で使用してきた通常のF情報行列 (Fisher information matrix, 以降 FIM) は、階層モデルに対しては適用できない量である。詳しくは6.2節で計算式などを説明するが、PFIMは個人レベルモデルのための通常のFIMの代わりとなる。階層モデル用のFIMの対応量がPFIMという認識で問題ない。このPFIMベースのD最適化により集団レベルパラメータの推定精度が効率的に向上するとされている (Ogungbenro et al., 2007)。

集団レベルCATの流れを、Kim et al. (2014) における Figure 1 を参考に作成した Figure 6-1 を使って説明する。Figure 6-1 におけるグレーの枠内がリアルタイムで行われる*i*番目の参加者の実験を表し、枠外は*i*人目の参加者の実験が終わった後にオフラインで行われる推定等を表している。グレーの枠内は、個人ごとの実験を表しており、従来の個人レベルCATと同様である。つまり、(i) 刺激選択ステップ、(ii) 反応データの取得あるいは生成、(iii) 個人レベルモデルによる推定を繰り返している。ただし個人レベルCATあるいはKim et al. (2014) のシミュレーションでは刺激選択ステップの刺激選択基準は個人レベルパラメータの推定精度を最大化するための基準である。Kim et al. (2014) あるいは本研究の特徴は、各参加者の実験が終わる度にオフラインで階層モデルによる推定を行い、その情報を次の*i*+1番目の参加者の実験で利用することである。Kim et al. (2014) では、オフラインで推定された個人レベルパラメータの事後分布を次の参加者の事前分布として利用している。本研究では、事前分布として利用することはしないが、オフラインで求めた集団レベルパラメータの点推定値を次の参加者の実験内でPFIM計算のために使用する。グレーの枠内では、個人レベルモデルでパラメータ推定を行っていることに注意が必要である。

ただしPFIMベースの刺激選択をadaptive designのために使用する場合には、一つ問題がある。それは、階層モデルによる推定は計算時間が比較的多くかかる場合が多いため、リアルタイムの実験では

試行ごとに階層モデルでの推定を行うことが難しい点である。そのため、Figure 6-1 のグレーの枠内のように個人レベルモデルで代用する必要があるが、集団レベルパラメータは試行ごとに更新することはできない。そのため集団レベルパラメータの値はオフラインで求めた値で代用しなければならない。また、階層モデルで推定した個人レベルパラメータ推定値と個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータ推定値は一般に異なる値になることがある。階層モデルで推定すると集団平均の方向に寄る、いわゆる縮小 (Shrinkage) という性質のためである (松浦, 2016)。PFIM の計算には、集団レベルパラメータの値と、階層モデルで推定した個人レベルパラメータの推定値が必要となる。そのため、研究 4 の集団レベル CAT では、オフラインで求めた集団レベルパラメータ値と、縮小推定量 (スタイン推定量) の式からどのくらい縮小するかを予測して調整した個人レベルパラメータの推定値を利用して、PFIM の計算を行うこととする。詳しくは 6.2 節で説明する。

そこで本研究では、理論的に集団レベルパラメータの推定を最適化できる PFIM ベースの集団レベル CAT を認知モデルに適用すること、および集団レベル CAT からの個人レベル CAT の損失の程度を確認することを目的とする。また補足的なシミュレーションとして以下の 2 つを行う。一つは、基本的性質のチェックとして、PFIM で集団レベルパラメータの PSD が予測できるかのチェックと、縮小推定量がきちんと機能することのチェックを行うためのシミュレーションを行う。二つ目は、FIM の行列式と PFIM の行列式の違いを確認することで、個人レベル CAT と集団レベル CAT の違いを予測するためのシミュレーションを行う。

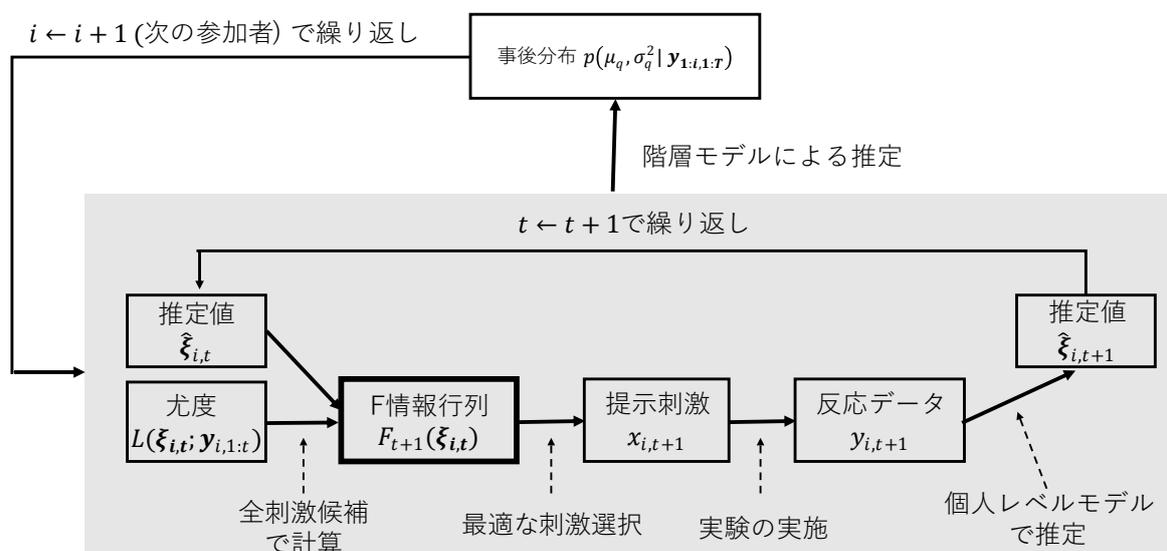


Figure 6-1
HADO あるいは研究 4 で行う刺激選択法の概略図

階層モデルによる推定を含んだ集団レベル CAT におけるシミュレーションあるいは実験の流れを表す。Kim et al. (2014) および Myung et al. (2013) を参考に作成した。

6.2 方法

6.2.1 PFIM

PFIM は階層モデルにおける F 情報量ということが出来る。i を参加者のインデックス、 ξ を固定効果パラメータ、 b_i を変量効果パラメータとする。つまり、個人パラメータ ξ_i は

$$\xi_i = \xi + b_i, \quad (54)$$

$$b_i \sim N(\mathbf{0}, \Omega), \Omega = \begin{pmatrix} w_{11}^2 & w_{12} \\ w_{12} & w_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (55)$$

により生成されているとする。集団レベルパラメータは、 $\Psi = (\xi, w_{11}, w_{12}, w_{22})$ である。 ξ が集団平均、 w_{11}, w_{22} が集団のバラつきを表す。これらはオフラインにて階層ベイズモデルにより推定が行われ、PFIMの計算には事後分布の期待値を使用する。PFIMでは個人*i*の尤度関数を

$$l(\Psi; \mathbf{y}_i) = \int p(\mathbf{y}_i | \xi, b_i) p(b_i | \Omega) db_i \quad (56)$$

と表現する。ただし、 \mathbf{y}_i は参加者*i*の全試行分の観測データである。つまり、集団レベルパラメータの尤度関数は、 $p(\mathbf{y}_i | \xi, b_i)$ において変量効果に関して積分消去した量として定義する。これを利用して個人*i*に関して

$$F_i(\Psi) = E \left[- \frac{\partial^2 l(\Psi; \mathbf{y}_i)}{\partial \Psi' \partial \Psi} \right] \quad (57)$$

を定義する。この単純和を集団レベルのフィッシャー情報量 (PFIM), $F(\Psi) = \sum_{i=1}^N F_i(\Psi)$ として定義する。ただし*N*は参加者数である。特に本研究では、固定効果 ξ のPFIMに着目する。

研究4のシミュレーションで利用するベルヌーイ分布を仮定したモデルの場合におけるPFIMはOgungbenro and Aarons (2008)で説明されている。意思決定モデルにおける選択確率 $p(y_{it} = 1 | \xi_i)$ を p_{it} とここでは略記する。Ogungbenro & Aarons (2008)では、簡単にするため Ω は対角行列を仮定している。対角行列ではない場合も議論されている (Ogungbenro et al., 2008)。 $J_i = \frac{\partial p_i}{\partial \xi_i}, Z_i = \frac{\partial p_i}{\partial b_i}$ とする。ただし、 $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{iT})$ は全試行分の選択確率であり、 J_i, Z_i はデータ数×パラメータ数の行列である。観測データ \mathbf{y}_i の共分散行列の近似が

$$V_i \approx Z_i \Omega Z_i' + W_i \quad (58)$$

という式でできる (Longford, 1994)。ただし、 W_i は $p_{it}(1-p_{it})$ を(t,t)成分とする対角行列である。1試行分の観測データはベルヌーイ分布に従うため、変量効果が存在しなければ分散は $p_{it}(1-p_{it})$ となる。つまり、変量効果の影響は $Z_i \Omega Z_i'$ により表現されている。そしてPFIMは

$$F(\xi_i) = \sum_{i=1}^N J_i' V_i^{-1} J_i \quad (59)$$

で計算できる。

6.2.2 スタイン推定量

3個以上の平均を推定する際には、通常用いられるような基本的な推定量よりも縮小推定量と呼ばれる優れた推定量が存在する。基本的には、各個人の推定量を構成する際に、集団平均の方向に縮小する推定量となる。以下では縮小推定量について下平他 (2004, III)を参考に説明する。今、 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)'$ とする。 ξ の事前分布が階層構造を持ち超母数 τ を使って $p(\xi | \tau)$ と表せるとする。特に ξ の事前分布として $N_m(\xi_0, \tau I_m)$ を仮定する。ただし I_m は*m*次元の単位行列である。この時ベイズ推定量の期待値は

$$\xi_0 + \frac{\tau}{1+\tau} (\mathbf{X} - \xi_0) = \mathbf{X} - \frac{1}{1+\tau} (\mathbf{X} - \xi_0) \quad (60)$$

となる。本研究ではこの式を利用して、個人レベルモデルからの推定量 \mathbf{X} からベイズ推定量 (縮小推定量)を逆算して利用する。

6.2.1節の説明に対応させると、 \mathbf{X} は個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータの推定値、 ξ_0 はオフラインで階層ベイズモデルにより推定した集団平均の推定値 $\hat{\xi}$ 、 τ はオフラインで階層ベイズモデルにより推定した集団sdの推定値 $\hat{w}_{11}, \hat{w}_{22}$ である。シミュレーションコードにおけるPFIM計算の手順を説明する。まず、事前に階層ベイズモデルで推定した集団レベルパラメータの点推定値 $\hat{\xi}, \hat{w}_{11}, \hat{w}_{22}$

があるとする。この推定値は i 番目の参加者の実験中は常に同じ値である。そして、試行ごとに個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータの推定値（式 (60) における \mathbf{X} ）を算出する。これを式 (60) によりスタイン推定量に変換し個人レベルパラメータ ξ_i の推定値 $\hat{\xi}_i$ とする。これにより、式 (54) から変量効果 b_i の推定値 \hat{b}_i も計算できる。個人レベルパラメータ $\hat{\xi}_i$ 、変量効果 \hat{b}_i が求まったので、選択確率 p_{it} 、PFIM 計算に必要な $\mathbf{J}_i, \mathbf{Z}_i$ も計算でき、最終的に PFIM を計算することができる。

6.3 シミュレーション実験

6.3.1 SS4-1

6.3.1.1 方法

SS4-1 および SS4-2 において補足的なシミュレーションを行った後に、SS4-3 でメインのシミュレーション実験を行う。SS4-1 は以下の基本的な 2 点を確認することを目的とする。一つは、PFIM の逆数によって集団パラメータの推定量の分散が予測できるかを確認する。そのために、PFIM の計算と、MCMC ベースでの PSD の計算を行い散布図を見る。二つ目に、縮小推定量の式を利用して、個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータの値を調整することができるかを確認する。そのために、階層モデルで推定した個人レベルパラメータと個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータそのものの乖離度をベースラインとして見る。その上で、階層モデルで推定した個人レベルパラメータと個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータを縮小推定量の式を使って調整した値との乖離度も見る。後者の乖離度がきちんと小さくなっているかを確認する。

シミュレーションの流れは、刺激選択などは考えず（ランダム刺激選択）単に規定の試行数、参加者数分のデータを生成し、MCMC 推定を行うというものである。ただしデータは 5 試行分追加しながら推定の挙動を確認する。また推定は階層モデルと個人レベルモデルの両方で行う。実際の刺激選択を含んだ実験では、階層モデルによる推定を行うことは計算時間的に難しいが、本シミュレーション実験では集団パラメータの“正解”の値を知りたいため階層モデルによる推定も行った。また FIM と PFIM も計算した。シミュレーションは 100 回繰り返した。

シミュレーションの設定は以下の通りである。試行数は 20、参加者数は 10 で、5 試行分のデータが追加されるごとに MCMC 推定を行った。モデルは遅延価値割引モデルを対象とした。ただし双曲線関数を仮定するモデルである。割引率 k および逆温度パラメータ β の集団平均は (0.2, 1.5) で集団 sd は (0.05, 0.2) とした。個人レベルパラメータの真値は正規分布から生成した。刺激候補値は報酬額が 1, 2, ..., 20、遅延時間が 1, 2, ..., 10 とした。刺激はこの中から離散一様分布によりランダムに選択した。MCMC 推定は 5000 回のサンプリングを行い、最初の 2000 回をバーンイン期間として捨て、間引きは 1 で 3 チェイン回した。

6.3.1.2 結果と考察

PFIM から計算した集団パラメータの PSD と MCMC 推定により計算した PSD の散布図を表したのが Figure 6-2 である。PFIM によって、集団パラメータの PSD を予測できることが分かる。注意点としては、個人レベルパラメータの PSD ではなく、集団パラメータの PSD である点である。個人レベルパラメータにおいては漸近有効性から、FIM により推定量のバラつきが予測できることは既に明らかである。集団パラメータにおいても、PFIM による D 最適化を支持する経験的な結果である。PFIM は FIM と同様に、実験実施前に計算できる量であるため、集団パラメータの推定精度の観点から参加者数や試行数の設計に利用することも可能である。

ただし、PFIM から予測した PSD は MCMC 推定により計算した PSD よりやや小さい傾向も見られる。PFIM から予測した PSD が最小となる点は、同時に MCMC 推定により計算した PSD も最小値付

近になっているため、最適な刺激選択に関しては過少評価による問題はない。しかし、PSD を正確に予測する場合には注意が必要である。特に参加者数、試行数を決定する場合には、FIM の場合と同様、研究 1 で扱ったように PFIM ベースで良いデザインを絞り込むステップ 1 と、MCMC 推定により正確に PSD を評価するステップ 2 を実行する方が望ましい。

階層モデルで推定した個人レベルパラメータと個人レベルモデルを使用して推定した個人レベルパラメータの値の差分を表したのが Figure 6-3 である。Figure 6-3(a) は、個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータの値を直接利用している。Figure 6-3(b) は個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータの値を、縮小推定量の式を使って調整した推定値を利用している。Figure 6-3(a) の場合は、特に個別の参加者における試行数が少ない状況において、二つの推定量の乖離度が大きいことが分かる。一方で Figure 6-3(b) を見ると、参加者が増えるほど試行数が少ない状況における二つの推定量の乖離度が小さくなっていることが分かる。また、Figure 6-3(a), (b) を比較しても、乖離度は Figure 6-3(b) の方が小さいことが分かる。例えば、割引率パラメータ k に関しては、Figure 6-3(a) では最大 0.2 程度だが、Figure 6-3(b) では最大でも 0.045 程度である。つまり、個人レベルモデルからの個人レベルパラメータ推定値を、縮小推定量の式を使って調整することによって、階層モデルで推定した場合の個人レベルパラメータの値に近づけることができることが分かる。実際の実験では計算時間の観点から試行ごとに階層モデルによる推定はできないため、この縮小推定量の式を使って調整した値を利用して PFIM を計算するのが良いと考えられる。

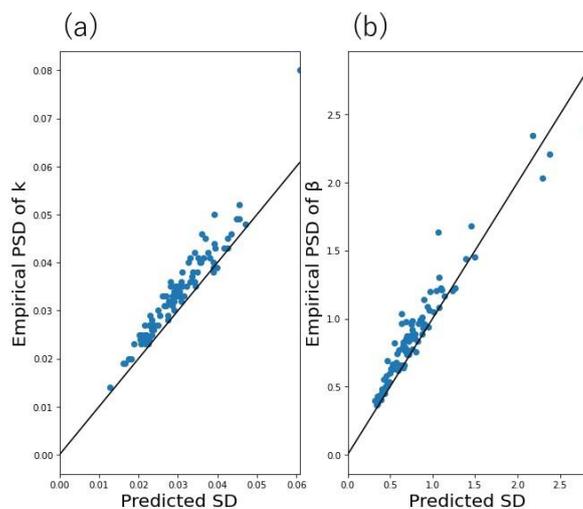


Figure 6-2

集団パラメータの PSD の結果

各パラメータの PFIM から予測した PSD (横軸) と MCMC 推定で計算した PSD (縦軸) の散布図。実線は 2 つの変数がちょうど一致する $y=x$ の直線。

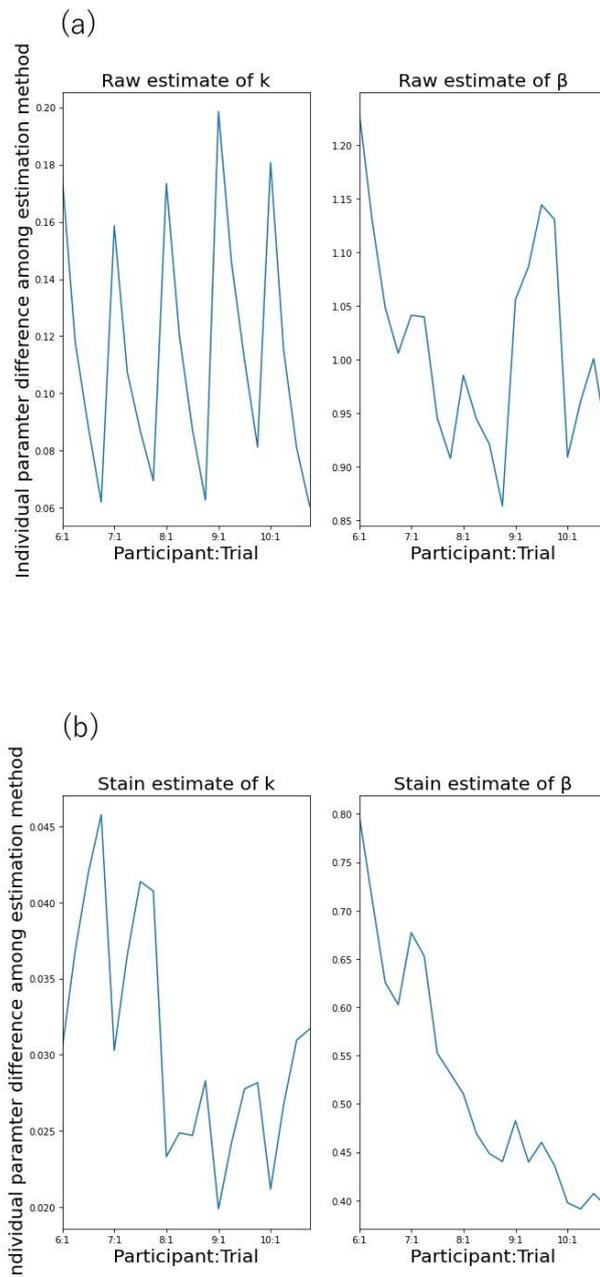


Figure 6-3

階層モデルと個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータの乖離度

(a) 階層モデルで推定した個人レベルパラメータと、個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータの差分（縦軸）をデータ数（横軸）ごとに示した。横軸の 6:1 などは参加者:ブロックを表す。1 ブロック 5 試行で計 20 試行あるので、例えば 6:3 は 6 人目の参加者の 3 ブロック目までデータ (i.e., 5 人目までの 100 試行と、6 人目の 15 試行で計 115 試行分のデータ) が溜まったことを表す。(b) 階層モデルで推定した個人レベルパラメータと、個人レベルモデルで推定した個人レベルパラメータを縮小推定量の式を利用して調整した値の差分（縦軸）をデータ数ごとに示した。

6.3.2 SS4-2

6.3.2.1 方法

SS4-2 は、FIM と PFIM の値の違いを確認することで、SS4-3 で実施する個人レベル CAT と集団レ

ベル CAT のパフォーマンスの違いを予測することを目的とする。シミュレーションとしては、10 試行目までの刺激をランダムに選択し、11 試行目の刺激を様々に変化させた場合の FIM と PFIM を計算するというシンプルなものである。刺激の候補値は SS4-1 と同様である。10 試行目までの刺激をこの中から離散一様分布によりランダムに選択した。11 試行目の刺激としては、刺激の候補値の全組合せを検討した。全ての組み合わせにおける FIM と PFIM を計算したわけである。モデルや集団レベルのパラメータ値は SS4-1 と同様である。

6.3.2.2 結果と考察

各パラメータにおける FIM と PFIM の散布図を表したのが Figure 6-4(a) である。割引率パラメータ k に関しては、ほとんど 1 対 1 のような関係で、FIM が増えれば PFIM が増える関係に見える。つまり FIM 最大化により選ばれた刺激は PFIM もほとんど最大化しているということである。逆温度パラメータ β に関しては 1 対 1 の関係ほど強くはないが、ある程度の関連は見える。FIM と PFIM の行列式の散布図を表したのが Figure 6-4(b) である。完全に 1 対 1 の関係ではないが、FIM 最大化を行うと PFIM も大きくなることが分かる。つまり、個人レベル CAT と集団レベル CAT はパフォーマンスの面においてほとんど類似した刺激選択法となると予想される。解析的にどのような関係になっているかは未だ分かっていないが、少なくとも経験的には個人レベル CAT と集団レベル CAT がパフォーマンスの面で似ることが予測できる。また、おそらくモデル依存の部分があるため、このような散布図を確認する必要があると考えられる。

6.3.3 SS4-3

6.3.3.1 方法

SS4-3 では、集団レベル CAT が推定精度の面で最適であることを確認する。また個人レベル CAT の推定精度に関する損失の程度を確認することも目的とする。シミュレーションの流れはほとんど従来の CAT に関するシミュレーションと同様であり、刺激選択、データ生成、MCMC 推定の 3 ステップを繰り返すものである。従来の CAT に関するシミュレーションと異なる点は、刺激選択条件の一つに PFIM ベースの集団レベル CAT を含む点と、各参加者の全試行数分のデータ生成が終わった段階で、階層モデルによる推定を行う点である。階層モデルにより推定した集団パラメータにおける RMSE と PSD を計算した。

刺激選択条件は以下の 4 条件を設定した。：ランダム刺激選択：離散一様分布によりランダムに選択した。；期待値を揃える刺激選択条件 (Expectation, MP 条件)：モデル上、選択確率が 50% に近くなるような刺激を選択した。；個人レベル CAT 条件 (Individual CAT)：従来の CAT のように FIM の行列式を最大化する刺激を選択した。；集団レベル CAT 条件 (PFIM)：PFIM の行列式を最大化する刺激を選択した。ただし最初の 5 試行は初期試行として刺激選択条件に依らずランダムに刺激選択を行った。また最初の 5 人は階層モデルの推定が上手く行かない可能性があるため、集団レベル CAT 条件でも個人レベル CAT により刺激選択を行った。

シミュレーションの設定は以下の通りである。試行数は 20、参加者数は 15 であった。モデル、集団パラメータ真値、刺激候補値は SS4-1 と同様である。MCMC 推定の設定は SS4-1 と同様であるが、階層モデルにおいては推定の安定性のため、サンプリング回数を 20000 に増やし、最初の 5000 個をバーンイン期間として捨て、間引きは 10 として推定を行った。

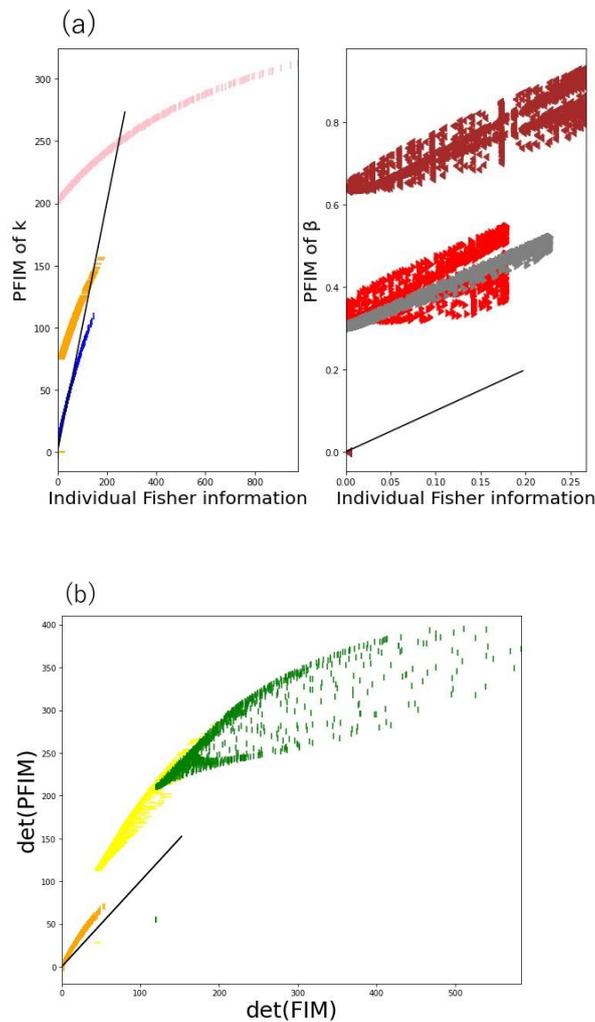


Figure 6-4

FIM と PFIM の関連を表す結果

(a) 各パラメータにおける FIM と PFIM の散布図を表す。実線は 2 つの変数がちょうど一致する $y=x$ の直線を表す。色の違いは、10 試行目までの刺激セットが異なることを表す。同じ色の点は 11 試行目で提示する刺激だけが異なる。(b) $\det(\text{FIM})$ と $\det(\text{PFIM})$ の散布図を表す。

6.3.3.2 結果と考察

各パラメータの集団平均における RMSE, PSD を表したのが Figure 6-5 である。各パラメータの RMSE, PSD 両方において結果は一貫していた。つまり、ランダム刺激選択と期待値ベースの刺激選択 (MP 法) が推定精度が悪く、集団レベル CAT が最も推定精度が高かった。理論的には集団レベル CAT が集団レベルパラメータの推定精度を最大化する刺激選択法であり、それがシミュレーション実験によっても示されたことになる。さらに、個人レベル CAT は、理論的に最適である集団レベル CAT と比べても RMSE, PSD の意味において損失がほとんどないことが分かる。

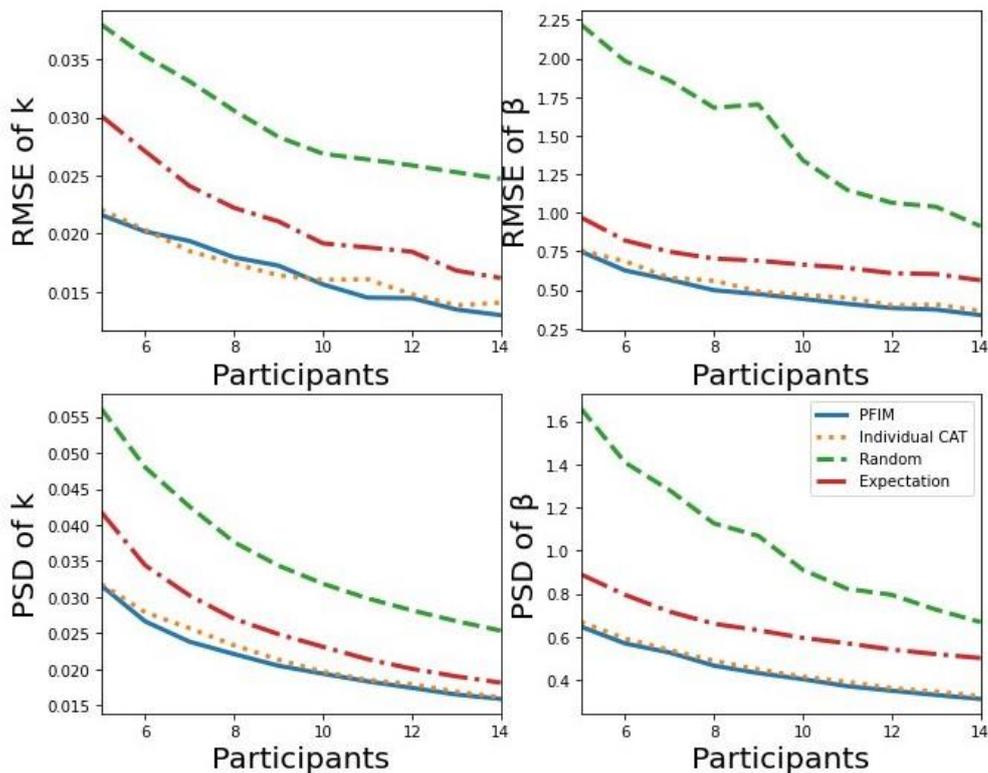


Figure 6-5

各刺激選択条件における RMSE, PSD の結果

各パラメータにおける RMSE あるいは PSD の結果を表す。横軸は参加者数を表し、例えば横軸が 8 の点は、8 人目までのデータ (i.e., 8 人×20 試行=160 試行分のデータ) に対して MCMC 推定したことを表す。各線は刺激選択条件を表す。

6.4 考察

研究 4 では、薬学領域で提案されている PFIM を利用して、認知モデルにおいて集団パラメータを直接最適化する刺激選択法の効果を検証した。PFIM により集団レベルパラメータの PSD が予測できることが確認された。RMSE と PSD を確認するシミュレーション実験においても、集団レベル CAT が最も推定精度が高かった。さらに、個人レベル CAT は集団レベル CAT と比べても、推定精度の意味で損失がほとんどないことが明らかになった。

先行研究 (e.g., Ogungbenro & Aarons, 2008) は薬学領域において、線形予測子に非線形な構造が入らない単純な GLMM に近いモデルが多かった。本研究では exp 関数の中身に非線形構造が入った意思決定モデルを対象とした。また先行研究は薬の投与間隔などのデザインを選択することはあったが刺激の候補値としては数種類程度で、本研究のように数百、数千種類の中から刺激選択を行う状況ではなかった。方法論においても、本研究では縮小推定量の式を利用して調整したパラメータ値を使った。理論的には縮小推定量の方が整合的であり、また実際に個人レベルパラメータの値も真値に近い値を利用することができる。

理論的にも経験的にも集団レベル CAT が、集団レベルパラメータの推定精度の観点から最適な刺激選択法であることが支持された。一方で、少なくとも経験的には遅延価値割引モデルにおいて、個人レベル CAT と集団レベル CAT は、推定精度のパフォーマンスにおいてほぼ同等の手法となることも分かった。FIM と PFIM の行列式は強い関連があり、RMSE, PSD を確認するシミュレーション実験でも、ほぼ同等の結果となった。従来の個人レベル CAT の先行研究の蓄積やそれに伴う受け入れられやすさ、

集団レベル CAT の学習および実装コストを考慮すると、個人レベル CAT で代用しても良いと考えられる。ただし、統計的には集団レベル CAT が最適であり、また集団パラメータの PSD の予測や検出力の計算には PFIM が必要である。あくまで、最適な刺激選択という点のみにおいては、個人レベル CAT で代用可能ということである。重要なことは、個人レベル CAT など何等かの方法で効率的な刺激デザインを考え、試行数、参加者数を PFIM ベースでも MCMC ベースのシミュレーションでも、いずれかの手法で推定精度や検出力を予測し、客観的な基準に基づいてデザイン設計を行うことである。

6.4.1 本研究の限界

研究 4 における限界を 2 点挙げておく。一つは、FIM と PFIM の行列式の関係性を解析的に明らかにしているわけではない点である。散布図を見ると解析的に完全に 1 対 1 対応しているわけではないため、解析的に関係性を記述することは難しいかもしれない。実際にはモデルごとに、行列式の散布図を確認して、個人レベル CAT と集団レベル CAT が類似した手法となることを確認する必要がある可能性がある。二つ目は、他のモデルで検討していない点である。集団レベル CAT が理論的に最適であることは想定されており、順序データやカウントデータへの適用(Ogungbenro & Aarons, 2010a, b) など指数型分布族に対して成り立つことが想定されている。一方で、個人レベル CAT の損失が、最適な集団レベル CAT と比べてどの程度なのかは、モデル依存である可能性もある。実際には上記の散布図およびシミュレーション実験によって個別に確認する必要があるかもしれない。今後の研究としては、個人レベル CAT の損失の程度を予測できるような解析的な量を見つけることも必要である。

7. 第7章：総合考察

7.1 研究結果のまとめ

本博士論文全体の目的は以下のものであった。本博士論文を通して根本的な考えは、CAT を認知モデルで利用できることを示す、あるいはより現実に即した手法となるよう拡張することであった。研究 1 では、時系列依存を含んだ Q 学習モデルでも F 情報量を利用した CAT の枠組みにより、刺激の選択が可能であることを示した。さらに、実験刺激デザインの手法として two-step procedure の有効性を示し、副次的に Q 学習モデルにおける実験刺激が推定精度に及ぼす影響も考察した。研究 2 では、刺激選択時におけるモデル誤指定の問題を確認し、さらにモデル誤指定の問題を緩めるために MA-DO を提案、効果検証することを目的とした。さらに、研究 3, 4 では階層モデルに対しても個人レベル CAT が有効に機能することを確認した。

研究 1 では、Q 学習モデルにおいて F 情報量ベースで有効に刺激選択を行えることを確認した。研究 1 のシミュレーション実験 1, 2 (SS1-1, SS1-2) において、F 情報量ベースのシミュレーションによる、刺激間の推定精度の順序関係は、MCMC ベースのシミュレーションにおける順序関係とほぼ一致していた。つまり計算負荷の低い F 情報量によって、推定精度の意味で適切な刺激を見つけることができる。これは、第一ステップで F 情報量により膨大な刺激の中から最適に近い刺激を見つけ、第二ステップで少数の刺激の良さを MCMC 推定ベースのシミュレーションにより精密に評価するという two-step procedure を支持する結果である。実験デザインを決める場合、試行数を変えたり多くの候補の中から最適な刺激を決めることを考えると、計算時間の意味で F 情報量ベースのやりの方が現実的である。これは、F 情報量ベースのやり方で刺激を絞り込んでおいて、MCMC ベースのシミュレーションで少数の刺激をより精密に評価するという two-step procedure を支持する。また、SS1-3 においては、高い推定精度を達成できる刺激を選択することによって、相関係数のバイアスの絶対値も小さくなることを示した。実際の研究では推定そのものよりも、相関係数などが直接的に結論に結びつくことの方が多いため、相関係数にもどのように影響するかを確認した点で重要である。さらに SS1-4 では、Q 学習モデルにおいても CAT (adaptive design) が一部有効であることを確認した。時系列依存があり課題の性質上刺激を 1 試行ずつ変化させることができない Q 学習モデルにおいても、CAT は一定程度の効果があった。

また研究 1 では、Q 学習モデルにおける刺激が推定精度に及ぼす影響についても具体的に見た。すなわち、学習率パラメータ α に関しては、報酬確率逆転により推定精度は向上することが分かった。一方で逆温度パラメータ β に関しては、報酬確率逆転は推定精度を低下させるため、報酬確率は逆転はせず選択肢 A, B 間で差が大きくなるように設定するのが望ましいということが分かった。重要なことは、パラメータによって最適な実験刺激デザインが異なるという点である。学習率 α に関して検定をしたり相関係数を算出したりするのか、逆温度 β に対して行うのかによって、適切な刺激デザインは異なるし、パフォーマンスも異なることになる。パフォーマンスの評価や適切な刺激デザインを統計的基準なしで、研究者の経験や直感のみによって判断することは難しいかもしれない。少なくとも、本研究で明らかになったようにパラメータによって適切な刺激デザインが異なる可能性があることは知っておくべきであるだろう。

研究 2 では、モデル誤指定により推定精度が悪化する問題を扱った。推定時のモデル誤指定の問題については、誤ったモデルを仮定することによって RMSE は高くなった。研究 2 の特徴としては、さらに刺激選択時のモデル誤指定により RMSE が高まることを示した点である。つまり、誤ったモデルを仮定して CAT を行うことによって、真のモデルに対して最適な刺激選択ではなくなることを示した。研究 2 では、この刺激選択時のモデル誤指定による推定パフォーマンスの悪化の問題に対処するために、複

数のモデルを考慮する MA-DO を提案した。そして、MA-DO はモデル誤指定の問題を回避し、真のモデルを仮定した CAT という理想的な手法に近いパフォーマンスとなることを確認した。理論的にも MA-DO はモデルの不確実性が高い実験の初期段階ではモデルを特定することなく、データが集まるにつれて真のモデルを仮定した CAT に近づいていくと考えられるため、モデル誤指定に対して望ましい手法となると期待される。

研究 3 では、従来の個人レベル CAT では、階層モデルを仮定していないという意味でのモデル誤指定の問題を扱った。実際の心理実験では階層モデルを適用すべき反復測定状況であることが多いにも関わらず、刺激選択手法である CAT は階層モデルに対応していない手法となっている。しかし、研究 3 では、個人レベル CAT により個人ごとに独立に最適刺激を選択し個人レベルのパラメータを最適化した場合、集団レベルのパラメータにおいてもランダム刺激選択よりは推定精度が向上することを示した。

研究 4 では、研究 3 の結果も踏まえ、集団レベル CAT の性能評価および、個人レベル CAT の損失の程度の確認を行った。薬学領域で提案されている PFIM を利用した集団レベル CAT を実装した。理論的にはこの PFIM ベースの刺激選択法が、集団パラメータの推定精度の意味で最適な手法であり、実際にシミュレーションでは集団レベル CAT の推定精度が最も高いことを確認した。一方で、従来の個人レベル CAT も、理論的に最適な集団レベル CAT と比べて、損失がほとんどないことをシミュレーションで確認した。これは研究 3 の結果を補強するものである。研究 3 では単に、個人レベル CAT が集団レベルのパラメータの推定精度に関しても良い影響を及ぼすと主張しているだけだが、研究 4 の結果から、実は個人レベル CAT は最適な手法に比べてほとんど損失がない、つまり個人レベル CAT はほとんど最適な手法であると言える。これらの結果から、反復測定状況においても、従来の個人レベル CAT の適用を推奨できるだろう。理論的には集団レベル CAT の方が最適であるため望ましいと思われるかもしれないが、集団レベル CAT の実装や計算に関する難しさや先行研究の蓄積という観点から言うと、個人レベル CAT を利用していく方が現実的であると考えられることもできる。

7.2 統計的基準による刺激選択の必要性

本研究では統計的基準により刺激デザインを決定する手法について検討してきた。もちろん、統計的基準のみによって刺激を決める場合、モデルベースの手法であることや、極端で不自然な刺激を選んでしまう危険性もあるため、研究者の経験や先行研究との類似性など、統計的基準以外を考慮する必要性も生じる。

しかし、統計的基準や他の何等かの客観的基準がない状態で刺激デザインを決める場合、刺激デザインの決定が恣意的であると言わざるをえない。そのような先行研究は刺激デザインが最適ではない可能性が高い。サンプルサイズや刺激デザインの決定方法が記述されていない先行研究をどのくらい信頼すべきかあるいは踏襲すべきなのか、後続の研究がどのようにデザイン設計を行うべきなのかが不明瞭だと、後続の研究における信頼性や妥当性にも悪い影響を与えられられる。

そのような考え方から、実験刺激を客観的かつ統計理論的に適切な基準で決めるための手法が提案されてきた。CAT を認知モデルに適用する研究としては藤田・岡田 (2019) や本博士論文の研究 1 などがある。またエントロピーベースの手法をロジスティック回帰分析などシンプルな精神物理測定に適用した研究 (e.g., Bak & Pillow, 2018) や、比較的複雑な認知モデルに適用した研究 (e.g., Toubia et al., 2013) もある。また本博士論文では扱わなかったが、モデル選択の観点からの ADO を適用した研究もある (e.g., Cavagnaro et al., 2013a, b; Zhang & Lee, 2010)。本博士論文で扱った CAT は、解析的に F 情報量を計算しておかなければならないという制約はあるものの、一度解析的な式が分かれば、ADO より計算負荷が低く、複雑な認知課題、認知モデルに対する adaptive design において優れた手法

であると期待できる。

研究1で示されたように、どのパラメータに着目するかによっても適切な刺激デザインは変わる。実験を行う時の適切なデータ数や刺激などの実験デザインは、推定、検定、モデル選択のどのような統計的行為を行うのか、また実験課題構造や仮定するモデルあるいはどのパラメータにおける推定や検定に着目するかによっても本来変わるものである。仮に先行研究が最適なデザインだったとしても、先行研究と全く同じ目的や方法でない限りは、刺激デザインやサンプルサイズは適切なものに変更した方がよい。またCATなどの手法が統計の非専門家の間でそれほど普及していないことを考えると、参照されている先行研究が最適な実験デザインとなっていない可能性もある。自らの研究において最適なデザインを、統計的基準を知らずに、直感や経験のみによって当てる、あるいは後続の研究者に納得させることは難しいと言えるだろう。

また統計的基準により刺激デザインを決定することの必要性は述べてきたが、参加者ごとに提示される刺激が異なる adaptive design と全参加者が同一の刺激を提示される fixed design のどちらが良いかという議論が必要である。参加者間で刺激を同一にすることについてはメリットとデメリットが存在する。参加者ごとに刺激が異なることに関するデメリットとしては例えば、モデルを使用せずに何らかの行動指標で特性を評価したい状況で、その評価指標が使えない場合がある。学力測定の場面で言うと、参加者ごとにテスト問題の難易度が異なる場合には、正答率（素点）は参加者間や群間の学力を比較する指標としては使えなくなる。モデルベースの評価と素点などによる評価をどちらも行いたい場合は fixed design を使うべきである。また、個人レベルCATは少なくとも全く同じ反応の参加者は同じ刺激が提示されるという平等性があるが、集団レベルCATでは同じ反応でも異なる刺激が提示されることがある。一方で刺激を参加者間で変えるメリットも存在する。一つは統計的に推定精度の観点のみを考えると、adaptive designの方が特定のパラメータ値におけるF情報量が大きくなりやすいため望ましい。二つ目は、刺激による効果の偏りを軽減できることである。Fixed designでは刺激が偏っている（e.g., テストが簡単すぎたり、難しすぎるなど）場合、その影響は全参加者が被ることになる。参加者間で刺激が異なる場合には、刺激により参加者のデータが一斉に偏るという状況を回避できる。

また、F情報量（特にFIM）ベースの刺激選択法がどのような心理実験に適用可能であるかについて、(1) F情報量が計算できるか、(2) FIMベースの刺激選択の効果が期待できるか、という2点に分けて説明する。(1) F情報量（FIM）が計算できるかという点に関しては、心理実験で使用されているほとんど全てのモデル（e.g., 観測データに正規分布、(試行数固定での)多項分布、ベルヌーイ分布、ポアソン分布、指数分布を仮定するモデル）でF情報量は計算できると考えて良い。例外としては、観測データに混合分布を仮定するモデルや階層モデルがある。混合モデルについては、例えば、観測データが平均が異なる $N(\mu_1, \sigma), N(\mu_2, \sigma)$ を合成した混合正規分布に従うと仮定するようなモデルである。階層モデルについては、研究3, 4から本来PFIMを用いるべきであるが、FIMでもほとんど損失がないことが示唆されている。要するにF情報量の計算自体は、心理実験で使用されているほとんどのモデルで可能であると考えてよい。ただし、パラメータと観測データあるいは評価指標の関係がモデル化されていない、モデルベースではない分析手法については、確率モデルを明示しない限りF情報量は計算できない。

(2) FIMベースの刺激選択を行う価値があるかについては、基本原則としては課題やモデルが複雑であるほどFIMベースの刺激選択による推定精度の向上が期待される。FIMベースの刺激選択の効果が全く期待できない状況としては、回帰分析などで説明変数がそもそも研究者側で操作できない状況が挙げられる。この場合、F情報量は計算可能でサンプルサイズ設計には使用できるが、刺激選択がそもそもできないので、CATの適用例からは除外される。FIMベースの刺激選択の効果がそれほど顕著ではないと予測される状況としては、刺激は研究者が選択できるが、(説明変数が少数個の)ロジスティック

回帰分析などモデル自体が非常に簡単な場合が挙げられる。エントロピーベースの刺激選択法においては、精神物理測定における単純なロジスティック回帰分析などの適用例が多いが (e.g., Kontsevich, & Tyler, 1999), 本博士論文で扱った DD モデル, Q 学習モデル, CPT モデルなどよりは刺激選択間の推定精度の違いが小さいと考えられる。FIM ベースの刺激選択あるいはサンプルサイズ設計の効果が顕著なのは、より複雑な認知モデルや課題を使用する状況であると考えられる。DD モデルでは刺激は 3 次元, DD モデルや Q 学習モデルではパラメータは 2 つであった。この程度の複雑さでも、例えば研究 3, 4 や付録 A の DD モデルに関するシミュレーションで示されたように、FIM ベースの刺激選択の効果はあった。FIM ベースの刺激選択を積極的に適用すべきモデルおよび課題は、このような認知モデルおよび認知課題に対してである。

7.3 モデル誤指定による推定精度への影響

本博士論文の特に研究 2~4 は、モデル誤指定の問題として捉えることができる。研究 2 は、個人パラメータの推定のためのモデル自体が誤っている状況であり、研究 3, 4 は個人レベルのモデル自体は厳密に正しいものの階層化していないという意味で誤っている状況を扱っている。研究 2 においては、誤ったモデルを仮定して CAT を行った場合には、推定精度が悪くなることを確認した。これは MA 推定を利用した場合でも推定精度は悪くなっていたため、刺激選択時でのモデル誤指定による推定精度の低下だと考えられる。パラメトリックモデルの枠組みの中で分析を行う限りは、CAT を行う場合でも推定を行う場合でも、モデル誤指定による推定などのパフォーマンスの低下の危険性は常にあり得る。ノンパラメトリック推定 (e.g., Lee, 2007; Schulz et al., 2018) やノンパラメトリックな刺激選択法 (Chang et al., 2021) も提案されてはいるものの、パラメトリックな制限をかけないということから、必要なデータ数がパラメトリックモデルよりも膨大なものになってしまう。これは効率的に実験を行い、なるべく少ないデータ収集コストで結論を下すという刺激選択法の目標とは親和性が低いと考えることもできる。そのため研究 2 では、その中間的な手法である、複数モデルを同時に考慮する MA-DO を提案した。

一方で、刺激選択時におけるモデル誤指定の問題が生じにくい状況も存在する。研究 2 の SS2-3 では、刺激選択段階でモデルを誤って指定しても、MA 推定を使う限りは推定のパフォーマンスが相対的に悪化することはほとんどなかった。つまり少なくとも刺激選択時のモデル誤指定の問題は深刻なパフォーマンスの低下を引き起こさない状況もあるということである。また、研究 3, 4 では、階層モデル化しているかどうかという点でのモデル誤指定の問題は生じにくいことが確認された。研究 2 のような個人レベルのモデル間における誤指定の問題と、階層化しているかどうかという誤指定の問題は質的に異なるものであると考えることもできるが、特に個人レベルモデル間での誤指定により問題が生じる場合と生じない場合があることについて、さらに詳細に理論的に知ることが望ましい。どのようなモデル間であれば、モデル仮定の影響をそれほど考慮しなくて良いのかが分かれば、現実場面でより CAT が使いやすくなるだろう。

また MA-DO はその手法上、複数のモデルを考慮することができるものの、adaptive design の実験においては、計算時間の問題でいくらかでも仮定するモデルを追加できるわけではない。課題やモデル依存ではあるものの、現実的には数秒以内に刺激選択のための計算を終わらせるためには、3~5 個程度のモデル数になると予測される。このような点から、どのような候補モデルを仮定するモデルとして入れるべきかという点について検討する必要がある。例えば、研究 2 の SS2-3 で見たようなモデル間の差異が少ない 2 つのモデルは、ほとんど同じ刺激選択結果に繋がるので、直感的には片方しか入れなくて良いと考えることもできるかもしれない。また、全てのモデルが間違ってしまう危険性を考えると、入れる

候補モデルの集合（モデルセット）はそれぞれが異なりかつ様々なデータを表現でき、どれかのモデルが近似モデルとして十分に機能するようなモデルセットにした方が良いと直感的には考えられるかもしれない。一方で、刺激選択結果が似たモデルだとしても、完全に一致するわけではないし、モデル選択のパフォーマンスや推定値が一致するわけではないため、一概に片方のみを入れればよいとも言えず、またどちらのモデルを入れるべきかの決定も難しいかもしれない。これらの点も踏まえ、MA-DO という手法については、今後より精緻にしたり、理論的挙動を詳細に調べていく必要があるだろう。

7.4 モデル誤指定によるモデル選択への影響

本博士論文では、基本的に推定精度のみに着目してきたが、他の主要な統計的行為としてモデル選択もある。研究2の結果から、真のモデルを仮定したCATを行うと真のモデルをモデル選択で選べる確率が上昇する傾向が見えた。CATを行う場合には、CATで仮定したモデルがモデル選択で選ばれる確率が高まるわけである。これはあるモデルのF情報量が大きくなると、そのモデルがモデル選択で選ばれやすくなることを示唆する。本博士論文では触れなかったが、誤ったモデルを仮定してCATを行うと、誤ったモデルを選択する確率が上昇するため、そのような意味でも単一のモデルを仮定したCATはリスクである。CATがモデル選択に及ぼす影響も興味深いトピックである。なぜなら、CATはモデル選択を基準として直接的に考えてはいないが、実際の研究ではモデル選択と推定精度の両方のパフォーマンスを両立する必要があるからである。これは、推定あるいは検定はモデルベースで行うことが多く、モデル選択してから推定あるいは検定をすることがあることから分かるであろう。

主要な統計的行為として推定、検定、モデル選択の3つが考えられる。本博士論文では扱わなかったが、これに応じて様々な刺激選択基準が考えられる。例えば、モデル選択の観点からのADO (e.g., Myung & Pitt, 2009) は研究の蓄積がある。また、少なくとも心理統計学分野では研究が少ないが、別領域では検出力の観点からの刺激選択に繋がる研究 (e.g., Ogungbenro & Aarons, 2008a, b) が行われている。このように、統計的行為や刺激選択基準は推定精度以外にもあり、それらの関係性も考える必要がある。例えば、モデル選択に主眼が置かれているのか、その後の検定に主眼が置かれているのかによって、適切な刺激デザインやサンプルサイズは変わり得る。

これら3つの統計的行為あるいは刺激選択基準の関連を知り、3つ全てあるいは研究者が関心のある部分を最適化するように実験を行うことが理想的である。研究2の結果は、推定精度とモデル選択の間に関連があることを示唆している。また推定精度も検出力も理論的にはF情報量によりコントロールされており (竹内他, 2003), F情報量最大化すれば推定精度も検出力も最大化される。つまり、推定精度と検出力の観点からの刺激デザインの最適化は同一の行為となると考えられる。またCATが分類 (検定) 問題に及ぼす影響も議論されている (Eggen 1999; Eggen & Straetmans, 2000)。一方で、本博士論文では省略したが、推定精度とモデル選択の間にも関連はあり、推定精度とモデル選択の観点における最適化は同時に達成できるものではないと考えられる。つまり、モデル選択のパフォーマンスを上げようと思うと、推定のパフォーマンスの上昇を抑える必要があり得るということである。研究2で誤ったモデルを仮定したCATで誤ったモデルを選択する確率が上がったことを考えても、誤ったモデルの推定精度を向上させると、モデル選択のパフォーマンスは下がることが予測される。これに関してはやや高度な統計理論 (e.g., 甘利, 2014; 甘利・長岡, 1993; 藤岡, 2021; 藤原, 2015) が必要となるため、本博士論文では省略する。

今後はモデル選択と推定精度の両方のパフォーマンスを両立するような刺激選択法を詳細に検討すべきである。MA-DOが直感的にはある程度機能する可能性が考えられる。しかし、実験の初期段階でModel averagingのために使用するモデルの重みに偏りがあった場合、それを修正できなくなる危険性

があることも直感的に考えられる。特定のモデルのF情報量を上げると、そのモデルが選ばれやすくなる（モデルの重みが重くなる）からである。また、この問題は本当に生じるのか、どの程度生じるのかはモデル依存であると考えられる。MA-DOにおいて、初期段階の偏りが問題となるのか、またモデルセットごとにどのようにしてMA-DOの妥当性を評価するかも含め考えるべきだろう。あるいはモデル選択のパフォーマンスにおいてもモデルの非対称性は存在するため、その偏りを入れてMA-DOやCATを拡張する必要が生じる可能性もある。

7.5 本博士論文のまとめ

本博士論文では、実験デザインとりわけ実験刺激の選択法に関して、特にCATに着目してきた。主に学力測定や質問紙調査に利用されてきたCATを認知モデルに適用し、モデル誤指定による問題や階層モデルへの適用に関する問題について検討した。研究1においては、時系列依存を含んだ認知モデルであるQ学習モデルにおいても、F情報量ベースで刺激選択を行うことが望ましいことを示した。研究2では、Model averagingの手法とCATを組み合わせることで、複数のモデルを同時に考慮しモデル仮定に対して頑健な刺激選択法であるMA-DOを提案し効果検証を行った。研究3, 4では階層モデルに個人レベルCATを適用することや、集団パラメータを直接最適化する集団レベルCATを認知モデルに適用する研究を行い、個人レベルCATは集団パラメータの推定精度の意味でも損失がほとんどないことを確認した。本博士論文では省略したが、モデル選択や検出力の観点からの刺激選択法も研究されている。

このように実験刺激を含めた実験デザインを統計的な客観的量により最適に設計することが可能である。推定（や検定）に関しては、モデル誤指定の問題や階層モデルへの適用に関する問題も考えながら、比較的柔軟に最適刺激選択を利用することができるだろう。収集するデータ数や参加者内か参加者間計画か、提示する実験刺激などの実験デザインを推定精度や検出力などの基準に基づいて客観的な量によって定めるという手続きは、手続きの透明性や妥当性という点において望ましい。このような実験デザイン設計は、本博士論文を含め、少なくとも統計理論としては整備が進められており、実験デザインの評価は統計的にどのような量に基づいて行えば良いかが明らかとなっている。

付録 A: 適用の際に必要な情報

付録 A では、F 情報量を利用した刺激選択手法を適用すべきかどうか、あるいは適用する際に参考となる情報を提示する。A.1 節では FIM あるいは PFIM を基準とする刺激選択法、選択肢間の価値を同等とする (i.e., 選択確率を 0.5 に近づける) MP 法、ランダム刺激選択法において、F 情報量、区間推定する際の信頼区間幅、検出力がどの程度になるかを例示するシミュレーションを示す。個人レベルモデルを使用した場合と階層モデルを使用した場合の 2 通りのシミュレーションを示す。A.2 節では、FIM を計算するコード例を説明する。本節で使用するコードについては Open Science Framework (OSF: <https://osf.io/zxt9g/>) にて公開している。なお、この OSF のページ (README.txt) に、研究 1 から 4 のベースとなっている論文およびコードへのリンクを示している。

A.1 SS5: 刺激選択手法間での推定精度や検出力の予測値

A.1.1 SS5-1: 個人レベルモデルにおける個人レベルパラメータに関するシミュレーション

本シミュレーションでは、刺激選択法によって FIM、信頼区間の幅、検出力がどの程度異なるかを遅延価値割引モデルを使用して例示する。基本的なシミュレーションの内容としては、(a) 20 試行分の刺激を予め各刺激選択法 (F 情報量ベース、MP 法、ランダム) で選択し、(b) 選ばれた刺激を提示して一人の参加者分の実験を行う、という 2 つのステップを考える。20 試行分の刺激を選ぶ最初のステップでは、様々な参加者で推定精度を高めるためにパラメータの値を変えて刺激を選ぶ。二つ目のステップでは一人の参加者の特性パラメータは実験中は変わらないことを仮定するため、パラメータは 20 試行で常に同じ値に固定して FIM、信頼区間の幅、検出力を算出する。なお、最初のステップ (a) ではパラメータを変えて試行数分刺激を選択し、次のステップ (b) では (a) とは別のパラメータ値を使っており、基本的に fixed design を想定している。

A.1.1.1 方法

20 試行分の刺激を決める最初のステップ (a) では以下の流れで行う。(1) パラメータを試行数分 (20) だけ生成する。(2) 各刺激選択法で刺激を選択する。ステップ (1) では $k \sim \text{Beta}(12.6, 50.4)$, $\beta \sim N(1, 0.25)$ から生成した。割引率 k については平均が 0.2, sd が 0.05 となる設定である。ステップ (2) では、F 情報行列 (FIM) の行列式を最大化する刺激選択、選択確率が 0.5 に最も近くなるような刺激選択、離散一様分布からのランダムな刺激選択の 3 条件で刺激を選択した。ただし、刺激の候補値は報酬額は 1,3,5,...,19 で、遅延時間は 1,2,...,10 であった。これを 200 回繰り返して、次のステップ (b) で行う 200 回の繰り返し分の刺激を作成した。つまり 20 試行分の刺激を 1 セットとして 200 セット作成した。

一人の参加者の実験を行うことを想定する二つ目のステップ (b) では以下の流れで行う。(1) パラメータを生成する。(2) 前段落で記述した方法で選んだ刺激を使用し、試行ごとに F 情報量 (FIM) を計算する。FIM から信頼区間の幅、検出力の予測値を計算する。遅延価値割引モデルでは割引率 k が興味の対象となることが多いため、割引率に関する結果を示す。ステップ (1) では、 $k \sim \text{Beta}(12.6, 50.4)$, $\beta \sim N(1, 0.25)$ からパラメータを生成した。ただしこのパラメータ値は 20 試行の間で固定である。ステップ (2) においては、95%信頼区間の幅は、最尤推定量が漸近的に正規分布になること (漸近正規性) から $2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{F \text{ 情報量}}}$ を予測値とした。また検定については個人レベルパラメータ (割引率) が特定の値 (e.g., 0.2) に比べて有意差があるかを検定する状況を想定した。認知モデルにおいては、個人レベルパラメータについて検定する状況は多くないためやや現実的ではないが、SS5-2 との対応を考えここでも参考情報として提示する。本博士論文では検出力の観点からの刺激選択は扱わなかったが、竹内他

(2003, 第Ⅲ部 4章, p170-p174) の式を利用して検出力については算出した。特定の値からの偏差 (竹内他, 2003 の u_t) は 0.025 として計算した。上記の割引率 k に関する F 情報量, 95%信頼区間の幅の予測値, 検出力の予測値を算出するシミュレーションを前段落の方法で予め作成した異なる刺激セットを使用して 200 回繰り返して, 平均を出した。

A. 1. 1. 2 結果と考察

割引率 k に関して, 試行ごとに (a) (累積の) F 情報量, (b) $2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{F \text{情報量}}}$, (c) 検出力の予測値を示したのが Figure A1-1 である。F 情報量については, $\det(\text{FIM})$ を基準に刺激選択する FIM 条件, 選択肢間の価値を同等とする MP 条件, ランダム刺激選択条件の順に F 情報量は大きかった。これを反映し, 95%信頼区間の幅, および検出力については FIM 条件が最もパフォーマンスが良く, MP 条件が次に良く, ランダム刺激選択条件は最も悪かった。

95%信頼区間幅 (Figure A1-1 b) については, 例えば幅を 0.3 以下に抑えたい場合においては, 平均的に FIM 条件では約 8 試行で達成できるが, MP 条件では約 25 試行必要で, ランダム条件では 30 試行でも達成できていない。あるいは幅を 0.2 以下に抑えたい場合には, FIM 条件では約 14 試行で達成できるが, 他の 2 条件では 30 試行以上必要である。

検出力 (Figure A1-1 c) については, 例えば検出力を 70%以上にしたい場合においては, 平均的に FIM 条件では約 14 試行で達成でき, MP 条件では約 21 試行必要で, ランダム条件では 30 試行以上必要である。あるいは検出力を 80%以上にしたい場合には, FIM 条件では約 17 試行必要で, MP 条件では約 26 試行必要である。このように, 遅延価値割引モデルのようにそれほど複雑ではない認知モデルにおいても, F 情報量ベースで刺激選択することにより, 選択肢間の価値を同等にするという簡単かつ一見良さそうな刺激選択法よりも数試行~数十試行のコストカットができる。

A. 1. 2 SS5-2: 階層モデルにおける集団レベルパラメータに関するシミュレーション

本節では, A.1.1 節と類似のシミュレーションを行う。すなわち, 刺激選択法によって PFIM, 推定量のばらつき, 検出力がどの程度異なるかを遅延価値割引モデルにおける階層モデルを使用して例示する。基本的なシミュレーションの内容としては, (a) 20 試行分の刺激を予め各刺激選択法 (PFIM ベース, FIM ベース, MP 法, ランダム) で選択し, (b) 選ばれた刺激を提示して N 人分の参加者の実験を行う, という 2 つのステップを考える。20 試行分の刺激を選ぶ最初のステップ (a) では, 集団パラメータも個人レベルパラメータも試行数分異なるパラメータ値を生成し, その値を使用して刺激を選択する (詳しくは後述)。二つ目のステップ (b) では, 集団パラメータは一つの値を生成し, 個人レベルパラメータは N 人分のパラメータを生成して, 20 試行の間 (i.e., 参加者内) では常に一定の値に固定して PFIM, PFIM から予測された集団レベルパラメータの PSD の 2×1.96 倍, 群間差パラメータに関する検出力を算出した。なお, ステップ (a) では試行ごとに異なる集団パラメータ等の値を仮定して刺激選択を行い, 次のステップ (b) では (a) とは異なるパラメータ値を使っている。(a) で集団パラメータを試行ごとに変化させたのは, 様々な集団パラメータや個人レベルパラメータとなる状況でも (i.e., 様々な集団や個人に対して), 推定精度や検出力を確保するためである。N 人の参加者は同一の 20 試行分の刺激を提示されており, fixed design を想定した状況となっている。

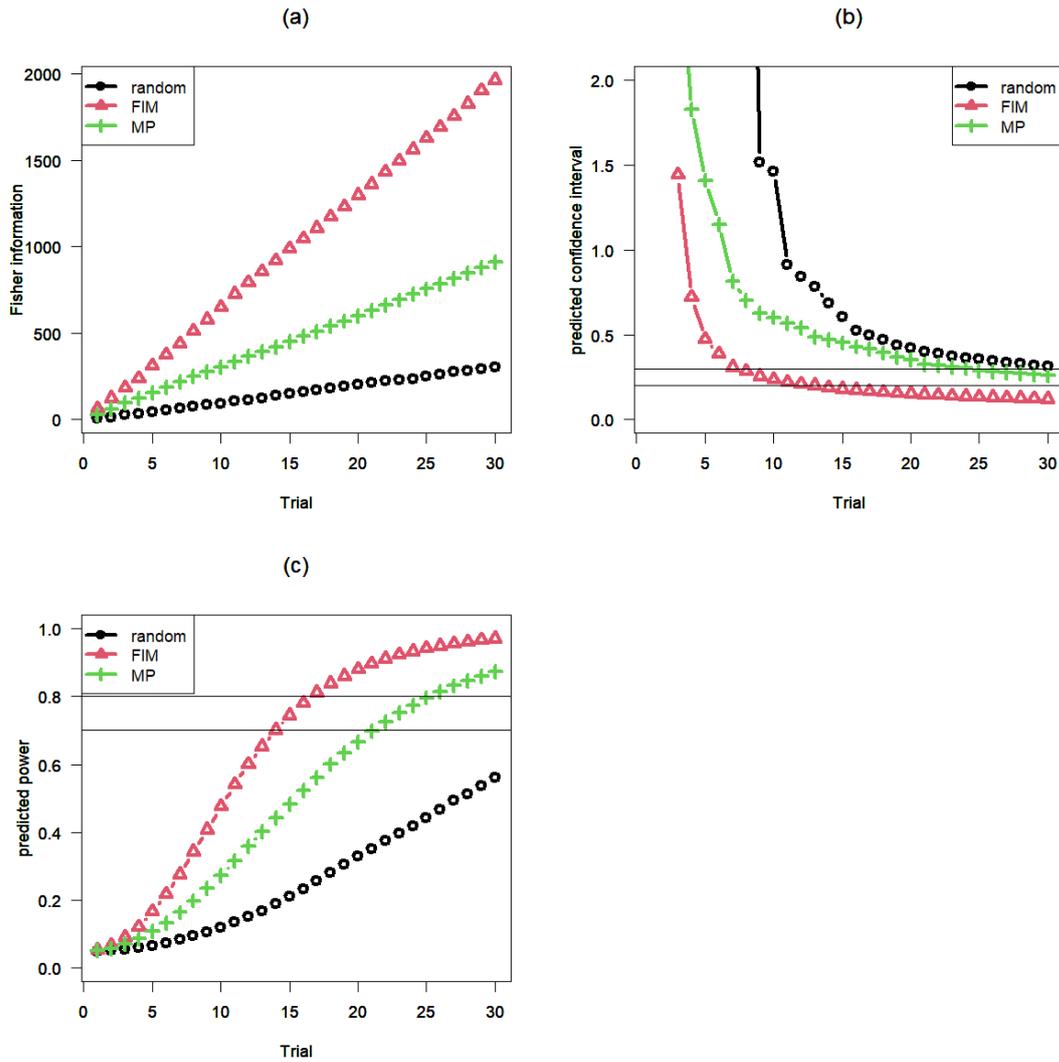


Figure A1-1

各刺激選択法における割引率の F 情報量，信頼区間幅，検出力

(a) 各刺激選択法における割引率 k の F 情報量を表す。横軸は試行数，縦軸は F 情報量である。ただし F 情報量はその試行までの累積和である。刺激選択法は FIM 条件が $\det(\text{FIM})$ 最大化，MP 条件が(選択確率-0.5)の絶対値最小化，random 条件がランダムな刺激選択法を表す。(b) 各刺激選択法における割引率 k の 95%信頼区間の幅の予測値を表す。黒色の 2 本の横線は，下から区間幅が 0.2, 0.3 を表す。(c) 各刺激選択法における割引率 k が特定の値から有意に離れているかを検定する際の検出力を表す。黒色の 2 本の横線は，下から検出力が 0.7, 0.8 を表す。

A.1.2.1 方法

20 試行分の刺激を決める最初のステップ (a) では以下の流れで行う。(1) 集団パラメータおよび，個人レベルパラメータを試行数分 (20) だけ生成する。(2) 各刺激選択法で試行数分 (20) だけ刺激を選択する。ここで個人レベルパラメータの生成の式は式 (54), (55) とはパラメタリゼーションを一部変更した。すなわち，群間差パラメータ δ を明示し，群のインデックスを g ($g=1$ か 2) とすると

$$\xi_i = \xi + \delta g_i + b_i \quad (61)$$

を仮定した。 ξ_i は個人 i の個人レベルパラメータ， ξ は (2 群全体の集団) 平均パラメータ， g_i は個人 i が群 1 なら $1/2$ ，群 2 なら $-1/2$ となる変数， b_i は個人 i の変量効果である。 g_i を $\pm 1/2$ としているのは，群間で差分の平均値をとった時に丁度 $\xi + \delta \frac{1}{2} + E[b_i] - (\xi - \delta \frac{1}{2} + E[b_i]) = \delta$ とするためである。割引率

に興味があるため、群間差は割引率でのみ存在する状況でシミュレーションを行った。パラメータ生成の流れを説明すると、集団平均 ξ 、群間差 δ 、集団 sd (式 (55) では w_{11}, w_{22}) を生成し、その後変量効果 b_i を生成し、個人レベルパラメータ ξ_i を式 (61) によって計算した。割引率 k の集団平均は $N(0.225, 0.025^2)$ 、逆温度 β の集団平均は $N(1.5, 0.1^2)$ 、群間差は $N(0.05, 0.0025^2)$ 、割引率 k の集団 sd は $N(0.05, 0.01^2)$ 、逆温度 β の集団 sd は $N(0.2, 0.05)$ 、変量効果は $w_{12} = 0$ として式 (55) によって生成した。ステップ (2) では、PFIM の行列式を最大化する刺激選択、FIM の行列式を最大化する刺激選択、MP 法、ランダム刺激選択の 4 条件で刺激選択した。刺激候補値は SS5-1 と同様である。これを 200 回繰り返して、200 回の繰り返し分の刺激を作成した。つまり、20 試行分の刺激が 200 回分選択されたことになる。20 試行分の刺激 (1 回の繰り返し分) は N 人の全参加者に提示される (i.e., 参加者間で刺激は同一の fixed design)。

N 人分の参加者の実験を行うことを想定する二つ目のステップ (b) では、以下の流れで行う。(1) 集団レベルパラメータ、個人レベルパラメータを生成する。(2) 全段落で記述した方法で選んだ刺激を使用し、参加者数ごとに PFIM を計算する。PFIM から集団レベルパラメータの PSD の予測値の 2×1.96 倍、群間差パラメータが 0 であるかどうかの検定に関する検出力の予測値を計算する。ステップ (1) のパラメータ生成は前段落の手法と同様である。ただし集団レベルパラメータは 1 回の繰り返しで一つの値を使用し、個人レベルパラメータは N 人 (60 人) 分のパラメータ値を生成した。ステップ (2) では、PSD の予測値の 2×1.96 倍を算出している。ただし、著者の知る限り、理論的に集団レベルパラメータの標本分布が (漸近的に) 正規分布になることが証明されているわけではない。事後分布は正規分布に類似した形になることが多いことと、SS5-1 と対応させることを考え、上記の計算結果を示した。検出力については、PFIM を算出した後に Ogungbenro and Aarons (2008b) の式 (9) から式 (12) に基づいて計算した。詳しくは Ogungbenro and Aarons (2008b) を参照して欲しい。なお前段落で記述したように、群間差パラメータの真値は平均 0.05 である。上記の割引率 k の集団平均に関する PFIM, PSD の予測値の 2×1.96 倍、割引率 k の群間差に関する検出力の予測値を算出するシミュレーションを、前段落で作成した刺激セットを使用して 200 回繰り返して、平均値を算出した。

A. 1. 2. 2 結果と考察

割引率 k の集団平均あるいは群間差パラメータに関して、参加者ごとに (a) (累積の) PFIM, (b) $2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{PFIM}}$, (c) 検出力の予測値を示したのが Figure A1-2 である。ただし、横軸の参加者数は、その人数までのデータが 20 試行分全て収集されたものとしている。例えば、横軸が 10 のポイントは、参加者 10 人 \times 試行数 20 試行 = 200 分のデータを使用した時の検出力等を表している。PFIM については、 $\det(PFIM)$ を最大化する PFIM 条件、 $\det(FIM)$ を最大化する FIM 条件が最も大きく、次に選択肢間の価値を同等とする MP 条件が大きく、最も小さいのがランダム条件であった。これを反映して、 $2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{PFIM}}$ および検出力については PFIM 条件、FIM 条件が最もパフォーマンスが良く、MP 条件が次に良く、ランダム条件は最も悪かった。

$2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{PFIM}}$ (Figure A1-2 b) については、例えば縦軸の値を 0.3 以下に抑えたい場合においては、平均的に PFIM, FIM 条件では約 7 人必要で、MP 条件では約 11 人必要で、ランダム条件では約 35 人必要である。あるいは縦軸の値を 0.2 以下に抑えたい場合には、PFIM, FIM 条件では約 15 人必要で、MP 条件では約 23 人必要で、ランダム条件では 60 人以上が必要である。

検出力 (Figure A1-2 c) については、例えば検出力を 70%以上にした場合においては、平均的に PFIM, FIM 条件では約 40 人必要で、MP 条件では約 60 人強必要で、ランダム条件では 60 人でも達成できない。あるいは検出力を 80%以上にした場合には、PFIM, FIM 条件では約 52 人必要で、他の 2

条件では 60 人分のデータを集めて達成できない。また、PFIM 条件は PFIM, 予測された PSD, 検出力いずれにおいても最適な手法となっていると言える。一方で研究 4 で示されたように FIM 条件は PFIM 条件と比べてほとんど損失がない。例えば検出力では, FIM 条件においてのみ参加者数を 1~2 人余分にとれば, PFIM 条件の検出力と同等にできる。また, 例えば参加者数が 40 人 (各群 20 人ずつ) の状況では, 検出力は PFIM 条件で 72%, FIM 条件で 70%, MP 条件で 53%, ランダム条件で 28% という予測であった。今回の例では, MP 法から FIM や PFIM ベースの刺激選択法に変えることで 17~19% 程度の検出力の改善が見込まれている。注意点としては, この検出力の値はあくまで解析的な予測値であり, 実際には MCMC 推定等をベースとしたシミュレーションによって検出力の値を求めるプロセスを行った方が良い。研究 1 の two-step procedure で言うと, 本節の結果はステップ 1 の結果で, ステップ 2 に関しては未だ行っていないようなものである。

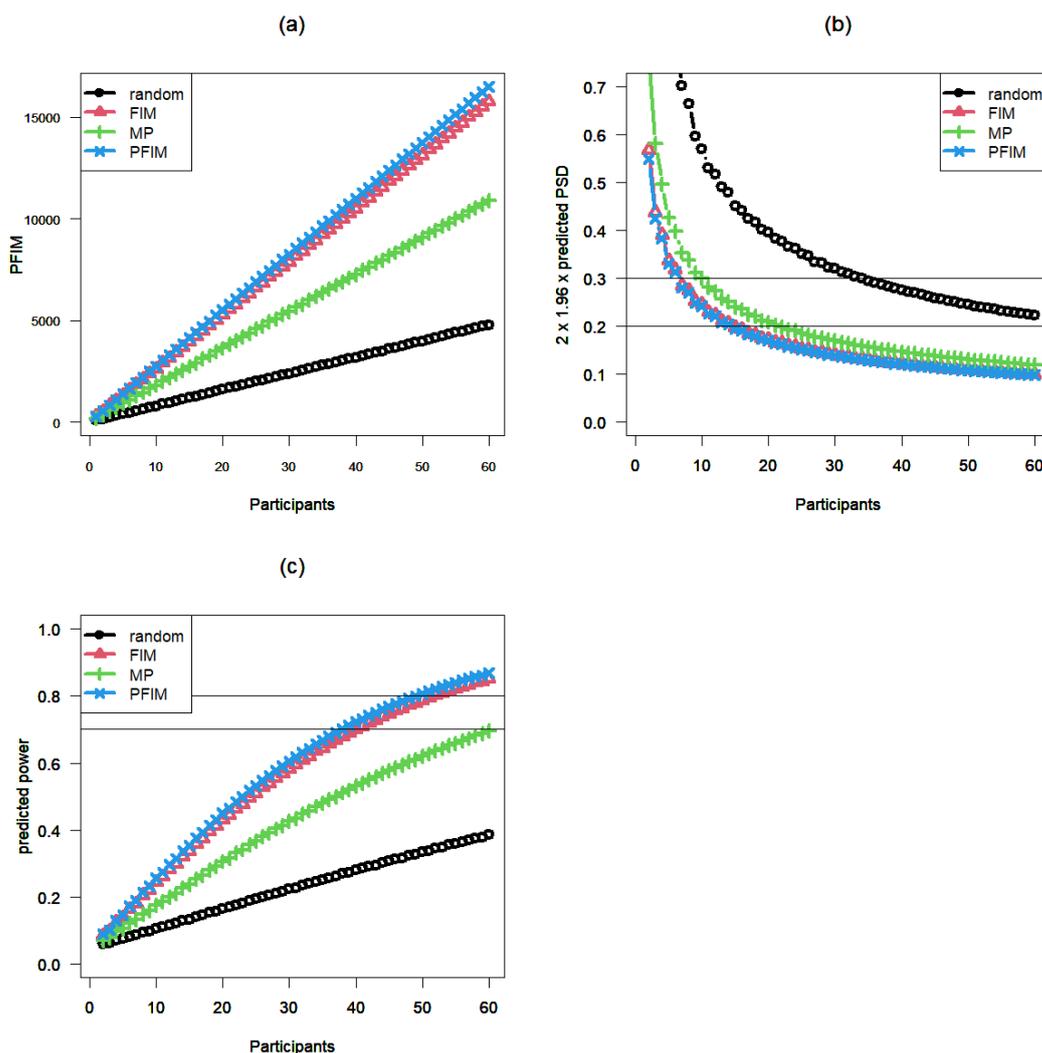


Figure A1-2

各刺激選択法における割引率の集団平均, 群間差における PFIM, 予測された $\text{PSD} \times 2 \times 1.96$, 検出力

(a) 各刺激選択法における割引率の集団平均の PFIM を表す。横軸は参加者数, 縦軸は PFIM である。ただし PFIM はその参加者数までの累積和である。刺激選択法は PFIM 条件が $\det(\text{PFIM})$ 最大化, FIM 条件が $\det(\text{FIM})$ 最大化, MP 条件が (選択確率-0.5) の絶対値最小化, random 条件がランダムな刺激選択法を表す。(b) 各刺激選択法における割引率の集団平均における予測された $\text{PSD} \times 2 \times 1.96$ を表す。黒色の 2 本の横線は, 下から縦軸の値が 0.2, 0.3 を表す。(c) 各刺激選択法における割引率の群間差に関する検定の検出力の予測値を表す。黒色の 2 本の横線は, 下から検出力が 0.7, 0.8 を表す。

A.1.3 刺激選択手法の効果について

A.1 節などのシミュレーションはあくまで遅延価値割引モデルにおける一つの例ではあるが、A.1 節を参考にしながら、本節では反復測定状況で階層モデルを適用する実験において、PFIM による刺激選択、FIM による刺激選択、MP 法による刺激選択、ランダム刺激選択の順に、各刺激選択法を使用するメリットあるいは根拠について議論する。

PFIM ベースの刺激選択は、A.1 節あるいは研究 4 のシミュレーションで示したように集団パラメータの推定精度や検出力の意味で最適な刺激選択手法である。また、集団平均などに関する検出力の予測をするためには FIM では不十分で、PFIM が必要となる。PFIM を利用するあるいは学習する根拠としては、このように最適な手法であることと、検出力の予測に関して必要なことが挙げられる。研究者が PFIM を使用できるのであれば、これを利用して実験計画を立てることが望ましい。デメリットとしては、先行研究の蓄積が少なくとも心理統計分野では少ないことと、学習コストあるいはコード実装のコストが高いことである。

FIM ベースの刺激選択は、A.1 節あるいは研究 4 のシミュレーションで示したように、本来最適である PFIM ベースの手法と比べても検出力などの損失がほとんどない。また PFIM と比べると FIM の方が計算や理解することが容易である。例えば、A.1 節のシミュレーションにおいては、検出力に関しては FIM ベースで刺激選択しても、1~2 人余分にデータを取る（あるいは試行数を増やす）ことで検出力は PFIM ベースの手法と同等となる。PFIM と比べると学習や実装コストの低い FIM を使用して、損失分は 1~2 人余分にデータを取る（あるいは参加者数は同一で試行数を数試行ずつ増やす）ことで補完するという考え方も合理的かもしれない。つまり、検出力などの予測を無視すると、刺激選択自体は FIM ベースの手法でほとんど十分であると言える。デメリットとしては、MP 法と比べると学習、実装コストが高いこと、階層モデルにおける検出力の予測自体は FIM ではできないことである。特に後者については、FIM のみであると、検出力の予測ができないため、刺激選択手法としては損失は小さく問題ないが、試行数や参加者数も決定しようとする、MCMC 推定等をベースとするシミュレーションに頼ることになるため、計算負荷の観点から効率性が下がる。

MP 法による刺激選択を使用する根拠で最も大きいのは、直感的な分かりやすさと実装の簡単さである。モデルを理解して選択確率を計算するだけなので、比較的簡単に利用できる手法となる。この手法が現在の認知心理学研究において最も使用されているやり方に近いと考えられる。ただし MP 法は、パラメータを乱数生成し、モデルに基づいて選択確率を計算し、選択確率が 0.5 に最も近づく刺激を選択する手法かつ、場合によっては adaptive design として使用する手法であり、客観的な基準に基づく手法である。選択確率を 0.5 に近づけることは F 情報量の一部の項を最大化することになっており（式 (64)）、少なくとも直感や経験のみに基づく刺激選択より良い状況の方が多いだろう。デメリットとしては、FIM ベースの手法と比べると、やや損失が大きいことである。最適な手法に比べ、どのくらいパフォーマンスが低下すると問題だと研究者が認識するかについての明確な基準はないが、SS5-1 の例では、95% 信頼区間の幅を基準に考えると MP 法は FIM 条件に比べ 10 試行以上余分にデータが必要となる。SS5-2 の例では、検出力を基準に考えると MP 法は FIM 条件と比べ、20 人前後余分にデータが必要となる。20 人（各群 10 人ずつ）分のデータ収集コストが高いと考えるのであれば、MP 法や直感、経験に基づく手法、先行研究を踏襲するやり方から FIM ベースの刺激選択に移行することを検討しても良い。ただし、これはあくまで遅延価値割引モデルの例であり、（真の平均値差など）パラメータの真値やモデルに依存する。基本的に、刺激の種類や次元が増えたり、課題やモデルが複雑になるほど刺激選択条件間の違いは顕著になるだろう。

ランダム刺激選択については、これを実際の研究で使用する根拠は基本的に存在しない。特に推定精度や検出力を基準に考えるのであれば、ランダム刺激選択はパフォーマンスが悪くなるような手法である。おそらく実際の実験において完全にランダムに提示刺激を選択することはないだろう。シミュレーションにおいてはパラメータリカバリにおいて使用したり、刺激選択条件間のパフォーマンス比較においてベースラインとして利用することはある。本博士論文でも、比較対象としてランダム刺激選択条件を利用している。

A.2 コード例

A.2.1 F 情報行列の計算式

本節の説明は、Fujita et al. (2022b) を参考にしている。基本的に、選択肢数が二つの意思決定モデルの多くは、ロジスティック回帰分析の exp 関数の中身に非線形構造を入れた形をしている。このクラスのモデルにおいては、FIM は一般的な式によって計算ができる。一般に P 個のパラメータ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_P)$ を持つモデルを考える。個人 i の添え字は省略する。1 から T 試行目までのデータ $y = (y_1, \dots, y_T)$ の確率モデルを

$$y_t \sim \text{Bernoulli}(\eta_t(\xi)), \quad (62)$$

$$\eta_t(\xi) = \text{logit}^{-1}\{g(A_t; \xi) - g(B_t; \xi)\} = \text{logit}^{-1}\{D(\xi)\} \quad (63)$$

と仮定する。関数 g は選択肢の価値を計算する関数であり、特に形を指定することはここではしていない。 $g(A_t; \xi), g(B_t; \xi)$ はそれぞれ試行 t における選択肢 A, B の価値を表す。例えば、遅延価値割引モデルにおいては、 $g(A_t; \xi) = \beta u(A_t^{(s)})$, $g(B_t; \xi) = \beta u(A_t^{(d)})$ である。式 (50), (51) のように、 $u(A_t^{(s)}) = x_t^{(s)}$, $u(A_t^{(d)}) = \frac{x_t^{(d)}}{1+k \text{time}_t}$ である。 $\eta_t(\xi)$ は選択肢 A の選択確率のことであり、パラメータは $\xi = (k, \beta)$ である。

この時、F 情報行列 $F(\xi)$ の (m, n) 成分 $F(\xi)_{m,n}$ は

$$F(\xi)_{m,n} = \sum_{t=1}^T \eta_t(\xi)(1 - \eta_t(\xi)) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_m} D(\xi) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \xi_n} D(\xi) \right], m, n = 1, 2 \quad (64)$$

となる。求めている部分は $\left[\frac{\partial}{\partial \xi_m} D(\xi) \right]$ である。例えば、遅延価値割引モデルの場合は $D(\xi) = \beta \{u(A_t^{(s)}) - u(A_t^{(d)})\}$ であり、 $\left[\frac{\partial}{\partial k} D(\xi) \right] = -\beta \left[\frac{\partial}{\partial k} u(A_t^{(d)}) \right]$, $\left[\frac{\partial}{\partial \beta} D(\xi) \right] = u(A_t^{(s)}) - u(A_t^{(d)})$ である。ただし、 $\left[\frac{\partial}{\partial k} u(A_t^{(d)}) \right] = -x_t^{(d)} \frac{1}{\{1+k \text{time}_t\}^2} \text{time}_t$ である。これで、パラメータ $\xi = (k, \beta)$ および刺激 $(x_t^{(s)}, x_t^{(d)}, \text{time}_t)$ を固定すれば F 情報行列が計算できる。

A.2.2 FIM ベースの刺激選択のコード例

本節では、遅延価値割引モデルにおいて FIM ベースで刺激選択をする R コードを示す。ただし fixed design を想定する。本節で使用する R コードの全ては OSF (<https://osf.io/zxt9g/> の codeExample/DDmodel.R) で参照できる。最初に FIM を計算する関数を説明し、その後刺激選択を行うためのコードを示す。

基本的な関数 t 試行目における選択肢の価値、選択確率を計算する関数を定義する。以降、コード中の変数として Para はパラメータ (k, β) , Stimulus_j は t 試行目における刺激で 2(選択肢) x 2(報酬額, 遅延時間) とする。以下の, CalcValue_j, CalcAllValue_j は選択肢の価値を計算する関数, CalcProb_j は選択肢 A の選択確率を計算する関数である。これは確率モデルを単に表現しただけである。

```
library(psych)
CalcValue_j <- function(Para, Stimulus_j, cate) {
  Value <- Stimulus_j[cate, 1] / (1 + Para[1] * Stimulus_j[cate, 2]) # hyperbolic model
  return(Value)
}
```

```

}

CalcAllValue_j <- function(Para, Stimulus_j) {
  Value <- numeric(length = 2)
  for(cate in 1:2) {
    Value[cate] <- CalcValue_j(Para = Para, Stimulus_j = Stimulus_j, cate=cate)
  }
  return(Value)
}

CalcProb_j <- function(Para, Stimulus_j) {
  Value <- CalcAllValue_j(Para = Para, Stimulus_j = Stimulus_j)
  prob <- logistic( Para[2] * (Value[1] - Value[2]) )
}

```

Figure A1-3

選択枝の価値， 選択確率を計算する関数を定義するコード

FIM 計算に必要な関数 次に $\left[\frac{\partial}{\partial \xi_m} D(\xi)\right]$ を計算する関数を定義する。以下のコードでは， PartValue が価値の差分の偏微分を計算する関数で， 1 つ目の要素が割引率 k ， 2 つ目の要素が逆温度 β で偏微分した値を求める関数である。これらの計算式については， A.2.1 節で求めた通りであり， この式を表現しただけである。

```

PartValue <- list()
PartValue[[1]] <- function(Para, Stimulus_j) {
  res <- - Stimulus_j[2, 1] * ( Stimulus_j[2, 2] / (1 + Para[1] * Stimulus_j[2, 2])^2 )
  res <- - res * Para[2]
  return(res)
}

PartValue[[2]] <- function(Para, Stimulus_j) {
  Value <- CalcAllValue_j(Para = Para, Stimulus_j = Stimulus_j)
  res <- Value[1] - Value[2]
  return(res)
}

```

Figure A1-4

$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_m} D(\xi)\right]$ の計算を行う関数を定義するコード

FIM 計算を行う関数 FIM を計算する関数を定義する。以下のコードでは， CalcFisher が t 試行目における FIM を計算する関数で， TestIF が全試行分の FIM (テスト情報量) を計算するための関数である。なお変数 Stimulus は全試行数分の刺激を収めた試行数 $\times 2$ (選択枝数) $\times 2$ (報酬額， 遅延時間) の配列である。

```

CalcFisher <- function(Para, Stimulus_j) {
  PNum <- length(Para) # the number of parameters
  Mat <- matrix(NA, ncol = PNum, nrow = PNum) # Fihser information matrix
  probj <- CalcProb_j(Para = Para, Stimulus_j = Stimulus_j) # choice probability
  for(irow in 1:PNum) {
    for(jcol in 1:PNum) {
      Mat[irow, jcol] <- probj * (1 - probj) *
        PartValue[[irow]](Para=Para, Stimulus_j = Stimulus_j) *
        PartValue[[jcol]](Para = Para, Stimulus_j = Stimulus_j)
    }
  }
  return(Mat)
}

TestIF <- function(Para, Stimulus) {
  J <- dim(Stimulus)[1] # the number of trials
  PNum <- length(Para)
  Mat <- matrix(data = 0, nrow = PNum, ncol = PNum)
  for(t in 1:J) {
    Mat <- Mat + CalcFisher(Para = Para, Stimulus_j = Stimulus[t, ])
  }
  return(Mat)
}

```

Figure A1-5

FIM の計算を行う関数を定義するコード

刺激選択を行うコード FIM を計算する関数を定義したため、これを利用して FIM ベースの刺激選択を行うことができる。ここでは 20 試行分の刺激を選択する例を示す。以下のコードの流れとしては、パラメータを試行数分生成し、for 文の中で刺激の全パターンにおける $\det(\text{FIM})$ を計算し、 $\det(\text{FIM})$ が最大となる刺激を探すということを試行数分行っている。このコードにより、変数 Stimulus に試行数分の選択された刺激が格納されている。なお、割引率 k の分布仮定としては、 $N(0.2, 0.05^2)$ の場合と $U(0, 1)$ の場合に分けて記述している。仮定するパラメータによって、選択される刺激が、どれくらいの特性パラメータを持つ参加者にとって良いかが変わる。

```

Trial <- 20 # the number of trials
#--- 仮定するパラメータ値
rateCond <- 1 # 1: k ~ N(0.2, 0.05^2); 2: k ~ U(0, 1)
if(rateCond == 1) {
  k <- rnorm(n = Trial, mean = 0.2, sd = 0.05) # prameter values (k)
}else if(rateCond == 2) {
  k <- runif(n = Trial, 0, 1)
}

```

```

beta <- rnorm(n = Trial, mean = 1.5, sd = 0.1) # beta
Para <- cbind(k, beta)
#--- 刺激候補値
rewardCand <- seq(1, 20, by=2); NumRew <- length(rewardCand) # reward
timeCand <- seq(1, 10, by=1); NumTime <- length(timeCand) # time delay
#--- 保存先
Stimulus <- array(NA, dim = c(Trial, 2, 2)) # selected stimuli

for(trial in 1:Trial) {
  ResFisherMat <- array(NA, dim = c(NumRew, NumRew, NumTime, 2, 2)) # FIM for each stimulus,
  NumRew * NumRew * NumTime * mat(2*2)
  ResDetTemp <- array(NA, dim = c(NumRew, NumRew, NumTime)) # det(FIM) for each stimulus
  #--- calculating FIM of all stimuli ---
  for(iRewA in 1:NumRew) {
    for(jRewB in 1:NumRew) {
      for(ktimeB in 1:NumTime) {
        # set stimuli set
        StimTemp <- array(NA, dim = c(2, 2))
        StimTemp[1, 1] <- rewardCand[iRewA]; StimTemp[1, 2] <- 0
        StimTemp[2, 1] <- rewardCand[jRewB]; StimTemp[2, 2] <- timeCand[ktimeB]
        ResFisherMat[iRewA, jRewB, ktimeB, , ] <- CalcFisher(Para = Para[trial, ], Stimulus_j =
        StimTemp) # FIM
        ResDetTemp[iRewA, jRewB, ktimeB] <- det(ResFisherMat[iRewA, jRewB, ktimeB, , ]) #
        det(FIM)
      } # time of B loop
    } # reward of B loop
  } # reward of A loop

  #--- stimuli maximizing det(FIM) ---
  ind <- which( ResDetTemp == max(ResDetTemp), arr.ind = TRUE ) # index of stimuli
  maximizing det(FIM)
  # set stimuli
  Stimulus[trial, 1, 1] = rewardCand[ind[1, 1]]; Stimulus[trial, 1, 2] <- 0 # stimuli of A
  Stimulus[trial, 2, 1] = rewardCand[ind[1, 2]]; Stimulus[trial, 2, 2] <- timeCand[ind[1, 3]] # stimuli
  of B
}

```

Figure A1-6

刺激選択を行うためのコード

選択された刺激を評価するコード 上記のコードで選択された 20 試行分の刺激 (Stimulus) が、各パラメータの値の参加者にとって、どれくらい推定精度が良くなるかをチェックすることもできる。以下

では $\beta=1.5$ に固定し、割引率 k の値を変えることで、各割引率 k の参加者の PSD がどれくらいになるかを予測できる。

```
#--- パラメータ値
kseq <- seq(0.01, 0.99, length.out = 500)
betaseq <- 1.5

#--- 保存先
ResFisher_para <- ResFisher_inv <- array(NA, dim = c(length(kseq), length(betaseq), 2, 2)) # FIM,
(FIM)^(-1), the number of parameters * mat(2*2)

for(ik in 1:length(kseq)) {
  for(jbeta in 1:length(betaseq)) {
    ResFisher_para[ik, jbeta, , ] <- TestIF(Para = c(kseq[ik], betaseq[jbeta]), Stimulus = Stimulus) #
FIM
    ResFisher_inv[ik, jbeta, , ] <- solve( ResFisher_para[ik, jbeta, , ] ) # inverse matrix of FIM
  }
}
```

Figure A1-7

選択された刺激における FIM と PSD の予測を算出するコード

各割引率における F 情報量と、 PSD の予測値をプロットしたのが、Figure A1-8 である。上側のパネルが刺激選択時に割引率 k を $N(0.2, 0.05^2)$ で生成した結果で、下側のパネルが k を $U(0, 1)$ で生成した結果である。前者では 0.2 付近の参加者を想定していることになるため、0.2 付近で推定精度が高い。後者では 0 から 1 にかけてまんべんなく推定精度を高くするような刺激セットとなっていることが分かる。

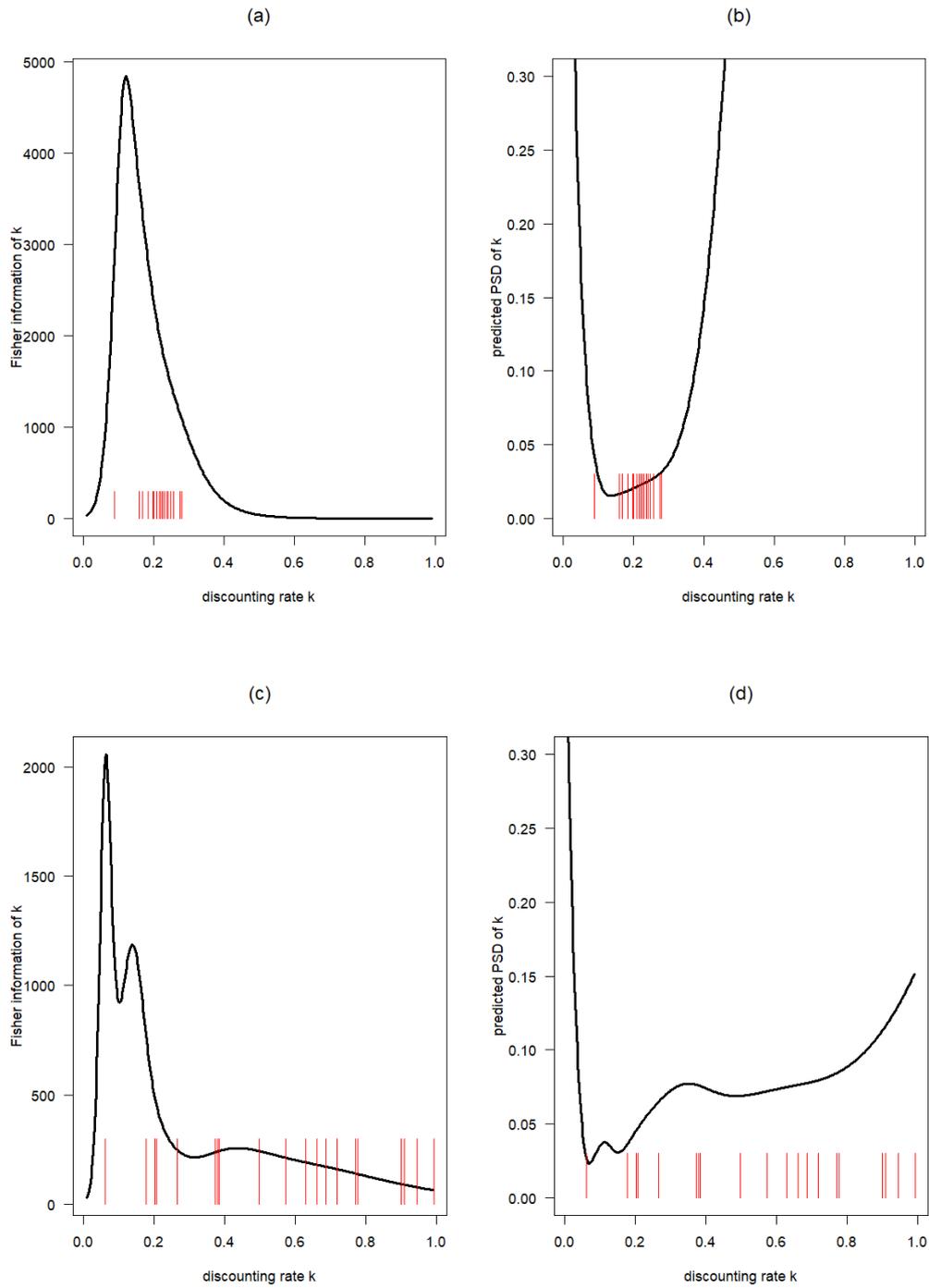


Figure A1-8

選択刺激を使用した場合の、各割引率における F 情報量、PSD の予測値

(a), (c): 横軸は割引率 k , 縦軸は k の F 情報量を表す。赤の縦線は、刺激選択時に生成された割引率の値を表す。(b), (d): 横軸は割引率 k , 縦軸は k の PSD の予測値を表す。

引用文献

- Abdellaoui, M., Vossman, F., & Weber, M. (2005). Choice-based elicitation and decomposition of decision weights for gains and losses under uncertainty. *Management Science*, *51*(9), 1384–1399. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1050.0388>
- Ahn, W. Y., Gu, H., Shen, Y., Haines, N., Hahn, H. A., Teater, J. E., Myung, J. I., & Pitt, M. A. (2020). Rapid, precise, and reliable measurement of delay discounting using a Bayesian learning algorithm. *Scientific Reports*, 1–10. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-68587-x>
- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In Petrov, B. N. & Csaki, F. (Ed). *Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory* (pp. 267-281). Budapest: Akademiai Kiado.
- 甘利俊一 (2014). 新版情報幾何学の新展開 サイエンス社
- 甘利俊一・長岡浩司 (1993). 情報幾何の方法 岩波講座応用数学[対象 12] 岩波書店
- Bak, J. H., & Pillow, J. W. (2018). Adaptive stimulus selection for multi-alternative psychometric functions with lapses. *Journal of Vision*, *18*(12), 1–25. <https://doi.org/10.1167/18.12.4>
- Banner, K. M., & Higgs, M. D. (2017). Considerations for assessing model averaging of regression coefficients: *Ecological Applications*, *27*(1), 78–93. <https://doi.org/10.1002/eap.1419>
- Bazzoli, C., Retout, S., & Mentre, F. (2009). Fisher information matrix for nonlinear mixed effects multiple response models: Evaluation of the appropriateness of the first order linearization using a pharmacokinetic/pharmacodynamic model. *Statistics in Medicine*, *28*, 1940–1956.
- Beevers, C. G., Worthy, D. A., Gorlick, M. A., Nix, B., Chotibut, T., & Maddox, W. T. (2013). Influence of depression symptoms on history-independent reward and punishment processing. *Psychiatry Research*, *207*(1–2), 53–60. <https://doi.org/10.1016/j.psychres.2012.09.054>
- Breslow, N. E., & Clayton, D. G. (1993). Approximate Inference in Generalized Linear Mixed Models. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), 9–25. <https://doi.org/10.1080/01621459.1993.10594284>
- Broomell, S. B., & Bhatia, S. (2014). Parameter Recovery for Decision Modeling Using Choice Data. *Decision*, *1*(4), 252–274.
- Buckland, S. T., Burnham, K. P., & Augustin, N. H. (1997). Model Selection: An Integral Part of Inference. *Biometrics*, *53*(2), 603–618. <https://doi.org/10.2307/2533961>
- Cavagnaro, D. R., Gonzalez, R., Myung, J. I., & Pitt, M. A. (2013). Optimal decision stimuli for risky choice experiments: An adaptive approach. *Management Science*, *59*(2), 358–375. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1120.1558>
- Cavagnaro, D. R., Myung, J. I., Pitt, M. A., & Kujala, J. V. (2010). Adaptive design optimization: A mutual information-based approach to model discrimination in cognitive science. *Neural Computation*, *22*(4), 887–905. <https://doi.org/10.1162/neco.2009.02-09-959>
- Cavagnaro, D. R., Pitt, M. A., Gonzalez, R., & Myung, J. I. (2013). Discriminating among probability weighting functions using adaptive design optimization. *Journal of Risk and Uncertainty*, *47*(3), 255–289. <https://doi.org/10.1007/s11166-013-9179-3>

- Cavanaugh, J. E., & Shumway, R. H. (1996). On computing the expected Fisher information matrix for state-space model parameters. *Statistics & Probability Letters*, *26*, 347–355. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-7152\(95\)00031-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-7152(95)00031-3)
- Chalmers, R. P. (2016). Generating Adaptive and Non-Adaptive Test Interfaces for Multidimensional Item Response Theory Applications. *Journal of Statistical Software*, *71*(5). <https://doi.org/10.18637/jss.v071.i05>
- Chang, H. H. (2015). Psychometrics behind computerized adaptive testing. *Psychometrika*, *80*(1), 1–20. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11336-014-9401-5>
- Chang, H. H., & Ying, Z. (1996). A global information approach to computerized adaptive testing. *Applied Psychological Measurement*, *20*(3), 213–229. <https://doi.org/10.1177/014662169602000303>
- Chang, J., Kim, J., Zhang, B. T., Pitt, M. A., & Myung, J. I. (2021). Data-driven experimental design and model development using Gaussian process with active learning. *Cognitive Psychology*, *125*, 101360. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2020.101360>
- Chase, H. W., Frank, M. J., Michael, A., Bullmore, E. T., Sahakian, B. J., & Robbins, T. W. (2010). Approach and avoidance learning in patients with major depression and healthy controls : relation to anhedonia. *Psychological Medicine*, *40*, 433–440. <https://doi.org/10.1017/S0033291709990468>
- Chen, P., Engel, S., & Wang, C. (2020). The multivariate adaptive design for efficient estimation of the time course of perceptual adaptation. *Behavior Research Methods*, *52*(3), 1073–1090. <https://doi.org/10.3758/s13428-019-01301-6>
- Cheng, Y., & Morgan, D. L. (2013). Classification accuracy and consistency of computerized adaptive testing. *Behavior Research Methods*, *45*(1), 132–142. <https://doi.org/10.3758/s13428-012-0237-6>
- Claeskens, G. & Hjort, N. L. (2008). *Model selection and model averaging*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Daw, N. D., Gershman, S. J., Seymour, B., Dayan, P., & Dolan, R. J. (2011). Model-based influences on humans' choices and striatal prediction errors. *Neuron*, *69*(6), 1204–1215. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2011.02.027>
- Dezfouli, A., Griffiths, K., Ramos, F., Dayan, P., & Balleine, W. (2019). Models that learn how humans learn : The case of decision-making and its disorders. *PLoS Comput Biol*, *15*(6), e1006903.
- DiMattina, C. (2015). Fast adaptive estimation of multidimensional psychometric functions. *Journal of Vision*, *15*(9), 1–20. <https://doi.org/10.1167/15.9.5>
- Doll, R. J., Buitenweg, J. R., Meijer, H. G. E., & Veltink, P. H. (2014). Tracking of nociceptive thresholds using adaptive psychophysical methods. *Behavior Research Methods*, *46*(1), 55–66. <https://doi.org/10.3758/s13428-013-0368-4>

- Eggen, T. J.H.M., & Straetmans, G. J. J. M. (2000). Computerized adaptive testing for classifying examinees into three categories. *Educational and Psychological Measurement*, 60(5), 713–734. <https://doi.org/10.1177/00131640021970862>
- Eggen, Theo J.H.M. (1999). Item selection in adaptive testing with the sequential probability ratio test. *Applied Psychological Measurement*, 23(3), 249–261. <https://doi.org/10.1177/01466219922031365>
- Ellsberg, D. (1961). Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms. *Quarterly Journal of Economics*, 75(4), 643–669.
- Ferrando, P. J., & Lorenzo-Seva, U. (2007). An item response theory model for incorporating response time data in binary personality items. *Applied Psychological Measurement*, 31(6), 525–543. <https://doi.org/10.1177/0146621606295197>
- Fleiss, J. L., & Shrout, P. E. (1977). The effects of measurement errors on some multivariate procedures. *American Journal of Public Health*, 67(12), 1188–1191. <https://doi.org/10.2105/AJPH.67.12.1188>
- Foracchia, M., Hooker, A., Vicini, P., & Ruggeri, A. (2004). POPED, a software for optimal experiment design in population kinetics. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 74(1), 29–46. [https://doi.org/10.1016/S0169-2607\(03\)00073-7](https://doi.org/10.1016/S0169-2607(03)00073-7)
- Fragoso, T. M., Bertoli, W., & Louzada, F. (2018). Bayesian Model Averaging: A Systematic Review and Conceptual Classification. *International Statistical Review*, 86(1), 1–28. <https://doi.org/10.1111/insr.12243>
- 藤岡敦 (2021). 入門情報幾何—統計的モデルをひもとく微分幾何学— 共立出版
- 藤田和也・岡田謙介 (2019). 主観確率を含んだ累積プロスペクト理論モデルの推定精度について. *行動計量学*, 46, 53-71. <https://doi.org/10.2333/jbhmk.46.53>.
- Fujita, K, Okada, K, & Katahira, K. (2022a) Stimulus selection in a Q-learning model using Fisher information and Monte Carlo simulation. PsyArXiv: <https://doi.org/10.31234/osf.io/3r7f6>.
- Fujita, K, Okada, K, & Katahira, K. (2022b). The Fisher information matrix: A tutorial for calculation for decision making models. PsyArXiv: <https://doi.org/10.31234/osf.io/hdwut>.
- 藤原彰夫 (2015). 情報幾何学の基礎 数理情報科学シリーズ 29 牧野書店
- Gagnon, R., & Leonov, S. (2005). Optimal population designs for PK models with serial sampling. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 15(1), 143–163. <https://doi.org/10.1081/BIP-200040853>
- Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., and Rubin, D. B. (2014). *Bayesian data analysis (3 ed)*. Boca Raton: CRC Press.
- Gershman, S. J. (2016). Empirical priors for reinforcement learning models. *Journal of Mathematical Psychology*, 71, 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2016.01.006>
- Gibbons, R. D., Weiss, D. J., Pilkonis, P. A., Frank, E., Moore, T., Kim, J. B., & Kupfer, D. J. (2012). Development of the CAT-ANX: A computerized adaptive test for depression. *Arch Gen Psychiatry*, 69(11), 1104–1112. <https://doi.org/10.1001/archgenpsychiatry.2012.14>
- Gonzalez, R., & Wu, G. (1999). On the shape of the probability weighting function. *Cognitive Psychology*, 38, 129–166. <https://doi.org/10.1006/cogp.1998.0710>

- Gu, H., Kim, W., Hou, F., Lesmes, L. A., Pitt, M. A., Lu, Z. L., & Myung, J. I. (2016). A hierarchical Bayesian approach to adaptive vision testing: A case study with the contrast sensitivity function. *Journal of Vision*, *16*(6), 1–17. <https://doi.org/10.1167/16.6.15>
- Güsten, J., Berron, D., Düzel, E., & Ziegler, G. (2022). Bayesian modeling of item heterogeneity in dichotomous recognition memory data and prospects for computerized adaptive testing. *Scientific Reports*, *12*(1), 1–17. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-04997-3>
- 南風原朝和 (2002). 心理統計学の基礎—統合的理解のために— 有斐閣アルマ
- Heck, D. W., & Erdfelder, E. (2019). Maximizing the Expected Information Gain of Cognitive Modeling via Design Optimization. *Computational Brain and Behavior*, *2*(3–4), 202–209. <https://doi.org/10.1007/s42113-019-00035-0>
- Hinne, M., Gronau, Q. F., van den Bergh, D., & Wagenmakers, E. J. (2020). A Conceptual Introduction to Bayesian Model Averaging. *Advances in Methods and Practices in Psychological Science*, *3*(2), 200–215. <https://doi.org/10.1177/2515245919898657>
- Hjort, N. L., & Claeskens, G. (2003). Frequentist Model Average Estimators. *Journal of the American Statistical Association*, *98*(464), 879–899. <https://doi.org/10.1198/016214503000000828>
- Hoeting, J. A., Madigan, D., Raftery, A. E., & Volinsky, C. T. (1999). Bayesian model averaging: A tutorial. *Statistical Science*, *14*(4), 382–401. <https://doi.org/10.1214/ss/1009212519>
- Hooker, A., & Vicini, P. (2005). Simultaneous population optimal design for pharmacokinetic-pharmacodynamic experiments. *AAPS Journal*, *7*(4). <https://doi.org/10.1208/aapsj070476>
- Huys, Q. J., Pizzagalli, D. A., Bogdan, R., & Dayan, P. (2013). Mapping anhedonia onto reinforcement learning: a behavioural meta-analysis. *Biology of Mood & Anxiety Disorders*, *3*(1), 1–16. <https://doi.org/10.1186/2045-5380-3-12>
- Ito, M., & Doya, K. (2009). Validation of Decision-Making Models and Analysis of Decision Variables in the Rat Basal Ganglia. *The Journal of Neuroscience*, *29*(31), 9861–9874. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.6157-08.2009>
- Kahneman, D. & Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. In *Econometrica* (Vol. 47, pp. 263–292).
- Kaplan, D., & Lee, C. (2016). Bayesian Model Averaging Over Directed Acyclic Graphs With Implications for the Predictive Performance of Structural Equation Models. *Structural Equation Modeling*, *23*(3), 343–353. <https://doi.org/10.1080/10705511.2015.1092088>
- Kass, R. E., & Raftery, A. E. (1995). Bayes factors. *Journal of the American Statistical Association*, *90*(430), 773–795. <https://doi.org/10.1080/01621459.1995.10476572>
- Katahira, K. (2016). How hierarchical models improve point estimates of model parameters at the individual level. *Journal of Mathematical Psychology*, *73*, 37–58. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2016.03.007>

- Katahira, K. (2018). The statistical structures of reinforcement learning with asymmetric value updates. *Journal of Mathematical Psychology*, *87*, 31–45.
<https://doi.org/10.1016/j.jmp.2018.09.002>
- Katahira, K., Fujimura, T., Okanoya, K., & Okada, M. (2011). Decision-making based on emotional images. *Frontiers in Psychology*, *2*, 311. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00311>
- 加藤健太郎・山田剛史・川端一光 (2014). R による項目反応理論 オーム社
- Kim, W., Pitt, M. A., Lu, Z. L., Steyvers, M., & Myung, J. I. (2014). A hierarchical adaptive approach to optimal experimental design. *Neural Computation*, *26*, 2465–2492.
https://doi.org/10.1162/NECO_a_00654
- 小西貞則・北川源四郎 (2004). 情報量規準 シリーズ<予測と発見の科学>2. 朝倉書店
- Kontsevich, L. L., & Tyler, C. W. (1999). Bayesian adaptive estimation of psychometric slope and threshold. *Vision Research*, *39*(16), 2729–2737. [https://doi.org/10.1016/S0042-6989\(98\)00285-5](https://doi.org/10.1016/S0042-6989(98)00285-5)
- 久保拓弥 (2012). データ解析のための統計モデリング入門—一般化線形モデル・階層ベイズモデル・MCMC— 岩波書店
- 久保川達也 (著) 新井仁之・小林俊行・斎藤毅・吉田朋広 (編) (2017). 現代数理統計学の基礎 共立出版
- Kujala, J. V., & Lukka, T. J. (2006). Bayesian adaptive estimation: The next dimension. *Journal of Mathematical Psychology*, *50*(4), 369–389. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2005.12.005>
- Kunisato, Y., Okamoto, Y., Ueda, K., Onoda, K., Okada, G., Yoshimura, S., Suzuki, S., Samejima, K., & Yamawaki, S. (2012). Effects of depression on reward-based decision making and variability of action in probabilistic learning. *Journal of Behavior Therapy and Experimental Psychiatry*, *43*, 1088–1094. <https://doi.org/10.1016/j.jbtep.2012.05.007>
- Lakens, D. (2022). Sample Size Justification. *Collabra: Psychology*, *8*(1), 1–32.
<https://doi.org/10.1525/collabra.33267>
- Lauriola, M., & Levin, I. P. (2001). Relating Individual Differences in Attitude toward Ambiguity to Risky Choices. *Journal of Behavioral Decision Making*, *14*, 107–122.
<https://doi.org/10.1002/bdm.368>
- Lauriola, M., Levin, I. P., & Hart, S. S. (2007). Common and distinct factors in decision making under ambiguity and risk: A psychometric study of individual differences. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, *104*(2), 130–149.
<https://doi.org/10.1016/j.obhdp.2007.04.001>
- Lee, M. D. & Wagenmakers, E. J. (2013). *Bayesian cognitive modeling: A practical course*. Cambridge: Cambridge University Press. (井関龍太 (訳) (2017). ベイズ統計で実践モデリング—認知モデルのトレーニング— 北大路書房)
- Lee, Y. S. (2007). A comparison of methods for nonparametric estimation of item characteristic curves for binary items. *Applied Psychological Measurement*, *31*(2), 121–134.
<https://doi.org/10.1177/0146621606290248>

- Leeb, H., & Pöschel, B. M. (2006). Can one estimate the conditional distribution of post-model-selection estimators? *Annals of Statistics*, *34*(5), 2554–2591. <https://doi.org/10.1214/009053606000000821>
- Lesmes, L. A., Lu, Z. L., Baek, J., Tran, N., Doshier, B. A., & Albright, T. D. (2015). Developing Bayesian adaptive methods for estimating sensitivity thresholds (d') in Yes-No and forced-choice tasks. *Frontiers in Psychology*, *6*, 1–24. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01070>
- Lindley, D. V. (1956). On a measure of the information provided by an experiment. *The Annals of Mathematical Statistics*, *27*(4), 986–1005. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177728069>
- Liu, K. (1988). Measurement error and its impact on partial correlation and multiple linear regression analyses. *American Journal of Epidemiology*, *127*, 864–874. <https://doi.org/10.1093/oxfordjournals.aje.a114870>
- Liu, Y., & Onculer, A. (2015). Ambiguity Attitudes over Time. *Journal of Behavioral Decision Making*, *30*, 80–88. <https://doi.org/10.1002/bdm.1922>
- Longford, N. T. (1994). Logistic regression with random coefficients. *Computational Statistics and Data Analysis*, *17*(1), 1–15. [https://doi.org/10.1016/0167-9473\(92\)00062-V](https://doi.org/10.1016/0167-9473(92)00062-V)
- Ly, A., Marsman, M., Verhagen, J., Grasman, R. P. P. P., & Wagenmakers, E.-J. (2017). A Tutorial on Fisher information. *Journal of Mathematical Psychology*, *80*, 40–55. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2017.05.006>
- Madden, G. J., Begotka, A. M., Raiff, B. R., & Kastern, L. L. (2003). Delay discounting of real and hypothetical rewards. *Experimental and Clinical Psychopharmacology*, *11*(2), 139–145. <https://doi.org/10.1037/1064-1297.11.2.139>
- Markon, K. E., & Chmielewski, M. (2013). The effect of response model misspecification and uncertainty on the psychometric properties of estimates. In R. E. Millsap, L. A. van der Ark, D. M. Bolt & C. M. Woods (Eds.), *New developments in quantitative psychology*. Presentations from the 77th Annual Psychometric Society Meeting (pp. 85-114). New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9348-8>
- 松浦健太郎 (2016). Stan と R でベイズ統計モデリング Wonderful R 2 共立出版
- McGlohen, M., & Chang, H. H. (2008). Combining computer adaptive testing technology with cognitively diagnostic assessment. *Behavior Research Methods*, *40*(3), 808–821. <https://doi.org/10.3758/BRM.40.3.808>
- Meijer, R. R., & Nering, M. L. (1999). Computerized adaptive testing: Overview and an example. *Applied Psychological Measurement*, *23*(3), 187–194. <https://doi.org/https://doi.org/10.1177/01466219922031310>
- Mentré, F., Mallet, A., & Baccar, D. (1997). Optimal design in random-effects regression models. *Biometrika*, *84*(2), 429–442. <https://doi.org/10.1093/biomet/84.2.429>
- Mitra, P., Lian, H., Mitra, R., Liang, H., & Xie, M. ge. (2019). A general framework for frequentist model averaging. *Science China Mathematics*, *62*(2), 205–226. <https://doi.org/10.1007/s11425-018-9403-x>

- Moral-Benito, E. (2015). Model averaging in economics: An overview. *Journal of Economic Surveys*, *29*, 46-75. <https://doi.org/10.1111/joes.12044>
- Mulder, J., & Van Der Linden, W. J. (2009). Multidimensional adaptive testing with optimal design criteria for item selection. *Psychometrika*, *74*(2), 273–296. <https://doi.org/10.1007/s11336-008-9097-5>
- 村井潤一郎・橋本貴充 (2017). 心理学のためのサンプルサイズ設計入門 講談社
- Murphy, R. O., & Brincke, R. H. W. (2018). Hierarchical Maximum Likelihood Parameter Estimation for Cumulative Prospect Theory : Improving the Reliability of Individual Risk Parameter Estimates. *Management Science*, *64*(1), 308–326. <https://doi.org/10.1287/mnsc.2016.2591>
- Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of Mathematical Psychology*, *47*(1), 90–100. [https://doi.org/10.1016/S0022-2496\(02\)00028-7](https://doi.org/10.1016/S0022-2496(02)00028-7)
- Myung, J. I., Cavagnaro, D. A., & Pitt, M. A. (2013). A tutorial on adaptive design optimization. *Journal of Mathematical Psychology*, *57*, 53–67. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2013.05.005>
- Myung, J. I., Navarro, D. J., & Pitt, M. A. (2006). Model selection by normalized maximum likelihood. *Journal of Mathematical Psychology*, *50*(2), 167–179. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2005.06.008>
- Myung, J. I., & Pitt, M. A. (2009). Optimal experimental design for model discrimination. *Psychological Review*, *116*(3), 499–518. <https://doi.org/10.1037/a0016104>
- 永田靖 (2003). サンプルサイズの決め方 朝倉書店
- Nilsson, H., Rieskamp, J., & Wagenmakers, E. J. (2011). Hierarchical Bayesian parameter estimation for cumulative prospect theory. *Journal of Mathematical Psychology*, *55*(1), 84–93. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2010.08.006>
- Odum, A. L. (2011). Delay discounting: Trait variable? *Behavioural Processes*, *87*(1), 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.beproc.2011.02.007>
- Ogungbenro, K., & Aarons, L. (2008a). Optimisation of sampling windows design for population pharmacokinetic experiments. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, *35*(4), 465–482. <https://doi.org/10.1007/s10928-008-9097-1>
- Ogungbenro, K., & Aarons, L. (2008b). Sample size calculations for population pharmacodynamic experiments involving repeated dichotomous observations. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, *18*(6), 1212–1227. <https://doi.org/10.1080/10543400802375845>
- Ogungbenro, K., & Aarons, L. (2010a). Sample size/power calculations for population pharmacodynamic experiments involving repeated-count measurements. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, *20*(5), 1026–1042. <https://doi.org/10.1080/10543401003619205>
- Ogungbenro, K., & Aarons, L. (2010b). Sample size/power calculations for repeated ordinal measurements in population pharmacodynamic experiments. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, *37*(1), 67–83. <https://doi.org/10.1007/s10928-009-9144-6>

- Ogungbenro, K., & Aarons, L. (2011). Population Fisher information matrix and optimal design of discrete data responses in population pharmacodynamic experiments. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 38(4), 449–469. <https://doi.org/10.1007/s10928-011-9203-7>
- Ogungbenro, K., Gueorguieva, I., Majid, O., Graham, G., & Aarons, L. (2007). Optimal design for multiresponse pharmacokinetic-pharmacodynamic models - Dealing with unbalanced designs. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 34(3), 313–331. <https://doi.org/10.1007/s10928-006-9048-7>
- Prelec, D. (1998). The Probability Weighting Function. *Econometrica*, 66(3), 497–527.
- Retout, S., Comets, E., Samson, A., & Mentre, F. (2007). Design in nonlinear mixed effects models: Optimization using the Fedorov-Wynn algorithm and power of the Wald test for binary covariates. *Statistics in Medicine*, 26, 5162–5179.
- Rights, J. D., Sterba, S. K., Cho, S.-J., & Preacher, K. J. (2018). Addressing model uncertainty in item response theory person scores through model averaging. *Behaviormetrika*, 45(2), 495–503. <https://doi.org/10.1007/s41237-018-0052-1>
- Robinson, O. J., & Chase, H. W. (2017). Learning and Choice in Mood Disorders : Searching for the Computational Parameters of Anhedonia. *Computational Psychiatry*, 1, 208–233. <https://doi.org/10.1162/CPSY>
- Schönbrodt, F. D., & Wagenmakers, E. J. (2018). Bayes factor design analysis: Planning for compelling evidence. *Psychonomic Bulletin and Review*, 25(1), 128–142. <https://doi.org/10.3758/s13423-017-1230-y>
- Schulz, E., Speekenbrink, M., & Krause, A. (2018). A tutorial on Gaussian process regression: Modelling, exploring, and exploiting functions. *Journal of Mathematical Psychology*, 85, 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2018.03.001>
- Segall, D. O. (1996). Multidimensional adaptive testing. *Psychometrika*, 61(2), 331–354. <https://doi.org/10.1007/BF02294343>
- Segall, D. O. (2004). Computerized Adaptive Testing. *Encyclopedia of Social Measurement*, 429–438. <https://doi.org/10.1016/B0-12-369398-5/00444-8>
- Shamosh, N. A., & Gray, J. R. (2008). Delay discounting and intelligence: A meta-analysis. *Intelligence*, 36(4), 289–305. <https://doi.org/10.1016/j.intell.2007.09.004>
- 清水裕士 (2014). 個人と集団のマルチレベル分析 ナカニシヤ出版
- 下平英寿・伊藤秀一・久保川達也・竹内啓 (2004). モデル選択—予測・検定・推定の交差点— 岩波書店
- Shumway, R. H., & Stoffer, D. S. (1982). An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm. *Journal of Time Series Analysis*, 3(4), 253–264. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1982.tb00349.x>

- Steyvers, M., Lee, M. D., & Wagenmakers, E. (2009). A Bayesian analysis of human decision-making on bandit problems. *Journal of Mathematical Psychology*, 53(3), 168–179. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2008.11.002>
- Sutton, R. S., & Barto, A. G. (2018). *Reinforcement Learning: An Introduction* (2nd Edition). Cambridge, MA: MIT Press.
- Symonds, M. R. E., & Moussalli, A. (2011). A brief guide to model selection, multimodel inference and model averaging in behavioural ecology using Akaike's information criterion. *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 65(1), 13–21. <https://doi.org/10.1007/s00265-010-1037-6>
- 竹内啓・広津千尋・公文雅之・甘利俊一 (2003). 統計学の基礎II—統計学の基礎概念を見直す— 岩波書店
- Tian, J., Miao, D., Zhu, X., & Gong, J. (2007). An introduction to the Computerized Adaptive Testing. *US-China Education Review*, 4(1), 72–81. <http://eric.ed.gov/?id=ED497385>
- Toubia, O., Johnson, E., Evgeniou, T., & Delquié, P. (2013). Dynamic Experiments for Estimating Preferences: An Adaptive Method of Eliciting Time and Risk Parameters. *Management Science*, 59(3), 613–640. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1120.1570>
- Toyama, A., Katahira, K., & Ohira, H. (2017). A simple computational algorithm of model-based choice preference. *Cognitive, Affective, & Behavioral Neuroscience*, 17(4), 764–783. <https://doi.org/10.3758/s13415-017-0511-2>
- Toyama, A., Katahira, K., & Ohira, H. (2019). Biases in estimating the balance between model-free and model-based learning systems due to model misspecification. *Journal of Mathematical Psychology*, 91, 88–102. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2019.03.007>
- 豊田秀樹 (2012). 項目反応理論[入門編] 第2版 朝倉書店
- 豊田秀樹 (2015). 基礎からのベイズ統計: ハミルトニアンモンテカルロ法による実践的入門 朝倉書店
- 豊田秀樹 (編) (2017). 実践ベイズモデリング—解析技法と認知モデル— 朝倉書店
- Triantafillou, E., Georgiadou, E., & Economides, A. A. (2008). The design and evaluation of a computerized adaptive test on mobile devices. *Computers and Education*, 50(4), 1319–1330. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2006.12.005>
- Tversky, A., Fox, C. R. (1995). Weighing risk and uncertainty.pdf. In *Psychological review* (Vol. 102, Issue 2, pp. 269-283.).
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297–323. http://psych.fullerton.edu/mbirnbaum/psych466/articles/tversky_kahneman_jru_92.pdf
- van der Linden, W. J. (1998). Bayesian item selection criteria for adaptive testing. *Psychometrika*, 63(2), 201–216. <https://doi.org/10.1007/BF02294775>
- van der Linden, W.J. (2018). Adaptive testing. In: W. J. van der Linden (Ed). *Handbook of item response theory, volume three: application*. (pp.197-228). Boca Raton, FL: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315119144>
- van der Linden, W.J. & Hambleton, R. K. (Eds.) (1997). *Handbook of Modern Item Response Theory*.

- New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2691-6>
- Villarreal, M., Stark, C. E. L., & Lee, M. D. (2022). Adaptive design optimization for a Mnemonic Similarity Task. *Journal of Mathematical Psychology*, *108*.
<https://doi.org/10.1016/j.jmp.2022.102665>
- Wakker, P. P. (2004). On the composition of risk preference and belief. *Psychological Review*, *111*(1), 236–241. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.111.1.236>
- Walsh, J. E. (1947). Concerning the effect of intraclass correlation on certain significance tests. *The Annals of Mathematical Statistics.*, *18*, 88–96. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177730495>
- Wand, M. P. (2007). Fisher information for generalised linear mixed models. *Journal of Multivariate Analysis*, *98*(7), 1412–1416. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2007.01.001>
- Wang, H., Zhang, X., & Zou, G. (2009). Frequentist model averaging estimation: a review. *Journal of Systems Science and Complexity*, *22*(4), 732–748. <https://doi.org/10.1007/s11424-009-9198-y>
- Wasserman, L. (2000). Bayesian Model Selection and Model Averaging. *Journal of Mathematical Psychology*, *44*(1), 92–107.
- 渡辺澄夫 (2012). ベイズ統計の理論と方法. コロナ社
- Watkins, C. J. C. H., & Dayan, P. (1992). Q-Learning. *Machine Learning*, *8*, 279–292.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF00992698>
- Watson, A. B., & Pelli, D. G. (1983). QUEST: A bayesian adaptive psychometric method. *Perception & Psychophysics*, *33*(2), 113–120.
<https://doi.org/https://doi.org/10.3758/BF03202828>
- Weiss, D. J., & Kingsbury, G. G. (1984). Application of Computerized Adaptive Testing to educational problems. *Journal of Educational Measurement*, *21*(4), 361–375.
<https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.1984.tb01040.x>
- Wilson, R. C., & Collins, A. G. E. (2019). Ten simple rules for the computational modeling of behavioral data. *ELife*, *8*, 1–33.
- Yang, J., Pitt, M. A., Ahn, W. Y., & Myung, J. I. (2021). ADopy: a python package for adaptive design optimization. *Behavior Research Methods*, *53*(2), 874–897.
<https://doi.org/10.3758/s13428-020-01386-4>
- Zhang, S., & Lee, M. D. (2010). Optimal experimental design for a class of bandit problems. *Journal of Mathematical Psychology*, *54*(6), 499–508.
<https://doi.org/10.1016/j.jmp.2010.08.002>

博士論文に関わる論文

Fujita, K, Okada, K, & Katahira, K. (2022a). Stimulus selection in a Q-learning model using Fisher information and Monte Carlo simulation. *Computational Brain & Behavior*, accepted. PsyArXiv: <https://doi.org/10.31234/osf.io/3r7f6>.

Fujita, K. & Okada, K. (2022). Adaptive optimal stimulus selection in cognitive models using a model averaging approach. *Behaviormetrika*, accepted. PsyArXiv: <https://doi.org/10.31234/osf.io/snhkp>.

本博士論文における研究 1 は Fujita, Okada, and Katahira (2022a) がベースとなっている。研究 2 は Fujita and Okada (2022) がベースとなっている。