

博士論文

漸近 AdS 時空における自己重力多体系の構成と
その重力熱的不安定性

名古屋大学大学院理学研究科

浅見 拓紀

2023 年 3 月

要旨

重力は我々にとって最も馴染み深い力の一つである。しかしその性質には未解明な部分が多く残されており、基礎方程式の非線形性に伴う複雑な現象に注目した研究が盛んに行われている。

重力系の非線形性を強く反映する例として知られているのが、漸近 Anti-de Sitter (AdS) 時空の重力乱流現象である。漸近 AdS 時空は、超弦理論の分野で近年注目されている時空で、内部の物質が遠方におけるポテンシャル壁により閉じ込められるという特徴を持つ。この閉じ込め機構は重力乱流現象の原因の一つであると同時に、実効的に閉じた重力系を実現することも示唆している。本論文の目的は、この閉じ込め機構を用いて漸近 AdS 自己重力多体系を構成し、漸近平坦な系で用いられる安定性の解析手法を適用することで、重力乱流現象を含む自己重力系特有の現象への示唆を得ることである。

本論文ではまず、空間 d ($d > 2$) 次元 Newton 重力理論を考え、断熱壁に閉じ込められた球対称自己重力多体系を解析した。このとき熱平衡状態は 1 パラメータ系列で与えられ、二次元相空間内の曲線として表現される。系のエントロピーの凸性を調べることで熱的安定性を解析した結果、 $2 < d < 10$ においては平衡解系列の渦状構造に伴う不安定平衡解が現れるが、 $d \geq 10$ では渦状構造が消失することを示した。さらにこの臨界点と相空間における転回点との対応関係を示した。

次にこの手法を漸近 AdS 時空に閉じ込められた自己重力多体系に適用した。ただしここでは断熱壁を仮定していない。初めに熱平衡状態が Maxwell–Jüttner 分布で与えられることを示し、それに対する Einstein 方程式を解くことで漸近 AdS 自己重力多体系の熱平衡状態を構成した。さらに Newton 重力理論と同様の手法を用いて安定性解析を行なった。その結果、熱平衡状態は Newton 重力理論の不安定性に対応する渦構造に加え、相対論的な系に特有の渦状構造を持ち、各々に対応する二種類の不安定性を持つことを示した。特に相対論に特有の不安定性は重力崩壊に伴う不安定性であると結論づけた。なお、二つの渦状構造がともに $d \geq 10$ で消失することも示した。

最後に $d = 4$ の場合について、特殊な対称性を持つ、角運動量を伴う漸近 AdS 非球対称 Einstein–Vlasov 系の解を構成した。一粒子分布関数として球対称系で Maxwell–Jüttner 分布に帰着する指数関数型の関数系を仮定し、Einstein 方程式を数値的に解くことでエネルギーや角運動量の分布を解析した。以上の解析より、本研究で得た主な結果は以下のとおりである：
1) $d + 1$ 次元における静的球対称な相対論的自己重力多体系は二種類の不安定性を持つことを示した。
2) これらの不安定性の存在が次元に依存し、 $d \geq 10$ では消失することを示した。
3) 有限の角運動量を持つ五次元漸近 AdS 自己重力多体系の解を構成した。

目次

第1章	導入	5
1.1	歴史的経緯と動機	5
1.2	本研究の目標	8
1.3	本論文の構成	8
第I部	非相対論的重力熱的不安定性	9
第2章	多体系の記述と Boltzmann 方程式	11
2.1	分布関数による多体系の記述	11
2.2	Boltzmann 方程式と平衡状態	13
2.3	H 定理と熱平衡状態	16
第3章	重力熱的不安定性	18
3.1	自己重力多体系の熱平衡状態	18
3.2	重力熱的不安定性	25
3.3	安定性の臨界次元と転回点法	30
	第 I 部 まとめ	34
第II部	相対論的自己重力多体系の熱平衡状態	35
第4章	一般相対性理論と漸近 AdS 時空	37
4.1	一般相対性理論の基礎事項	37
4.2	測地線方程式と粒子の軌道	45
4.3	大域的な時空構造	51
4.4	AdS 時空における重力乱流現象	56
第5章	相対論的自己重力多体系	64
5.1	基本事項と物理量の定義	64
5.2	静的球対称 Einstein–Vlasov 系	66
第6章	相対論的重力熱的不安定性	76
6.1	相対論的熱平衡状態の記述	76

6.2	重力場の方程式と解の性質	77
6.3	重力熱的不安定性	81
第 II 部 まとめ		90
第 III 部 非球対称 Einstein–Vlasov 系		91
第 7 章	$R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空	93
7.1	三次元球面の対称性	93
7.2	$R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空の構成と測地線	95
7.3	等角運動量 Myers–Perry 時空	96
第 8 章	漸近 AdS 等角運動量 Einstein–Vlasov 系	101
8.1	Einstein–Vlasov 系の運動量空間積分	101
8.2	回転を伴う Einstein–Vlasov 系	102
8.3	Einstein 方程式	106
8.4	数値計算による解の配位	109
第 III 部 まとめ		114
第 9 章	結論と今後の展望	115
9.1	結論及び本研究に関する考察	115
9.2	今後の展望	116
付録 A	一般次元の Newton 極限	120
付録 B	小さな熱平衡状態の安定性	121
付録 C	転回点法による安定性解析	122
C.1	転回点法	122
C.2	簡単な具体例	124
付録 D	無質量スカラー場の伝搬	125
付録 E	等式の証明	126
E.1	式 (5.59) の証明	126

第 1 章 導入

1.1 歴史的経緯と動機

1.1.1 一般相対性理論と漸近 AdS 時空

一般相対性理論とは時空の歪みと物質のエネルギーとを紐づける重力理論であり、等価原理と一般共変性原理に基づいて Einstein により提案された。近年、重力波の初観測 [1, 2] やブラックホールシャドウの撮像 [3] などの観測的な成果により、より広範で詳細な重力理論の検証が進んでおり、そのどれもが一般相対性理論の正しさを後押しする結果となっている。

一方、理論の持つ複雑な構造により未だ未解明な部分も多く残されているのが現状である。その大きな原因の一つが基礎方程式である Einstein 方程式の非線形性であり、これを強く反映する現象として知られているのが Anti-de Sitter (AdS) 時空の重力乱流不安定性である。AdS 時空とは近年 AdS/CFT 対応 [4–6] などの観点から注目されている負の宇宙項を持つ Einstein 方程式の真空解のうち極大対称なものであり、負の宇宙項に由来する特殊な漸近構造を持つ。それは無限遠が時間的超曲面となっているために内部の場が閉じ込められることである。すると、時空に摂動を与えたとき場が閉じ込められることで、非線形な干渉を通して乱流が生じる。これが AdS 時空の重力乱流不安定性のメカニズムである。AdS 時空のこの不安定性は、文献 [7] で Einstein 方程式を数値的に解くことで初めて報告され、[8, 9] などで摂動論的な理解がなされている。また他にも同様の性質を持つ系として平坦時空中の有限領域にスカラー場を閉じ込めた場合 [10, 11] や、有限領域中での非線形 Schrödinger 方程式を考えた場合 [12] においても同様の不安定性が確認されている。これらの共通点から、AdS 時空の重力乱流不安定性は AdS 時空の閉じ込め機構と Einstein 方程式の非線形性が主な原因であると考えられている。

このように AdS 時空は一般には不安定なため、時空中の摂動が成長した結果、最終的にどのような時空が実現されるかが問題となっている。初めて不安定性を報告した [7] では、具体的な摂動として球対称な無質量スカラー場を初期摂動として与えた結果、球対称なブラックホール時空である Schwarzschild–AdS 時空が実現されることを示した。ところが実は、一般の場合には最終的にどのような状態に落ち着くかは、いまだに完全には理解されていない。なぜならば多くの研究 [13–29] で指摘されているように、その最終状態は時空の対称性や時空次元、初期条件の与え方など様々な要因によって異なる結果を与えるためである。実際、最も単純な球対称系でさえ、[30, 31] のように崩壊を起こさずブラックホールが形成されない場合があることが知られている。また例えば、時空が角運動量を持つ場合、回転するブラックホー

ル解である Kerr-AdS 解が最終状態の候補としてまず考えられる。ところが Kerr-AdS 解は、角運動量が多い場合に増幅反射不安定性と呼ばれる別の不安定性を持つことが指摘されて [32–37] おり、一般に不安定である。このような観点から漸近 AdS 時空の最終状態はいまだに多くの不明な点が残されている。

しかしながら、一般の漸近 AdS 時空の最終状態を調べるために直接 Einstein 方程式を解くなどしてその動的な解を得ることは極めて困難である。なぜならば、重力乱流現象によりエネルギーカスケードが起きた時空と物質場は短波長高周波数モードに支配されており、数値的な解析が難しくなるためである。そこで我々は、重力乱流現象により生じた複雑な物質の配位を巨視的に扱うことでモデル化する方法を提案する。より具体的には、エネルギーカスケードにより高エネルギーとなった場が小さなスケールの曲率の影響を受けず粒子的な振る舞いをするとみなすことで、系が多体系のように振る舞うことを仮定する。自己重力多体系はその系を記述する分布関数の振る舞いによって統計物理学的に記述される系であり、この統計的安定性を議論することで漸近 AdS 時空の最終状態に対する示唆を得ることを目指す。

1.1.2 自己重力多体系の統計力学

本研究でモデルとして導入する自己重力多体系は、Newton 重力の範疇では重力熱的不安定性と呼ばれる熱的不安定性を持つことが古くから知られている。Antonov によって初めて示されたこの不安定性 [38] は重力の持つ負の比熱に由来しており、重力熱的カタストロフィ (gravothermal catastrophe) とも呼ばれる。より具体的な Antonov の主張は、開いた系においてはエントロピーが最大となるような熱平衡状態は存在せず、従って系のエントロピーは (相対論のブラックホールなどを考えなければ) 際限なく増加するというものである。特に、断熱壁により閉じ込めた自己重力系を考えると、その解は中心と端点の質量密度の比で指定され、その値が 709 を超えると安定な熱平衡状態は存在しない。この結果は Lynden–Bell [39] によって一般化され、Poincaré の安定性解析 [40–44] を用いて確かに系のエントロピーの二次変分が正定値でなくなる点と質量密度比が 709 を超える点とが一致することが確かめられた。これは断熱壁の半径がエネルギーや全粒子数によって決まるある値より大きい場合、系は粒子系を閉じ込めておくことができずに不安定化すると言い換えることもできる。また断熱壁に閉じ込められただけでなく、他の過程における同様の不安定性についても [39, 45–47] など議論されており、どのアンサンブルを採用するかによって安定性の基準が異なることも知られている。このアンサンブルの非等価性と呼ばれる現象も自己重力多体系の統計力学が注目される理由の一つである。

重力熱的不安定性は球状星団の崩壊現象 [48] などの研究とともに発展し、関連分野も含め極めて幅広く豊富な研究が存在する [49–52]。相対論的な系については、有限質量粒子については [53–58]、無質量粒子については [59–62] など類似の計算がなされている。相対論的な系で特徴的な点は、断熱壁の半径が大きいときだけでなく小さなときにも不安定性が生じていることである。半径が十分小さいときには多体系が断熱壁によって強く閉じ込められることで重力崩壊を起こすために不安定になると考えられている。また文献 [61, 62] は

Hawking–Page 相転移に動機づけられており、漸近 AdS 時空において断熱壁に閉じ込められた系の安定性について議論している。

このように自己重力多体系の重力熱的不安定性については幅広い研究がなされている一方で、漸近 AdS 時空の閉じ込め機構に注目した系の安定性解析はなく、断熱壁やエネルギーのカットオフなどの方法で人工的に閉じ込められた系のみを扱っている場合がほとんどである。これは実際に宇宙などに存在する系では様々な要因により実効的に閉じ込められた系で議論することが可能なためであるが、我々は上述した動機から、そのような系ではなく負の宇宙項に由来する AdS 障壁にて閉じ込められた系を考える必要がある。さらに AdS 障壁の大きさを特徴付ける AdS 半径を系の大きさとみなすことで、自動的に閉じ込められた系の安定性解析を重力熱的安定性の観点から解析することも目的とする。

1.1.3 Einstein–Vlasov 系と時空の対称性

上述した相対論的自己重力多体系のうち、粒子間の衝突がないものを Einstein–Vlasov 系と呼ぶ。我々の想定する漸近 AdS 時空の最終状態の巨視的モデルである自己重力多体系は、時空の平均的な曲率のみを感じるという意味で理想的には無衝突粒子系にあることが期待できる。そこで上で述べたような熱的安定性解析だけでなく、Einstein–Vlasov 系の解とその性質について解析を行うことも重要である。

無衝突粒子系は元々、プラズマの振る舞いを記述する目的で Vlasov により提唱された系である [63]。自己重力系以外のものを含めてこれを Vlasov 系と呼び、Newton 重力に支配される場合は Poisson–Vlasov 系、一般相対論的な場合は Einstein–Vlasov 系などと区別する。これらは対称性が高い場合に解が構築されており、Vlasov–Poisson 系では [64] などで、Einstein–Vlasov 系では [65, 66] で具体的な構成方法が与えられ、その解の存在性についても [67–69] などで議論されている。またその動的な安定性についても [29, 70–74] などでも詳細に議論されている。これらに関してはレビュー論文 [75] にもまとめられている。

一方で回転を伴う Einstein–Vlasov 系について解析している先行研究は数少なく [76–80]、いまだ不明な点も多い。そこで我々は技術的な困難を解決して回転を伴う Einstein–Vlasov 系を解析するため、五次元時空に注目し、有限の角運動量を持ちながらも高い対称性を持つ解を構成することを考えた。五次元時空には二つの独立な回転軸が存在し、それぞれに対応した二つの角運動量が存在する。この二つの角運動量の値を等しくすることで時空の対称性が高くなるのがブラックホール時空についてはよく知られている [81–85]。このような高い対称性により、重力摂動の解析や先述した増幅反射不安定性などの回転する時空に特有の現象を解析する際によく用いられる。我々はこの高い対称性を利用することで回転を伴う Einstein–Vlasov 系の解を構成することを目指す。

1.2 本研究の目標

本研究の最終目標はすでに述べたとおり, 漸近 AdS 時空における物質場の巨視的モデルとしての自己重力多体系の妥当性を議論することである. その初期段階として, 本論文では以下のような目標を設定する:

1. 漸近 AdS 時空における熱平衡状態の構成.
2. 熱平衡状態の熱的な安定性解析.
3. 回転を伴う Einstein–Vlasov 系の解の構成.

1.3 本論文の構成

本論文は三部構成になっている. まず第 I 部では準備として, Newton 重力で記述される自己重力多体系の取り扱い方と Newton 的な重力熱的不安定性の概略を見る. その過程で一般的な多体系の取り扱い方を見るとともに, 自己重力系の基本的な性質と以降で用いる安定性解析の基本を概観する. 次に第 II 部で相対論的な自己重力多体系を扱う. 一般相対論の導入から始め, 漸近 AdS 時空の構造と重力乱流不安定性の簡単なレビューを行なった後, 漸近 AdS 時空における自己重力多体系の熱平衡状態を構成する. さらにその後, Poincaré の安定性解析を用いてその熱的安定性について議論する. 最後に第 III 部で回転を伴う Einstein–Vlasov 系の解を構成する. まずはその前提となる時空の対称性などの概念を紹介し, その後実際に数値解を構成してその性質について考察する.

なお, 可能な限り各部ごと独立に読むことができるように, 各部の初めにはその部の簡単な概略を記載し, また終わりにはまとめを記載した. さらにその後全体に結論などを記載した.

第 I 部 非相對論的重力熱的不安 定性

第 I 部 概略

第 I 部では、相対論的な自己重力多体系の安定性を議論するための準備として Newton 重力における自己重力多体系の重力熱的安定性について議論する。

第 I 部の構成は以下の通りである。まず第 2 章で多体系の統計的な取り扱いについて、文献 [86–90] を参考に簡単に紹介する。一般に多体系は極めて大きな自由度を持つので、その統計的な性質を表す量として多粒子分布関数が用いられる。第 2 章では系を粗視化することで Boltzmann 方程式を求め、さらに粗視化による効果として現れる H 定理を紹介する。

次に第 3 章で自己重力多体系の安定性解析を行う。ただし後のために一般次元空間における系を取り扱う。基本的には文献 [91] の流れに沿い、まず熱平衡状態が満たす方程式を導出した後に安定性解析を行うことで [38, 39] の結果について考察する。それに加え、最後に安定性が空間次元によってどのように変化するかを確認した上で、第 II 部で安定性解析に用いる転回点法についても簡単に述べる。

第 2 章 多体系の記述と Boltzmann 方程式

本章では、空間 d 次元における Newton 力学の枠組みにおいて、互いに重力を及ぼし合う N 個の粒子からなる自己重力多体系を統計物理学的にどのように扱うのかについて、文献 [86–90] を参考に簡単にまとめる。多体系の時間発展は、その粒子の存在確率として定義される N 粒子分布関数によって記述される。ここでは N 粒子分布関数を粗視化することで一粒子分布関数の時間発展方程式を導出し、さらに適当な仮定を課すことでエントロピー増大則が導かれることについて述べる。エントロピー増大則により熱平衡状態を定義し、次章以降で自己重力多体系の熱平衡状態を構成することの動機づけを行う。

2.1 分布関数による多体系の記述

2.1.1 Liouville 方程式

次のような N 粒子 Hamiltonian で記述される多体系を考える：

$$H_N = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{q}_i) \right) + \sum_{i < j \leq N} U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j). \quad (2.1)$$

ここで、 $V(\mathbf{q}_i)$ は全ての粒子に等しく働く外場¹⁾で、 $U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$ は i 番目の粒子と j 番目の粒子の間に働く二体間相互作用である。 N 粒子 Hamiltonian (2.1) を用いて、各粒子の運動方程式 (Hamilton 方程式) は以下のように表せる：

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = \frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{q}_i}. \quad (2.2)$$

このとき、相空間における粒子の存在確率として N 粒子分布関数 $f_N(t; \mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ が定義できる。ただし $f_N(t; \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N)$ は以下のように規格化されているものとする：

$$\int \prod_{i=1}^N d^d q_i d^d p_i f_N(t; \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N) = 1. \quad (2.3)$$

相空間における確率保存は、密度 f_N 、速度場 $(\dot{\mathbf{q}}_i f_N, \dot{\mathbf{p}}_i f_N)$ とした連続の式として表せる：

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot (\dot{\mathbf{q}}_i f_N) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot (\dot{\mathbf{p}}_i f_N) \right] = 0. \quad (2.4)$$

1) 本論では基本的に、粒子系を閉じ込める“箱”の役割を担わせる。

Hamilton 方程式 (2.2) を用いることで, Liouville 方程式

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{q}_i} \right] = 0 \quad (2.5)$$

が得られる. Liouville 方程式 (2.5) は, 全微分を用いて

$$\frac{df_N}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

とも表すことができ, 相空間上で N 粒子分布関数が保存することが直ちにわかる. すなわち, 時間発展によって相空間上での粒子の存在確率は不変である (Liouville の定理). ここで Poisson 括弧:

$$\{A, B\}_P := \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial H_N}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{q}_i} \right] \quad (2.7)$$

を導入すると, Liouville 方程式 (2.5) は次のようにも書き直せる:

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = \{H_N, f_N\}_P. \quad (2.8)$$

2.1.2 BBGKY 階層方程式

通常, 粒子数 N は極めて大きい²⁾. N 粒子分布関数は $d \times N$ 次元関数なので, そのままでは自由度が極めて大きくなり, Liouville 方程式を直接解くのは困難である. そこで $i = n + 1$ 番目の粒子から $i = N$ 番目の粒子を積分した n 粒子分布関数 $f_n(t; \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n)$ を定義する:

$$f_n(t; \mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) := \frac{N!}{(N-n)!} \int \prod_{i=n+1}^N d^d q_i d^d p_i f_N(t; \mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i). \quad (2.9)$$

このとき, n 粒子分布関数の時間発展は Liouville 方程式より

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{N!}{(N-n)!} \int \prod_{i=n+1}^N d^d q_i d^d p_i \{H_N, f_N\}_P \quad (2.10)$$

で与えられる. n 粒子 Hamiltonian を

$$H_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{q}_i) \right) + \sum_{i < j \leq n} U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \quad (2.11)$$

で定義すると,

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \{H_n, f_n\}_P + \frac{N!}{(N-n)!} \int \prod_{i=n+1}^N d^d q_i d^d p_i \{H_N - H_n, f_N\}_P \quad (2.12)$$

2) 例えば, 身の回りの物体であれば Avogadro 数程度: $N \sim \mathcal{O}(10^{23})$. 自己重力系をよく用いる銀河では $N \sim \mathcal{O}(10^{11})$ 程度, 球状星団では $N \sim \mathcal{O}(10^6)$ とされている. 実はこの粒子数の差が緩和時間などに関連しており, それぞれがどのような構造をなすかと関係している.

となるが,

$$H_N - H_n = H_{\text{out}} + \sum_{i \leq n < j} U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j),$$

$$H_{\text{out}} := \sum_{i=n+1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{q}_i) \right) + \sum_{i,j=n+1}^N U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \quad (2.13)$$

と書けるので, 結局

$$\{H_N - H_n, f_N\}_P = \{H_{\text{out}}, f_N\}_P + \sum_{j=1}^N \sum_{k \leq n < l} \frac{\partial U(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_l)}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_j} \quad (2.14)$$

となる. 領域の境界で $f_N = 0$ とすれば, 部分積分により式 (2.12) 第二項の中の H_{out} に関する項は消える. 残りの寄与についても j に関する和の内 $j \geq n+1$ の項は部分積分で 0 にでき, l に関する和に関しては系が同種粒子であることから因子 $N-n$ が出てくるので,

$$\frac{N!}{(N-n)!} \int \prod_{i=n+1}^N d^d q_i d^d p_i \sum_{j=1}^N \sum_{k \leq n < l} \frac{\partial U(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_l)}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_j}$$

$$= \sum_{j=1}^n \int d^d q_{n+1} d^d p_{n+1} \frac{\partial U(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{n+1})}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{p}_j} \quad (2.15)$$

となり, 次式を得る:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \{H_n, f_n\}_P + \sum_{i=1}^n \int d^d q_{n+1} d^d p_{n+1} \frac{\partial U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{n+1})}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{p}_i}. \quad (2.16)$$

式 (2.16) は, n 粒子分布関数の時間発展が $(n+1)$ 粒子分布関数を含む積分によって決定される方程式となっている. このような階層構造に由来し, 式 (2.16) は BBGKY 階層方程式³⁾と呼ばれる. 階層構造の平均場近似の仕組みを理解するために, 表 2.1 に和の取り方を図示した. 表 2.1 から分かる通り, $1 \leq i \leq n$ 番目の粒子と $n+1 \leq i \leq N$ 番目の粒子のグループに分け, 各グループ内での相互作用とグループを跨ぐ相互作用に分離したわけである. このとき, $n+1 \leq i \leq N$ に属する粒子間の相互作用は n 粒子分布関数の時間発展に寄与を与えない.

2.2 Boltzmann 方程式と平衡状態

式 (2.16) で $n = 1$ とすることで一粒子分布関数の時間発展方程式が得られる:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \{H_1, f_1\}_P + \int d^d q_2 d^d p_2 \frac{\partial U(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_1}. \quad (2.17)$$

前節でも述べた通り, n 粒子分布関数の時間発展は $n+1$ 粒子分布関数によって決定されるため, 一般には上式から一粒子分布関数を求めることはできない. そこでまず, 二粒子分布関

3) Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon の頭文字をとったものである.

$i \backslash j$	1	...	n	$n+1$...	N
1						
⋮						
n						
$n+1$						
⋮						
N						

表 2.1 粒子のラベルと平均化操作の概要. $n+1$ 番目から N 番目の粒子に関して平均化を行うので, まず $n+1$ 番目から N 番目の粒子同士の相互作用は n 粒子分布関数の時間発展に影響しない. 一方 1 番目から n 番目の粒子に関しては平均化の操作を受けず, そのまま相互作用項として寄与する. 重要なのはこれらを跨ぐ相互作用で, $n+1$ 番目から N 番目の粒子と 1 番目から n 番目の粒子の間の相互作用は外部からの平均的な相互作用として時間発展に寄与する.

数を

$$f_2(t; \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = f_1(t; \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) f_1(t; \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) + \bar{f}_2(t; \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) \quad (2.18)$$

と表すと, (2.17) は

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \{H_1, f_1\}_P - \int d^d q_2 d^d p_2 \frac{\partial U(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} f_1(t; \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = C_2[\bar{f}_2] \quad (2.19)$$

となる. ただし, $C_2[\bar{f}_2]$ は以下で定義される衝突項:

$$C_2[\bar{f}_2] := \int d^d q_2 d^d p_2 \frac{\partial U(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_1} \cdot \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial \mathbf{p}_1} \quad (2.20)$$

である. 式 (2.19) の左辺は, 一つの粒子が受ける力は外力と他の粒子から受ける相互作用を平均化したものの合力であることを示している. そこで, 一粒子が平均的に受ける力 \mathbf{F}_1 を

$$\mathbf{F}_1 := -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_1} - \int d^d q_2 d^d p_2 \frac{\partial U(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_1} f_1(t; \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) \quad (2.21)$$

で定義すれば, 一粒子分布関数の時間発展方程式:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}_1} + \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = C_2[\bar{f}_2] \quad (2.22)$$

が得られる. ところが, (2.22) のままではやはり, 衝突項が二粒子分布関数に依存するので一粒子分布関数を求めることはできない. そこで用いられるのが $N \rightarrow \infty$ の極限をとることで粒子の衝突を無視する近似である. 粒子数が十分大きいとき, $1/N$ の次数で展開すると

$$f_2(t; \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = f_1(t; \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) f_1(t; \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) + \mathcal{O}(1/N) \quad (2.23)$$

が示せる [88–90]. つまり $N \rightarrow \infty$ の極限では \bar{f}_2 の項が無視できるので, 式 (2.22) は, 衝突の寄与を無視した Vlasov 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (2.24)$$

に帰着する. ただし記法の簡略化のため添字 1 は省略した.

ここで多体系における力学平衡の概念を導入しておく. Vlasov 方程式は全微分を用いて $df/dt = 0$ と書くこともできるので, 粒子数が無限の極限においては一粒子分布関数が保存するといえる. このとき, 分布関数が定常的な場合, つまり $\partial f/\partial t = 0$ を満たす分布関数によって記述される状態を力学平衡と呼ぶ. 一般には分布関数を決定するのは困難であるが, 力学平衡の場合には分布関数の関数系を決定する強力な定理がある. これは Jeans の定理 [92] と呼ばれており, その主張は「任意の Vlasov 方程式の定常解は運動の積分を通してのみ相空間の変数に依存し, 逆に運動の積分で与えられる分布関数は定常解を与える」というものである. ここで運動の積分とは, 相空間上の関数で $I(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ であり $dI/dt = 0$ を満たすものである. 例えば系が球対称な場合には, 粒子のエネルギーと角運動量の各成分が運動の積分となる. 以

上より、粒子数が無限の極限においては多体系は力学平衡に落ち着いていくことが期待されるわけであるが、実際には粒子数が有限であることにより効果により一粒子分布関数は時間発展する。その発展の仕方を記述するのが粒子の衝突を考慮した Boltzmann 方程式ということになる。

いま衝突項は、 $1/N$ の次数に応じた有限粒子数による補正項とみなせる。補正として $O(1/N)$ までの寄与を考慮すると、分布関数の時間発展方程式 (Boltzmann 方程式) は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = C[f] \quad (2.25)$$

と表される。ただし衝突項は一粒子分布関数の汎関数で、次の形をとるものとする:

$$C[f] = \int d^d q d^d p_1 d^d p_2 d^d p'_1 d^d p'_2 \mathcal{M}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) [f(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_1) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_2) - f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_2)]. \quad (2.26)$$

ただし $\mathcal{M}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ は二粒子が同じ位置 \mathbf{r} で衝突し、その運動量は $\mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}'_1$ および $\mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}'_2$ のように変更を受けるものとしたときの衝突断面積で

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathcal{M}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \quad (2.27)$$

を満たすものとする⁴⁾。この過程は二体緩和と呼ばれ、多体系の時間発展の原因である。

2.3 H 定理と熱平衡状態

式 (2.26) で衝突項を与えたとき、以下で定義される H 関数⁵⁾が時間発展に対して必ず減少することを示すことができる:

$$H(t) := \int d^d q d^d p f(t; \mathbf{q}, \mathbf{p}) [\ln f(t; \mathbf{q}, \mathbf{p}) - 1]. \quad (2.28)$$

するとエントロピーを $S = -H$ とすることで (粗視化された) エントロピーの増大則を導くことができ、エントロピーが極値となる状態として熱平衡状態を定義することができるようになる。そこでここでは H 定理の証明の概略を見る。

まず H 関数の時間微分は

$$\frac{dH}{dt} = \int d^d q d^d p \frac{\partial f}{\partial t} \ln f \quad (2.29)$$

となる。ここに Boltzmann 方程式を適用すれば

$$\frac{dH}{dt} = \int d^d q d^d p \ln f \left(C[f] - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \quad (2.30)$$

4) 正確にこの近似を行うには、粒子の平均自由行程や緩和時間を比較する必要があるが、ここでは割愛する。詳細は [88–90] などを参照。

5) Hamiltonian とは異なることに注意。

となるが, 定義より $\mathbf{F} = -\nabla V$ の形で表すことができるので第一項及び第二項の寄与は表面積分となって消える. 従って結局,

$$\frac{dH}{dt} = \int d^d q d^d p \ln f C[f] \quad (2.31)$$

を得る. ここで表式 (2.26) を適用すれば,

$$\frac{dH}{dt} = \int d^d q d^d p_1 d^d p_2 d^d p'_1 d^d p'_2 \mathcal{M}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) [f(\mathbf{p}'_1) f(\mathbf{p}'_2) - f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2)] \ln f(\mathbf{p}_1) \quad (2.32)$$

と表せることがわかる. ただし記法の簡略化のため, 分布関数の引数 t, \mathbf{q}_i については省略した. 粒子のラベルを取り替えた式と辺々を足し, さらに式 (2.27) を適用すれば

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4} \int d^d q d^d p_1 d^d p_2 d^d p'_1 d^d p'_2 \mathcal{M}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) (A - 1) \ln A \quad (2.33)$$

ここで

$$A := \frac{f(\mathbf{p}'_1) f(\mathbf{p}'_2)}{f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2)} \quad (2.34)$$

とした. 関数 $(A - 1) \ln A$ は任意の $A > 0$ に対して $(A - 1) \ln A \geq 0$ であり, 等号が成立するのは $A = 1$ の場合のみである. 以上より H 定理

$$\frac{dH}{dt} \geq 0 \quad (2.35)$$

が示された.

以上の導出では H 関数として式 (2.28) を仮定して H 定理を導出した. 式 (2.28) から定義されるエントロピーは Boltzmann–Gibbs エントロピーと呼ばれる⁶⁾. 本論文では基本的に, エントロピーといえば Boltzmann–Gibbs エントロピーを指すものとする. H 定理からエントロピーは時間発展によって減少しないため, エントロピーが極値をとる状態を熱平衡状態として定義できる. ところが変化しない, つまり極値であるという条件だけを課して状態を指定すると, 二階微分を指定することができないために極大でない分布が選ばれてしまうことがある. 次章では Newton 重力系において実際にそのような現象が起きることを見る.

6) 一般には, 異なる関数系のエントロピーでも増大則を示すことができることが知られており, 例えば Tsallis エントロピーなどが有名である.

第 3 章 重力熱的不安定性

文献 [91] に沿って自己重力多体系の熱平衡状態について議論する。ただしここでは空間次元を $d > 2$ へと一般化したものを取り扱い、重力熱的不安定性の次元依存性についても議論する。本章は以下のように進める。まず、3.1 節で孤立系における自己重力多体系の熱平衡状態を定義し、その分布関数が満たすべき条件を導出する。さらに熱平衡条件を満たす Poisson 方程式を求める。次に、3.2 節で系の持つエントロピーの凸性を調べることで系がある条件においてのみ安定たり得ることを示す。このとき安定性が切り替わる点（臨界点）を直接計算によって示したのち、転回点法（後述）との対応関係を議論する。最後に 3.3 節において、常微分方程式の固定点の観点から臨界点の存在性が空間次元によってどう変化するかを見る。また、第 II 部で用いる転回点法の概観を見る。

3.1 自己重力多体系の熱平衡状態

3.1.1 状況設定

球殻状の断熱壁に囲まれた同種粒子¹⁾の自己重力多体系を考える。すなわち、外場 $V(\mathbf{q}_i)$ を

$$V(\mathbf{q}_i) = \begin{cases} \infty & \text{if } |\mathbf{q}_i| \geq R, \\ 0 & \text{if } |\mathbf{q}_i| < R \end{cases} \quad (3.1)$$

とし、粒子間相互作用 $U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$ を

$$U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) = -\frac{G_N m^2}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{d-2}} \quad (3.2)$$

とする。ここで m は各粒子の質量であり、以下では $m = 1$ とする²⁾。また G_N は重力定数である。一粒子分布関数を $f(t; \mathbf{q}, \mathbf{p})$ と書くことにすると、一般には相互作用も時間依存し、従って相互作用の因果率を考慮する必要がある。すなわち重力場の波動方程式から Green 関数を求める³⁾必要があるわけだが、ここでは時間的に定常な多体系 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ に話を限ることにする。すると重力場も定常的になり、位置 \mathbf{q} における平均化された重力場は

$$\phi(\mathbf{q}) = -G_N \int d^d q' d^d p' \frac{f(\mathbf{q}', \mathbf{p}')}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{d-2}} \quad (3.3)$$

1) ここでは単に同じ質量を持つ粒子系とする。電荷などといった他のチャージを持つ場合などはここでは考えない。

2) Newton 重力の枠組みでは、基本的には有質量粒子のみを扱うので $m = 1$ としても一般性を失わない。相対論的な系では無質量粒子を扱う場合も考えられるので注意が必要である。

3) 重力波の方程式を弱場近似で考えることになるので、結局相対論の知識が必要になる。

で与えられる. ただし Newton の重力定数 G_N は, $D = d + 1$ 次元時空における Einstein の重力定数 G_{d+1} と以下の関係を満たす:

$$G_N = \frac{8\pi(d-2)}{S_d(d-1)} G_{d+1}. \quad (3.4)$$

ここで S_d は d 次元単位球面の面積で, Gamma 関数 $\Gamma(z)$ を用いて以下のように定義される:

$$S_d = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}. \quad (3.5)$$

式 (3.4) から三次元空間のときのみ両者は等しくなり, 特に $d = 2$ のときには Newton 極限をとることができないことがわかる. この関係式 (3.4) は相対論的な場合における球対称時空の静水圧平衡の式 (TOV 方程式) と Poisson 方程式を比較することで導出できるが, 付録 A で議論する.

定常分布に対する Boltzmann 方程式:

$$\mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \text{Coll}[f] \quad (3.6)$$

を満たす分布関数 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ に対し, Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{q}) = S_d(d-2)G_N \rho(\mathbf{q}), \quad \rho(t; \mathbf{q}) := \int d^d p f(t; \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (3.7)$$

を同時に解くことで自己重力系の解が得られる. 解は以下で定義される巨視的変数

$$\begin{aligned} M[f] &:= \int d^d q d^d p f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int d^d q \rho(\mathbf{q}), \\ K[f] &:= \int d^d q d^d p \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \\ U[f] &:= \frac{1}{2} \int d^d q d^d p f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \phi(\mathbf{q}) = -\frac{G_N}{2} \int d^d q d^d q' \frac{\rho(\mathbf{q})\rho(\mathbf{q}')}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{d-2}}, \\ S[f] &:= - \int d^d q d^d p f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) (\ln f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - 1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

を持つ. ここで $M[f]$, $K[f]$, $U[f]$, $S[f]$ はそれぞれ系の全質量⁴⁾, 運動エネルギー, 束縛エネルギー, Boltzmann–Gibbs エントロピーを表す. 束縛エネルギー以外については系が定常でない場合にも同様に定義できる一方で, 束縛エネルギーは上で述べたように相互作用の伝搬速度を考慮する必要があることに注意しておく. 今, 系は断熱壁に閉じ込められた孤立系であるとしているので, 全質量と全エネルギー $E := K + U$ は保存しなければならない. 従って系は, (M, E, N) によって指定される状態とみなすことができ, 特に系が熱平衡状態にあるときこれらは熱力学変数に対応する.

以下では粒子分布は空間的に球対称であることを仮定する. このとき, 方程式系を通じて重力場も球対称になるので, 動径座標 $r := |\mathbf{q}|$ を導入し, $\rho(r)$ や $\phi(r)$ などと書くことにする.

4) 粒子の質量を $m = 1$ としているので全粒子数と等価である.

3.1.2 分布関数による変分と熱平衡条件

孤立系における熱平衡状態は、「全粒子数と全エネルギーが一定という拘束条件の下エントロピーを極値化する状態」として定義できる。つまり任意の変位 δf に対し、エントロピーの変分 δS が全粒子数と全エネルギーの変分の線型結合として表せることが熱平衡条件である。ただしこのとき分布関数は中心と端点では固定されており、変位を受けないものとする。すなわち、境界条件

$$\delta f(0, \mathbf{p}) = \delta f(R, \mathbf{p}) = 0 \quad (3.9)$$

を満たすような変位に関して物理量、具体的には式 (3.8) がどう変分されるかを求め、その振る舞いを解析する。

初めから相空間での任意の変位に対する変分を計算することで熱平衡分布を導出しても良いが、以降の安定性解析のためにここでは変位を (i) $\delta\rho(r) = 0$ を満たす $\delta f(r, \mathbf{p})$ に対する変分と (ii) それ以外の変分の二種類に分解し、順に考える。このように分解することで、(i) のような変分については系は不安定にならないことがわかるので、質量密度に関する変分問題を考えれば良いことを示す。

(i) $\delta\rho(r) = 0$ を満たす $\delta f(r, \mathbf{p})$ に対する変分

このとき質量密度が変化しないため重力場も不変であり、従って束縛エネルギーに対する変分も $\delta U = 0$ を満たす。一方で全エネルギーはそれ自身定数であるから、 $\delta\rho(r) = 0$ を満たす変位 $\delta f(r, \mathbf{p})$ に対する変分問題は、質量密度 $\rho(r)$ と運動エネルギー K 一定下における変分問題に帰着される。そこで Lagrange の未定乗数として $\alpha(r)$ と β を導入し、分布関数を熱平衡状態 f_{TE} の近傍で展開することで熱平衡状態が満たすべき条件が得られる：

$$\int d^d q d^d p \left(-\ln f_{\text{TE}} - \alpha - \beta \frac{\beta}{2} |\mathbf{p}|^2 \right) \delta f = 0. \quad (3.10)$$

任意の $\delta f(r)$ について成り立つためには

$$f_{\text{TE}}(r, \mathbf{p}) = \exp \left(-\alpha(r) - \frac{\beta}{2} |\mathbf{p}|^2 \right) \quad (3.11)$$

でなければならない。このときには分布関数に関するエントロピーの二次変分が容易に計算でき、

$$\frac{\delta^2 S}{\delta f(r, \mathbf{p}) \delta f(r', \mathbf{p}')} = -\frac{1}{2f_{\text{TE}}(r, \mathbf{p})} \delta(r - r') \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.12)$$

となる。明らかに全ての固有値が負であることから、平衡状態の近傍でエントロピーは極大値を取る。すなわち $\delta\rho(r) = 0$ を満たす $\delta f(r, \mathbf{p})$ に対しては系は熱力学的に安定である。

(ii) (i) で表すことができない変分

質量密度を変化させないような変位に対しては常に安定であることが示されたので、質量密度に対する変分問題を考えれば十分である。そこで、(i) で得た熱平衡条件から巨視的変数を分布関数の代わりに質量密度と未定乗数 β を用いて書き直す。まず、熱平衡条件 (3.11) を運動量に関して Gauss 積分することで

$$f_{\text{TE}}(r, \mathbf{p}) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}|\mathbf{p}|^2} \rho(r) \quad (3.13)$$

を得る。また、運動エネルギーについても分布関数 (3.11) の下で積分を実行すると、運動エネルギーと全質量が以下の関係を満たすことが確かめられる：

$$K[f_{\text{TE}}] = \frac{dM}{2\beta}. \quad (3.14)$$

上式は d 次元空間における理想気体の状態方程式と対応するので、ここで温度 $T := 1/\beta$ を導入する。すると、エントロピーが

$$\begin{aligned} S[f_{\text{TE}}] &= - \int d^d q d^d p f_{\text{TE}} (\ln f_{\text{TE}} - 1), \\ &= - \int d^d q d^d p f_{\text{TE}} \left(-\frac{\beta}{2} |\mathbf{p}|^2 + \frac{d}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi} + \ln \rho - 1 \right), \\ &= \frac{d}{2} (1 + \ln 2\pi) M + \frac{dM}{2} \ln T - \int d^d q \rho (\ln \rho - 1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

と表せることがわかる。

以上に対し、質量密度を ρ_{TE} の近傍で展開して変分問題を考える。ただし、分布関数の変位に対する境界条件 (3.9) より密度変位 $\delta\rho$ として

$$\delta\rho(0) = \delta\rho(R) = 0 \quad (3.16)$$

を満たすものを考える。このとき (i) で運動エネルギーの Lagrange 未定乗数として導入した β は ρ_{TE} の変分の下では定数でないことに注意する。その変分は、以下に示すように温度の変分を通して束縛エネルギーの変分で表すことができる。全エネルギーは一定なので $\delta K + \delta U = 0$ が成立し、また $\delta K = dM/2 \delta T$ より、

$$\delta T = -\frac{2}{dM} \delta U. \quad (3.17)$$

平衡状態の重力場を ϕ_{TE} として束縛エネルギーの変分を変位の二次まで展開すると、

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2} \int d^d q (\rho_{\text{TE}} \delta\phi + \phi_{\text{TE}} \delta\rho + \delta\rho \delta\phi), \\ &= \int d^d q \left(\phi_{\text{TE}} \delta\rho + \frac{1}{2} \delta\rho \delta\phi \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

と計算できる⁵⁾ ので、温度の変分は次のようになる:

$$\delta T = -\frac{2}{dM} \int d^d q \phi_{\text{TE}} \delta \rho - \frac{1}{dM} \int d^d q \delta \rho \delta \phi. \quad (3.19)$$

エントロピーの二次変分を計算すると,

$$\delta S = \frac{d}{2}(1 + \ln 2\pi T) \delta M + \frac{dM}{2} \delta(\ln T) - \int d^d q \left(\ln \rho_{\text{TE}} \delta \rho + \frac{1}{2\rho_{\text{TE}}} \delta \rho^2 \right) \quad (3.20)$$

となるので, 式 (3.19) を使えば

$$\delta S + \bar{\mu} \delta M = \int d^d q (\beta(\mu - \phi_{\text{TE}}) - \ln \rho_{\text{TE}}) \delta \rho + \delta^{(2)} S \quad (3.21)$$

と表せる. ここで $\bar{\mu}$ は全粒子数の Lagrange 未定乗数であり, 式 (3.20) の第一項の寄与を含めて μ を再定義した. また, 二次変分 $\delta^{(2)} S$ を以下で定義した:

$$\delta^{(2)} S := -\frac{1}{2} \int d^d q \left(\beta \delta \rho \delta \phi + \frac{\delta \rho^2}{\rho_{\text{TE}}} \right) - \frac{\beta^2}{dM} \left[\int d^d q \phi_{\text{TE}} \delta \rho \right]^2. \quad (3.22)$$

エントロピーが定常であることから, 熱平衡状態に対する質量密度分布が

$$\rho_{\text{TE}}(r) = e^{-\beta(\phi_{\text{TE}} - \mu)} = \rho_c e^{-\beta(\phi_{\text{TE}}(r) - \phi_{\text{TE}}(0))} \quad (3.23)$$

で表されることが示された. ここで $\rho_c := \rho_{\text{TE}}(0)$ とした. 式 (3.13) に代入することで, 分布関数が

$$f_{\text{TE}}(r, \mathbf{p}) = \exp \left[-\beta \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} + \phi_{\text{TE}} \right) \right] \quad (3.24)$$

となることが確認できる. 表式を見ればわかるように, 理想気体での熱平衡分布関数 (Boltzmann 分布) において粒子のエネルギーを重力場の寄与を含めたものに置き換えたものが自己重力系の熱平衡状態となっている. 以上で質量密度が形式的には求まったが, 重力場に質量密度が含まれており解としては定まっていない. 次節において, 熱平衡状態の質量分布に対する Poisson 方程式を解くことで完全に解を決定する. 以降では記号の簡略化のため, ρ_{TE} と ϕ_{TE} を単に ρ および ϕ と書くことにする.

3.1.3 重力場の方程式と熱平衡状態

熱平衡状態に対する Poisson 方程式 (3.7) は, 球対称性より次のように書ける:

$$\frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{d-1} \frac{d\phi}{dr} \right) = (d-2) S_d G_N \rho_c e^{-\beta(\phi - \phi_c)}. \quad (3.25)$$

ただし $\phi_c := \phi(0)$ である. ここで系の特徴的な長さスケールとして

$$\ell := (S_d G_N \rho_c \beta)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

5) ここで, Poisson 方程式から重力場が質量密度に関して線形であることを暗に仮定していることに注意. 従って相対論的な系では重力の非線形性が寄与するため遥かに複雑になる.

を定義し、変数を次のように無次元化する:

$$x := \frac{r}{\ell}, \quad y(x) := \beta(\phi - \phi_c), \quad z := \frac{R}{\ell}. \quad (3.27)$$

すると Poisson 方程式 (3.25) は以下のように書き直せる:

$$\frac{1}{x^{d-1}} \frac{d}{dx} \left(x^{d-1} \frac{dy}{dx} \right) = (d-2)e^{-y}. \quad (3.28)$$

断熱壁により閉じ込められた熱平衡状態は、中心 $x = 0$ から端点 $x = z$ まで解くことで得られる。ただし中心の境界条件は、関数 $y(x)$ の定義から $y(0) = y'(0) = 0$ で与える。後のために変数

$$n(x) := e^{-y}, \quad m(x) := \int_0^x ds s^{d-1} n(s) \quad (3.29)$$

を定義しておく。このとき、Poisson 方程式からこれらが関係式:

$$m' = nx^{d-1}, \quad n' = -y'n, \quad y' = (d-2) \frac{m(x)}{x^{d-1}} \quad (3.30)$$

を満たすことが示される。

式 (3.28) は適当な定数 a による変換

$$x \rightarrow ax, \quad y \rightarrow y + a^2 \quad (3.31)$$

に対して不変であることが容易に確認できる。この対称性を利用することで、熱平衡状態は二次元平面内の 1 パラメータ曲線として表すことができる。これを見るために、変換 (3.31) の下で不変な変数⁶⁾:

$$u(x) := \frac{n}{m} x^d, \quad v(x) := \frac{m}{x^{d-2}} \quad (3.32)$$

を定義する。式 (3.30) を用いることで、これらが微分方程式

$$\frac{x}{u} \frac{du}{dx} = d - u - (d-2)v, \quad (3.33a)$$

$$\frac{x}{v} \frac{dv}{dx} = u - (d-2) \quad (3.33b)$$

を満たすことが確認できる。これは以下のように一階常微分方程式として表すこともできる:

$$\frac{u}{v} \frac{dv}{du} + \frac{u - (d-2)}{u + (d-2)v - d} = 0. \quad (3.34)$$

方程式 (3.33) を中心 $x = 0$ から数値的に解くことで、熱平衡解を構成することができる。数値解を構成する前に、中心での境界条件と遠方での振る舞いについて調べる。

6) Milne 変数と呼ばれる。

中心近傍の振る舞い

中心近傍で関数 $y(x)$ は次のように展開できる:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{2k} x^{2k}. \quad (3.35)$$

すると, Poisson 方程式 (3.28) は

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k+d-2)y_{2k}x^{2k-2} = (d-2) \exp \left[- \sum_{k=1}^{\infty} y_{2k}x^{2k} \right] \quad (3.36)$$

と表せる. 各次数について解くことで,

$$y_2 = \frac{d-2}{2d}, \quad y_4 = -\frac{(d-2)^2}{8d(d+2)}, \quad \dots \quad (3.37)$$

のように逐次的に係数を決定でき, 変数 (u, v) は

$$u = d - \frac{d-2}{d+2}x^2 + \mathcal{O}(x^4), \quad v = \frac{x^2}{d} + \mathcal{O}(x^4) \quad (3.38)$$

のように展開できる. 従って中心近傍で,

$$(u, v) \Big|_{x=0} = (d, 0), \quad \frac{dv}{du} \Big|_{x=0} = -\frac{(d-2)(d+2)}{d} \quad (3.39)$$

となるので, (u, v) 平面内で解が描く 1 パラメータ曲線は, $(d, 0)$ から傾き $-(d-2)(d+2)/d$ で始まる曲線になる.

遠方の振る舞い

式 (3.28) は, 境界条件を満たす解とは別に, 特異解

$$y_s(x) := \ln \frac{x^2}{2} \quad (3.40)$$

を持つ. 特異解 y_s は境界条件を満たさないが, $y(0) = y'(0) = 0$ を満たす解は無限遠方で特異解に漸近的に近づく. これについては後の安定性解析と次元依存性が大きく寄与するので, 3.3 節で詳細に議論する.

以上より, Poisson 方程式 (3.33) の解は, 中心から遠方まで解くことにより (u, v) 平面内の 1 パラメータ曲線として構成できる. このとき $x = z$ の点が, 断熱壁の半径が z で指定された一つの熱平衡状態に対応する. 従って熱平衡状態は半径 z によって指定される 1 パラメータ系列となる.

安定性解析に移る前に, 変換 (3.31) の物理的意味について触れておく. 変換 (3.31) における $x \rightarrow ax$ は動径座標の再規格化を意味し, これが変換 $y \rightarrow y + a^2$ によって不変であることは全質量の定数倍でその変化を吸収できるということである. 通常熱平衡状態は, 熱力学量 (M, E, R) を変数とする状態の族であるから, そのうち一つ, 例えば全粒子数 (全質量と等価

であることに注意) を規格化に用いたとすれば, 状態は (E, R) の 2-パラメータで指定されることになる. 一方で動径座標の再規格化は全質量の再規格化でいつでも消去できるので, 粒子数で規格化された R に物理的意味はなくなる. 従って, 熱平衡状態は 1 パラメータ系列で表されるということになる.

3.1.4 熱平衡状態の数値解

実際に $d = 3, d = 4, d = 6$ の場合について, 式 (3.33) の数値解を (u, v) 平面上に図示したものが図 3.1 である. ただし図を見やすくするために (u, v) とともに次元 d で規格化している. 図 3.1 より, いずれの次元の場合でも, 曲線は $(1, 0)$ から始まり直線 $u + v = d$ 上のある点に

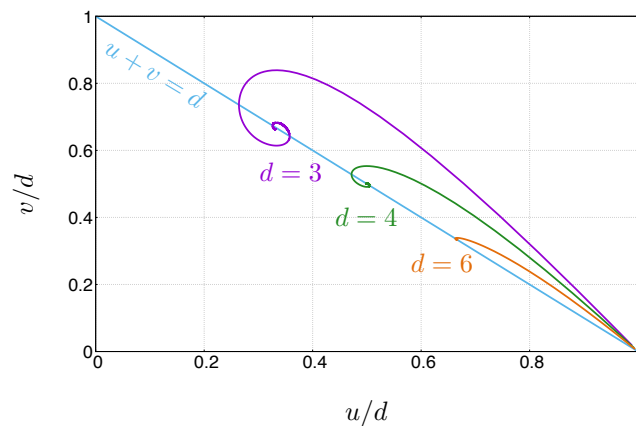


図 3.1 $d = 3, d = 4, d = 6$ での熱平衡解が描く曲線. 縦軸, 横軸共に空間次元 d で規格化しているため, 中心, つまり曲線の始点は次元によらず $(1, 0)$ となっている. また各曲線が特異解に無限に近づくことも見てとれ, 任意の次元で直線 $u + v = d$ 上に特異解に対応する点に収束する.

収束していくことが分かる. この収束する点は各次元での特異解に対応しており, パラメータ z が大きくなるにつれて確かに解は特異解に近づくことを示唆している. このとき特徴的なこととして, 曲線が特異解の近傍で渦状の構造を持つことが確認できる. 実はこの渦構造は次元に依存しており, また今注目している系の安定性と大きく関係している. 3.2 節において安定性解析を, 3.3 節においてその次元依存性を詳細に議論する.

3.2 重力熱的不安定性

3.2.1 エントロピーの二次変分

熱平衡状態の安定性を, 式 (3.22) に対する固有値問題を考えることで調べる. 便宜上の理由で, 密度変位の代わりに質量変位 $q(r)$ を

$$q(r) := S_d \int_0^r ds s^{d-1} \delta\rho \quad \Leftrightarrow \quad \delta\rho = \frac{1}{S_d r^{d-1}} \frac{dq}{dr} \quad (3.41)$$

で定義する⁷⁾. ただし $q(r)$ は境界条件

$$q(0) = q(R) = 0 \quad (3.42)$$

を満たすものとする. すると, エントロピーの二次変分は次のような二次形式で書き表せる:

$$\delta^{(2)}S = - \int dr_1 \int dr_2 q(r_1) K(r_1, r_2) q(r_2). \quad (3.43)$$

ただしその核を

$$K(r_1, r_2) := \frac{\beta^2}{dM} \frac{d\phi(r_1)}{dr_1} \frac{d\phi(r_2)}{dr_2} - \frac{1}{2} \delta(r_1 - r_2) \left[\frac{(d-2)G_N\beta}{r_2^{d-1}} + \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{S_d r_2^{d-1} \rho} \frac{d}{dr_2} \right) \right] \quad (3.44)$$

で定義した. この表式を得るために, 無次元化する前の Poisson 方程式 (3.25) を一回積分すると,

$$\frac{d\phi}{dr} = (d-2)G_N \frac{M(r)}{r^{d-1}}, \quad M(r) := \int_0^r ds s^{d-1} \rho(s) \quad (3.45)$$

が導ける. これより質量変位と重力場の変位の間関係

$$q(r) = \frac{r^{d-1}}{(d-2)G_N} \frac{d}{dr} \delta\phi \quad (3.46)$$

を得る. これらを用いてエントロピーの二次変分を書き換えることで,

$$\begin{aligned} -\delta^{(2)}S &= \frac{\beta^2}{dM} \left[\int d^d q \phi \delta\rho \right]^2 + \frac{1}{2} \int d^d q \left(\beta \delta\rho + \frac{\delta\rho^2}{\rho} \right), \\ &= \frac{\beta^2}{dM} \left[\int dr \phi \frac{dq}{dr} \right]^2 + \frac{1}{2} \int dr \left[\beta \delta\phi \frac{dq}{dr} + \frac{1}{S_d r^{d-1} \rho} \left(\frac{dq}{dr} \right)^2 \right], \\ &= \frac{\beta^2}{dM} \left[\int dr q \frac{d\phi}{dr} \right]^2 - \frac{1}{2} \int dr \left[(d-2)G_N \beta \frac{q^2}{r^{d-1}} + q \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{S_d r^{d-1} \rho} \frac{d}{dr} \right) q \right], \\ &= \int dr_1 \int dr_2 q(r_1) K(r_1, r_2) q(r_2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

となり, 確かにエントロピーの二次変分が式 (3.43) のような二次形式で表せることが確認できた.

7) 3.1 節で定義した正準変数 q とは異なるものであることに注意.

熱平衡状態の熱的な安定性は、核 (3.44) の固有値の符号によって決定される⁸⁾。つまり $K(r_1, r_2)$ の固有値が全て正ならばエントロピーは極大であり、系が熱的に安定であると結論づけることができる。一般には、その固有値は系を特徴付ける熱力学変数 (M, E, R) の関数となっているが、既に述べたように Poisson 方程式の持つ特殊な対称性により、熱平衡状態は断熱壁の大きさ z によって完全に決定される。従って熱平衡状態の安定性もパラメータ z によって完全に決定される。特に重要となるのは臨界点と呼ばれる安定性が切り替わる状態で、このとき核は零固有値を持つ。なぜならば、もし固有値が z に関する連続関数であるならば、系が安定から不安定 (もしくはその逆) に変わるとき必ず零点を通るからである。そこで以降では、この臨界点が満たすべき条件を求め、熱平衡がどのような場合に臨界点となるのかを考える。

既に述べた通り、熱平衡状態の安定性に関する臨界点とは、熱平衡状態であり、かつエントロピーの二次変分が零固有値を持つ状態である。従って固有値方程式

$$\int dr' K(r, r') F(r') = 0 \quad (3.48)$$

と Poisson 方程式を同時に満たす状態が臨界点である。熱平衡状態は (u, v) 平面内の 1 パラメータ曲線として与えられるので、同様に式 (3.48) を変数 (u, v) に対する条件として書き直すことで安定性解析を行う。まず無次元化された核を

$$k(x_1, x_2) := \ell^2 M_0 K(r_1, r_2), \quad M_0 := S_d \rho_c \ell^d \quad (3.49)$$

で定義すると、これは次のように表すことができる:

$$k(x_1, x_2) = \frac{y'(x_1)y'(x_2)}{dM} - \frac{1}{2}\delta(x_1 - x_2) \left[\frac{d-2}{x_2^{d-1}} + \frac{d}{dx_2} \left(\frac{1}{x_2^{d-1}n} \frac{d}{dx_2} \right) \right]. \quad (3.50)$$

従って、臨界点が満たすべき条件は以下の積分を含む固有値方程式:

$$\left[\frac{d-2}{x^{d-1}} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^{d-1}n} \frac{d}{dx} \right) \right] F(x) = \frac{2y'(x)}{dM} \int_0^z ds y'(s) F(s) \quad (3.51)$$

の解により得られる。式 (3.30) を用いて右辺を変形し、演算子 \hat{L} と定数 Λ を

$$\hat{L} := \frac{d-2}{x^{d-1}} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^{d-1}n} \frac{d}{dx} \right), \quad \Lambda := - \int_0^z ds y'(s) F(s) \quad (3.52)$$

で導入することで、条件式 (3.51) は

$$\hat{L}F(x) + (d-2)\Lambda \frac{m(x)}{x^{d-1}} = 0 \quad (3.53)$$

と表すことができる。ただし、 $F(x)$ は式 (3.42) と同様の境界条件:

$$F(0) = F(z) = 0 \quad (3.54)$$

8) 対称行列なので固有値が実数であることは保証されている。

を満たす。この固有値方程式は Liouville–Sturm 型微分方程式と同様に、可算無限個の固有値を持ち、かつ最小の固有値が存在することが示せる。ここで式 (3.53) を満たす関数 $F(x)$ の意味を確認しておく。関数 $F(x)$ はもともと、式 (3.41) で定義された質量変分のうち臨界点における零固有値に対応する固有関数である。従って、式 (3.53) を解くことで得られる解は系が安定から不安定に切り替わるときの不安定性を引き起こすような質量変位のモードを意味するわけである。

それでは実際に零固有関数 $F(x)$ を求めるが、式 (3.53) は定数 Λ が未知関数 $F(x)$ の積分となっており、一見解くのが難しい。そこでまずは、 Λ を単に定数と見なした形式的な解 $F(x; \Lambda)$ を構成する。その後 Λ の定義と無矛盾になる条件から、臨界点が満たすべき条件を導出する。

天下载的ではあるが、形式解の一つとして $F_1(x)$ を

$$F_1(x) = C_1 \frac{x^d n}{d-2} + C_2 m \quad (3.55)$$

と仮定する。ここで C_1 および C_2 は (Λ を定数とみなせば) 定数である。式 (3.30) を適用すれば、

$$\begin{aligned} \hat{L}\left(\frac{x^d n}{d-2}\right) &= xn + \frac{1}{d-2} \frac{d}{dx} \left(\frac{n'}{n} x\right), \\ &= xn - \frac{d}{dx} \left(\frac{m}{x^{d-2}}\right), \\ &= (d-2) \frac{m}{x^{d-1}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

および

$$\hat{L}(m) = (d-2) \frac{m}{x^{d-1}} \quad (3.57)$$

が得られるので、式 (3.53) に代入すると関係式

$$C_2 = -(C_1 + \Lambda) \quad (3.58)$$

を満たしていれば $F_1(x)$ は式 (3.53) の解の一つになっている。定数 C_1 は、端点での境界条件:

$$F_1(z) = C_1 \frac{z^d n(z)}{d-2} - (C_1 + \Lambda) m(z) = 0 \quad (3.59)$$

から決定され、

$$C_1 = \frac{\Lambda m(z)}{\frac{z^d n(z)}{d-2} - m(z)} = \frac{(d-2)\Lambda}{u(z) - (d-2)} \quad (3.60)$$

となる。もう一つの独立な解 $F_2(x)$ は Wronskian により構成することができるが、そのような解は境界条件 (3.54) を満たさないことが容易に確認できるので、形式的な解が

$$F(x; \Lambda) = \frac{\Lambda}{u(z) - (d-2)} [x^d n(x) - u(z)m(x)] \quad (3.61)$$

と求まった.

最後に Λ の定義に立ちかえることで臨界点が満たすべき条件を求める. ここでも式 (3.30) を用いることにより,

$$\begin{aligned} \int_0^z dx y'(x) x^d n(x) &= - \int_0^z dx x^d n'(x), \\ &= z^d n(z) + d \int_0^z dx x^{d-1} n(x), \\ &= m(z)(d - u(z)) \end{aligned} \quad (3.62)$$

および

$$\begin{aligned} \int_0^z dx y'(x) m(x) &= (d-2) \int_0^z dx m(x)^2 x^{-d+1}, \\ &= -\frac{m(z)}{z^{d-2}} + 2 \int_0^z dx \frac{m(x)m'(x)}{x^{d-2}}, \\ &= -m(z)v(z) - \frac{2}{d-2} \int_0^z dx x^d n'(x), \\ &= -m(z)v(z) + \frac{m(z)}{d-2}(d - u(z)), \\ &= \frac{m(z)}{d-2}(2d - 2u(z) - (d-2)v(z)) \end{aligned} \quad (3.63)$$

が得られるので,

$$\begin{aligned} \frac{u(z) - (d-2)}{\Lambda m(z)} \int_0^z dx F(x; \Lambda) &= d - u(z) - \frac{u(z)(2d - 2u(z) - (d-2)v(z))}{d-2}, \\ &= \frac{2u(z)^2 + (d-2)u(z)v(z) + (2-3d)u(z) + d(d-2)}{d-2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

となる. 元々の定義 (3.52) を代入して整理すると,

$$4u(z)^2 + 2(d-2)u(z)v(z) + (d^2 - 8d + 4)u(z) - d(d-2)(d-4) = 0 \quad (3.65)$$

が条件として得られた. 当然ながら臨界条件は端点の座標 z の関数となっており, (u, v) 平面において z をパラメータとする曲線を描く.

3.2.2 $d = 3$ の場合における臨界点の数値的な構成

条件式 (3.65) を実際に熱平衡解と同時に図示することで, 臨界点を調べる. ただしここでは $d = 3$ の場合に限ることとし, 次元依存性などについては 3.3 節で詳細に議論する. 実際に, 条件式 (3.65) と熱平衡解が描く曲線を図 3.2 に同時にプロットした. 図 3.2 から熱平衡解が描く曲線と臨界条件の描く曲線が共有点を持つことが確認できる. また, 確かに臨界条件は特異解に対応する点を通っており, 従って $z \rightarrow \infty$ で特異解に漸近するまでの間に熱平衡状態は無数個の臨界点を通る. これは $z \rightarrow \infty$ の極限で系が無数個の不安定モードを持つことを示唆している.

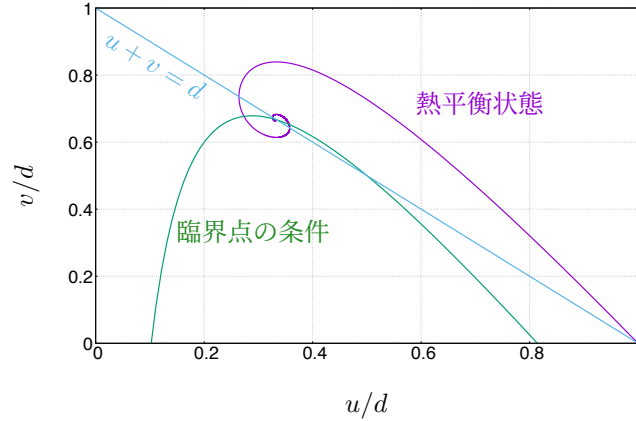


図 3.2 $d = 3$ での熱平衡状態が描く曲線と系が臨界点であるための条件. 二つの曲線が共有点を持つことが分かる. 特に臨界条件は特異解に対応する点を通るので, その近傍で両者は無限の共有点を持つ. 従って系は, $z \rightarrow \infty$ までに無限個の臨界点を通る. これは無限個の不安定モードが存在することを示唆している.

3.3 安定性の臨界次元と転回点法

3.3.1 固定点の安定性と臨界次元

以上の議論を微分方程式の固定点の観点から調べてみる. 新たな変数として,

$$\xi := \ln x, \quad \bar{u}(\xi) = \frac{u}{d-2}, \quad \bar{v}(\xi) = \frac{(d-2)v}{2} \quad (3.66)$$

を定義すると, (3.33) より

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi} = [d - (d-2)\bar{u} - 2\bar{v}]\bar{u}, \quad (3.67a)$$

$$\frac{d\bar{v}}{d\xi} = (d-2)(\bar{u}-1)\bar{v} \quad (3.67b)$$

が得られる. 式 (3.67) は三個の固定点

$$(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = (0, 0), \quad (\bar{u}_c, \bar{v}_c) = \left(\frac{d}{d-2}, 0 \right), \quad (\bar{u}_s, \bar{v}_s) = (1, 1) \quad (3.68)$$

を持つ. (\bar{u}_0, \bar{v}_0) は (\bar{u}, \bar{v}) 平面内の原点に対応し, (\bar{u}_c, \bar{v}_c) は系の中心, (\bar{u}_s, \bar{v}_s) は特異解に対応する. まず, 解の中心近傍での振る舞いと対応を見るために (\bar{u}_c, \bar{v}_c) の近傍で \bar{u}, \bar{v} を展開すると,

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{bmatrix} = A_c \begin{bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{bmatrix}, \quad A_c := \begin{bmatrix} -d & -\frac{2d}{d-2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

目次へ

を得る. 行列 A_c の固有値を求めると $\lambda_c = 2, -d$ となるので, (\bar{u}_c, \bar{v}_c) は鞍点であることが分かる. 正の固有値 (ここでは $\lambda = 2$) に対応する固有ベクトルの方向が, 中心近傍での熱平衡状態の曲線の傾きになる. 一方, 特異解に対応する固定点 (\bar{u}_s, \bar{v}_s) の近傍で展開すると,

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{bmatrix} = A_s \begin{bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{bmatrix}, \quad A_s := \begin{bmatrix} -d+2 & -2 \\ d-2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

となる. 行列 A_s の特性方程式は

$$\left(\lambda + \frac{d-2}{2} \right)^2 = \frac{(d-2)(d-10)}{4} \quad (3.71)$$

となり, 固有値は空間次元 d に応じて

$$\lambda_{\pm} = \begin{cases} -\frac{d-2}{2} \pm i \frac{\sqrt{(d-2)(d-10)}}{2}, & \text{for } 2 < d < 10, \\ -\frac{d-2}{2} \pm \frac{\sqrt{(d-2)(10-d)}}{2}, & \text{for } d \geq 10 \end{cases} \quad (3.72)$$

であることが分かる. いずれの場合も $\text{Re } \lambda_{\pm} < 0$ のため, $2 < d < 10$ のとき固定点は安定渦状点であり, $d \geq 10$ のときは安定結節点となる (図 3.3).

3.3.2 転回点法

無次元化された全エネルギーを

$$\epsilon := \frac{R^{d-2}E}{M^2} = \frac{R^{d-2}K}{M^2} + \frac{R^{d-2}U}{M^2} \quad (3.73)$$

で定義すると, 式 (3.14) より

$$\frac{R^{d-2}K}{M^2} = \frac{dx^{d-2}}{2m} = \frac{d}{2v(z)} \quad (3.74)$$

は容易に計算できる. 一方, 束縛エネルギーについては,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^R dr S_d r^{d-1} \rho \phi = \frac{1}{2} \int_0^R dr \frac{dM}{dr} \phi, \\ &= \frac{1}{2} \left[M(R)\phi(R) - \int_0^R dr M(r) \frac{d\phi}{dr} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{G_N M^2}{R^{d-2}} - G_N (d-2) \int_0^R dr \frac{M(r)^2}{r^{d-1}} \right], \\ &= -G_N \int_0^R dr \frac{M(r)}{r^{d-2}} \frac{dM}{dr} \end{aligned} \quad (3.75)$$

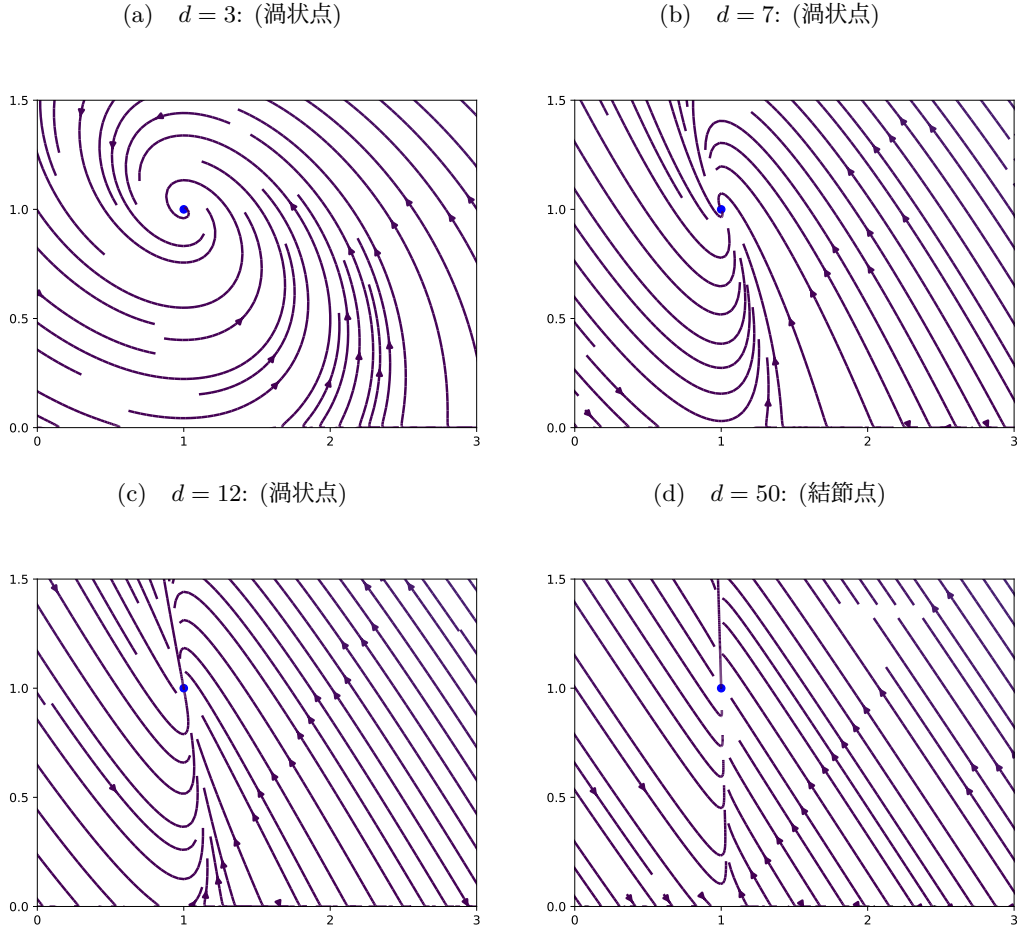


図 3.3 固定点の次元依存性. $2 < d < 10$ のとき固定点は安定渦状点であるのに対し, $d \geq 10$ のときは安定結節点となっていることがわかる.

なので,

$$\begin{aligned}
 \frac{R^{d-2}U}{M^2} &= -\frac{z^{d-2}}{m(z)^2} \int_0^z dx \frac{m(x)m'(x)}{x^{d-2}}, \\
 &= \frac{z^{d-2}}{(d-2)m(z)^2} \int_0^z dx x^d n'(x), \\
 &= \frac{u(z) - d}{(d-2)v(z)}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

と表せるので, 全エネルギーは

$$\epsilon = \frac{d}{2v(z)} + \frac{u(z) - d}{(d-2)v(z)} = \frac{2u(z) + d(d-4)}{2(d-2)v(z)} \tag{3.77}$$

となる. すると, Poisson 方程式を用いれば

$$\frac{d\epsilon}{dz} = -\frac{4u(z)^2 + 2(d-2)u(z)v(z) + (d^2 - 8d + 4)u(z) - d(d-2)(d-4)}{2(d-2)zv(z)} \tag{3.78}$$

となり, 臨界条件 (3.65) と

$$\frac{d\epsilon}{dz} = 0 \tag{3.79}$$

が平衡解の曲線上では等価であることが示された. 従って, 熱平衡状態の安定性は系の全エネルギー ϵ が系の半径 z に対して定常になる点で臨界点となる. これより, 式 (3.77) で ϵ をある定数として得られる直線と熱平衡状態を (u, v) 平面上に描いたとき, それらが接する点が臨界点となる. 変数を (\bar{u}, \bar{v}) に取り直すと, 式 (3.77) は

$$\bar{v} = \frac{d-2}{4\epsilon} \left[\bar{u} + \frac{d(d-4)}{2(d-2)} \right] \tag{3.80}$$

と書き直せる. 次元が $d = 3$ の場合について, 実際に熱平衡状態と臨界条件および直線 (3.80) を同時に図示したものが図 3.4 である. 直線 (3.80) が熱平衡状態の曲線と接するとき, 臨界条

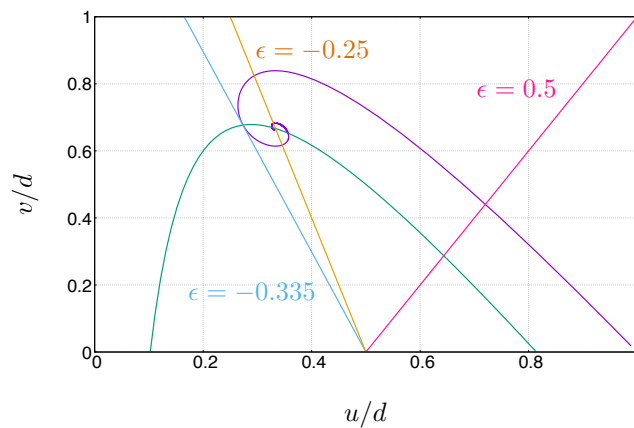


図 3.4 熱平衡条件と臨界条件に加え, エネルギー一定の直線を図示したもの. $d = 3$ のときには, 直線はどの ϵ の値の場合にも点 $(1/2, 0)$ を通り傾きが $1/2\epsilon$ の直線である. ちょうど系が臨界点 ($\epsilon = -0.335$) のとき, 直線は熱平衡状態と接しており, かつその接点は臨界条件の曲線との交点とも一致していることが見てとれる.

件の曲線と熱平衡状態との交点と接点が一致していることが確認できる. つまり, 熱平衡状態が与えられたとき, 固定されるべき量 (保存量) が状態を指定するパラメータに対して定常であるときに系の安定性は臨界点となる. このような手法は転回点法と呼ばれており, 一般に系が物理的なパラメータを一つ持つとき, 系の安定性をそのパラメータの依存性として調べる手法である. 一般的な場合での転回点の手法については付録に記述した.

このような見方をすれば, 固定点の振る舞いによって系の安定性が変化することも容易に理解できる. 固定点 (u_s, v_s) が安定な渦状点, つまり $2 < d < 10$ のとき, 固定点近傍で熱平衡状態は無限に巻きつく. 従って直線 (3.80) と熱平衡状態との接点は必ず (無限に) 存在し, よって臨界点も (無限に) 存在する. 一方, (u_s, v_s) が安定な結節点, つまり $d \geq 10$ のとき, 熱平衡状態との接点は必ずしも存在しない.

第 I 部 まとめ

第 I 部では, Newton 重力で相互作用する多体系の熱平衡状態を構成し, 重力熱的不安定性が生じることを確認した.

まず第 2 章では, N 個の粒子を記述する N 粒子分布関数が満たす Liouville 方程式を導入し, これを平均的に取り扱うことで一粒子分布関数の時間発展方程式である Boltzmann 方程式を導出した. 平均操作により生じた粒子間衝突の寄与により, 粗視化されたエントロピーは時間発展に対して増大することが示される. このエントロピー増大則を適用することで, 熱平衡状態を系のエントロピーを極値にする状態として定義できることを確認した.

次に, 第 3 章では実際に熱平衡状態を記述する一粒子分布関数を導出し, d 次元 Poisson 方程式と同時に解くことで d 次元自己重力多体系の熱平衡状態を構成した. ただしこのとき, 自己重力多体系は断熱的な壁により有限領域に閉じ込めることで孤立系を実現しており, それにより系の全粒子数と全エネルギーを固定した極値問題として定式化している. 3.1 節では, その結果として多体系は Boltzmann 分布に従い, その熱平衡解は二次元相空間内の 1 パラメータ曲線として記述されることを示した. 相空間内の 1 パラメータ曲線の各点に対応する状態ごとにエントロピーの二次変分の固有値が定まる. 3.2 節ではその固有値が零になる条件を直接的に導出し, $d = 3$ の場合で熱平衡状態と同時に図示することで安定性が臨界点を迎える状態を求めた. 最後に 3.3 節で, 相空間における熱平衡解が描く曲線の振る舞いを微分方程式の固定点の観点から調べることで $d \geq 11$ では不安定性が消失することを示した. さらに転回点法を用いた安定性解析についても直接計算することで上述の安定性の結果と一致することを示した.

第II部 相対論的自己重力多体系 の熱平衡状態

第 II 部 概要

第 II 部では副論文 [93, 94] に基づいて、相対論的自己重力多体系の重力熱力学的な安定性について論ずる。

第 II 部の構成は以下の通りである。まずは導入として、第 4 章で一般相対性理論の基本事項を述べ、さらに漸近 AdS 時空の重力乱流不安定性について簡単に紹介する。一般相対論の基本事項については、文献 [95] を参考に時空多様体の定義から始めて時空の対称性と極大対称空間、Einstein 方程式、測地線方程式、大域的時空構造などの概念を導入する。また、その中で漸近 AdS 時空の閉じ込め機構についても説明する。漸近 AdS 時空の重力乱流不安定性については、文献 [7-9] などのレビューを通して状況設定と結果の概略および乱流現象の摂動論的な理解とエネルギーカスケード現象を見る。

次に第 5 章で、相対論的自己重力多体系の取り扱い方を見る。相対論的な系においても多体系は一粒子分布関数で記述されるわけであるが、この場合には分布関数は時空多様体上の点とその点の接ベクトルの関数となる。ここではそのような分布関数に対して系の物理量がどのように定義されるかを見た後、相対論的な熱平衡状態を記述する分布関数を導出する。

最後に第 6 章で実際に熱平衡状態を構成し、さらに転回点法を用いて熱的安定性解析を行う。相対論的な場合、熱平衡状態は 2 パラメータ系列を形成する。そこで一つの物理的なパラメータを固定して考えることで各一定面において転回点法を適用し、その安定性を調べる。また Newton 重力の場合と同様に、安定性が時空次元に応じて変化するか否かを確認する。

第 4 章 一般相対性理論と漸近 AdS 時空

一般相対性理論において扱う時空は, Lorentz 計量を持つ微分多様体としてモデル化される. ここでは微分多様体は既知のものとしてその上のテンソル場を定義し, その定義を用いて多様体上の無限小距離を与える計量テンソル場を導入する. 計量テンソル場が与えられた多様体では, その上のベクトルの平行移動という概念を通じて曲率テンソルという幾何学量を定義することができる. 曲率テンソルを用いることで時空が満たすべき運動方程式である Einstein 方程式を求める. その後, Einstein 方程式の解としての時空が持つ性質と関連して時空の対称性の概念を導入し, さらに本研究で主要な対象となる (漸近)AdS 時空を定義する. さらに漸近 AdS 時空が持つ重力乱流安定性について簡単に紹介する.

4.1 一般相対性理論の基礎事項

4.1.1 時空多様体

物理量は通常, 時空座標の滑らかな関数¹⁾として表現され, その法則は座標に対する微分方程式として現れる. これを取り扱うために, 一般相対論では時空を微分可能多様体 M でモデル化し, その上で定義される物理量を考える. 多様体 M 上の点 p を考え, 点 p を含む近傍 U において定義される局所座標系 x^μ を考える. すると U 上で定義されるスカラー関数 f は, その局所座標の関数 $f(x^\mu)$ と表すことができる.

時空の構造とその上の物理法則を表現するために必要な最も基本的な概念がベクトル場とテンソル場である. ここでは, まず各点におけるベクトルを導入し, その後ベクトル場及びテンソル場へと拡張していく. 多様体 M 上の各点 p において, その近傍で定義される関数 f, g に対して

$$\mathbf{v}_p(fg) = f(p)\mathbf{v}_p(g) + g(p)\mathbf{v}_p(f) \quad (4.1)$$

を満たす実線型汎関数 \mathbf{v}_p を考える. このとき $\mathbf{v}_p(f)$ は点 p の近傍の振る舞いのみによって決まることが式 (4.1) から示せる. そこで点 p が原点になるように局所座標系をとり, 関数 f をその関数と見做せば, 点 p の周りで関数 f を Taylor 展開することで

$$\mathbf{v}_p(f) = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right|_p \mathbf{v}_p(x^\mu) \quad (4.2)$$

を得るので, $\mathbf{v}_p(x^\mu)$ がわかれば任意の f に対する作用が分かる. そこで, $D := \dim M$ 個の独

1) ここでは C^∞ 級を滑らかと呼ぶことにする.

立な線型汎関数 $\partial_\mu|_p$ を

$$(\partial_\mu)|_p(x^\nu) = \delta_\mu^\nu \quad (4.3)$$

で定義する. 汎関数 $\partial_\mu|_p$ は局所座標系 x^μ によって定められる座標基底と呼ばれる. 座標基底を用いれば, ベクトルの成分を $v_p^\mu := \mathbf{v}_p(x^\mu)$ と定義することで

$$\mathbf{v}_p = v_p^\mu (\partial_\mu)|_p \quad (4.4)$$

と表せる. このようなベクトル \mathbf{v}_p 全体が作る D 次元線型空間を $T_p(\mathcal{M})$ と書く.

点 p を通る滑らかな 1 パラメータ曲線 $c(s)$ を考え, その局所座標系を $x^\mu(s)$ と書くことにする. 曲線 $c(s)$ は $s=0$ で点 p を通るものとし, 点 p での曲線の接ベクトルを $v^\mu = dx^\mu/ds|_p$ と書く. このとき $\mathbf{v}_p \in T_p(\mathcal{M})$ と v^μ とを対応づけると, 点 p で定義される任意の関数 f に対して

$$\left. \frac{d}{ds} f(x^\mu(s)) \right|_p = \mathbf{v}_p(f) \quad (4.5)$$

が成立する. これは明らかに局所座標系に独立なので, ベクトル \mathbf{v}_p は曲線のみで決まるのが分かる. 従って線型空間 $T_p(\mathcal{M})$ の各元は曲線の接ベクトルと一対一に対応づけられるので, $T_p(\mathcal{M})$ を多様体 \mathcal{M} の点 p における接ベクトル空間と呼ぶ. このような対応関係を用いることで多様体の各点 p にその点の接ベクトルを対応づけたものをベクトル場と呼ぶ. 構成方法からベクトル場 \mathbf{v} はその局所座標系に依存しない一方, 座標基底に対する成分 v^μ は座標系に依存する. ある局所座標 x^μ から別の局所座標 x'^μ に変更したとき, ベクトル場の成分は

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \quad (4.6)$$

のように変更を受ける.

二個のベクトル場 \mathbf{X}, \mathbf{Y} が与えられたとき, 括弧積

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) \quad (4.7)$$

が定義でき, それ自身ベクトル場となる. 括弧積は定義より, 以下を満たす:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}], \quad (4.8a)$$

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0. \quad (4.8b)$$

式 (4.8b) は Jacobi 恒等式と呼ばれる.

以上でベクトル場が定義できたので, 次に双対ベクトル場を定義する. 接ベクトル空間 $T_p(\mathcal{M})$ 上の実線型関数 ω_p を双対ベクトル, それがなす空間 $T_p^*(\mathcal{M})$ を双対ベクトル空間と呼ぶ. 双対ベクトル空間もちろん D 次元線型空間である. ベクトル場と同様に多様体 (もし

くはその開集合) 上の各点に ω_p を対応づけたものを双対ベクトル場, もしくは 1 形式と呼ぶ. ベクトル場の基底を e_a と書く²⁾ ことにし, $\omega_a = \omega(e_a)$ とすれば, $v = v^a e_a$ に対して

$$\omega(v) = v^a \omega_a \quad (4.9)$$

なので, θ^a を $\theta^a(e_b) = \delta^a_b$ で定義すれば,

$$\omega = \omega_a \theta^a \quad (4.10)$$

と書ける. よって θ^a は双対ベクトルの基底になっており, 双対基底と呼ばれる.

関数 f に対する微分を, ベクトル v に対する線型演算 $df(v) = v(f)$ で定義する. このとき局所座標系 x^μ に対して $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$ なので dx^μ は双対基底になる. すると, 双対ベクトルはその成分を ω_μ として $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ と書け, 局所座標の変換による成分の変換は

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu \quad (4.11)$$

となる.

ベクトルと双対ベクトルを用いてテンソル場を定義する. r 個の接ベクトル空間 $T_p(\mathcal{M})$ と s 個の双対ベクトル空間 $T_p^*(\mathcal{M})$ のテンソル積により得られる D^{r+s} 次元線型空間を (r, s) 型のテンソル空間と呼ぶ. また, 多様体上の各点ごとにテンソルを対応づけたものを, ベクトル場などと同様にテンソル場と呼ぶ. 特に $(0, 0)$ 型のテンソル場はスカラー場と呼ばれ, 通常の関数を意味する. ベクトル場は $(1, 0)$ 型, 双対ベクトル場は $(0, 1)$ 型のテンソル場である. テンソル場 T は,

$$T = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_r} \otimes \theta^{b_1} \otimes \dots \otimes \theta^{b_s} \quad (4.12)$$

と書け, $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$ は基底 e_a, θ^b におけるテンソル場 T の成分と呼ばれる. 局所座標系の変換による成分の変換は,

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\rho_r}} T^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_s}}{\partial x'^{\nu_s}} \quad (4.13)$$

となる.

多様体上の対称 $(0, 2)$ テンソル場 g で, その成分が正則なものを計量テンソル場, または単に計量と呼び, 組 (\mathcal{M}, g) を擬 Riemann 多様体と呼ぶ. 特に, その固有値の符号が $(-, +, \dots, +)$ のとき Lorentz 多様体³⁾ と呼ばれ, 時空多様体は時間方向が $-$ 符号を持つ Lorentz 多様体でモデル化される. 計量 g が与えられると, 各点 p で接ベクトル u と v の内積が $g_p(u, v)$ で定義される. このとき, ベクトル場 v に対して $v_*(u) = g(u, v)$ により定義され, 成分表示では

$$v_a := (v_*)_a = g_{ab} v^b \quad (4.14)$$

2) ここでは座標基底に限らないので添字を a で書いている.

3) 符号は局所座標系の取り方に依存しない.

と表せる. 同様に, 双対ベクトル場に対してもそれに双対なベクトル場が $\omega(u) = g(\omega^*, u)$ で定義され, g_{ab} の逆行列 g^{ab} を用いれば

$$\omega^a := (\omega^*)^a = g^{ab} \omega_b \quad (4.15)$$

と書ける. このような観点から, 計量 g は多様体上の無限小距離を表すので, 座標基底 x^μ を定めたときにはしばしば

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.16)$$

とも表現される. 本論文でもこの表記を用いる. この対応は一般のテンソル場に拡張でき, 成分の添字を上げ下げすることでテンソルの型を写すことができる. また, 内積と同様に, 計量を用いて添字の和をとる (縮約をとる) ことで (r, s) 型のテンソルから $(r-1, s-1)$ 型のテンソルに写すこともできる.

ここで今後のために, ベクトルに定義される内積を用いて時間的ベクトル, 空間的ベクトル, null ベクトルの概念を簡単に導入しておく. 擬 Riemann 多様体 (\mathcal{M}, g) 上のベクトル場 v が時空上の点 p で $g(v, v) < 0$ を満たすとき, ベクトル v は点 p において時間的であるという. 同様に $g(v, v) > 0$ のときに空間的, $g(v, v) = 0$ のときに null であるという. また多様体 \mathcal{M} 上の $D-1$ 次元部分多様体 Σ を考えたとき, Σ に垂直なベクトル場が常に時間的な場合, Σ を空間的超曲面と呼ぶ. 面 Σ に垂直なベクトル場が空間的な場合には Σ を時間的超曲面, ベクトル場が null の場合には null 超曲面 (または単に null 面) と呼ぶ. 以降, 考えている多様体が明らかな場合には, その計量 g に関する内積 $g(u, v)$ を単に $u \cdot v$ などと書くことにする.

一般相対論においては, 計量 g が擬 Riemann 多様体の情報の全てを担っている. すなわち, 計量が決定されればその多様体における各点の局所的な性質は全て決まるので, 一般相対論における基本的な物理変数は計量 g である.

4.1.2 曲率と Einstein 方程式

既に述べたように, 一般相対論の枠組みにおいては, 時空多様体 (\mathcal{M}, g) の基本変数は計量 g であるから, 時空の動力学を解析するにはそれを決定する運動方程式が必要になる. そこで中心的な役割を果たすのが時空の曲率である. 時空の曲率を定義するために, まずは共変微分と呼ばれるテンソル場に対する微分作用素を定義する. 多様体上のベクトル場 \mathbf{X} に対し,

$$\nabla_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X}(f) = X^\mu \partial_\mu f, \quad (4.17a)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} \mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}, \quad (4.17b)$$

$$\nabla_{f\mathbf{X}} \mathbf{Y} = f\mathbf{X}(f) = f\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \quad (4.17c)$$

を満たす微分作用素をベクトル場 \mathbf{X} に沿った共変微分と呼ぶ. このとき共変微分は局所座標表示で任意の (r, s) 型テンソル場に対して $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T} = X^\mu \nabla_\mu \mathbf{T}$ と書けるので, $\nabla \mathbf{T}$ は $(r, s+1)$ 型テンソル場となり, その成分は $\nabla_\mu T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s}$ と書くことができる. さらに, 線型接続

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda := \nabla_\mu\partial_\nu \quad (4.18)$$

で定義する. このときベクトル場及び双対ベクトル場に対する共変微分の成分が

$$\begin{aligned} \nabla_\mu v^\nu &:= (\nabla_\mu \mathbf{v})^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda, \\ \nabla_\mu \omega_\nu &:= \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda \end{aligned} \quad (4.19)$$

と書け, テンソル場に対する共変微分もその定義から同様に定義できる. 具体的には,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} &= \partial_\alpha T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} \\ &+ \sum_{i=1}^r \Gamma^{\nu_i}_{\alpha\lambda} T^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \lambda \mu_{i+1} \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} \\ &- \sum_{i=1}^s \Gamma^\lambda_{\alpha\nu_i} T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_{i-1} \lambda \nu_{i+1} \cdots \nu_s} \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる. ここで共変微分を用いて, 曲線に沿ったベクトル場の平行移動という概念を導入する. 曲線の接ベクトルを \mathbf{v} としたとき, ベクトル場 \mathbf{X} が曲線に沿って並行とは, ベクトル場が $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} = 0$ を満たすことである. するとテンソルがある経路に沿ってどう変化するかを定量的に評価することが可能になる. このようにして定義されるのが, 振率テンソル及び曲率テンソル

$$\Theta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} := \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} \quad (4.21b)$$

である. これらは局所座標表示で,

$$\begin{aligned} \Theta^\lambda_{\mu\nu} &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}, \\ R^\alpha_{\mu\beta\nu} &= \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \end{aligned} \quad (4.22)$$

と書ける.

一般相対論においては

$$\Theta = 0, \quad (4.23a)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{g} = 0 \quad (4.23b)$$

を満たす Levi-Civita 接続, または Riemann 接続と呼ばれる接続が重要になる. このとき, 線型接続は

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (4.24)$$

と表せ, このような接続の座標表示を Christoffel 記号と呼ぶ. 以降も本論文では, 線型接続は Christoffel 記号で表されるものとする.

計量で Riemann テンソルの添字を上げ下げしたり縮約を取ったりすることで、さまざまな曲率テンソルを作ることができる。特に、座標表示において次のように定義される曲率テンソル

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\mu\beta\nu} &:= g_{\alpha\gamma} R^{\gamma}{}_{\mu\beta\nu}, \\
R_{\mu\nu} &:= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}, \\
R &:= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\
\mathcal{R} &:= R_{\alpha\mu\beta\nu} R^{\alpha\mu\beta\nu}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

はそれぞれ、四階共変曲率テンソル, Ricci テンソル, Ricci スカラー, Kretschmann スカラーと呼ばれる。

以上を用いて時空多様体を決定づける作用の表式を与え、時空の運動方程式 (Einstein 方程式) を求める。一般相対論における作用は、以下で与えられる重力場の作用 S_{EH} と物質場の作用 S_{matter} の和で表される:

$$S = S_{EH} + S_{\text{matter}}, \tag{4.26}$$

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-\det \mathbf{g}} (R - 2\Lambda), \tag{4.27}$$

$$S_{\text{matter}} = \int d^D x \sqrt{-\det \mathbf{g}} \mathcal{L}_{\text{matter}}. \tag{4.28}$$

ここで G_D , Λ はそれぞれ D 次元の重力定数および宇宙定数であり、 $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ は物質場のラグランジアンである。この作用に対して、計量 $g_{\mu\nu}$ に関して変分をとると、Einstein 方程式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_D T_{\mu\nu} \tag{4.29}$$

を得る。ここで物質場の作用の計量に関する変分を、エネルギー運動量テンソル:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-\det \mathbf{g}}} \frac{\delta(\sqrt{-\det \mathbf{g}} \mathcal{L}_{\text{matter}})}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{4.30}$$

として定義した。物質場を含む時空を構成する場合には、適切な条件を課すことで構成したエネルギー運動量テンソルに対して Einstein 方程式を解き、計量を得る。第 5 節以降で、エネルギー運動量テンソルが多体系の平均的な振る舞いによって決定される場合について議論する。その前に準備として、以降では本研究の動機づけや系の物理的解釈を助けるための一般相対論における事柄について議論しておく。

4.1.3 時空の対称性と Killing ベクトル

以降で重要となる時空の対称性について簡単に紹介しておく。そのためにまずは、Lie 微分と呼ばれる、共変微分とは異なる微分作用素を定義する。ベクトル場 \mathbf{X} に対する Lie 微分 $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$

を

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}(f) = X^\mu \partial_\mu f, \quad (4.31a)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{v} = [\mathbf{X}, \mathbf{v}] \quad (4.31b)$$

を満たす微分作用素として定義すると、双対ベクトル場 ω に対する Lie 微分の作用が座標表示で $(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_\mu = X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu X^\nu$ が直ちに示せる。これより一般の (r, s) 型テンソル場 \mathbf{T} に対して

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} = X^\alpha (\partial_\alpha T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s}) \quad (4.32)$$

$$+ (\partial_{\nu_1} X^\alpha) T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\alpha \nu_2 \cdots \nu_s} + \cdots + (\partial_{\nu_s} X^\alpha) T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \alpha} \quad (4.33)$$

$$- (\partial_\alpha X^{\mu_1}) T^{\alpha \mu_2 \cdots \mu_r}_{\nu_2 \cdots \nu_s} - \cdots - (\partial_\alpha X^{\mu_r}) T^{\mu_1 \cdots \alpha}_{\nu_1 \cdots \nu_s} \quad (4.34)$$

という局所座標表示を得る。

計量 \mathbf{g} が変換群の生成子 ξ に対して

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{g} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (4.35)$$

を満たすとき、時空がその変換に対して対称であるといい、その変換群を等長変換群と呼ぶ。Killing ベクトル ξ_i が Lie 群の生成子を成すとき、これらは交換関係

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}{}^k \xi_k \quad (4.36)$$

を満たす。ただし $C_{ij}{}^k$ はその Lie 代数の構造定数である。

一般に、 D 次元時空の独立な Killing ベクトルの数は、高々 $D(D+1)/2$ 個である。特に、最大の Killing ベクトルを持つ時空を極大対称時空と呼び、このとき四階共変曲率テンソルが定数 K を用いて次の形に書けることが知られている：

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = K(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}). \quad (4.37)$$

この時空は定曲率時空と呼ばれ、曲率の符号により時空を分類することができる。平坦な時空はよく知られている Minkowski 時空である。 (n, m) 型の擬 Euclid 空間を Cartesian 座標において計量が

$$\eta_{\mu\nu}^{(n,m)} = \begin{bmatrix} -I_n & O \\ O & I_m \end{bmatrix}, \quad I_n := \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ 個}}) \quad (4.38)$$

で書ける擬 Riemann 空間とすると、Minkowski 時空は $(1, D-1)$ 型の擬 Euclid 空間とも言える。有限の値を持つ場合の D 次元の定曲率空間は、一つ高い次元の擬 Euclid 空間内の超曲面として定義される。特に正の定曲率空間は、 $D+1$ 次元 Minkowski 時空内の二次曲面

$$\eta_{AB}^{(1,D)} y^A y^B = L^2 \quad (4.39)$$

目次へ

で定義され, de-Sitter (dS) 時空と呼ばれる. ここで y^A は $D+1$ 次元 Minkowski 時空の座標で, L は曲率半径で de-Sitter 半径と呼ばれる. 次元が重要な場合には dS_D 時空などと書く. 同様にして負の定曲率空間は, $(2, D-1)$ 型の擬 Euclid 空間内の二次曲面

$$\eta_{AB}^{(2,D-1)} y^A y^B = -L^2 \quad (4.40)$$

で定義され, Anti de-Sitter (AdS) 時空と呼ばれる. ここでは y^A は $(2, D-1)$ 型の擬 Euclid 空間の座標で, L は曲率半径で (AdS) 半径と呼ばれる. この場合にも次元が重要な場合には AdS_D 時空などと書く. 以降, D 次元 Minkowski 時空の計量を特別に η と書くことにし, 局所座標表示では $\eta_{\mu\nu}$ と書く. つまり $\eta_{\mu\nu}$ と書いたとしてもそれはあくまでも局所的な表現であって, Minkowski 時空とは限らない⁴⁾ものとする.

これらの定義を用いて, 極大対称時空は以下のように分類される:

- $K = 0$: Minkowski 時空
- $K = 1/L^2 > 0$: dS 時空
- $K = -1/L^2 < 0$: AdS 時空.

実はこれらの時空は, 宇宙項の符号に応じた Einstein 方程式の真空解になっている. 実際, 式 (4.37) より $R_{\mu\nu} = (D-1)K g_{\mu\nu}$ および $R = D(D-1)K$ なので,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = -\frac{(D-1)(D-2)}{2}K g_{\mu\nu} \quad (4.41)$$

を満たす. これは $\Lambda = (D-1)(D-2)K/2$ の宇宙項を持つ真空の Einstein 方程式に他ならない⁵⁾. 極大対称時空を表現するにはさまざまな座標系を用いたものがあるが, ここでは本論文において都合の良い静的チャートと呼ばれる座標系を導入しておく. 静的チャートは曲率の符号によらずに, 変数 $(t, r, \theta_1, \dots, \theta_{D-2})$ で表すことができる. ここで θ_i は単位球面上の角度座標である. dS 時空と AdS 時空が満たす曲面の方程式は, 座標 $y^A = (y^{-1}, y^0, y^i)$ を用いて

$$\pm(y^{-1})^2 - (y^0)^2 + \delta_{ij}y^i y^j = \pm L^2 \quad (4.42)$$

と統一的に表すことができる. そこで dS 時空では

$$y^{-1} = \sqrt{L^2 - r^2} \cosh\left(\frac{t}{L}\right), \quad y^0 = \sqrt{L^2 - r^2} \sinh\left(\frac{t}{L}\right), \quad r := \sqrt{\delta_{ij}y^i y^j} \quad (4.43)$$

とし, AdS 時空では

$$y^{-1} = \sqrt{L^2 + r^2} \cos\left(\frac{t}{L}\right), \quad y^0 = \sqrt{L^2 + r^2} \sin\left(\frac{t}{L}\right), \quad r := \sqrt{\delta_{ij}y^i y^j} \quad (4.44)$$

4) 要するに局所慣性系をとっているにすぎないということ.

5) ただし, $D=2$ では Einstein 方程式が自明になるので, $D \geq 3$ の場合に話を限る必要がある. 本論文では $D \geq 4$ を扱うので気にする必要はない.

とおけば, 時空の計量を

$$ds^2 = -\left(1 \mp \frac{r^2}{L^2}\right) dt^2 + \left(1 \mp \frac{r^2}{L^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.45)$$

と統一的に表すことができる. すると, 定義より dS 時空については $t \in (-\infty, \infty)$ および $r \in (0, L)$ の範囲しかとれないことがわかる. ところが $r = L$ の特異性は単なる座標特異点でしかないので外側に拡張することができる. 一方 AdS 時空では, 動径座標については $r \in (0, \infty)$ をとることができるが, 時間座標 t が周期的になっていることがわかる. つまり, $t/L \in (-\pi, \pi)$ として周期的にすることができるが, これは明らかに因果律を破る. そこで $t/L \in (-\infty, \infty)$ とすることでその普遍被覆空間を考える. 以降, 被覆空間を AdS 時空と呼ぶことにする.

式 (4.45) から分かるように, $L \rightarrow \infty$ の極限で dS 時空と AdS 時空は Minkowski 時空に近づく. これは式 (4.41) の関係を見れば明らかで, $\Lambda = 0$ で Minkowski 時空となる. また静的チャートを用いると, dS/AdS 時空が静的球対称の特別な場合になっていることが分かる. 本論文では主に, $r \rightarrow \infty$ で AdS 時空に漸近する, 漸近 AdS 時空と呼ばれる時空を取り扱う. この意味でも遠方の振る舞いを解析しやすい静的チャートは本研究内容においては便利である.

4.2 測地線方程式と粒子の軌道

4.2.1 測地線方程式

時空の構造を調べるのに便利なものとして, 時空中のテスト粒子の運動を調べるというものがある. 時空中の有限質量を持つ粒子が描く曲線は局所座標表示で $x^\mu(\tau)$ と表すことができる. ただしその軌道は時間的, つまり軌道の接ベクトル同士の内積が負であるとする. すると, 曲線のパラメータ τ は粒子にとっての時間を意味し, 固有時と呼ばれる. 粒子の運動を決めるラグランジアンとして

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (4.46)$$

を考えると, 変分原理より運動方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (4.47)$$

を得る. 式 (4.47) は, 無限小距離 ds^2 を用いて定義される粒子軌道の長さ

$$I := \int ds = \int d\tau \sqrt{2L} \quad (4.48)$$

に対する変分原理から導かれる方程式と完全に一致する. つまり, 時空多様体上の“直線”である測地線が満たすべき方程式と一致⁶⁾するので, 式 (4.47) は測地線方程式と呼ばれる. 測地

6) ではなぜ初めから長さに対する変分問題として定式化しないのかというと, 粒子が null の場合も考えたいからである.

線方程式 (4.47) の性質から一般相対論の特徴を少し考えてみる. 局所座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ のもとで, Levi-Civita 接続 (4.24) は

$$\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (4.49)$$

と変換されることがわかる. 右辺第二項の存在は接続がテンソルとして変換されないことを意味していると同時に, 適当な座標を選べばいつでも $\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0$ にとれることを示唆している. これは, どのような時空でも局所的には重力が働かない局所慣性系と呼ばれる座標系がとれることを意味しており, 等価原理と呼ばれる一般相対論における重要な原理を保証する⁷⁾.

ここで曲線 $x^\mu(\tau)$ の接ベクトル $u^\mu = dx^\mu / d\tau$ を導入すると, 測地線方程式 (4.47) は以下のように書き直せる:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0. \quad (4.50)$$

つまり, 接ベクトル $\mathbf{u} = u^\mu \partial_\mu$ は測地線に沿って並行である. また, 式 (4.23b) を用いれば $u^\mu \nabla_\mu (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$ も示せるのでその大きさも不変となる. そこで $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ となるように規格化したものを粒子の四元速度と呼ぶ. 四元速度 \mathbf{u} を用いて $\mathbf{p} := m\mathbf{u}$ で定義されるベクトル場を四元運動量と呼ぶ. 粒子の質量は (崩壊などを考えなければ) 一定なので, 四元運動量も測地線の接ベクトルでありその内積も $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2$ で一定である. このことは相対論的多体系の記述において重要である.

ここまで有限質量を持つ粒子の運動を考えてきたが, 時空構造を考える上で無質量粒子の軌道も重要である. 無質量粒子はその軌道が時間的ではなく null なので, 曲線のパラメータを λ で置き換えた $x^\mu(\lambda)$ で表す. このとき測地線方程式は式 (4.47) の固有時 τ を単に λ で置き換えた

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (4.51)$$

となる. ただしこの場合には接ベクトルが null なので, 四元運動量として $p^\mu := dx^\mu / d\lambda$ を定義し,

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = p^\nu \nabla_\nu p^\mu = 0 \quad (4.52)$$

と書いておく. このようにすれば, $m \geq 0$ の場合で四元運動量に対する方程式として統一的な測地線方程式を得ることができる. なお, 一般に四元運動量の規格化条件 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + m^2 = 0$ は質量殻 (on-shell) 条件とも呼ばれる. 以降では記法の簡略化のため, 同じベクトルに対する内積については混乱のない限り $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}^2$ などとも書くこととする.

4.2.2 測地線に沿った保存量と有効ポテンシャル

測地線方程式は D 個の二階常微分方程式の組で記述されるが, 一般に解析解が得られるとは限らない. ところが時空が対称性を持つとき, それに付随する Killing ベクトルを使って測

7) 実は, 式 (4.23a) が一般相対論の等価原理を保証している. なぜならば一般の接続 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の反対称部分は必ずしも座標変換で打ち消せないからである.

地線に沿った保存量を定義できるので、それをを用いることで測地線方程式が可積分となる場合がある。保存量の構成は簡単で、時空が Killing ベクトル ξ を持つとき、粒子の四元運動量 p との内積 $p \cdot \xi$ は測地線に沿って保存する。実際、Killing 方程式を用いれば、

$$\nabla_p(p \cdot \xi) = p^\alpha p^\beta \nabla_\alpha \xi_\beta = 0 \quad (4.53)$$

となる。ここでは最も単純な四次元静的球対称時空⁸⁾を考え、その粒子の持つ保存量を構成する方法とそれを用いた有効ポテンシャルの概念を導入する。測地線とはある固定された時空中のテスト粒子の軌道であるから、本論文の主題である自己重力多体系を構成する粒子とは異なることには注意が必要だが、この考え方は時空の性質を解析するのに有用である。

静的球対称な四次元時空の計量は一般に、空間座標を極座標に選べば以下のように表すことができる：

$$ds^2 = -e^{2\mu} dt^2 + e^{2\nu} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.54)$$

このとき時空は時間並進に関する Killing ベクトル

$$\eta = \partial_t \quad (4.55)$$

と三次元回転に関する Killing ベクトルを持つ：

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\sin \phi \partial_\theta - \cot \theta \cos \phi \partial_\phi, \\ \xi_2 &= -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \\ \xi_3 &= \partial_\phi. \end{aligned} \quad (4.56)$$

これらを用いて測地線に沿った保存量が以下のように定義できる：

$$\varepsilon := -p \cdot \eta, \quad j_i := p \cdot \xi_i. \quad (4.57)$$

物理的には ε は粒子のエネルギー、 j_i は粒子の角運動量の i 方向の成分を意味する。

ここで測地線方程式を考えるわけだが、Newton 力学で実際の運動方程式を考えるより力学的エネルギー保存則を考えた方が都合がいいように、相対論でも何らかの保存則から始めると良い。相対論において力学的エネルギー保存則に対応するのは、運動量の規格化条件 $p^2 + m^2 = 0$ である。式 (4.54) の座標系において $m^2 + g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$ なので、保存量 (4.57) を用いれば

$$e^{2(\mu+\nu)} (p^r)^2 + e^{2\mu} \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) = \varepsilon^2 \quad (4.58)$$

と書ける。ただし $J^2 := \sum_i (j_i)^2$ は、粒子の全角運動量を意味する。この方程式は動径方向の運動量 p^r に対する二次方程式なので、一次元ポテンシャル問題とみなすことができる。そ

8) 多体系を扱う際には一般次元を扱うが、ここでは簡単のため $D = 4$ とする。

こで

$$V_{\text{eff}} := e^{2\mu} \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) \quad (4.59)$$

とおけば、見慣れた一次元ポテンシャル問題の式

$$e^{2(\mu+\nu)}(p^r)^2 + V_{\text{eff}} = \varepsilon^2 \quad (4.60)$$

を得る.

4.2.3 Schwarzschild 時空での具体例

以上を踏まえて時空中における測地線方程式の構造を、具体的な時空を考えることで調べてみる. 単純な例として、極座標表示において次の計量で定義される Schwarzschild 時空を考える:

$$e^{2\mu} = e^{-2\nu} = 1 - \frac{r_H}{r}. \quad (4.61)$$

ここで r_H は事象の地平面⁹⁾の半径で、ブラックホール質量を M とすると $r_H = 2G_4M$ である. Schwarzschild 時空は静的球対称かつ漸近平坦な時空で電氣的に中性な Einstein 方程式の真空解である. このとき有効ポテンシャルは

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{r_H}{r} \right) \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) \quad (4.62)$$

となる.

まずは有限質量粒子の軌道を考える. このとき粒子の質量はいつでも $m = 1$ になるようにとれて、さらに動径座標を r_H で規格化して再定義すれば、

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{a}{r^2} \right) \quad (4.63)$$

と書ける. ここで $a := J^2/r_H^2 \geq 0$ とした. 有効ポテンシャルの極値を求めてみると、

$$V_{\text{eff}}' = 0 \Leftrightarrow (r - a)^2 = a(a - 3) \quad (4.64)$$

より、 $a > 3$ では

$$r_{\pm} = a \pm \sqrt{a(a - 3)} \quad (4.65)$$

の二つの極値が存在し、 $a = 3$ のときにはこれらが一点に縮退する. このときの半径を最内安定円軌道 (Inner-most Stable Circular Orbit, ISCO) と呼び、 $r_{\text{ISCO}} := 3r_H = 6M$ などと書く. $a > 3$ での極値をとる半径は、 r_- が不安定円軌道、 r_+ が安定円軌道になることが有効ポテンシャルの二階微分を計算することで確認できる. 実際に $a = 2, 3, 4$ として有効ポテンシャルを図示したものが図である. 確かにパラメータ a を変化させていくと安定円軌道と不安定円

9) この辺りの議論は次節の大域的な時空構造で少しみる.

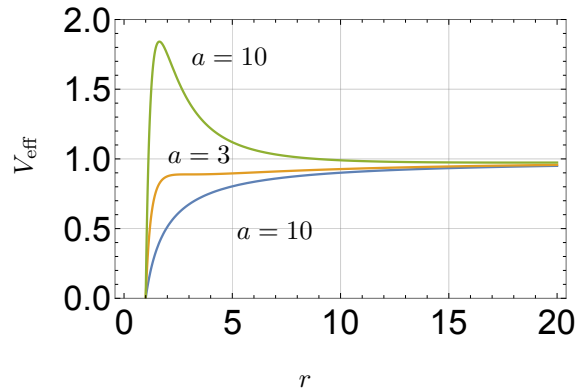


図 4.1 有限質量粒子に対する有効ポテンシャル. パラメータ a の対によって極値の数が異なり, $a = 3$ のときが臨界値である.

軌道が $a = 3$ で一致¹⁰⁾し, $a < 3$ では極値のない単調関数になっていることがわかる¹¹⁾. 一方, 有効ポテンシャルは $r \rightarrow \infty$ の極限で $m^2 = 1$ に漸近する. これは無限遠で静止している粒子を考えることに対応する.

次に無質量粒子の軌道を考える. このとき有限質量の場合と同様に r_H で変数を規格化すれば,

$$V_{\text{eff}} = \frac{a}{r^2} \left(1 - \frac{1}{r} \right) \quad (4.66)$$

となり, 極値となる半径は a によらずに $r_{\text{PS}} = 3r_H/2 = 3M$ となる. この位置は光子球 (Photon Sphere) と呼ばれ, 常に不安定な円軌道である. 実際に有効ポテンシャルをプロットしてみると図 4.2 のようになる.

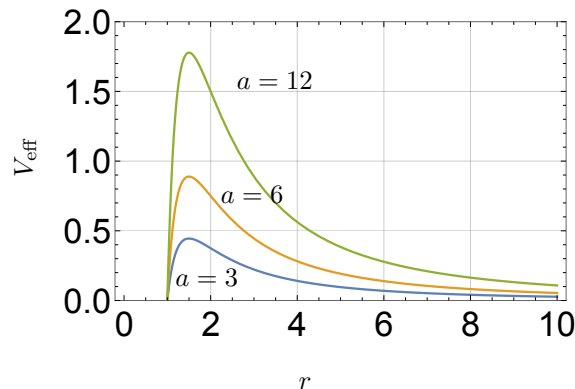


図 4.2 無質量粒子に対する有効ポテンシャル. パラメータ a は単に有効ポテンシャルを定数倍するのみで, 極値の位置は $r = 3M (= 1.5)$ で一定である.

10) もちろん $a = 0$ の場合にも縮退するが, この場合は角運動量を持たない粒子を考えていることになるので, 単に粒子がブラックホールに落ちただけである.

11) このようなポテンシャル関数のパラメータ依存性はこの後安定性の議論でも関係してくるので, 単純な系でイメージしておくとなかなか都合が良い.

次に、負の宇宙項を持つ場合に有効ポテンシャルがどのように変更されるかを考察してみよう。AdS 半径を L 、質量を M とすれば、Schwarzschild-AdS 時空は

$$e^{2\mu} = e^{-2\nu} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{L^2}. \quad (4.67)$$

で表され、最も単純な漸近 AdS 時空の一つである。有限質量粒子に対する有効ポテンシャルは、粒子の質量を 1 に選んで $L = 1$ になるように変数を適当に規格化すれば

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{2c}{r} + r^2\right) \left(1 + \frac{b}{r^2}\right) \quad (4.68)$$

と書ける。まず明らかなのは、 $r \gg 1$ で $V_{\text{eff}} \simeq r^2$ となることである。これは、有限質量粒子にとって負の宇宙項がポテンシャル障壁のように働くことを意味している。つまり、漸近 AdS 時空はその内部に物質を閉じ込めることができるわけである。次に極値について調べてみると、

$$V_{\text{eff}}' = 0 \Leftrightarrow b(3 - r) + r^2(1 + c^2 r^3) = 0 \quad (4.69)$$

となるので、 c が十分小さい場合にはどんな粒子も束縛状態を作ることができないことがわかる。パラメータ c はブラックホール質量が AdS 半径に比べてどれほど大きいかを表しているので、障壁が十分小さく粒子が強く閉じ込められている場合には全ての粒子がブラックホールに吸い込まれてしまうと解釈できる。

一方、無質量粒子に関しては

$$V_{\text{eff}} = \frac{b}{r^2} \left(1 - \frac{2c}{r} + r^2\right) \quad (4.70)$$

なので、遠方でも AdS ポテンシャルは単に定数の寄与を及ぼすだけである。そのため、無質量粒子については閉じ込め機構が働かないように見えるが、実は AdS 時空においては無質量粒子は有限の時間で無限遠に到達する。ここでは簡単のため、AdS 時空:

$$e^{2\mu} = 1 + \frac{r^2}{L^2} \quad (4.71)$$

において、時刻 $t = 0$ で $r = r_0$ から出た無質量粒子を考える。軌道のアフィンパラメータに関する微分を $\dot{}$ で表すことにすれば、測地線方程式より

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{\dot{t}^2}{\dot{r}^2} = \frac{e^{-4\mu}\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - V_{\text{eff}}} \quad (4.72)$$

なので、この粒子が位置 r に到達するまでの時間は、

$$\begin{aligned} t &= \int_{r_0}^r dr \frac{\varepsilon}{1 + r^2/L^2} \left[\varepsilon^2 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= L \int_{x_0}^x dx \sin x \left(\sin^2 x - \frac{J^2}{L^2 \varepsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

となる. ここで $\tan x := r/L$ とした. この積分は簡単に実行できて,

$$\frac{t}{L} = -\arcsin \left[\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{J^2}{L^2 \varepsilon^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Bigg|_{r=r_0}^r \quad (4.74)$$

となる. このとき, $J/\varepsilon < L$ を満たさなければならないことに注意する. 従って, 無質量粒子が無限遠に到達するまでの時間は

$$\frac{t_\infty}{L} = \arcsin \left[\left(1 + \frac{r_0^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{J^2}{L^2 \varepsilon^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.75)$$

となり, 有限の時間で無限遠に到達することができることが示された. 実は (漸近)AdS における無限遠は時間的曲面で, AdS 境界と呼ばれる. 無限遠が時間的曲面であることにより, 無限遠に到達した無質量粒子は境界で (適切な境界条件を与えれば) 反射されて戻ってくるのが可能になる¹²⁾. この意味で漸近 AdS 時空は, 質量によらずに粒子を内部に閉じ込める構造を持っている. これは次節で時空の大域的な構造を調べることで理解できる.

4.3 大域的な時空構造

4.3.1 準備

以下の計量で表される四次元時空の時空構造を考える:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\mu} dt^2 + e^{-2\mu} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ e^{2\mu} &= 1 - \frac{r_H}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2. \end{aligned} \quad (4.76)$$

共系図式を用いてこれらの大域的な時空構造を調べてみる. 共系図式とは, 時空計量を共形変換 (Weyl 変換) して非物理的な計量に移ることで無限遠を時空図に取り込み, その漸近構造や因果構造を見る表現方法である.

まず準備として, tortoise 座標 r_* を

$$dr_* := e^{-2\mu} dr \quad (4.77)$$

で定義し, 球対称性を用いて角度一定面を考えることにする. すると, null 座標 u, v を

$$u := t - r_*, \quad v := t + r_* \quad (4.78)$$

で定義すれば, 角度一定超曲面の二次元計量 ds_2^2 は

$$ds_2^2 = -e^{2\mu} du dv \quad (4.79)$$

12) ただし無質量粒子が無質量スカラー場の幾何光学極限であるという見方をすると, そもそも遠方では粒子近似が破綻することが知られている. これについては付録 D で簡単に議論する.

と書くことができる. ただし, r_* の積分定数は必要に応じて適当に選ぶことにする.

4.3.2 Minkowski 時空

まず最も基本的な Minkowski 時空 $e^{2\mu} = 1$ について考え, 時空構造と共系図式を概観する. このとき $r_* = r$ とでき, 計量は $ds_2^2 = -du dv$ であるから,

$$\tan U := u, \quad \tan V := v \quad (4.80)$$

により新たな null 座標 (U, V) を定義すると,

$$ds_2^2 = -\frac{dU dV}{\cos^2 U \cos^2 V} \quad (4.81)$$

が得られる. ここで $U, V \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である. 新たな時間座標 T と動径座標 R を

$$T := U + V, \quad R := U - V \quad (4.82)$$

で導入すれば,

$$ds_2^2 = \frac{-dT^2 + dR^2}{4 \cos^2 \frac{T+R}{2} \cos^2 \frac{T-R}{2}} \quad (4.83)$$

となり,

$$\Omega(r)^2 := 4 \cos^2 \frac{T+R}{2} \cos^2 \frac{T-R}{2} \quad (4.84)$$

による共形変換 $ds_2^2 \rightarrow d\bar{s}_2^2 = \Omega^2 ds_2^2$ を施せば結局, Minkowski 時空計量

$$d\bar{s}_2^2 = -dT^2 + dR^2 \quad (4.85)$$

に写されることが分かる. ただし, 変数のその領域は

$$|T \pm R| < \pi \quad \text{かつ} \quad R \geq 0 \quad (4.86)$$

であり, 確かに有限領域に写すことができた. さらに, 領域の境界として $|T + R| = \pi$ および $|T - R| = \pi$ を追加することで, コンパクト化された時空を考えることができる. 図 4.3 が Minkowski 時空のコンパクト化された時空図であり, このようなコンパクト化された時空図を共系図式 (Penrose 図式) と呼ぶ. ここで, 共形図式に関する用語をいくつか定義しておく. 共系図式から, Minkowski 時空の無限遠は次の三種類に分類できることが分かる:

- 空間的無限遠 i^0 : $r \rightarrow \infty$ かつ t 有限.
- Null 無限遠 \mathcal{I}^\pm : $t \pm r_* \rightarrow \infty$ かつ $t \mp r_*$ 有限.
- 時間的無限遠 i^\pm : $\pm t \rightarrow \infty$ かつ r 有限.

null 無限遠と時間的無限について, \pm の符号に応じて $+$ の場合を未来無限遠, $-$ の場合を過去無限遠と区別する. また, 実は Minkowski 時空の共形図式は左側 ($R < 0$ の領域) に拡張することができ, 実際に図示すると図 4.4 のようになる.

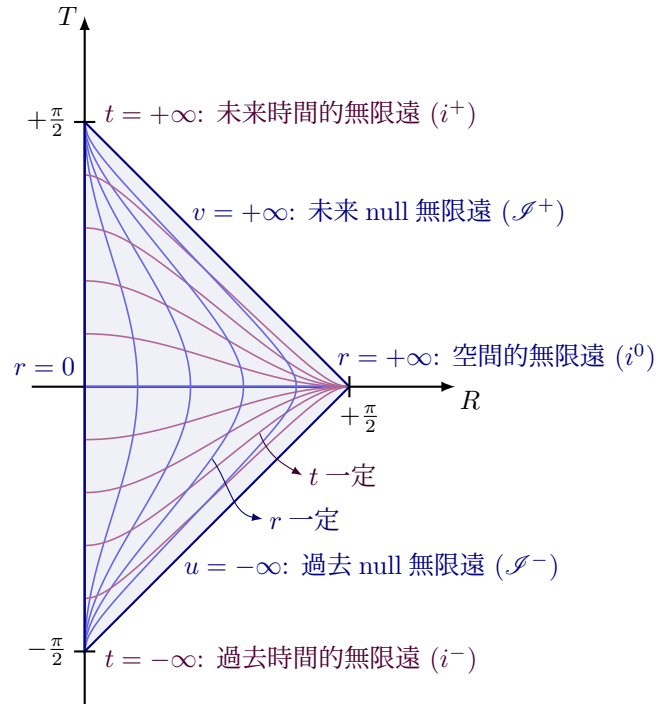


図 4.3 Minkowski 時空の共系図式. Tikz.net [96] のコードを参考に作成.

4.3.3 Schwarzschild 時空

Schwarzschild 時空は, 式 (4.76) で $\Lambda = 0$ とした計量, つまり式 (4.61) で与えられるから,

$$e^{-2\mu} = \frac{r}{r - r_H} \quad (4.87)$$

と表せ, これは一次の零点 $r = r_H$ を持つ. すると, tortoise 座標 r_* は積分定数を適当に選ぶことで

$$r_* = r + r_H \ln |r - r_H| \quad (4.88)$$

と表すことができる. ここで null 座標 (U, V) を

$$U := \pm \exp\left(-\frac{u}{2r_H}\right), \quad V := \exp\left(\frac{v}{2r_H}\right) \quad (4.89)$$

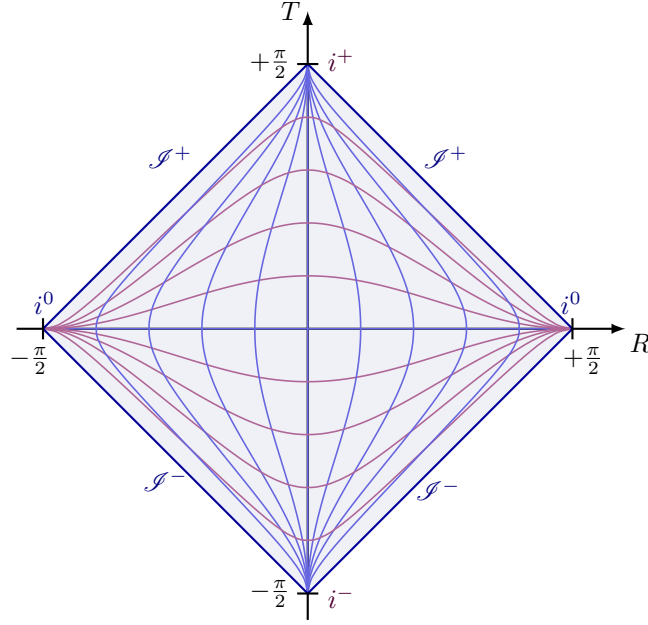


図 4.4 拡張された Minkowski 時空の共形図式. Tikz.net [96] のコードを参考に作成.

で定義する. ただし符号 \pm は $r < r_H$ のとき $+$ を, $r > r_H$ のとき $-$ をとるものとする. このとき,

$$\begin{aligned}
 UV &= \pm \exp \left[\frac{-u + v}{2r_H} \right], \\
 &= \pm \exp \left[\frac{r_*}{r_H} \right], \\
 &= \pm \exp \left[\frac{r}{r_H} + \ln |r - r_H| \right], \\
 &= -(r - r_H) \exp \left[\frac{r}{r_H} \right]
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

なので, 計量は以下のように書き直せる:

$$\begin{aligned}
 ds_2^2 &= -e^{2\mu} \left(-\frac{2r_H}{\pm U} dU \right) \left(\frac{2r_H}{V} dV \right) \\
 &= -\frac{4r_H^2}{r} e^{-r/r_H} dU dV.
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

さらに

$$\tan \bar{u} := U, \quad \tan \bar{v} := V \tag{4.92}$$

として共形変換を

$$\Omega(r)^2 := \frac{r}{4r_H^2} e^{r/r_H} \cos^2 \bar{u} \cos^2 \bar{v} \tag{4.93}$$

により施せば $ds_2^2 = -d\bar{u}d\bar{v}$ が得られ, Minkowski 時空の一部に写されることが確認できる.

地平面 $r = r_H$ を境に座標 (t, r) の役割が入れ替わるので, 地平面が共形図式によってどう写されるのかを調べてみる. 式 (4.90) より $U = 0$ または $V = 0$ に写されることが直ちにわかる. 共形変換は null 面を null 面に写すので, 共形図式において地平面は null 面になる. また中心について, Kretschmann 曲率を計算してみると

$$\mathcal{R} = \frac{48M^2}{r^6} \tag{4.94}$$

となり, 曲率が発散する曲率特異点になっていることがわかる. 曲率特異点は本来時空多様体上の点ではないが, 共形図式では境界として取り入れることができる. 共形図式においては通常, 曲率特異点は他の領域と区別するために波線などで表す. また Schwarzschild 時空についても Minkowski 時空と同様に領域を解析的に拡張することができる. 以上を考慮して構成した共形図式が図 4.5 である. 習慣的に, 元々の地平面の外側にある領域を I, 内側の領域を II

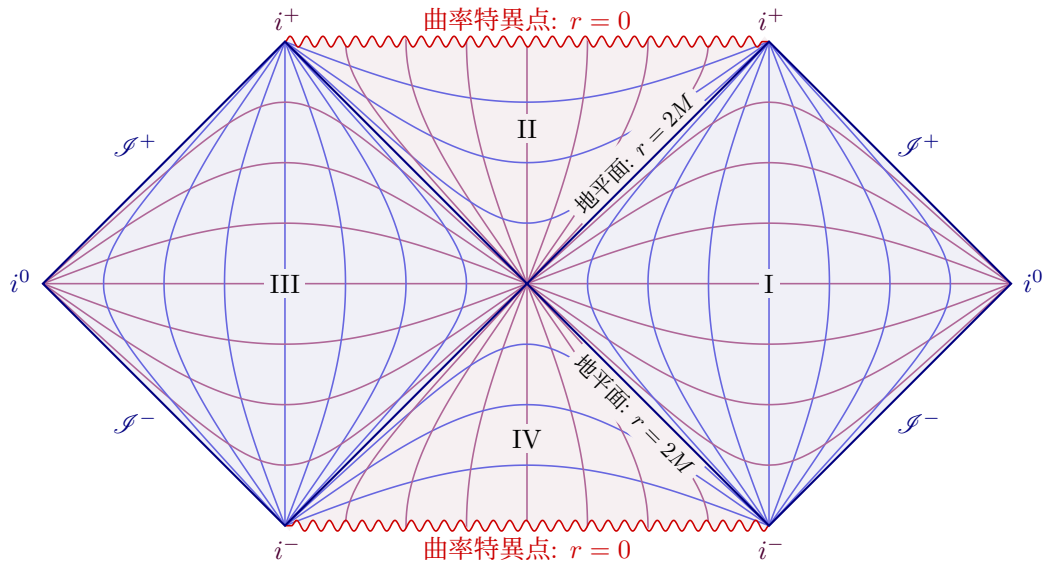


図 4.5 拡張された Schwarzschild 時空の共形図式. Tikz.net [96] のコードを参考に作成.

と呼び, 拡張された領域の I に対応する領域を III, II に対応する領域を IV と呼ぶ. II の領域をブラックホール領域, IV の領域をホワイトホール領域と呼ぶ.

4.3.4 AdS 時空

AdS 時空は以下の計量関数で与えられる:

$$e^{-2\mu} = \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)^{-1} \tag{4.95}$$

ので, $r = 0$ で $r_* = 0$ となるように選べば,

$$\frac{r_*}{L} = \arctan\left(\frac{r}{L}\right), \quad 0 \leq \frac{r_*}{L} < \frac{\pi}{2} \quad (4.96)$$

となる. 新たな null 座標を

$$\tan U := \frac{u}{L}, \quad \tan V := \frac{v}{L} \quad (4.97)$$

と定義し, Minkowski 時空の場合と同様に $T := U + V$, $R := U - V$ と定義すれば,

$$ds_2^2 = \frac{-dT^2 + dR^2}{4 \cos^2\left(\frac{r_*}{L}\right) \cos^2\frac{T+R}{2} \cos^2\frac{T-R}{2}} \quad (4.98)$$

となる. 従って, 共形変換を

$$\Omega(r)^2 := 4 \cos^2\left(\frac{r_*}{L}\right) \cos^2\frac{T+R}{2} \cos^2\frac{T-R}{2} \quad (4.99)$$

で施せば

$$d\bar{s}_2^2 = -dT^2 + dR^2 \quad (4.100)$$

となる. Minkowski 時空と異なるのは tortoise 座標が $r_*/L \in [0, \pi/2)$ となっていることである. これにより動径座標 R はある時刻 t において非自明な最大値を持つ. 特に $t = 0$ のとき,

$$R \leq 2 \arctan \frac{\pi}{2} =: R_0 \quad (4.101)$$

である. 以上より共形図式は図 4.6 のようになる¹³⁾. AdS 時空の特徴的な点は, 無限遠が時間的曲面になっていることである. そのため内部の物質の運動を記述するには遠方で境界条件を課さなければその時間発展を完全に決定することはできない.

4.4 AdS 時空における重力乱流現象

ここでは, 本研究の元々の動機である AdS 時空の不安定性について簡単に説明する. [7] では漸近 AdS 時空中の球対称無質量スカラー場に対しその反作用も取り入れた Einstein 方程式を数値的に解くことによりどのような小さな摂動に対してもブラックホールが形成することを示した. この意味で AdS 時空は不安定であると言われるが, この不安定性の原因は AdS 時空特有の漸近構造と Einstein 方程式の非線形性であると現在は考えられている. これを見るために, どのような手法によって AdS 時空の不安定性が示され, それがどのような物理的意味を持つのかについて, AdS 時空の簡単な説明とともに [7] の簡単なレビューを行う.

4.4.1 AdS 時空の漸近構造

この節では文献 [7] の内容を簡単にレビューする. 文献に記法を合わせるため, ここでは例外的に $8\pi G_D = D - 2$ の単位系を用いることにするので注意してほしい.

13) 時間座標については有限にせず t を用いた図もよく用いられる.

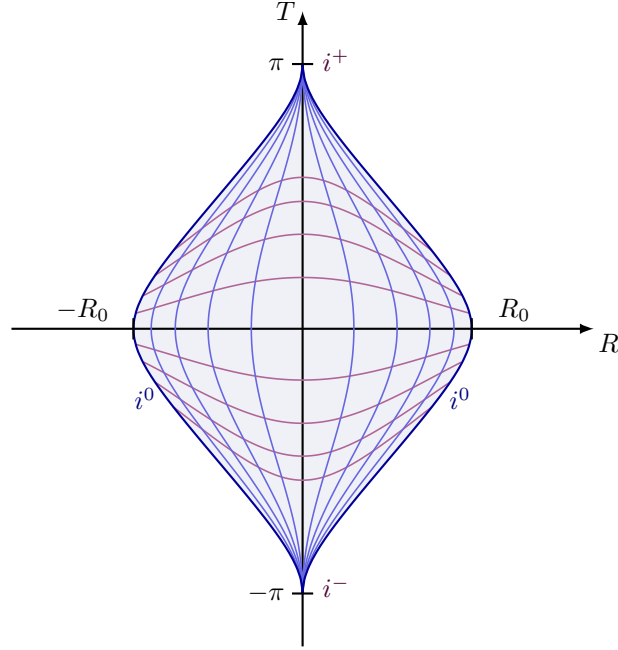


図 4.6 AdS 時空の共系図式. Tikz.net [96] のコードを参考に作成.

4.4.2 AdS 時空の非線形な不安定性

AdS 時空の摂動に対する動的な性質を見るため, 球対称な無質量スカラー場に対する Einstein 方程式を考える. 無質量スカラー場 $\phi(t, x)$ のエネルギー運動量テンソルと運動方程式は以下で与えられる:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial\phi)^2, \quad g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = 0. \quad (4.102)$$

これに対する Einstein 方程式を, 次のように計量を仮定して数値的に解く:

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 x}(-Ae^{-2\delta} dt^2 + A^{-1}dx^2 + \sin^2 x d\Omega^2). \quad (4.103)$$

ここで, 座標 t と x はいずれも無次元で, その範囲は $-\infty < t < \infty$ および $0 < x < \pi/2$ である. 補助場として $\Phi := \phi'$ および $\Pi := A^{-1}e^\delta\dot{\phi}$ を導入する. ここで, $\dot{}$ は t 微分を, $'$ は x 微分をそれぞれ表す. (4.103) を式 (4.102) および式 (4.29) に代入すると, 次のように書き直せる:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= (Ae^{-\delta}\Pi), \quad \dot{\Pi} = \frac{1}{\tan^2 x}(\tan^2 x Ae^{-\delta}\Phi)', \\ A' &= \frac{1 + 2\sin^2 x}{\sin x \cos x}(1 - A) - \sin x \cos x A(\Phi^2 + \Pi^2), \\ \delta' &= -\sin x \cos x(\Phi^2 + \Pi^2). \end{aligned} \quad (4.104)$$

ただし, ここで既に述べたように, [7] に倣って $4\pi G = 1$ の単位系をとった. さらに $L = 1$ とした.

中心近傍と遠方での境界条件について先に見ておく．まず中心近傍で計量関数を

$$\begin{aligned} A(t, x) &= A_0(t) + A_1(t)x + A_2(t)x^2 + A_3(t)x^3 + \cdots \\ \delta(t, x) &= \delta_1(t)x + \delta_2(t)x^2 + \delta_3(t)x^3 + \cdots \\ \phi(t, x) &= \phi_0(t) + \phi_1(t)x + \phi_2(t)x^2 + \phi_3(t)x^3 + \cdots \end{aligned} \quad (4.105)$$

のように展開¹⁴⁾して、式 (4.104) に代入することで次の条件を得る：

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \delta_1 = \phi_1 = 0. \quad (4.106)$$

同様に $\bar{x} := \pi/2 - x$ と定義して AdS 境界 $x = \pi/2$ 近傍で漸近展開すると、

$$\begin{aligned} A(t, x) &= 1 - 2M\bar{x}^3 + \mathcal{O}(\bar{x}^6), \\ \delta(t, x) &= \delta_\infty(t) + \mathcal{O}(\bar{x}^6), \\ \phi(t, x) &= \phi_\infty(t)\bar{x}^3 + \mathcal{O}(\bar{x}^5) \end{aligned} \quad (4.107)$$

とできる．ここで M は系の全質量である．

初期値として以下のような Gaussian 型の摂動を加えたときの時空の時間発展を考える：

$$\Phi(t = 0, x) = 0, \quad \Pi(0, x) = \frac{\epsilon}{2\pi} \exp\left(\frac{-4 \tan^2 x}{\pi^2 \sigma^2}\right). \quad (4.108)$$

ここで ϵ は摂動の振幅を表し、 σ は摂動の空間的な幅を指定するパラメータである．すると、時間発展と共にスカラー場は自己重力によって収縮し、やがて重力崩壊を起こすことが期待される．実際に漸近平坦な場合については古くからそのような現象は知られていた [97] が、漸近平坦な場合に重要なことは、その摂動パラメータが十分大きくない場合にはスカラー場は遠方に散逸してしまい、重力崩壊を起こさないことである．より具体的には、地平面が形成される場合にそのときの地平面の半径を r_H で表すことにすると、 $r_H \rightarrow 0$ となるような $\epsilon = \epsilon_*$ が存在し、 $\epsilon < \epsilon_*$ では地平面は形成されない．そのような性質と対照的に、漸近 AdS 時空では任意の ϵ で地平面が形成されることを示したのが [7] である．図 4.7 は [7] から引用した図で、形成されるブラックホールの地平面の半径 r_H と初期摂動の振幅 ϵ との関係を表している．十分大きな摂動を加えた場合 (図 4.7 で最も右の曲線に対応) にはスカラー場が重力崩壊を起こすが、徐々に ϵ を小さくしていくと x_H が小さくなっていくことがわかり、 $\epsilon = \epsilon_0 (\simeq 42.5)$ 程度で $x_H \rightarrow 0$ に漸近する．漸近平坦な場合にはこれより小さな ϵ ではブラックホールは形成されないが、図 4.7 では ϵ が ϵ_0 より僅かに小さくなると、また有限の地平面の半径を持つブラックホールの形成が起きていることがわかる．地平面の半径は ϵ が小さくなるにつれてまた小さくなり、再び $x_H \rightarrow 0$ となる値 ϵ_1 に到達する．実はこの $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_0$ に対応する系列は、スカラー場が一度遠方に拡散したのちに中心まで伝搬し、重力崩壊を起こしたブラックホールによる系列である． $\epsilon < \epsilon_1$ の摂動に対しても、その値に対応した回数だけ反射されることで

14) ここで計量関数は中心で滑らかと仮定している．また時間座標について、 t が中心における固有時間に一致するように選んだ．

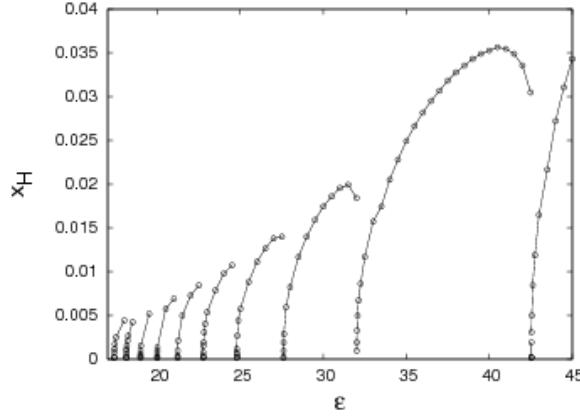


図 4.7 形成されるブラックホールの地平面の半径 x_H と初期摂動の振幅 ϵ との関係. ただし摂動の空間的な広がりについては $\sigma = 1/16$ に固定してある. 複数の系列が存在し, ある ϵ で $x_H \rightarrow 0$ を迎えると次の系列に遷移していく様子が見てとれる. これは AdS 境界で反射されたスカラー場が相互作用したのちにブラックホールを形成したことを示している. 文献 [7] より引用.

いつでもブラックホールを形成することを図 4.7 は示しているわけである. 従って漸近 AdS 時空では, 以上の状況設定の下では任意の大きさの摂動に対して重力崩壊を起こす.

この現象の理解を深めるために, 運動方程式を摂動展開して非線形摂動までその効果を解析してみる. 初期値として, 微小量 ϵ を用いて

$$\phi(0, x) = \epsilon f(x), \quad \dot{\phi}(0, x) = \epsilon g(x) \quad (4.109)$$

と表される場合を考え, 計量の関数およびスカラー場を次のように展開する:

$$A(t, x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j} \epsilon^{2j}, \quad \delta(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{2j} \epsilon^{2j}, \quad \phi(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{2j+1} \epsilon^{2j+1}. \quad (4.110)$$

一般次元で考えると, いま単位系を $8\pi G_D = D - 2$ にとっているので, 式 (4.104) は以下のようになる:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= (Ae^{-\delta}\Pi), \quad \dot{\Pi} = \frac{1}{\tan^2 x} (\tan^2 x Ae^{-\delta}\Phi)', \\ A' &= \frac{\nu'}{\nu} (A - 1) - \mu\nu A (\Phi^2 + \Pi^2), \\ \delta' &= -\mu\nu (\Phi^2 + \Pi^2). \end{aligned} \quad (4.111)$$

ここで,

$$\mu(x) := (\tan x)^{D-2}, \quad \nu(x) := \frac{\sin x \cos x}{(\tan x)^{D-2}} \quad (4.112)$$

と定義した¹⁵⁾. 式 (4.110) を式 (4.111) に代入し, ϵ の各次数に対して方程式を解けば良い.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j} \epsilon^{2j} \right)^{-1} \\ &= 1 - A_2 \epsilon^2 + (A_2^2 - A_4) \epsilon^4 + (-A_2^3 + 2A_2 A_4 - A_6) \epsilon^6 + \dots \end{aligned} \quad (4.113)$$

となることを用いれば, ϵ に関する一次の式は次のような波動方程式となる:

$$\ddot{\phi}_1 + L\phi_1 = 0, \quad L := -\frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{d}{dx} \right). \quad (4.114)$$

式 (4.114) は, AdS 時空の線形摂動に対する時間発展を記述する波動方程式であり, [98] などにより詳細に調べられている. 線形摂動に対する安定性は, 演算子 L の固有値方程式を調べることによって理解できる. 演算子 L の固有関数を $e_j(x)$ として線形解 ϕ_1 を

$$\phi_1(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(\omega_j t + \beta) e_j(x) \quad (4.115)$$

のように展開すれば, 固有値方程式は

$$\left[\omega_j^2 + \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{d}{dx} \right) \right] e_j(x) = 0 \quad (4.116)$$

となる. ここで ω_j は演算子 L の固有値である. 固有関数は以下のようにして求めることができる. 記法の都合上, ここで空間次元を $d = D - 1$ で表すことにより $e_j = (\cos x)^d u_j$ で新たな関数 u_j を定義すると, 演算子 L は

$$L(\cos x)^d = -d^2 (\cos x)^d \quad (4.117)$$

を満たすので, 式 (4.116) は次のように書き直せる.

$$\left[(\omega_j^2 - d^2) + \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{d}{dx} \right) \right] u_j(x) = 0 \quad (4.118)$$

さらに $z := \cos(2x)$ に変数変換すると,

$$L = 4 \left[(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} + (1 - d - z) \frac{d}{dz} \right] \quad (4.119)$$

なので, 式 4.118 は

$$\left[(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} + (1 - d - z) \frac{d}{dz} + \frac{1}{4} (\omega_j^2 - d^2) \right] u_j(z) = 0 \quad (4.120)$$

となり, その解は Jacobi 多項式 $P_n^{(a,b)}(z)$ を用いて

$$e_j(x) = k_j (\cos x)^d P_j^{(d/2-1, d/2)}(\cos(2x)), \quad \omega_j = (d + 2j)^2 \quad (4.121)$$

15) 球対称時空において計量関数として用いていた μ, ν とは異なるものであることに注意. ここでは文献 [8] の記法をそのまま用いる.

と表せる. ここで $k_j := 2\sqrt{j!(j+d-1)!}/\Gamma(j+d/2)$ は規格化定数である. 従って, 任意の j に対して $\omega_j = (d+2j)^2 > 0$ であるから AdS 時空は線形摂動に対して安定である.

微小量 ϵ の三次の方程式を考える¹⁶⁾:

$$\ddot{\phi}_3 + L\phi_3 = S(\phi_1, A_2, \delta_2). \quad (4.122)$$

ここで $S(\phi_1, A_2, \delta_2) := 2(A_2 - \delta_2)\dot{\phi}_1 + (\dot{A}_2 - \dot{\delta}_2)\phi_1 + (A_2' - \delta_2')\phi_1'$ とした. この方程式に対し, ϕ_3 にも同様に式 (4.121) の基底をとると係数 $c_j(t)$ に関する方程式

$$\ddot{c}_l + \omega_l c_l = S_l \quad (4.123)$$

を得る¹⁷⁾. ここで S_j は $S(\phi_1, A_2, \delta_2)$ の展開係数であり, ϕ_1 の展開を具体的に実行すれば以下のように表せる:

$$\begin{aligned} S_l = & \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,i \neq j} a_i a_j a_k \omega_j (H_{ijkl} - 2X_{ijkl} \omega_k^2) \left[\frac{\cos(\theta_i - \theta_j - \theta_k) + \cos(\theta_i - \theta_j + \theta_k)}{\omega_i - \omega_j} \right. \\ & \left. - \frac{\cos(\theta_i + \theta_j - \theta_k) + \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}{\omega_i + \omega_j} \right] \\ & - \frac{1}{4} \sum_{i,k} a_k a_i^2 (H_{iikl} - 2\omega_k^2 X_{iikl}) (\cos(2\theta_i - \theta_k) + \cos(2\theta_i + \theta_k)) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_k a_i^2 (H_{iikl} + 2\omega_i^2 M_{kli} - 2\omega_k^2 X_{iikl} - 4\omega_k^2 \omega_i^2 W_{kli}) \cos \theta_k \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} X_{ijkl} a_i a_j a_k \omega_j \omega_k [\cos(\theta_k - \theta_j - \theta_i) + \cos(\theta_k - \theta_j + \theta_i) \\ & \quad - \cos(\theta_k + \theta_j - \theta_i) - \cos(\theta_k + \theta_j + \theta_i)] \\ & + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,k \neq l} \frac{a_i a_j a_k \omega_k}{\omega_l^2 - \omega_k^2} \left[Z_{ijkl}^+ (2\omega_k + \omega_j - \omega_i) \cos(\theta_i - \theta_j - \theta_k) \right. \\ & \quad + Z_{ijkl}^+ (2\omega_k - \omega_j + \omega_i) \cos(\theta_i - \theta_j + \theta_k) \\ & \quad - Z_{ijkl}^+ (2\omega_k - \omega_j - \omega_i) \cos(\theta_i + \theta_j - \theta_k) \\ & \quad \left. - Z_{ijkl}^+ (2\omega_k + \omega_j + \omega_i) \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k) \right] \\ & - \frac{1}{4} \sum_{i,j} a_i a_j a_l \omega_l [(\omega_i \omega_j P_{ijl+B_{ijl}}) (2\omega_l + \omega_j - \omega_i) \cos(\theta_i - \theta_j - \theta_l) \\ & \quad + (\omega_i \omega_j P_{ijl+B_{ijl}}) (2\omega_l - \omega_j - \omega_i) \cos(\theta_i - \theta_j + \theta_l) \\ & \quad - (\omega_i \omega_j P_{ijl+B_{ijl}}) (2\omega_l - \omega_j + \omega_i) \cos(\theta_i + \theta_j - \theta_l) \\ & \quad \left. - (\omega_i \omega_j P_{ijl+B_{ijl}}) (2\omega_l + \omega_j + \omega_i) \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_l) \right]. \end{aligned} \quad (4.124)$$

16) 実は ϵ の二次の方程式は安定性に寄与しないことがわかるので, 重要なのは三次の方程式である.

17) ここで Jacobi 多項式の直交性を用いた.

ここで $\theta_i := \omega_j t + \beta_j$ とし、係数を次のように定義した:

$$\begin{aligned}
H_{ijkl} &:= \int_0^{\pi/2} dx \mu^2 \nu' e'_i e_j e'_k e_l, & X_{ijkl} &:= \int_0^{\pi/2} dx \mu^2 \nu e'_i e_j e_k e_l, \\
Y_{ijkl} &:= \int_0^{\pi/2} dx \mu^2 \nu e'_i e_j e'_k e'_l, & Z_{ijkl}^\pm &:= \omega_i \omega_j (X_{klij} - X_{lkij}) \pm (Y_{klij} - Y_{lkij}), \\
M_{ijk} &:= \int_0^{\pi/2} dx \mu \nu' e'_i e_j \int_0^x dy \mu e_k^2 e'_l, & B_{ijk} &:= \int_0^{\pi/2} dx \mu \nu e'_i e'_j \left(1 - \int_0^x dy \mu e_k^2 e'_l\right), \\
P_{ijk} &:= \int_0^{\pi/2} dx \mu \nu e'_i e_j \left(1 - \int_0^x dy \mu e_k^2 e'_l\right), & W_{ijk} &:= \int_0^{\pi/2} dx \mu \nu e'_i e_j \int_0^x dy \mu e_k^2 e'_l.
\end{aligned} \tag{4.125}$$

式 (4.124) において重要な項は、モード関数の固有振動と一致する $\pm\omega_l = \pm\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k$ となるような項である。なぜならばこのような項は共鳴現象を起こすため、三次の解は次のように振る舞うからである:

$$c_j(t) = \frac{A}{2\omega_l} t \sin(\omega_l t + B). \tag{4.126}$$

なお A および B は適当な定数である。従って三次の解は時間発展と共に振幅が増大する¹⁸⁾ 式 (4.124) からわかるように、スカラー場の摂動が共鳴現象によって増大する理由は複数のモードが非線形に干渉することにあるわけである。

この効果とブラックホール形成のより詳細な関係性を考察するために、摂動の時間発展に対するエネルギースペクトルについて解析する。系の全質量を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
M &:= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx \tan^2 x T_t^t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx \tan^2 x (A\Phi^2 + A\Pi^2).
\end{aligned} \tag{4.127}$$

ここで Φ_j 及び Π_j をそれぞれ Φ と Π のモード関数に関する展開係数で定義すれば、各モードが担っているエネルギー E_j が

$$E_j := \Pi_j^2 + \omega_l^{-2} \Phi^2 \tag{4.128}$$

と定義できる。すると、基底エネルギー ($j=0$) モードから k モードまでのエネルギーの総和 Σ_k が

$$\Sigma_k := \frac{1}{M} \sum_{j=0}^k E_j \tag{4.129}$$

と表せることがわかる。実際に数値計算によって Σ_k の時間発展を求めると、[7] から引用した図 4.8 となる。ただし $\epsilon = 0.088$ としてあり、初期条件は $\phi(0, x) \propto \epsilon(e_0 + e_1)$ のように選んだ。図 4.8 より、初期には $j=0$ モードと $j=1$ モードの二つのモードしか含まれていなかったに

18) ただしモード関数の性質から、実は $\omega_l = \omega_i + \omega_j - \omega_k$ の形で書かれる項のみが共鳴に寄与することが知られている。

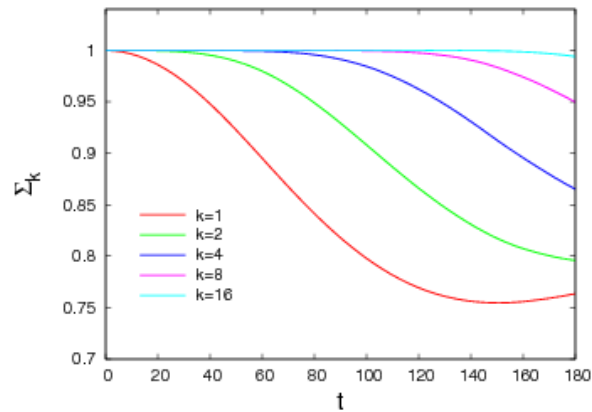


図 4.8 $j = 0$ から $j = k$ までのモードが持つエネルギーの割合の時間発展. ただし $\epsilon = 0.088$ で, 初期条件は $\phi(0, x) \propto \epsilon(e_0 + e_1)$ としてある. 文献 [7] より引用.

もかかわらず, 時間発展と共により高エネルギーのモードが生成されていることが読みとれる. これは既に見たように, より高エネルギーのモードは ϵ の高次の運動方程式を通して共鳴現象により生成されるためである. このような非線形現象を通してより高エネルギーのモードが生成されていく現象はエネルギーカスケードと呼ばれており, 通常の流体でも見られる現象である. エネルギーカスケードにより生じた高エネルギーモードは, 摂動として与えられた場がより小さなスケールに遷移していくことを意味しており, そのように局所化されたことでブラックホールが形成されるというメカニズムになっているわけである.

第 5 章 相対論的自己重力多体系

ここでは、一般相対論的な自己重力多体系を記述する手法について述べる。まずは一粒子分布関数から系の物理量であるエネルギー運動量テンソルと流れを定義する。その後、静的球対称時空における測地線方程式と有効ポテンシャルについて議論する。最後に相対論的な熱平衡状態を与える分布関数を導出する。

5.1 基本事項と物理量の定義

5.1.1 相対論的な自己重力多体系の記述

Newton 重力の枠組みと同様に、相対論的自己重力多体系も一粒子分布関数 $f(x^\mu, p^\mu)$ で記述される。ただし Newton 重力の場合と異なるのは、 x^μ は多様体 M 上の点 p における局所座標系であり、四元運動量 p^μ はその点の接空間 $T_p(M)$ の元であることである。このとき粒子の四元運動量が質量殻条件を満たすことから、常にそのうちの一成分を消去することができる。通常は粒子のエネルギーである時間方向の成分を消去するので、空間成分のみという意味で $f(x^\mu, p^i)$ と書くことが多い。本論文でもこの表記を用いる。

Newton 重力系の場合には、与えられた一粒子分布関数を運動量空間について積分し、得られた粒子の質量密度から Poisson 方程式を解くことで多体系の解を構成した。相対論的な場合でも基本的な考え方は同様で、与えられた一粒子分布関数に対するエネルギー運動量テンソルを

$$T_{\mu\nu} := \int dV_p p_\mu p_\nu f(x^\mu, p^i) \quad (5.1)$$

で与え、それに対する Einstein 方程式 (4.29) を解くことで解を構成する。ここで運動量空間の積分測度は次のように与えられる:

$$dV_p = 2\sqrt{-\det \mathbf{g}} \delta(\mathbf{p}^2 + m^2) d^D p. \quad (5.2)$$

このときデルタ関数は粒子の運動量が質量殻条件を満たす超曲面上で議論することを意味している。また、運動量空間上の積分は質量殻上の未来向きの運動量に関して実行する。未来向きの運動量とは、多様体上のいたるところで未来向きな時間的ベクトル \mathbf{n} との内積が $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} < 0$ を満たすようにとるということである。物理的には粒子のエネルギーが正定値であることを保証する条件となっており、この後具体的な系を考えるとときにあらわな表式を与える。

ある分布関数に対して Einstein 方程式を解くことで解を得たとき、その解を特徴付ける物理量がどのようなものかを考える必要がある。特に、熱平衡状態を考えるにはエントロピーなどの巨視的物理量を与える必要があるので、まずは一般に、一粒子分布関数が与えられたときのスカラー量の流れとチャージを定義する。適当なスカラー関数 $\mathcal{F}(f)$ で密度関数が与えられたとき、一般にその四次元的な流れは

$$F^\mu[f] = \int dV_p p^\mu \mathcal{F}(f) \quad (5.3)$$

で定義され、そのチャージは時間一定面積分:

$$F[\mathcal{F}(f)] := \int_\Sigma d\Sigma_\mu F^\mu \quad (5.4)$$

で表される。例えば、 $\mathcal{F}(f) = f$ のときにはそのチャージ $N[f]$ は全粒子数を表し、流れは当然粒子数の流れになる。また、 $\mathcal{F}(f) = -f(\ln f - 1)$ とすれば (5.3) はエントロピーの流れを、(5.4) は系の全エントロピーを表す。

5.1.2 Boltzmann 方程式と熱平衡状態

このようにして巨視的な物理量を定義したわけだが、これらは一般に保存するとは限らない。というのも、粒子系に衝突がある場合には一粒子分布関数は保存しないために、その積分も保存するとは限らないからである。ここでは一粒子分布関数の時間発展¹⁾ は、Newton 重力の Boltzmann 方程式を相対論的系に拡張した相対論的 Boltzmann 方程式で記述されると考える。相対論的な系での Boltzmann 方程式を得るには、各粒子の固有時 τ に関する微分²⁾ に置き換えれば良い:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{df}{dx^\mu} + \frac{dp^i}{d\tau} \frac{df}{dp^i} = C[f]. \quad (5.5)$$

ここで衝突項 $C[f]$ は、Newton 重力系の場合と同様に有限粒子数による補正項とみなす。 $C[f] = 0$ とした場合の系、つまり無衝突粒子による系を Einstein-Vlasov 系と呼ぶ。このとき Newton 重力の場合と同様に、相対論的な H 関数を

$$H := \int_\Sigma d\Sigma_\mu H^\mu, \quad H^\mu := \int dV_p p^\mu f(\ln f - 1) \quad (5.6)$$

と定義することができ、これは Newton 重力の場合と同様に時間変化に対して減少するか変化しない。従って相対論的な場合にも Boltzmann-Gibbs エントロピーに関する増大則が成り立つので、Newton 重力の場合と同様に熱平衡状態が定義できる。熱平衡状態が満たすべき条件については具体的な系で考えることにして、まずは無衝突系の一般論について簡単にまとめておく。

1) 相対論的な系における時間発展というのは、時空を時間一定面の和集合としてその時間一定面の時間発展を追うということになる。

2) 無質量粒子の場合にはアフィンパラメータで書くべきだが、ここでは一貫して τ を用いる。

5.2 静的球対称 Einstein–Vlasov 系

5.2.1 静的球対称時空と力学的平衡状態

静的球対称時空とは、等長変換群 $\mathbb{R}_t \times SO(D-1)$ を持つ時空である。従って、時間並進を生成する時間的 Killing ベクトル:

$$\eta := \partial_t \quad (5.7)$$

と $(D-1)$ 次元回転群を生成する空間的 Killing ベクトルの組み:

$$\{\xi_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{(D-1)(D-2)}{2} \quad (5.8)$$

を持ち、これらは $\mathfrak{so}(D-1)$ 代数

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}{}^k \xi_k \quad (5.9)$$

を成す。ただし $C_{ij}{}^k$ は $\mathfrak{so}(D-1)$ 代数の構造定数である。一般に、 $(D-1)$ 次元回転群を生成する Killing ベクトルは $(D-1)$ 次元実行列の反対称成分の数に等しい。例えば $D=4$ 、つまり二次元球面 S^2 の場合には、具体的な角度座標 (θ, ϕ) を用いて

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\sin \phi \partial_\theta - \cot \theta \cos \phi \partial_\phi, \\ \xi_2 &= -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \\ \xi_3 &= \partial_\phi \end{aligned} \quad (5.10)$$

と表すことができ、この場合の構造定数は完全反対称テンソル $C_{ij}{}^k = \epsilon_{ij}{}^k$ となる。既に述べたように、時空に Killing ベクトルが存在するとき、時空中の粒子の運動量を用いて測地線に沿った保存量を構成することができる。静的球対称時空の場合、以下のような合計 $1 + d(d-1)/2$ 個の独立な保存量が存在する:

$$\varepsilon := -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad j_i := \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}_i. \quad (5.11)$$

四次元時空の場合と同様に、物理的には ε は粒子のエネルギー、 j_i は粒子の角運動量の i 方向の成分を意味する。定義よりこれらは各粒子に沿って保存するので、一粒子分布関数が

$$f = f(\varepsilon, j_i) \quad (5.12)$$

の形で仮定すると相対論的 Boltzmann 方程式を自動的に満たす³⁾。ところが実際には、分布関数が j_i に対して独立に依存してしまうと時空の球対称性を破ってしまう。なぜならばこの

3) これは Newton 重力では Jeans の定理により必要十分性が保証されるが、相対論的な場合にはその反例が知られている [99].

とき, 添字 i の方向という特別な方向が生まれてしまうからである. そこでここでは角運動量の大きさ $J \geq 0$ を

$$J^2 := \sum_i j_i^2 \quad (5.13)$$

で定義し, 分布関数として

$$f = f(\varepsilon, J) \quad (5.14)$$

を仮定する.

次節より, 式 (5.14) の形で表される一般の分布関数に対してその物理量を計算し, Einstein 方程式の構造の外観を見る. その前に準備として, 具体的な座標を導入して一般次元での静的球対称時空の計量関数を定義しておく. 一般に, 静的球対称時空の計量は以下のように表すことができる:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{2\mu(r)} dt^2 + e^{2\nu(r)} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (5.15)$$

ここで, $d\Omega_{D-2}^2$ は $D-1$ 次元球面の計量で, この第 II 部では次の超曲面座標を用いる:

$$d\Omega_{D-2}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \cdots + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_{D-3} d\theta_{D-2}^2. \quad (5.16)$$

すると, 式 (5.11) で定義した保存量は具体的に,

$$\varepsilon = -p_t, \quad J^2 = r^4 \left[(p^{\theta_1})^2 + \cdots + \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{D-2} (p^{\theta_{D-2}})^2 \right] \quad (5.17)$$

と表せる.

5.2.2 Einstein–Vlasov 系の物理量

一粒子分布関数を一つ決めるとき, その多体系が作るエネルギー運動量テンソルは分布関数の運動量空間積分 (5.1) で与えられる. 従って実際にその解を構成するには, 運動量空間積分を実行することで時空点の関数としてエネルギー運動量テンソルを与え, それに対する Einstein 方程式を解くことになる. いま, 分布関数は式 (5.14) で表されていると仮定しているので, 運動量空間の積分測度をこれらの変数として与えておくと都合が良い. また, エネルギー積分と角運動量積分は質量殻条件を通して関連づいており, その積分は一般には分離しない. ところが分布関数がある条件を満たすときには積分が分離する座標系が存在し, 解析が行いやすくなる. ここではそのような座標系による運動量空間の積分測度の表式を導出し, さらにエネルギー運動量テンソルと次章で用いる多体系の粒子数等の形式的な表現を与える.

計量が式 (5.15) で与えられる座標系において, 粒子の質量殻条件は具体的に

$$-e^{2\mu}(p^t)^2 + e^{2\nu}(p^r)^2 + r^2 \left[(p^{\theta_1})^2 + \cdots + \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{D-2} (p^{\theta_{D-2}})^2 \right] = -m^2 \quad (5.18)$$

と表すことができる。時空が静的な場合、粒子のエネルギーを保存量として定義できているので運動量が未来向きであるという条件は粒子のエネルギーに関する階段関数で表現できる。するとこのとき、エネルギーの正定値性も含めた運動量空間の積分測度は次のように与えられる:

$$dV_p = 2\sqrt{-\det \mathbf{g}} \delta(\mathbf{p}^2 + m^2)\theta(\varepsilon) d^D p. \quad (5.19)$$

ここでデルタ関数は既に述べた通り、粒子の運動量が質量殻条件を満たす超曲面上で議論することを意味している。

エネルギーと角運動量の具体的な表式 (5.17) を用いれば、階段関数も考慮して

$$\varepsilon = e^\mu \left[m^2 + e^{2\nu} (p^r)^2 + \frac{J^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.20)$$

となる。これを用いれば p_t 積分についての積分を実行することができ、積分された $(D-1)$ 次元の積分測度をあらためて dV_p と書くことにすれば、

$$\begin{aligned} dV_p &= \frac{\sqrt{-g}}{\varepsilon} dp^r \wedge dp^{\theta_1} \wedge \cdots \wedge dp^{\theta_{D-2}}, \\ &= \frac{e^{\mu+\nu}}{\varepsilon} dp^r \wedge dp^{\theta_1} \wedge d(\sin \theta_1 p^{\theta_2}), \\ &\quad \wedge \cdots \wedge d(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{D-3} p^{\theta_{D-2}}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

と表すことができる。上式は動径成分と角度成分に分解できるので、それぞれ変数変換することで保存量の積分としての表式を以下より導出する。

まず角度成分について、角運動量 J と新たな角度座標 $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{D-3})$ を用いて

$$\begin{aligned} p^{\theta_1} &= \frac{J}{r^2} \cos \psi_1, \\ \sin \theta_1 p^{\theta_2} &= \frac{J}{r^2} \sin \psi_1 \cos \psi_2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{D-4} p^{\theta_{D-3}} &= \frac{J}{r^2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cdots \sin \psi_{D-4} \cos \psi_{D-3}, \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{D-3} p^{\theta_{D-2}} &= \frac{J}{r^2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cdots \sin \psi_{D-4} \sin \psi_{D-3} \end{aligned}$$

と定義する。すると、 $(p^{\theta_1}, p^{\theta_2}, \dots, p^{\theta_{D-2}})$ に関する積分は半径 J/r^2 の球面積分と等しいことがわかるので、

$$dp^{\theta_1} \wedge d(\sin \theta_1 p^{\theta_2}) \wedge \cdots \wedge d(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{D-3} p^{\theta_{D-2}}) = \frac{J^{D-3}}{r^{2(D-2)}} dJ \wedge d\Omega_{D-3} \quad (5.23)$$

と書ける。ここで $d\Omega_{D-3}$ は $(D-3)$ 次元球面の面積要素である。一方動径方向については、式 (5.20) が p^r について偶関数であることに注意すると、質量殻条件 (5.20) をそのまま用いれば、

$$dp^r = 2e^{-\mu-\nu} \left[\varepsilon^2 - e^{2\mu} \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \varepsilon d\varepsilon + \text{angular term} \quad (5.24)$$

となるのがわかる. 以上より, 体積要素は保存量 (ε, J) と角度座標 $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{D-3})$ を用いて

$$dV_p = \frac{2J^{D-3}}{r^{2(D-2)}} \left[\varepsilon^2 - e^{2\mu} \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\varepsilon \wedge dJ \wedge d\Omega_{D-3} \quad (5.25)$$

と表せる.

最後に, 変数分離型の分布関数を用いる際に便利な座標系を定義し, それによる表式を求める. そのために, 変数 (ε, J) がとり得る領域を簡潔に述べる. いま, $\varepsilon > 0$ かつ $J > 0$ であり, 質量殻条件を満たすので ε を固定したとき J は上限値を持つ. その値を J_{\max} と書くことにすると, J_{\max} は式 (5.20) で $p^r = 0$ としたときの解で

$$J_{\max} = r^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{e^{2\mu}} - m^2 \right) \quad (5.26)$$

である. 当然ながらこの最大値は, 粒子があるエネルギーを持つときに静止質量以外を全て角運動量が担っている場合に対応している. 反対に, ある角運動量を持つ粒子は動径方向の運動量を持っていなかったとしても可能なエネルギーの最小値を持つわけである⁴⁾.

さて, この最大値 J_{\max} を用いて新たな変数 $s \in [0, 1]$ を

$$s := \left(\frac{J}{J_{\max}} \right)^2 \quad (5.27)$$

で定義すると,

$$\varepsilon^2 - e^{2\mu} \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) = (1-s)(\varepsilon^2 - m^2 e^{2\mu}) \quad (5.28)$$

なので,

$$dV_p = \frac{e^{-(D-2)\mu} s^{\frac{D-4}{2}}}{\sqrt{1-s}} (\varepsilon^2 - m^2 e^{2\mu})^{\frac{D-3}{2}} d\varepsilon \wedge ds \wedge d\Omega_{D-3} \quad (5.29)$$

である. 最後に, $\hat{\varepsilon} = e^{-\mu}\varepsilon$ とすれば,

$$dV_p = \frac{s^{\frac{D-4}{2}}}{\sqrt{1-s}} (\hat{\varepsilon}^2 - m^2)^{\frac{D-3}{2}} d\hat{\varepsilon} \wedge ds \wedge d\Omega_{D-3} \quad (5.30)$$

が得られる. もちろん $\hat{\varepsilon}$ は局所慣性系における粒子のエネルギーであり, 静止質量の値を最小値に持つことと対応する. 従って変数 $(\hat{\varepsilon}, s, \psi_i)$ の積分領域は

$$\hat{\varepsilon} \in [m, \infty), \quad s \in [0, 1], \quad \psi_i \in [0, \pi] \quad \text{if } 1 \leq i \leq D-4, \quad \psi_{D-3} \in [0, 2\pi) \quad (5.31)$$

となる. この表式で (技術的に) 重要なことは, $\hat{\varepsilon}$ 積分と s 積分の積分領域が独立で, かつ測度以外の部分がそれぞれの関数の積で書けていることである. 従って残りの被積分関数, 具体的には分布関数と運動量の成分の積が変数 $(\hat{\varepsilon}, s, \psi_i)$ に関して分離していれば積分を独立に実行

4) これは既に述べた粒子の有効ポテンシャルに含まれるパラメータの関係性に対応している.

できる。静的球対称の仮定の下では分布関数は ψ_i には依存しないため、 $(\hat{\varepsilon}, s)$ に関して分離すれば良い。これは数値計算を実行する際には大きな利点となる。ところが前提として、分布関数は $f(\varepsilon, J)$ の形を仮定しているので、一般にこれが $f(\varepsilon, J) = f_\varepsilon(\varepsilon)f_s(s)$ の形に書けるとは限らない。そこでよく用いられるのが、角運動量 J に関して冪的な依存性を持つ分布関数である。この仮定により、式 (5.27) からわかるように分布関数が分離するので解析が容易になる。

ここでは単に、適切な仮定により分布関数が次のような形

$$f(\varepsilon, J) = f_\varepsilon(\hat{\varepsilon})f_s(s) \quad (5.32)$$

に帰着したとして話を進めることにする。またこのとき、エネルギーや角運動量にカットオフを入れることがしばしばある⁵⁾ が、ここでは関数 $f_\varepsilon(\hat{\varepsilon})$ および $f_s(s)$ に全て取り込まれているとする。

それではこの仮定の下で多体系の物理量がどのように与えられるかを計算していく。静的球対称時空においては、エネルギー運動量テンソルについて意味があるのは

$$\rho(r) := -T_t^t, \quad p(r) := T_r^r, \quad p_T(r) := T_{\theta_i}^{\theta_i} \quad (5.33)$$

である。ここで $\rho(r)$ はエネルギー密度、 $p(r)$ は動径方向の圧力、 $p_T(r)$ は接方向の圧力をそれぞれ表す。圧力が動径方向と接方向で異なるのは、多体系においては運動量空間において運動量の分散が非等方的になることが可能なためである。実際、例えば完全流体では $p = p_T$ でありこのような解は構成できないことが容易に理解できる。なお、球対称性により全ての θ_i について p_T は等しくなる。また非対角成分については Einstein 方程式により零になるので、独立成分は上記の三個となる。

まずエネルギー密度について、 $-p_t p^t = e^{-2\mu} \varepsilon^2 = \hat{\varepsilon}^2$ なので

$$\rho(r) = \int_0^1 ds \frac{s^{\frac{D-4}{2}}}{\sqrt{1-s}} f_s(s) \int_m^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - m^2)^{\frac{D-3}{2}} \hat{\varepsilon}^2 f_\varepsilon(\hat{\varepsilon}) \int d\Omega_{D-3} \quad (5.34)$$

を得る。次に、動径方向の圧力について、 $p_r p^r = (1-s)(\hat{\varepsilon}^2 - m^2)$ より

$$p(r) = \int_0^1 ds s^{\frac{D-4}{2}} \sqrt{1-s} f_s(s) \int_m^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - m^2)^{\frac{D-1}{2}} f_\varepsilon(\hat{\varepsilon}) \int d\Omega_{D-3} \quad (5.35)$$

である。最後に、接方向の圧力は $p_{\theta_i} p^{\theta_i} = s(\hat{\varepsilon}^2 - m^2) \cos^2 \psi_1$ より

$$p_T(r) = \int_0^1 ds \frac{s^{\frac{D-2}{2}}}{\sqrt{1-s}} f_s(s) \int_m^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - m^2)^{\frac{D-1}{2}} f_\varepsilon(\hat{\varepsilon}) \int d\Omega_{D-3} \cos^2 \psi_1 \quad (5.36)$$

角度積分について、

$$\int d\Omega_{D-3} = S_{\frac{D-2}{2}} = (D-2) \int d\Omega_{D-3} \cos^2 \psi_1 \quad (5.37)$$

5) エネルギーのカットオフは空間的にコンパクトな解を構成することが目的のことが多い。また、角運動量に下限を設けることで中心が空洞な球殻状の解を構成できる。こちらは中心ブラックホールを伴う系に注目している場合に便利である。当然であるが、いずれの場合も実際にはモデル化したい系に合わせて分布関数を選ぶわけである。

が成立することをいれれば結局,

$$\rho(r) = S_{\frac{D-2}{2}} \int_0^1 ds \frac{s^{\frac{D-4}{2}}}{\sqrt{1-s}} f_s(s) \int_m^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - m^2)^{\frac{D-3}{2}} \hat{\varepsilon}^2 f_{\hat{\varepsilon}}(\hat{\varepsilon}), \quad (5.38a)$$

$$p(r) = S_{\frac{D-2}{2}} \int_0^1 ds s^{\frac{D-4}{2}} \sqrt{1-s} f_s(s) \int_m^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - m^2)^{\frac{D-1}{2}} f_{\hat{\varepsilon}}(\hat{\varepsilon}), \quad (5.38b)$$

$$p_T(r) = \frac{S_{\frac{D-2}{2}}}{D-2} \int_0^1 ds \frac{s^{\frac{D-2}{2}}}{\sqrt{1-s}} f_s(s) \int_m^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - m^2)^{\frac{D-1}{2}} f_{\hat{\varepsilon}}(\hat{\varepsilon}) \quad (5.38c)$$

となる. ここで分布関数が運動量分散について等方的な場合を考えると $f_s(s) = 1$ であるが, このとき beta 関数の性質より $p = p_T$ になることが容易に確認できる. すなわち, 分布関数が角運動量に依存しない関数の場合にはそのエネルギー運動量テンソルは等方的となる.

次に粒子数密度 $n(r)$ の表式を導出する. 第二種変形 Bessel 関数について, 部分積分すること

$$\begin{aligned} \int_1^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} \hat{\varepsilon} e^{-z\hat{\varepsilon}} &= \frac{1}{2n+1} \int_1^\infty d\hat{\varepsilon} \frac{d}{d\hat{\varepsilon}} \left((\hat{\varepsilon}^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} \right) e^{-z\hat{\varepsilon}}, \\ &= \frac{1}{2n+1} \left[(\hat{\varepsilon}^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-z\hat{\varepsilon}} \right]_1^\infty + \frac{z}{2n+1} \int_1^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-z\hat{\varepsilon}}, \\ &= \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^n} K_{n+1}(z) \end{aligned} \quad (5.39)$$

を得る. 従って,

$$\begin{aligned} n(r) &:= e^{-\mu+\nu} \int dV_p \varepsilon e^{\alpha-\beta\varepsilon}, \\ &= e^{\alpha+\nu} \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_1^\infty d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - 1)^{\frac{D-3}{2}} \hat{\varepsilon} e^{-z\hat{\varepsilon}}, \\ &= 2e^{\alpha+\nu} \left(\frac{2\pi}{z} \right)^{\frac{D-2}{2}} K_{\frac{D}{2}}(z) \end{aligned} \quad (5.40)$$

となる.

5.2.3 Einstein–Vlasov 系の重力場

三次元回転群の軌道が二次元球面を成すように, 一般に d 次元回転群は $(d-1)$ 次元球面をなすので, その軌道の次元は $(d-1)$ となる. 静的球対称時空においてはそれに加えて時間的 Killing ベクトル η を持つので静的球対称時空の方程式系はその時空次元によらず余等質 1 となる. すなわち, Einstein 方程式が動径座標 r に関する常微分方程式で表される.

(5.15) の座標系において, 静的球対称時空における Einstein 方程式は, 以下の二本の一階常微分方程式で表される:

$$-16\pi r^2 \rho(r) e^{2\nu} = (D-3)(D-2) + e^{2\nu} \left(-(D-3)(D-2) + 2\Lambda r^2 \right) - 2(D-2)r\nu', \quad (5.41a)$$

$$16\pi r^2 p(r) e^{2\nu} = (D-3)(D-2) + e^{2\nu} \left(-(D-3)(D-2) + 2\Lambda r^2 \right) + 2(D-2)r\mu'. \quad (5.41b)$$

このうち式 (5.41a) については形式的には積分を実行することができる. 特にここで中心での正則条件を課すと, 円錐特異点が存在しないためには $\nu(0) = 0$ である必要がある. 従って,

$$e^{-2\nu} = 1 - \frac{kM(r)}{r^{D-3}} - \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}r^2, \quad k := \frac{16\pi}{(D-2)S_{D-1}} \quad (5.42)$$

となる. ここで $M(r)$ は Misner–Sharp 質量 (準局所的な質量) で,

$$M(r) := S_{D-1} \int_0^r du u^{D-2} \rho(u) \quad (5.43)$$

と定義される. 式 (5.42) を式 (5.41b) に代入することで

$$\mu' = \frac{e^{2\nu}}{r} \left[\frac{k(D-3)M(r)}{2r^{D-3}} + \frac{8\pi r^2 p(r)}{D-2} - \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}r^2 \right] \quad (5.44)$$

を得る.

5.2.4 相対論的熱平衡状態の導出

相対論的な熱平衡条件

$$\delta S + \alpha \delta N - \beta \delta M = 0 \quad (5.45)$$

から熱平衡状態における一粒子分布関数の関数形を求める. ただし, ここではより一般的な場合としてエントロピー密度が $S(f)$ で与えられる場合を考え,

$$S[S(f)] := \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} S^{\mu}, \quad S^{\mu}[S(f)] = \int dV_p p^{\mu} S(f) \quad (5.46)$$

として $S(f)$ に対する条件として求める.

相対論的な系において厄介になるのが, 粒子の質量殻条件が時空点に依存しており, 分布関数を変化させたことによる時空の変化が複雑になることである. そこで煩雑さを避けるために, まずは粒子の局所慣性系を導入する. 局所 Lorentz 変換 $e^{\mu}_{\hat{\mu}}$ により局所慣性系の計量 $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ を

$$\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = e^{\mu}_{\hat{\mu}} e^{\nu}_{\hat{\nu}} g_{\mu\nu} \quad (5.47)$$

で導入すると, 具体的には,

$$\left(e^{\mu}_{\hat{\mu}} \right) = \text{diag} \left(e^{-\mu}, e^{-\nu}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{D-3}} \right) \quad (5.48)$$

と表せる. すると定義から明らかに, 運動量空間の不変体積要素は以下のように書き直せる:

$$\begin{aligned} dV_p &= 2\delta(p^2 + 1)\theta(\hat{\varepsilon}) d^D p \\ &= \frac{1}{\hat{\varepsilon}} dp^{\hat{r}} \wedge dp^{\hat{\theta}_1} \wedge \cdots \wedge dp^{\hat{\theta}_{D-2}}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

ここで $\hat{\varepsilon} := -p_i$ は局所慣性系での粒子のエネルギーを表す。以降の議論では、分布関数の変分は局所慣性系で表示された運動量を固定して考えることに注意する。

熱平衡状態の分布関数を f_{TE} と書くこととし、計量関数についても μ_{TE} や ν_{TE} と表すことにする。その近傍の分布関数 $f = f_{\text{TE}} + \delta f$ によって得られる静的球対称な自己重力系を考えたとき、その Einstein 方程式の解は関数 $\mu_{\text{TE}} + \delta\mu$ と $\nu_{\text{TE}} + \delta\nu$ で表される。このとき、エネルギー密度の変分を

$$\delta\rho := \int dV_p \hat{\varepsilon}^2 \delta f \quad (5.50)$$

で定義すると、Einstein 方程式の (r, r) 成分から

$$\frac{d}{dr} (r^{D-3} e^{-2\nu_{\text{TE}}} \delta\nu) = \frac{8\pi}{D-2} r^{D-2} \delta\rho \quad (5.51)$$

が導かれる。従って δf と $\delta\nu$ は独立な変分ではないが、しばらくはこれらが独立であると思って計算を進め、必要などころでこの関係式を用いることとする。これはもちろん、非相対論的な場合には $\delta\phi$ と $\delta\rho$ が Poisson 方程式を通して関係していることと同様の関係式である。

一般に物理量 (5.4) の変分は

$$\begin{aligned} \delta F &:= F[f + \delta f] - F[f], \\ &= \int d\Gamma \hat{\varepsilon} \delta(e^\nu \mathcal{F}), \\ &= \int d\Gamma e^\nu \hat{\varepsilon} \left[\left(\mathcal{F} \delta\nu + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} \delta f \right) + \mathcal{O}(\delta f^2) \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

と書けることから、式 (5.45) は

$$\int dr r^{D-2} \int dV_p \left\{ e^\nu \hat{\varepsilon} \left(\mathcal{S} \delta\nu + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial f} \delta f \right) + \alpha e^\nu \hat{\varepsilon} (f \delta\nu + \delta f) - \beta \hat{\varepsilon}^2 \delta f \right\} = 0 \quad (5.53)$$

と表すことができる。ここで $\hat{\beta} := e^\mu \beta$ と定義し、 s^* を

$$s^* := \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial f} + \alpha - \beta \varepsilon = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial f} + \alpha - \hat{\beta} \hat{\varepsilon} \quad (5.54)$$

で導入すると、式 (5.53) はさらに以下のように書き直せる:

$$\int dr r^{D-2} \int dV_p (\mathcal{S} \delta\nu + s^* \delta f + \alpha f \delta\nu) e^\nu \hat{\varepsilon} + \int dr r^{D-2} \beta (e^{\mu+\nu} - 1) \int dV_p \hat{\varepsilon}^2 \delta f = 0. \quad (5.55)$$

計量関数とエネルギー密度及び圧力に関して、Einstein 方程式から

$$\mu' + \nu' = \frac{8\pi}{D-2} r e^{2\nu} (\rho + p) \quad (5.56)$$

が成り立つことを用いると, 第二項は

$$\begin{aligned}
& \int dr r^{D-2} \beta (e^{\mu+\nu} - 1) \int dV_p \hat{\varepsilon}^2 \delta f, \\
&= \int dr \beta (e^{\mu+\nu} - 1) \frac{(D-2)}{8\pi} \frac{d}{dr} (r^{D-3} e^{-2\nu} \delta\nu), \\
&= -\frac{(D-2)\beta}{8\pi} \int dr (\mu' + \nu') e^{\mu-\nu} r^{D-3} \delta\nu, \\
&= -\beta \int dr r^{D-2} e^{\mu+\nu} (\rho + p) \delta\nu
\end{aligned} \tag{5.57}$$

となることが確認できる. 従って, 式 (5.55) は結局

$$\int dr r^{D-2} \int dV_p (H \delta\nu + s^* \delta f) e^\nu \hat{\varepsilon} - \beta \int dr r^{D-2} e^{\mu+\nu} (\rho + p) \delta\nu = 0 \tag{5.58}$$

となる. ただし $H = \mathcal{S} + \alpha f$ とした.

ここで, $G = G(\varepsilon, J)$ の形で表される関数に対して成り立つ恒等式:

$$\int dV_p \left. \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right|_J (p_t)^i (p_r)^j = -i \int dV_p G (p_t)^{i-1} (p_r)^j - (j-1) e^{-2\mu+2\nu} \int dV_p G (p_t)^{i+1} (p_r)^{j-2} \tag{5.59}$$

を用いる. その証明は付録 E に記しておく. 式 (5.59) で $(i, j) = (1, 2)$ とすると

$$\begin{aligned}
\rho + p &= - \int dV_p p_t p^t f + \int dV_p p_r p^r f, \\
&= e^{-2\nu} \left\{ \int dV_p (p_r)^2 f + e^{-2\mu+2\nu} \int dV_p (p_t)^2 f \right\}, \\
&= -e^{-2\nu} \int dV_p (p_t) (p_r)^2 \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J, \\
&= e^\mu \int dV_p \hat{\varepsilon} p_r p^r \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J
\end{aligned} \tag{5.60}$$

が得られるので,

$$\begin{aligned}
\beta(\rho + p) &= \beta e^\mu \int dV_p \hat{\varepsilon} p_r p^r \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J, \\
&= \int dV_p p_r p^r \beta \varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J
\end{aligned} \tag{5.61}$$

であることが分かる. ここで明らかに

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varepsilon} \right|_{m,J} = \left. \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J = (s^* - \alpha + \beta \varepsilon) \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J \tag{5.62}$$

が成立するので,

$$\begin{aligned}
\beta(\rho + p) &= \int dV_p p_r p^r \left(\left. \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varepsilon} \right|_J + \alpha \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{m,J} - s^* \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J \right), \\
&= e^{-2\nu} \int dV_p (p_r)^2 \left. \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \right|_J - \int dV_p p_r p^r s^* \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J
\end{aligned} \tag{5.63}$$

である. 次に, 式 (5.59) で $(i, j) = (0, 2)$ とすると

$$\beta(\rho + p) = e^{-\mu} \int dV_p \hat{\varepsilon} H - \int dV_p p_r p^r s^* \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J \quad (5.64)$$

であるから, 式 (5.58) は

$$\begin{aligned} 0 &= \int dr r^{D-2} \left[\int dV_p (H \delta\nu + s^* \delta f) e^\nu \hat{\varepsilon} - \beta e^{\mu+\nu} (\rho + p) \delta\nu \right], \\ &= \int dr r^{D-2} \int dV_p \left(\hat{\varepsilon} \delta f + p_r p^r e^\mu \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_J \delta\nu \right) e^\nu s^* \end{aligned} \quad (5.65)$$

と書き直せる. 分布関数の変分 δf と計量関数の変分 $\delta\nu$ は従属な変分であることを思い出すと, 上式が任意の変分について成り立つためには $s^* = 0$ が必要十分条件である. 従って, 一般のエントロピー密度 $\mathcal{S}(f)$ についての熱平衡条件は

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial f} + \alpha - \beta \varepsilon = 0 \quad (5.66)$$

となる. 特に Boltzmann-Gibbs エントロピーの場合には, $-\log f + \alpha - \beta \varepsilon = 0$ より, Maxwell-Jüttner 分布関数

$$f_{MJ} = \exp(\alpha - \beta \varepsilon) \quad (5.67)$$

が導かれる.

ここで重要なことは, 熱平衡状態では分布関数が角運動量 J に依存していないことである. 従って熱平衡状態は運動量空間について等方的であり, 分散を持たない. これは式 (5.32) において $f_s(s) = 1$ となることを意味し, 既に述べたようにこのとき $p = p_T$ となる.

第 6 章 相対論的重力熱的不安定性

前節までで相対論的熱平衡状態が満たすべき条件が求まり、分布関数が Maxwell–Jüttner 分布関数で与えられることが確認できた。この第 6 章では Maxwell–Jüttner 分布に対する Einstein 方程式を解くことで相対論的な熱平衡状態を構成し、さらにその安定性解析を行う。

6.1 相対論的熱平衡状態の記述

6.1.1 漸近 AdS 時空の閉じ込め機構と熱平衡状態

物質の配位や重力場の方程式を導出する前に、元々の動機に立ち返って以降で我々がどのような解を構成すべきかを簡単に整理しておく。またそれに伴い、我々が扱う系と第 I 部で述べた系との決定的な違いについても確認する。

まず、第 I 部で扱った非相対論的な自己重力多体系において、多体系は断熱壁によって閉じ込められた系を考えていた。これは、自己重力系の熱平衡状態は断熱壁によって人工的に閉じ込めなければ有限の質量を持つ解を構成できないからである。一方で、既に述べたように、漸近 AdS 時空においては AdS 障壁による閉じ込め機構が働く。従って、負の宇宙項を導入すれば、人工的な断熱壁を導入することなく有限の質量を持つ熱平衡解を構成できることが期待されるわけである。そこで我々は、Einstein 方程式を中心から無限遠まで解くことで、人工的な壁やカットオフのない相対論的な熱平衡状態を構成した上で、負の宇宙項によって定められる長さスケールである AdS 半径 L を自己重力系の典型的な大きさであるとみなす。すると熱平衡状態は Newton 重力の場合と同様に、全粒子数 N 、全質量 M 、そして系のサイズ L により指定される状態となることが期待できる。以降、第 6 章では熱平衡状態を構成してそのパラメータ依存性を見ることで確かに AdS 半径が系のサイズを特徴付けることを確認した上でその安定性解析を行う。

6.1.2 熱平衡状態の局所的な物理量

熱平衡状態における物理量の具体的な表式を導出する。ここまでの解析では、多体系を構成する粒子の質量が有限であるかどうかに関わらず適用可能な記述をおこなってきた。ところが既に述べたように、粒子の質量が零の場合にはその測地線は無遠、つまり AdS 境界に有限の時間で到達する。従って無質量粒子による熱平衡状態を作ることはできないと考えられる。そこで以降では粒子の質量を正定値とし、簡単のため $m = 1$ とする。既に求めた Maxwell–Jüttner 分布関数を、前章で求めたエネルギー運動量テンソルの一般的表式に適用

して積分を実行する。まず, Maxwell–Jüttner 分布関数を変数 $(\hat{\varepsilon}, s)$ で書き直すと,

$$f_{\text{MJ}} = \exp(\alpha - \beta\varepsilon) = \exp(\alpha - z\hat{\varepsilon}) \quad (6.1)$$

となる。ここで $z := e^\mu \beta$ とした。すると $f_s(s) = 1$ で, s 積分については

$$\int_0^1 ds \frac{s^{\frac{D-4}{2}}}{\sqrt{1-s}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{D-2}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}, \quad \int_0^1 ds s^{\frac{D-4}{2}} \sqrt{1-s} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{D-2}{2})}{2\Gamma(\frac{D+1}{2})}, \quad (6.2)$$

と計算できる。するとエネルギー密度と圧力は, 式 (5.38) より

$$\rho(r) = e^\alpha S_{D-1} \int d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - 1)^{\frac{D-3}{2}} \hat{\varepsilon}^2 e^{-z\hat{\varepsilon}}, \quad (6.3a)$$

$$p(r) = \frac{e^\alpha S_{D-1}}{D-1} \int d\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon}^2 - 1)^{\frac{D-1}{2}} e^{-\beta\hat{\varepsilon}} \quad (6.3b)$$

となる。既に述べたように, 熱平衡状態では $f_s(s) = 1$ なので $p = p_T$ となっている。さらにエネルギー積分は第二種変形 Bessel 関数 $K_\nu(z)$ を使えば解析的に表現できて,

$$\rho(r) = 2e^\alpha \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{D-2}{2}} \left(\frac{D-1}{z} K_{\frac{D}{2}}(z) + K_{\frac{D-2}{2}}(z)\right), \quad (6.4a)$$

$$p(r) = \frac{e^\alpha}{\pi} \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}}(z) \quad (6.4b)$$

となる。同様にして, 粒子数密度は

$$n(r) = 2e^{\alpha+\mu} \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}}(z) \quad (6.5)$$

と書ける。

6.2 重力場の方程式と解の性質

6.2.1 Einstein 方程式の表式と境界条件

今我々が興味あるのは負の宇宙項によって閉じ込められた自己重力多体系であるから, 以降では $\Lambda < 0$ とする。このとき一般次元における AdS 半径は, 式 (4.37) を思い出すと

$$L := \left[-\frac{(D-1)(D-2)}{2\Lambda} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

と定義できる。AdS 半径 L を用いれば, Einstein 方程式 (5.44) は

$$\mu' = \frac{\frac{k(D-3)M(r)}{2r^{D-3}} + \frac{r^2}{L^2} + \frac{8\pi r^2 p(r)}{D-2}}{r \left(1 - \frac{kM(r)}{r^{D-3}} + \frac{r^2}{L^2} \right)} \quad (6.7)$$

と書き直せる. ここでは中心で正則な解に注目する. 後は式 (6.7) をエネルギー運動量テンソルの下で数値的に解けば良いわけであるが, 具体的に解を構成する前に, 数値計算を実行しやすい無次元化を行う.

いま時空は中心で正則であり, 物質の配位は式 (6.3b) で与えられるので, エネルギー密度は中心で有限の値を持つ. その値を ρ_c と書くことにすると, 典型的な長さ l を

$$l := (S_{D-1}\rho_c)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

で定義できる. そこで無次元の動径座標 $x = r/l$ を導入し, さらに, 各物理量も ρ_c を用いて以下のように無次元化できる:

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{(D-1)K_{\frac{D}{2}}(z)e^{-y} + z_c K_{\frac{D}{2}-1}(z)}{(D-1)K_{\frac{D}{2}}(z_c) + z_c K_{\frac{D}{2}-1}(z_c)} e^{-(\frac{D}{2}-1)y}, \quad (6.9a)$$

$$\tilde{p}(x) = \frac{K_{\frac{D}{2}}(z)}{K_{\frac{D}{2}}(z_c)} e^{-\frac{D}{2}y}, \quad (6.9b)$$

$$\tilde{n}(x) = \frac{K_{\frac{D}{2}}(z)}{K_{\frac{D}{2}}(z_c)} \left(1 - \frac{k\tilde{M}(r)}{x^{D-3}} + \frac{x^2}{\lambda^2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-(\frac{D}{2}-1)y}. \quad (6.9c)$$

ここで $z_c := z(0)$ であり,

$$w_c = \frac{K_{\frac{D}{2}}(z_c)}{(D-1)K_{\frac{D}{2}}(z_c) + z_c K_{\frac{D}{2}-1}(z_c)} \quad (6.10)$$

とした. また, 準局所的量についても

$$\tilde{M}(x) = \int_0^x dz z^{D-2} \tilde{\rho}(z), \quad \tilde{N}(x) = z_c w_c \int_0^x dz z^{D-2} \tilde{n}(z) \quad (6.11)$$

と定義した. すると新たな計量関数 $y(x)$ を

$$y := \mu - \mu_c, \quad \mu_c := \mu(0) \quad (6.12)$$

が定義でき, $y(x)$ に対する Einstein 方程式は,

$$y' = \frac{\frac{k(D-3)\tilde{M}(x)}{2x^{D-3}} + \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{8\pi w_c x^2 \tilde{p}(x)}{(D-2)S_{D-1}}}{x \left(1 - \frac{k\tilde{M}(x)}{x^{D-3}} + \frac{x^2}{\lambda^2} \right)} \quad (6.13)$$

となる. ここで $\lambda = L/l$ は無次元化された AdS 半径である. 中心における境界条件は $y(x)$ の定義より $y(0) = 0$ である. Einstein 方程式 (6.13) は二つの定数 (z_c, λ) をパラメータとして持つ. そのうち z_c は粒子の質量で無次元化された逆温度で, 重力的な赤方偏移因子の中心での値を決めるものとなっている¹⁾. 一方 λ は無次元化された AdS 半径で, この系においてはその大きさを決定づけるパラメータとなり, 特に $\lambda \rightarrow \infty$ の極限では $\Lambda \rightarrow 0$, すなわち漸近平坦極限に対応する. 解の配位に対する (z_c, λ) の具体的な依存性については, 次節で数値計算の結果を見ながら考察する.

1) ただし通常赤方偏移因子として使われる z とは異なる定義であることには注意してほしい.

6.2.2 解の配位とパラメータ依存性

ここでは数値計算によって得られた解について、そのパラメータ依存性をエネルギー密度 $\tilde{\rho}$ とコンパクトネス

$$\mathcal{C}(x) := \tilde{M}(x)/x^{D-3} \quad (6.14)$$

の空間依存性から見ていく。まず初めに、漸近平坦な極限において熱平衡解がどのような振る舞いになるかを確認する。図 6.1 は $D = 4$ の場合について、 $\lambda \rightarrow \infty$ として z_c をいくつかの値に変化させた場合の配位を図示した。図 6.1a は半径 x の関数としてのエネルギー密度 $\tilde{\rho}(x)$ の値、図 6.1b はコンパクトネス $\mathcal{C}(x)$ の値をそれぞれ示している。

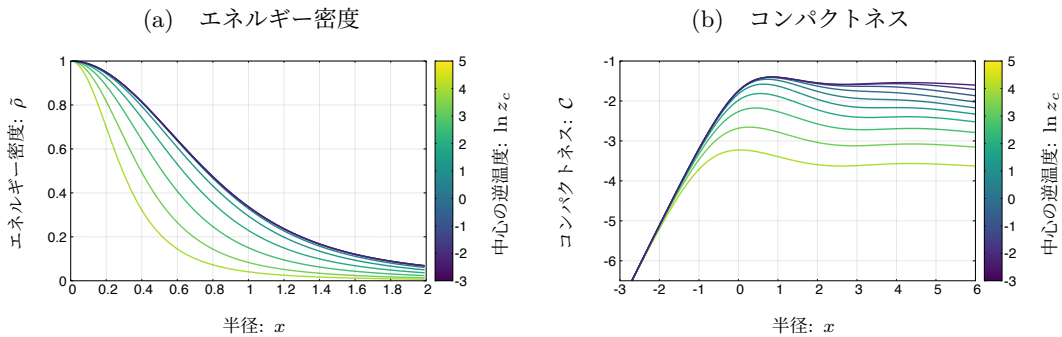


図 6.1 $D = 4$ での $\lambda \rightarrow \infty$ 極限における解の振る舞い。

図 6.1a から分かるように、熱平衡状態では物質のエネルギー密度は中心にピークを持ち、遠方に行くに従って単調に減少していく。実際 Einstein 方程式とエネルギー保存則から $d\tilde{\rho}/dx < 0$ が容易に示せる。一方図 6.1b は、コンパクトネスが振動しながら一定値に漸近することを表している。従って、相対論的な状況においても、漸近平坦な場合は有限の質量を持つ熱平衡状態は実現できない²⁾。この極限において、解の系列は z_c の 1 パラメータ系列として表されるが、図 6.1 から読み取れるように z_c が小さいほど大きなエネルギー密度を持ち、コンパクトネスが大きくなる。これは中心が高温であるほど重力的な寄与が大きくなり、相対論効果が強まることを示している。一方、中心近傍の振る舞いについては $\tilde{M}/x \propto x^2$ 程度で増加していることが分かる。これは、エネルギー保存から中心近傍で $\tilde{\rho} \simeq 1 + \mathcal{O}(x^2)$ より $\tilde{M} \propto x^3$ 程度になることからすぐに理解できる。なお、 $\tilde{\rho}$ の一階微分が中心で零になることも図 6.1a から確認できる。

次に、同様に $D = 4$ の場合について、 $z_c = 1$ に固定して λ の値を変化させた図を図 6.2 に示した。図 6.1 と同様に、図 6.2 にはエネルギー密度を、図 6.2a にはコンパクトネスを図示してある。

2) Boltzmann-Gibbs エントロピーの場合には質量は発散するが、異なるエントロピーに対してはその限りではない。

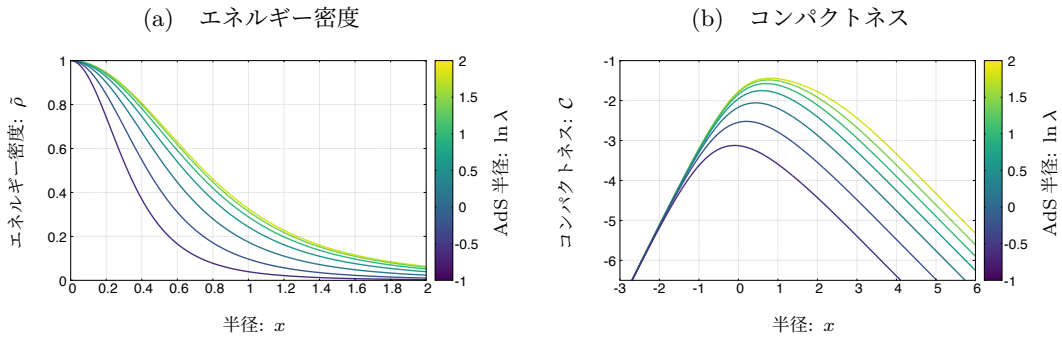


図 6.2 $D = 4$ における解の空間依存性の中心の逆温度 z_c 依存性.

まず図 6.2a から明らかなのは, λ を小さくするほど系の空間的な広がりが小さくなっていることである. 既に述べたように, AdS 障壁は粒子を閉じ込める働きをしており, その大きさを決めているのが AdS 半径であるから, 多体系の配位の空間的な広がりを AdS 半径が決めているわけである. これは図 6.2b からも見えてとれる. いずれの場合も $x \gtrsim \lambda$ 付近からコンパクトネスが単調に減少し始め, 十分遠方では $1/x$ のべきで単調減少する. これは同時に, 質量が十分遠方で一定値に収束した解であることを意味し, 有限質量を持った熱平衡状態が実現されていることがわかる. 一方, 中心近傍の振る舞いは遠方の構造に影響されないで漸近平坦な場合と全く変わらず, $\tilde{M}/x \propto x^2$ 程度となっている.

これらの結果の次元依存性について, $D = 5$ と $D = 10$ の場合で解の配位をプロットすることで確認する. まず, 図 6.3 には $D = 5$ の場合での各 (z_c, λ) でのエネルギー密度の配位を図示した. 図 6.3a より, $D = 4$ の場合と同様に, λ が増えるにつれて系がコンパクトになること

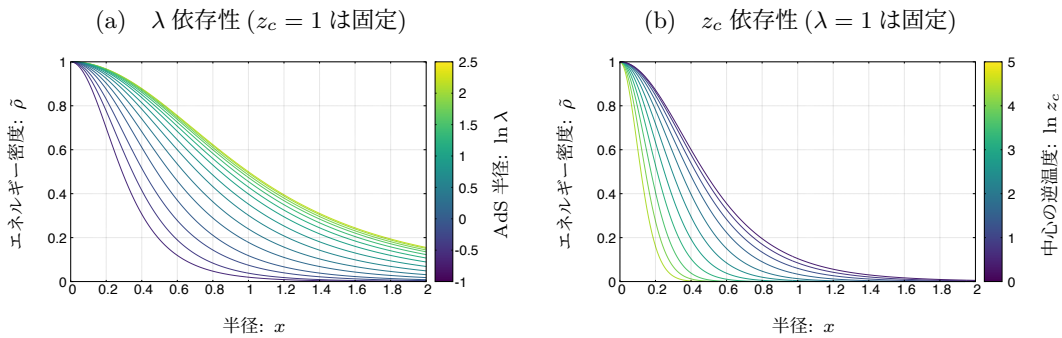


図 6.3 $D = 5$ でのエネルギー密度の空間依存性とパラメータ依存性.

が分かり, もちろんこの場合も $\lambda \rightarrow \infty$ の極限で漸近平坦に近づく. 図 6.3b からは z_c についても $D = 4$ の場合と同様に, 中心温度が大きくなるほど相対論的效果が強まることが示唆される.

次に, 図 6.4 に $D = 5$ の場合, 図 6.5 に $D = 10$ の場合について, それぞれのコンパクトネスの値をそれぞれ図示した.

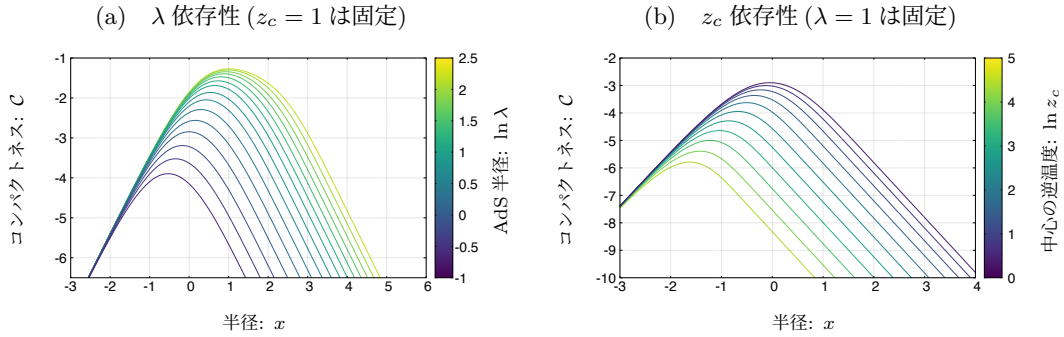


図 6.4 $D = 5$ におけるコンパクトネス $C(x)$ のパラメータ依存性. 中心近傍では $\tilde{M}(x)/x^2 \sim x^2$ のように振る舞い, 十分遠方では $\tilde{M}(x)/x^2 \sim x^{-2}$ のように振る舞うことが見てとれる.

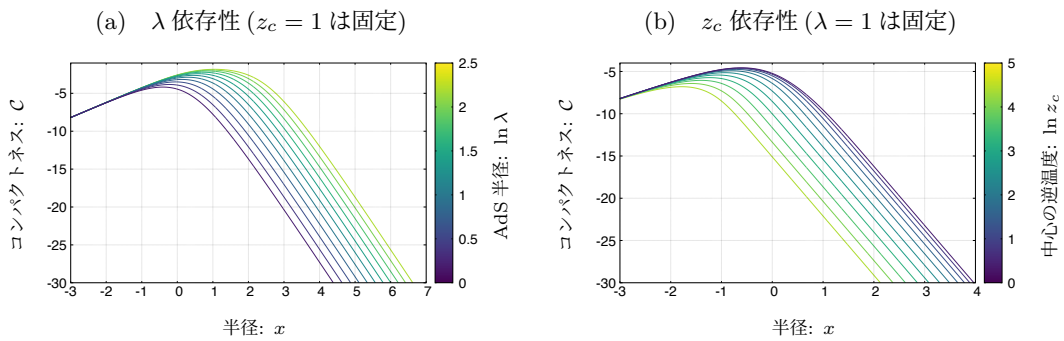


図 6.5 $D = 10$ におけるコンパクトネス $C(x)$ のパラメータ依存性. この場合も中心近傍では $C(x) \propto x^2$ と振る舞う一方, 十分遠方では $C(x) \sim x^{-7}$ のように振る舞う.

まず, 中心近傍の場合については次元によらず $C(x) \propto x^2$ で増加する. これは中心近傍の質量が空間の体積に比例するためであり, 任意次元で $C(x) \propto x^2$ のように振る舞う. 一方遠方の漸近系は, $C(x) \sim x^{D-3}$ となるから, いずれの次元でも質量が一定値に漸近することを示している.

6.3 重力熱的不安定性

6.3.1 熱力学変数の定義と解の系列の転回点

前節までで漸近 AdS 条件を満たす熱平衡状態が構成でき、確かにその空間的な広がり AdS 半径で特徴付けられることが確認できた。そこでこの解の系列に対し、転回点法を用いて安定性解析を行う。転回点法とは、系が物理的なパラメータを一つ持つときに系の安定性をそのパラメータの依存性として調べる手法である。相対論的な場合、解の系列は 2 パラメータで記述されているためパラメータ空間は二次元となり、解は三次元空間内の二次元曲面を描く。ここではまず適切な物理量を二通り定義し、解の系列を指定することを考える。その後その系列に対し転回点法を適用し、安定性解析を行う。

いま、系を特徴付ける物理量は (M, N, L) である。このうち全粒子数 N で規格化することで、

$$\tilde{E} := \frac{E}{N} = \frac{\int dx x^{D-2} \tilde{\rho}}{z_c w_c \int dx x^{D-2} \tilde{n}} - 1, \quad (6.15a)$$

$$\tilde{L}^{D-3} := \frac{L^{D-3}}{N} = \frac{\lambda^{D-3}}{z_c w_c \int dx x^{D-2} \tilde{n}}, \quad (6.15b)$$

$$\tilde{r}^{D-3} := \frac{r^{D-3}}{N} = \frac{x^{D-3}}{z_c w_c \int dx x^{D-2} \tilde{n}} \quad (6.15c)$$

を定義できる。ただし $E := M - N$ は全質量から粒子の静止質量を除いたもので、重力熱的エネルギー (gravothermal energy) と呼ばれる。このとき、系の大きさに対応する量 \tilde{L} を固定して考えれば、

$$(\bar{E}, \bar{\beta}) = \left(\frac{\lambda^{D-3} \tilde{E}(x)}{\tilde{N}(x)^2}, \frac{\beta \tilde{N}(x)}{\lambda^{D-3}} \right) \Big|_{x \rightarrow \infty} \quad (6.16)$$

はエントロピーに関して互いに共役な物理量となり、熱平衡状態は \tilde{L} 一定面において 1 パラメータ曲線を描く。この曲線のパラメータとして $\sigma := -\log \tilde{\rho}(\lambda)$ を導入する。 σ はエネルギー密度の中心での値と $x = \lambda$ での値との比になっており、この値が大きいほど解の配位がより尖った配位になっているといえるので、このパラメータ σ をシャープネスパラメータと呼ぶことにする。さらに、系列を指定するパラメータとして \tilde{L} の代わりに $\gamma := \log \tilde{L}$ を採用することにすれば、 γ で指定される平面内において $(\bar{E}(\sigma), \bar{\beta}(\sigma))$ の挙動を見ることで安定性解析が行えるというわけである。

6.3.2 二重渦構造

典型的な熱平衡状態が描く曲線として、 $D = 4$ の場合でパラメータを $\gamma = 2.8$ とした場合の (\bar{E}, \bar{L}) 平面内の解の系列を示したものが図 6.6 である。典型的には、熱平衡解の系列は図 6.6a のような二重渦構造を描く。このような振る舞いは、実は人工的な断熱壁で相対論的な自己重力系を閉じ込めた系でもみられるものである [57, 58]。そこで [57, 58] に倣って、右側 (高エネルギー領域) の渦を “hot spiral”, 左側 (低エネルギー領域) の渦を “cold spiral” と呼ぶこととする。二つの渦構造は、それぞれがその中心に向かって反時計回りに回転しているので、エネ

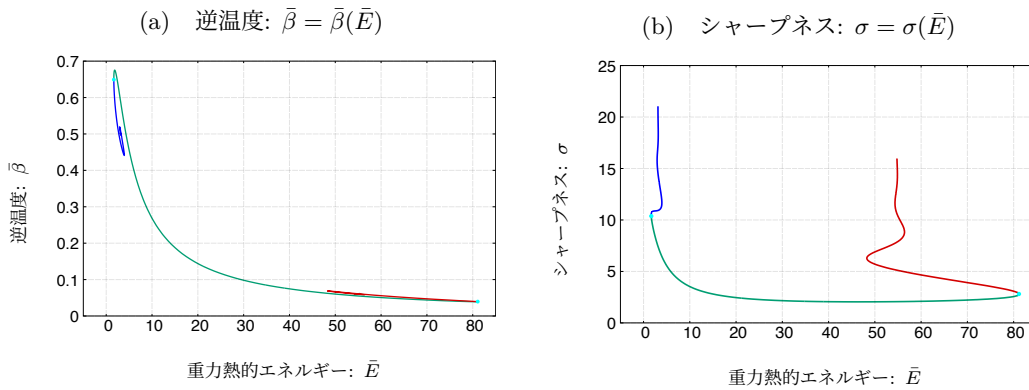


図 6.6 $D = 4, \gamma = 2.8$ における解の系列図 a とシャープネス図 b. 図 a から、解の系列は二重渦構造を持つことがわかり、従って熱平衡解は二個の不安定性を持つことが読み取れる. 図 b を見ると、シャープネス σ は図の中央から両端に向かって上昇する. これは図 a のそれぞれの渦の中心に向かって σ が大きくなることを意味しており、いずれの場合にもエネルギー密度がより中心に集中した配位になっているといえる.

ルギーの転回点を無限個持ち、その点を通るたびに系は不安定になる. いずれの渦においても、その不安定性は重力が持つ負の比熱に由来する. これは、図 6.6b からエネルギー密度の配位がそれぞれの渦の中心に向かって“尖った”配位になっていることから確認できる.

これらの二つの渦は、AdS 半径で定義されたコンパクトネス M/L で特徴付けられる. なぜならば、 $M/L = N/L(N\bar{E}/L + 1) = e^{-\gamma}(1 + e^{-\gamma}\bar{E})$ の関係があるため、 γ が一定の場合には、 $(\bar{E}, \bar{\beta})$ 平面において右側にいくほど M/L が大きくなるためである. 従って、AdS 半径で定義されたコンパクトネスの意味で、hot spiral は cold spiral に比べてコンパクトであると結論づけられる. 以上の考察から、cold spiral は第 I 部で詳細に議論した、Newton 重力における重力熱的不安定性に対応する. 最初の転回点を越えた解の系列において、粒子が重力から逃れることによってエネルギーを持ち去り、負の比熱により中心部分の温度が上昇し続ける. このような現象により系は不安定になり、コアハロー構造に類似した構造に発展することが期待される. 一方 hot spiral では、系がコンパクトになって不安定性が生じるので、重力崩壊を起こしてブラックホールを形成することが期待される. そのような振る舞いは Schwarzschild-AdS 時空における有効ポテンシャルの振る舞いから容易に想像できる. 既に見たように、ブラックホール質量が AdS 半径に比べて十分大きいとき、有効ポテンシャルは極小値を持たない. これは重力による引力が大きく安定円軌道が存在しないことを表しており、いまの場合にも同様の現象が起きることで自己重力系が不安定になると思われる. ただし、時間発展によりどのような時空が実現されるかを知るためには、実際に動的な Einstein 方程式を解く必要があることには注意したい.

図 6.7 には $D = 5$ の場合でパラメータを $\gamma = 2.65$ とした場合の (\bar{E}, \bar{L}) 平面内の解の系列

を示した. この場合にも $D = 4$ の場合と同様に二重渦構造を持っていることが確認できる.

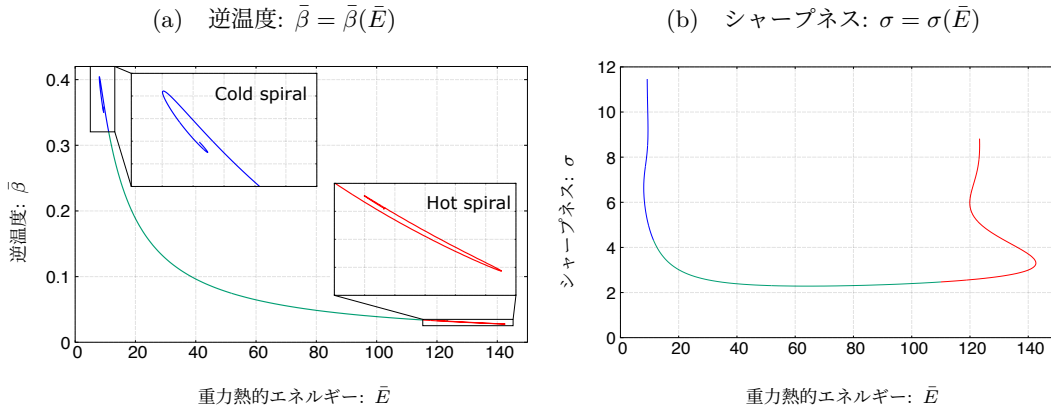


図 6.7 $D = 5$, $\gamma = 2.65$ における解の系列とシャープネス. $D = 4$ の場合と同様に二重渦構造を持っており, またシャープネスについてもそれぞれの渦の中心に向かって大きくなっていることが分かる.

実は, $4 \leq D \leq 10$ では典型的には二重渦構造を持つ一方で $D > 10$ では大きく構造が変化する. これは第 I 部で Newton 重力の場合と同様であるが, 系列の次元依存性については最後の節で議論することにして, 次節では, 先にパラメータ γ 依存性を見てみる.

6.3.3 系列の変化点

解の系列に対するパラメータ γ の依存性について確認する. パラメータ γ の定義を思い出すと, $\gamma = \ln \tilde{L}^{D-3}$ で, 物理的には粒子数で規格化された AdS 半径であった. いまの場合粒子数は系の静止質量に等しいので, γ が小さいほど相対論的になることが期待できる. これを見るために $D = 4$, $\gamma = 4$ の場合の解の系列を図 6.8 に図示した. 図 6.8 のように, γ の値を大きくしていくと hot spiral が図の右側, (つまり, より高エネルギー側) に移動していく. 第 I 部で見たように, 非相対論的な系ではもともと hot spiral は存在しないので, その意味で γ が十分大きいとき系は非相対論的な系に漸近していくと考えられる.

一方, γ を小さくしていくと系の相対論的な効果が強まり, hot spiral が低エネルギー側に移動していくことが予想される. また同時に, 図 6.9 に示した概念図のように二個の渦が互いに近づいていく. その結果, ある臨界点 γ のとき, 二個の渦は衝突する. 図 6.10 は $D = 5$, $\gamma = 2.2525$ の場合の解の系列とシャープネスのプロットである. この点を衝突点 (merge point) と呼ぶこととし, γ_m と書く. この値は次元に依存し, 例えば $D = 4$ の場合には $\gamma_m \simeq 2.5300$, $D = 5$ では $\gamma_m \simeq 2.2525$ であることが数値計算によって確認できる. 図 6.11 には衝突点において解の系列がどのように振る舞うかを概念的に図示した. 図 6.11 に記したように, $\gamma = \gamma_m$ のとき, それぞれの渦に属するエネルギーに関する転回点と逆温度に関する転回点の合計四点が一点に収束する. この値からさらに γ の値を小さくすると, この一点で繋ぎ

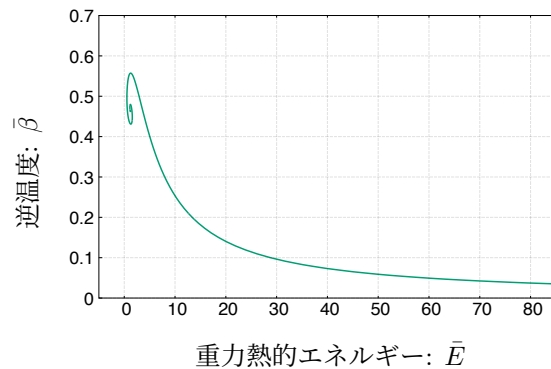


図 6.8 $D = 4$, $\gamma = 4.00$ の場合の解の系列. 高エネルギー領域の hot spiral がより右側に移動し, Newton 的な配位になっていることが分かる. なお, このときも hot spiral は存在しないわけではないことに注意する.

替えが起こり, 転回点が一つずつ消失し, 系列が二つに分裂する. ただしこのとき, 一点に収束する転回点は必ず二個目の転回点なので, 渦が衝突した後にできる系列は不安定なままであることに注意する. 図 6.12 には系列が二つに分裂した後の配位を, シャープネスと逆温度及びシャープネスと重力熱的エネルギーの関係として図示した. 図 6.12 から $\gamma > \gamma_m$ では系列が二つに分裂していることが確認できるだろう.

さらに γ を小さくしていくと, 衝突点で形成された系列が消失し, 一つのループ状の系列のみからなる曲線となる. このときの γ の値を γ_ℓ と書き, その状態をループ点 (loop point) と呼ぶことにする. 図 6.13 は $D = 5$, $\gamma = 2.2300$ の場合の系列とシャープネスである. 確かに図 6.12 では存在した系列の内, ループ状でない (二重渦構造を持つ) 系列が消失していることが分かる. この振る舞いを概念的に示したものが図 6.14 である. ループ点となる γ の値も時空の次元に依存し, 例えば $D = 4$ の場合には $\gamma_\ell \simeq 2.4468$, $D = 5$ の場合には $\gamma_\ell \simeq 2.2300$ である.

さらに γ を小さくすると, 解の系列は収縮し始める. その結果, ある値 γ_v で系列はある一点に収縮し, その値を超えると熱平衡状態が完全に消失する. この値を消失点 (vanishing point) と呼ぶことにすると, もちろんこの値も時空次元に依存し, $D = 4$ では $\gamma_v \simeq 2.2286$, $D = 5$ では $\gamma_v \simeq 2.1369$ となる. なおこのとき, 熱平衡状態が取れる熱力学量は一点のみであり, 例えば $D = 5$ のそのときのエネルギーの値は $\bar{E}_* \simeq 18.17$ であることが確かめられる.

ここまで時空の次元を $D = 5$ に固定して γ 依存性を見てきたが, $4 \leq D \leq 10$ であればその定性的な振る舞いは全て同様である. つまり, 解の系列は典型的には二重渦構造を持ち, その形状はパラメータ γ に依存する. いずれの次元においても, パラメータ γ は系の相対論的效果の強さを表すものと見做せ, γ が小さいほど相対論的效果が強まる. パラメータ γ には $(\bar{E}, \bar{\beta})$ 平面内で解の配位が変形する点 $\gamma_m, \gamma_\ell, \gamma_v$ が三種類存在する. 特に, $\gamma < \gamma_v$ の場合には熱平衡状態は存在しない.

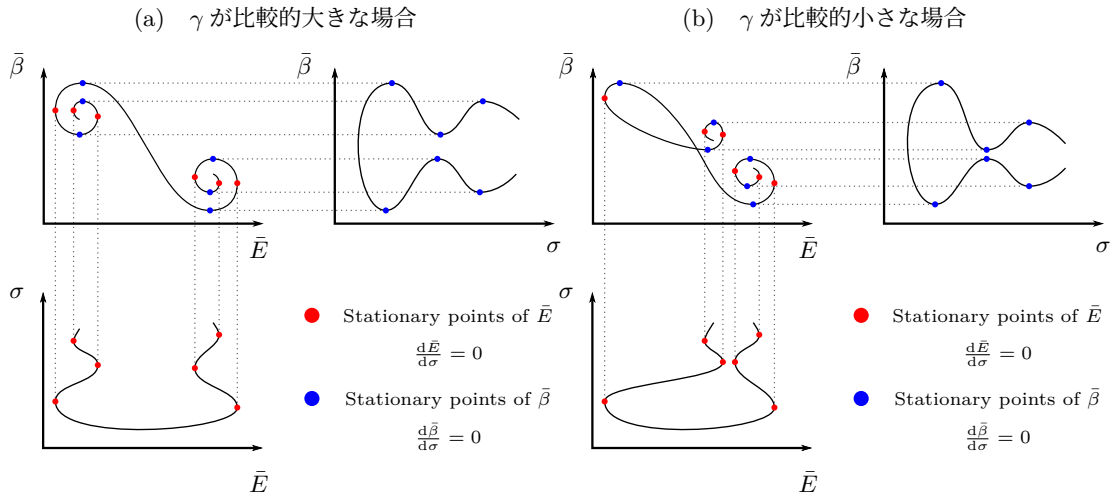


図 6.9 解の系列の変遷を表した概念図. パラメータ γ を小さくしていくと, 低エネルギー側の cold spiral が移動していき, hot spiral と近づく. その結果, γ がある程度小さくなると系列の中央部分と交わる. ところがシャープネス σ の空間で見れば, 実際に系列が分裂するなどといったことはなく, 単に一本の曲線が $(\bar{E}, \bar{\beta})$ 空間では重なっているように見えているだけであることが分かる.

6.3.4 安定性の臨界次元

最後に, 解の系列の時空次元依存性について考える. 第 I 部で述べたように, Newton 重力の場合の熱平衡状態は, $D = 11$ を境に振る舞いが大きく変わる. 具体的には, (u, v) 平面内において特異解の近傍での変数の固有値が $D \geq 11$ では実数値をとるため, 固定点周りで解の渦構造が消失する. これは $(\bar{E}, \bar{\beta})$ 平面内では \bar{E} が転回点を持たないことと対応するため, 系が不安定化しないことを意味する. 実はいま考えている漸近 AdS 時空中の相対論的な系でも同様の変化が起こる. 図 6.15 は $D = 11$ における解の系列を $\gamma = 2.6$ でプロットしたものである. 図 6.15b を見ると, 確かに σ が振動していないことがわかる. これは図 6.15a で両端に渦状の構造が存在しないことを示し, 従って系の安定性に関する臨界点が存在しないことを示唆している. なお, 二つの渦構造はいずれも $D = 11$ を境に消失することに注意しておく.

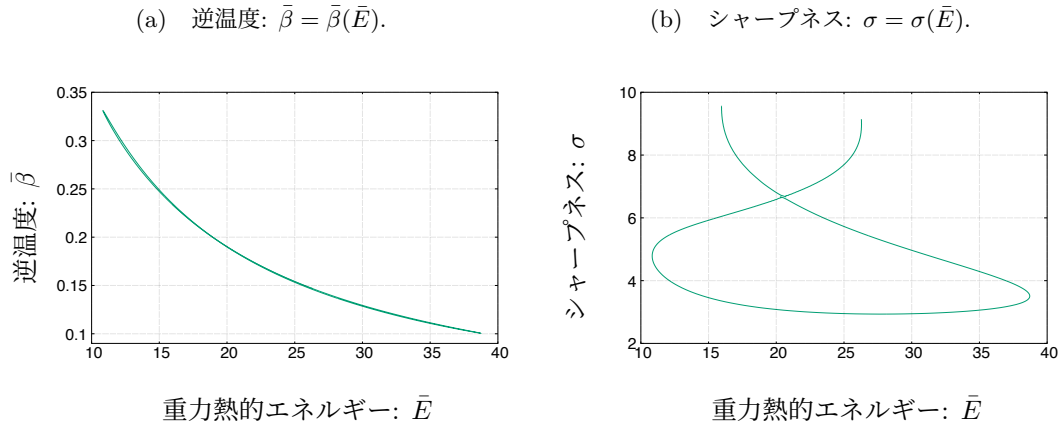


図 6.10 衝突点近傍 $\gamma = 2.2525$ での解の系列とシャープネスの配位. 図 6.7 では二個の渦は離れた位置にあったが, このときそれぞれが互いに衝突し, 繋ぎ変わる事が分かる. さらにこの場合には, 単に曲線同士が重なっているわけではなく実際に系列がつなぎ変わっていることが図 6.10b から確認できる.

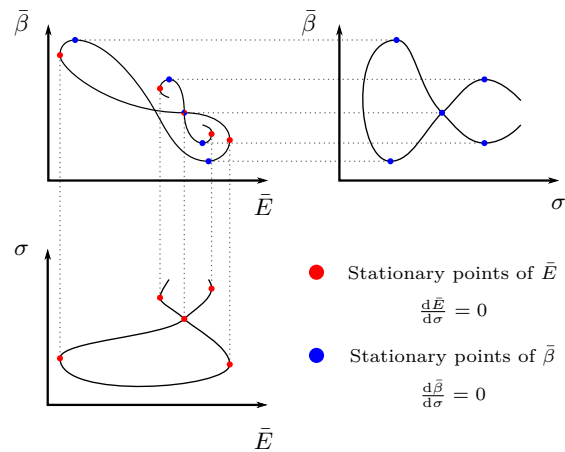


図 6.11 衝突点での解の系列の概念図. 衝突点において, 解の系列はそれぞれの渦の転回点が一致し, 特に四点が一点に収縮する. その結果安定性の臨界点である転回点が一点になるため, cold spiral と hot spiral が繋がってできた共通の点で不安定化するという現象が起きていることが分かる.

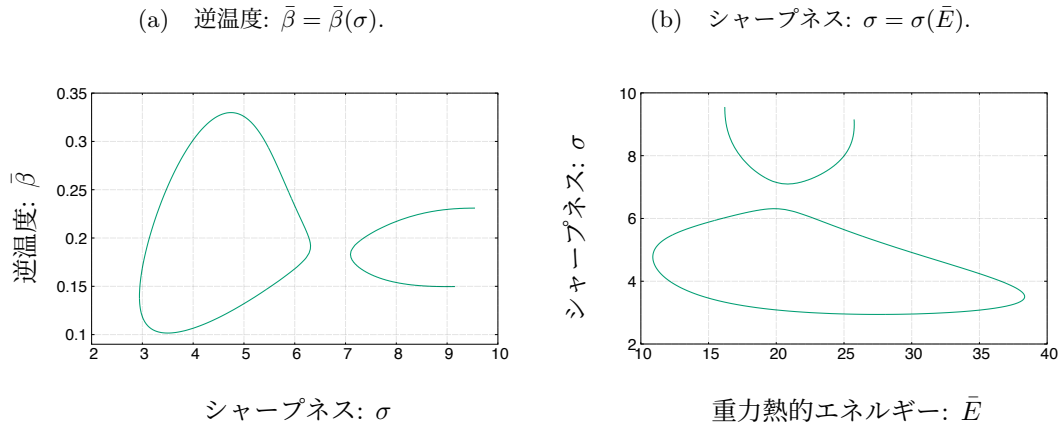


図 6.12 $D = 5$, $\gamma \simeq 2.25$ の場合の解の系列. 衝突点を超えてなお γ を小さくすると, 系列の繋ぎかえにより二個の互いに連結でない系列により記述される. このパラメータ領域においては, 解の系列は一個のループ状の系列と一個の二重渦構造を持つ系列の二種類に大別される.

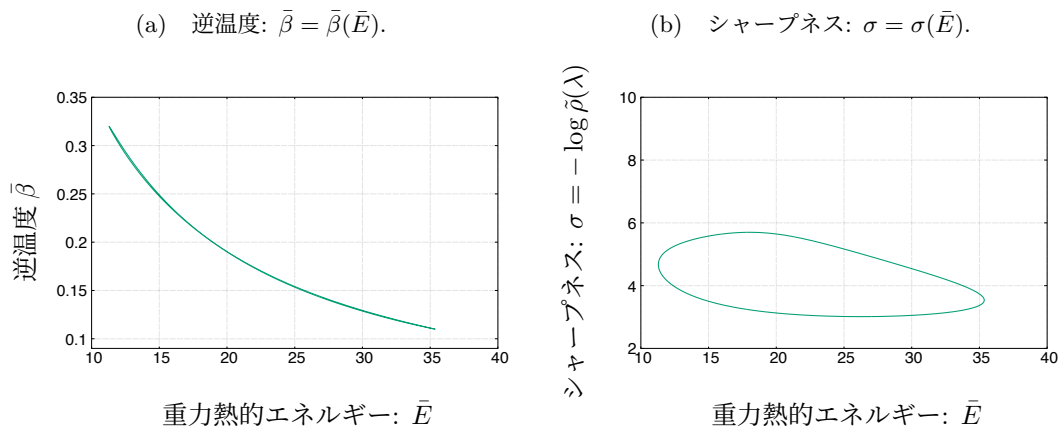


図 6.13 $D = 5$, $\gamma \simeq 2.2300$ における解の系列とシャープネスの配位. 解の系列は一個のループ状の曲線で記述される.

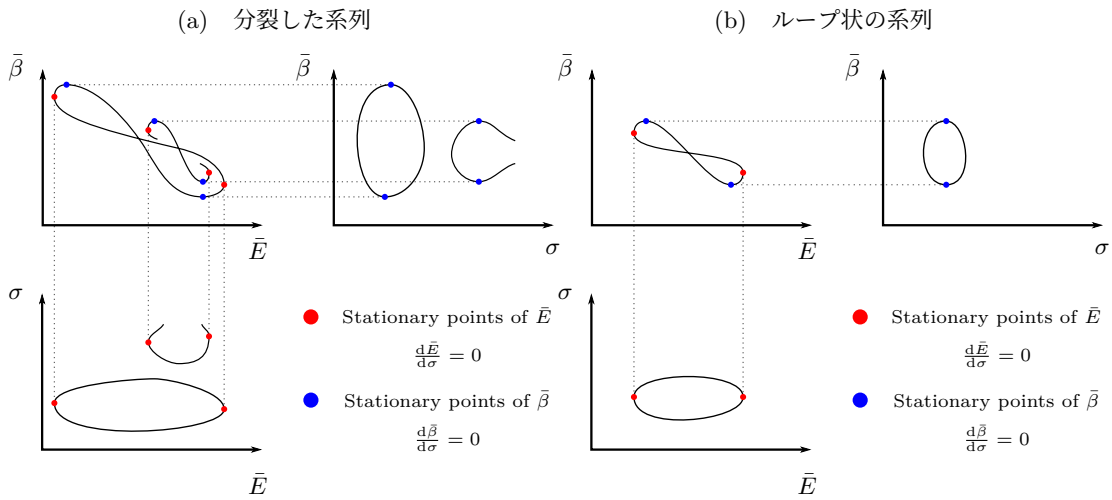


図 6.14 ループ点近傍の解の系列の概念図. 二個の系列の内二重渦構造を持つ系列は収縮し, $\gamma = \gamma_\ell$ で消失する. その結果解を構成する系列はループ構造を持つ系列のみとなる. なお, この系列も γ が小さくなるに従って収縮し, 最終的には $\gamma = \gamma_v$ で完全に消失し, 熱平衡状態は存在できなくなる.

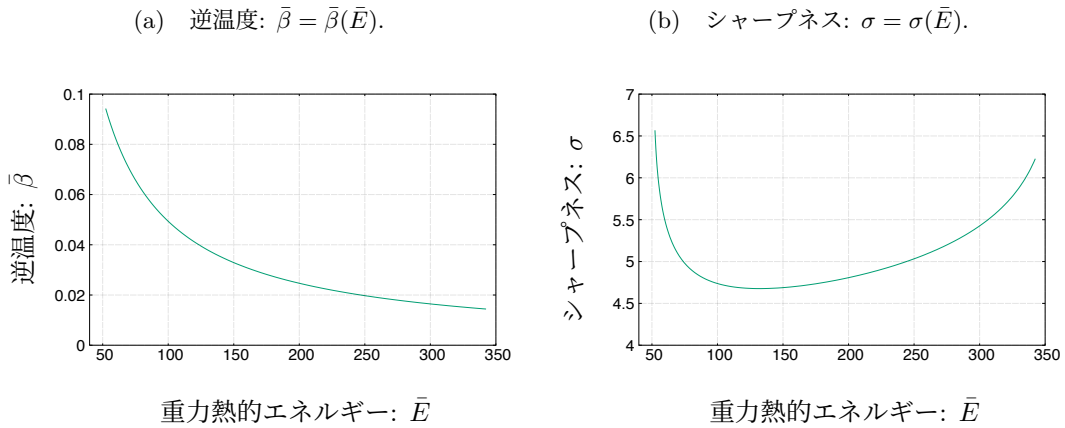


図 6.15 $D = 11, \gamma = 2.6$ における解の系列とシャープネスの配位. 重力熱的エネルギーは $D = 11$ の場合でも有限の範囲しかとることができず系列には端点が存在するものの, 端点の周りで渦状の構造は持たない. これは図 b でシャープネスが振動していないことから読み取ることができる.

第 II 部 まとめ

第 II 部では、 D 次元漸近 AdS 時空における自己重力多体系の熱平衡状態を構成し、その安定性解析を行なった。

その準備として第 4 章で相対論の導入を行い、その上でまずは時空中の粒子の運動について議論した。特に静的球対称な場合、粒子の軌道に沿った保存量を定義することで有効ポテンシャル中の粒子の運動に帰着させ、重力の束縛や負の宇宙項がポテンシャル障壁として働くことなどを確認した。次に共系図式を用いることで時空の大域的な構造を調べた。具体例として Schwarzschild 時空と AdS 時空を考えることでブラックホールの因果構造や AdS 時空の閉じ込め構造を確認した。さらに AdS 時空の持つ閉じ込め機構により生じる重力乱流不安定性に関するレビューを行なった。AdS 時空では内部の物質が閉じ込められることで Einstein 方程式の非線形性を通して乱流現象を起こし、境界条件次第では時間発展により地平面が形成される。この現象の数値計算による結果と摂動論的理解を同時に考察することでエネルギーカスケードの概略を見た。

次に漸近 AdS 時空内の物質場の巨視的モデルとして自己重力多体系を提案し、第 5 章において多体系の記述の仕方について議論した。相対論的な系の場合も多体系は一粒子分布関数により記述されるが、運動量の質量殻条件などの観点から Newton 重力の場合に比べて系は複雑化する。第 5 章ではそのような複雑な系を扱うために静的球対称時空における Einstein-Vlasov 系を考え、エネルギー運動量テンソルや Einstein 方程式に関する基本事項をまとめた。さらに分布関数の任意の変分に対する物理量の変分から熱平衡状態の分布関数が Maxwell-Jüttner 分布で記述されることを示した。

最後に第 6 章では、第 5 章で導出した熱平衡分布関数に対して実際に Einstein 方程式を解くことで熱平衡解を数値的に構成し、さらにその安定性を転回点法により調べた。 D 次元時空において熱平衡解は Einstein 方程式に含まれる二つのパラメータによってただ一つに指定される。従って系は $(\gamma, \bar{E}, \bar{\beta})$ の三次元空間内において二次元曲面を描く。特に γ を一定にしたとき熱平衡状態が描く系列は $(\bar{E}, \bar{\beta})$ 内に一次元曲線を描く。第 6 章ではこの系列に対して転回点法を適用することで安定性解析を行なった。その結果、熱平衡解は $4 \leq D \leq 10$ では二重渦構造を持つ一方 $D \geq 11$ では渦構造を持たないという結果を得た。系はそれぞれの渦に対応して二つの不安定性を持つ。低エネルギー領域に対応する cold spiral は系の分裂を伴う重力熱的不安定性であると考えられる。一方、高エネルギー領域に対応する hot spiral は重力崩壊を伴う不安定性であることが期待される。また、パラメータ γ を変化させることで熱平衡解の描く曲線の形状が変化することも示した。

第III部 非球对称Einstein-Vlasov
系

第 III 部 概略

第 III 部では副論文 [100] に基づいて、回転を伴う五次元漸近 AdS 非球対称 Einstein–Vlasov 系の解を構成する。

第 III 部の構成は以下の通りである。まずは第 7 章で、回転を伴う系として $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空の構成とその性質の概略を見る。そのために先に、前提知識となる三次元球面の対称性を確認する。三次元球面は特殊な対称性を持ち、それを利用することで回転を伴いながらも対称性の高い時空を構成することができるので、まずはその対称性の構造を見る。その後、実際に $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空を構成し、その時空上のテスト粒子の測地線方程式について議論する。さらに具体的な時空として等角運動量 Myers–Perry–AdS₅ 時空を用意し、その測地線を数値的に解くことで回転が粒子にどのような影響を及ぼすかを見るときともに、 $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性の物理的意味も確認する。

次に第 8 章で $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ Einstein–Vlasov 系を構成する。ここでは第 II 部で詳細に考察した熱平衡状態分布関数を拡張した分布関数を仮定し、その下で Einstein–Vlasov 系が持つ物理量が系のパラメータに対してどのような依存性を持つかを考える。時空が角運動量を持つ場合、粒子の質量殻条件が非自明になり、その結果エネルギー運動量テンソルの導出が煩雑になるとともに、球対称な場合と比べて自由度が増え、計量の非自明な関数が増加する。そこで第 8 章では、それらの具体的な表式の導出に関しても述べる。その上で Einstein 方程式を数値的に解くことで、角運動量などの物理量を見るときともに遠方での漸近構造についても考察する。

第 7 章 $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空

Einstein–Vlasov 系を構成する前に、まずは $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空の性質について先に調べておく。ここではまず三次元球面 S^3 の対称性を調べ、その上の Killing ベクトルの具体的な表式を求める。その後、それを利用して $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空の計量を構成し、対称性から導かれる性質について簡単に議論する。さらに、対応するブラックホール解として知られる五次元等角運度量 Myers–Perry 時空の具体的な表式を与え、後の Einstein–Vlasov 系に向けた“等角運動量”の意味について議論しておく。

7.1 三次元球面の対称性

7.1.1 三次元球面の構成と計量の座標表示

三次元球面 S^3 は、四次元 Euclid 空間中の超曲面として定義できる:

$$S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\}. \quad (7.1)$$

ここで Hopf 座標 $(\vartheta, \varphi, \chi)$

$$x_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = \cos \vartheta \cos \chi, \quad x_4 = \cos \vartheta \sin \chi \quad (7.2)$$

を導入すると、球面の三次元計量 γ は

$$\gamma = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \cos^2 \vartheta d\chi^2 \quad (7.3)$$

と表すことができる。ただし、各座標の範囲は $\vartheta \in [0, \pi/2]$ および $\varphi, \chi \in [0, 2\pi)$ である。いま、新たな角度座標 θ, ϕ, ψ を

$$\theta := 2\vartheta, \quad \phi := -\varphi + \chi, \quad \psi := \varphi + \chi \quad (7.4)$$

で定義すれば、

$$\begin{aligned} \gamma &= d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \cos^2 \vartheta d\chi^2 \\ &= d\vartheta^2 + \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} d\varphi^2 + \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} d\chi^2 \\ &= d\vartheta^2 + \frac{1}{2} (d\varphi^2 + d\chi^2) + \frac{\cos 2\vartheta}{2} (-d\varphi^2 + d\chi^2) \\ &= d\vartheta^2 + \frac{1}{4} [(-d\varphi + d\chi)^2 + (d\varphi + d\chi)^2] + \frac{\cos 2\vartheta}{2} (-d\varphi + d\chi)(d\varphi + d\chi) \end{aligned} \quad (7.5)$$

より, 結局

$$\gamma = \frac{1}{4}(d\theta^2 + d\phi^2 + d\psi^2 + 2\cos\theta d\phi d\psi) \quad (7.6)$$

を得る. ただし各座標の範囲は, その定義より

$$\theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \psi \in [0, 4\pi] \quad (7.7)$$

である.

7.1.2 Killing ベクトルと対称性

三次元球面 (S^3, γ) は (7.6) の座標系において, 六個の独立な Killing ベクトル場

$$\sigma_1 := -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi + \csc\theta\cos\phi\partial_\psi, \quad (7.8a)$$

$$\sigma_2 := -\cos\phi\partial_\theta + \cot\theta\sin\phi\partial_\phi - \csc\theta\sin\phi\partial_\psi, \quad (7.8b)$$

$$\sigma_3 := \partial_\phi \quad (7.8c)$$

および

$$\xi_1 := -\sin\psi\partial_\theta + \csc\theta\cos\psi\partial_\phi - \cot\theta\cos\psi\partial_\psi, \quad (7.9a)$$

$$\xi_2 := -\cos\psi\partial_\theta - \csc\theta\sin\psi\partial_\phi + \cot\theta\sin\psi\partial_\psi, \quad (7.9b)$$

$$\xi_3 := \partial_\psi \quad (7.9c)$$

を持つ. これらの交換子を計算してみると,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \epsilon_{ij}{}^k \sigma_k, \quad [\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ij}{}^k \xi_k, \quad [\xi_i, \sigma_j] = [\sigma_i, \xi_j] = 0 \quad (7.10)$$

を満たすことが容易に確認できる. 従って, 三次元球面 (S^3, γ) は $SU(2) \times SU(2)$ 対称性を持つことがわかる¹⁾.

ここで 1 形式の組 $\{\sigma^i\}_{i=1,2,3}$ を

$$\sigma^1 := -\sin\phi d\theta + \sin\theta\cos\phi d\psi, \quad (7.11a)$$

$$\sigma^2 := -\cos\phi d\theta - \sin\theta\sin\phi d\psi, \quad (7.11b)$$

$$\sigma^3 := d\phi + \cos\theta d\psi \quad (7.11c)$$

とすれば, 三次元球面の計量 (7.6) が

$$\gamma := \frac{1}{4}[(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + (\sigma^3)^2] \quad (7.12)$$

1) S^3 はその定義から $SO(4)$ 対称性を持つ. その Killing ベクトルが式 (7.10) を満たすことは, その代数が $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ のように直和分解できることを反映している.

と書き直せる. また, 以降のために 1 形式 $\{\sigma^i\}_{i=1,2,3}$ に対する Lie 微分を計算しておく, (σ_i, ξ_i) が Killing ベクトルであることから

$$\mathcal{L}_{\xi_i} \xi^j = \epsilon_i^j{}_k \xi^k, \quad \mathcal{L}_{\sigma_i} \sigma^j = \epsilon_i^j{}_k \sigma^k, \quad \mathcal{L}_{\xi_i} \sigma^j = 0 \quad (7.13)$$

であることがわかる.

7.2 $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空の構成と測地線

7.2.1 時空の対称性

三次元球面の計量と Killing ベクトルを用いて, $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つ時空の計量の表式を与える. 具体的には, $\{\xi_i\}$ は時空の Killing ベクトルになっているが $\{\sigma_i\}$ については σ_3 のみが Killing ベクトルになっているような時空を構成する. そこで時空の計量を以下で仮定する:

$$g := -e^{2\mu(r)} dt^2 + e^{2\nu(r)} dr^2 + \frac{r^2}{4} [(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + (\sigma^3)^2] + h(r) \left(dt - \frac{a(r)}{2} \sigma^3 \right)^2 \quad (7.14)$$

すると, 式 (7.13) を使えば $\mathcal{L}_{\xi_i} g$ 及び $\mathcal{L}_{\sigma_i} g$ が簡単に計算できて

$$\mathcal{L}_{\xi_i} g = \mathcal{L}_{\sigma_3} g = 0 \quad (7.15)$$

となる. 一方 $i = 1, 2$ の場合では, いたるところで $a = 0$ でない限り $\mathcal{L}_{\sigma_i} g \neq 0$ である. 明らかに計量 (7.14) は時間並進に対して不変なので, それぞれの等長変換群を示す添字をつけて表すことにすれば, 全体の等長変換群は $R_t \times SU(2)_\xi \times U(1)_\sigma$ となる. またこのとき, $a = 0$ の場合には時空が球対称になっていることが容易に確認できる. 球対称系での等長変換群は $R_t \times SU(2)_\xi \times SU(2)_\sigma$ なので, 式 (7.14) の最後の項によって $SU(2)_\sigma$ 対称性が $U(1)_\sigma$ に破れたとみなすこともできる. ここで重要なことは, 非球対称な時空にもかかわらずその余等質が 1 であることである. つまり, 計量関数の非自明な時空依存性は動径座標 r についてのみである. 通常, 時空が五次元の場合には独立な回転面が二つ存在するので定常軸対称な系を作るとその対称性は $R_t \times U(1) \times U(1)$ となる. ところが今構成した時空ではそのうち一つ (ここでは ξ に対応する) が $SU(2)$ 対称性に “格上げ” されたことで全体の対称性が高くなり, 非球対称ながら余等質が 1 になっている. この物理的な意味についてはのちにブラックホール時空を用いて議論することにする.

7.2.2 測地線に沿った保存量と計量関数に対する条件

Einstein–Vlasov 系を構成する際に質量殻条件の構造を測地線方程式と結びつけておくとうまく行があるので, 球対称系で行なったように有効ポテンシャルを導入してその性質を簡単に見

ておく. まずは Killing ベクトルから粒子の保存量を定義する:

$$\varepsilon = -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} = -p_t, \quad (7.16a)$$

$$J_{\xi_1} = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}_1 = -p_\theta \sin \psi + p_\phi \csc \theta \cos \psi - p_\psi \cot \theta \cos \psi, \quad (7.16b)$$

$$J_{\xi_2} = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}_2 = -p_\theta \cos \psi - p_\phi \csc \theta \sin \psi + p_\psi \cot \theta \sin \psi, \quad (7.16c)$$

$$J_{\xi_3} = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}_3 = p_\psi, \quad (7.16d)$$

$$j_\sigma = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 = p_\phi \quad (7.16e)$$

さらに $SU(2)_\xi$ 部分の全角運動量 $J_\xi \geq 0$ を

$$J_\xi^2 := \sum_{i=1}^3 J_{\xi_i}^2 = \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad (7.17)$$

で導入すれば, 粒子の運動量に対する質量殻条件は以下のように表される:

$$\frac{e^{-2\nu} G}{F} \left(\varepsilon - \frac{2ah}{G} j_\sigma \right)^2 - e^{-2\nu} \left[m^2 + \frac{4}{r^2} \left(J_\xi^2 - \frac{a^2 h}{G} j_\sigma^2 \right) \right] = (p^r)^2. \quad (7.18)$$

ここで記法の簡略化のために, 関数 $G(r) := r^2 + a^2 h$ および $F(r) := e^{2\mu} G - hr^2$ を導入した. このとき球対称の場合と同様に有効ポテンシャルを

$$V_{\text{eff}} := e^{-2\nu} \left[m^2 + \frac{4}{r^2} \left(J_\xi^2 - \frac{a^2 h}{G} j_\sigma^2 \right) \right] - \frac{e^{-2\nu} G}{F} \left(\varepsilon - \frac{2ah}{G} j_\sigma \right)^2 \quad (7.19)$$

で定義できる²⁾. 従って有効ポテンシャルはエネルギー ε と $SU(2)_\xi$ 部分の全角運動量, そして $U(1)_\sigma$ 部分の角運動量 j_σ の三つのパラメータを持つ. 有効ポテンシャル (7.19) は一見複雑に見えるが,

$$\tilde{\varepsilon} := \varepsilon - \frac{2ah}{G} j_\sigma, \quad (7.20a)$$

$$\tilde{j}^2 := J_\xi^2 - \frac{a^2 h}{G} j_\sigma^2 \quad (7.20b)$$

を定義すれば簡潔に

$$V_{\text{eff}} := e^{-2\nu} \left(m^2 + \frac{4\tilde{j}^2}{r^2} \right) - \frac{e^{-2\nu} G}{F} \tilde{\varepsilon}^2 \quad (7.21)$$

と書け, 位置に依存した有効なパラメータに依存した球対称系の有効ポテンシャルともみなせる. ところがこのままでは関数自由度が残っているので, 次節以降で具体例としてブラックホール時空を用意し, 実際に有効ポテンシャルを視覚的に確認する.

7.3 等角運動量 Myers–Perry 時空

2) 通常定常時空では粒子の軌道を赤道面などに限る必要があるが, ここでは余等質が 1 なので一般的な形のまま有効ポテンシャルを定義することができる.

7.3.1 計量と対称性

五次元時空における負の宇宙項を持つ回転ブラックホール時空は Myers–Perry–AdS₅ (MPAdS₅) 時空と呼ばれ、その計量は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} g_{\text{MPAdS}_5} = & \frac{\Delta}{\varrho^2} \left(dt - \frac{a \sin^2 \vartheta}{\Xi_a} d\varphi - \frac{b \cos^2 \vartheta}{\Xi_b} d\chi \right)^2 + \frac{\Delta_\vartheta \sin^2 \vartheta}{\varrho^2} \left(a dt - \frac{r^2 + a^2}{\Xi_a} d\varphi \right)^2 \\ & + \frac{\Delta_\vartheta \cos^2 \vartheta}{\varrho^2} \left(b dt - \frac{r^2 + b^2}{\Xi_b} d\chi \right)^2 + \frac{\varrho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\varrho^2}{\Delta_\vartheta} d\vartheta^2 \\ & + \frac{1 + r^2/L^2}{r^2 \varrho^2} \left(ab dt - \frac{b(r^2 + a^2) \sin^2 \vartheta}{\Xi_a} d\varphi - \frac{a(r^2 + b^2) \cos^2 \vartheta}{\Xi_b} d\chi \right)^2. \end{aligned} \quad (7.22)$$

ここで

$$\Delta := \frac{(r^2 + a^2)(r^2 + b^2)}{r^2} \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) - 2M, \quad (7.23a)$$

$$\Delta_\vartheta := 1 - \frac{a^2}{L^2} \cos^2 \vartheta - \frac{b^2}{L^2} \sin^2 \vartheta, \quad (7.23b)$$

$$\varrho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta, \quad (7.23c)$$

$$\Xi_a := 1 - \frac{a^2}{L^2}, \quad \Xi_b := 1 - \frac{b^2}{L^2} \quad (7.23d)$$

で、 M はブラックホールの質量でパラメータ a, b ($a^2, b^2 < L^2$)³⁾ はブラックホールのスピンを表す。MPAdS₅ 時空の事象の地平面 r_H は

$$\Delta(r_H) = \frac{(r_H^2 + a^2)(r_H^2 + b^2)}{r_H^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{L^2} \right) - 2M = 0 \quad (7.24)$$

の実根の内、最も大きなものである。

計量 (7.22) は時間並進対称性と二つの独立な $U(1)$ 対称性を持ち、時空全体の等長変換群としては $R_t \times U(1) \times U(1)$ を持つ。MPAdS₅ 時空にはそれぞれの $U(1)$ 対称性に付随する角運動量を持ち、その値はパラメータ a と b に対応しているが、 $a = b$ の場合には二つの角運動量は等しくなり、対称性が高くなることが知られている。このような特殊な場合を等角運動量 Myers–Perry–AdS₅ 時空と呼ぶ。以降では等角運動量 MPAdS₅ 時空が式 (7.14) の形で書けることを示し、計量関数の具体的表式を与える。まず、 $a = b$ とすると式 (7.23) が

$$\Delta = \frac{(r^2 + a^2)^2}{r^2} \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) - 2M, \quad (7.25a)$$

$$\varrho^2 = r^2 + a^2, \quad (7.25b)$$

$$\Delta_\vartheta = \Xi_a = \Xi_b = 1 - \frac{a^2}{L^2} =: \Xi \quad (7.25c)$$

3) この条件を満たさない場合には面積が負になりうる。

のように単純化されることがわかる. これを用いて計量 (7.22) を整理すると

$$\begin{aligned} g_{\text{MPAdS}_5} = & \frac{\Delta}{\varrho^2} \left[dt - \frac{a}{\Xi} (\sin^2 \vartheta d\varphi + \cos^2 \vartheta d\chi) \right]^2 \\ & + \frac{\Xi}{\varrho^2} \left[\left(a dt - \frac{\varrho^2}{\Xi} d\varphi \right)^2 \sin^2 \vartheta + \left(a dt - \frac{\varrho^2}{\Xi} d\chi \right)^2 \cos^2 \vartheta \right] \\ & + \frac{\varrho^4}{\Delta(\varrho^2 - a^2)} d\varrho^2 + \frac{\varrho^2}{\Xi} d\vartheta^2 \\ & + \frac{\Xi + \varrho^2/L^2}{\varrho^2(\varrho^2 - a^2)} \left[a^2 dt - \frac{a\varrho^2}{\Xi} (\sin^2 \vartheta d\varphi + \cos^2 \vartheta d\chi) \right]^2 \end{aligned} \quad (7.26)$$

と書き直せる. ここで r の代わりに ϱ を動径座標として採用した. 動径方向の成分に注目すると,

$$\begin{aligned} g^{ee} &= \frac{\Delta(\varrho^2 - a^2)}{\varrho^4} \\ &= \Xi + \frac{\varrho^2}{L^2} - \frac{2M}{\varrho^2} + \frac{2Ma^2}{\varrho^4} \end{aligned} \quad (7.27)$$

と書ける. ここで

$$\tilde{r}^2 := \frac{\varrho^2}{\Xi}, \quad \tilde{M} = \frac{M}{\Xi^3} \quad (7.28)$$

を定義して \tilde{r} を新たな動径座標に選べば,

$$e^{-2\tilde{\nu}} := g^{\tilde{r}\tilde{r}} = 1 + \frac{\tilde{r}^2}{L^2} - \frac{2\tilde{M}}{\tilde{r}^2} \left(1 - \frac{a^2}{L^2} \right) + \frac{2\tilde{M}a^2}{\tilde{r}^4} \quad (7.29)$$

$$= \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{L^2} \right) \left(1 + \frac{2\tilde{M}a^2}{\tilde{r}^4} \right) - \frac{2\tilde{M}}{\tilde{r}^2} \quad (7.30)$$

となる. これは $a = 0$ で Schwarzschild-AdS 時空の計量関数を再現する. 他の成分についても書き直すと, このように導入された動径座標 \tilde{r} と角度座標 (7.4) を用いれば等角運動量 MPAdS₅ 時空が式 (7.14) の形で書けることが示せる. 実際, 直接計算によって

$$g_{\text{MPAdS}_5} = - \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{L^2} \right) dt^2 + e^{2\tilde{\nu}} d\tilde{r}^2 + \frac{\tilde{r}^2}{4} \left[(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + (\sigma^3)^2 \right] + \frac{2\tilde{M}}{\tilde{r}^2} \left(dt - \frac{a}{2} \sigma^3 \right)^2 \quad (7.31)$$

となるので, $e^{2\mu} = 1 + r^2/L^2$, $e^{2\nu} = e^{2\tilde{\nu}}$, $h(r) = 2M/r^2$ として a を定数に取れば良い. 従って, $a = b$ とすることで時空の対称性が上がり, 等角運動量 MPAdS₅ 時空が $R \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を持つことが確認できた. また, $a = 0$ の場合には計量 (7.31) に帰着することも容易に確認できる. 計量 (7.31) において具体的な関数系を見ると, 独立な関数が三つに減少していることがわかる. これは Schwarzschild 時空において $\mu + \nu = 0$ になっているのと同様で, 時空が真空であることによるものである. 物質場がある場合, 例えば Einstein-Vlasov 系などではその限りではない.

7.3.2 粒子の軌道と有効ポテンシャル

それでは等角運動量 MPAdS₅ 時空の有効ポテンシャルについて調べる. まずは簡単な場合として $a = 0$, つまり球対称な場合について考える. 当然ながら第 II 部で議論した球対称系の有効ポテンシャルと類似した結果ではあるが, 時空次元が異なることで生じる相違点もあるので確認しておく. $a = 0$ とすると, 計量関数が

$$e^{2\mu} - h = e^{-2\nu} = 1 - \frac{2\tilde{M}}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{r}^2}{L^2} \quad (7.32)$$

となり, 有効ポテンシャルが

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{2\tilde{M}}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{r}^2}{L^2}\right) \left(m^2 + \frac{4J_\xi}{r^2}\right) - \tilde{\varepsilon}^2 \quad (7.33)$$

と表せる. 以降この章では有限質量粒子のみ考えるものとし, さらに $m = 1$ とする. 図 7.1 に幾つかのパラメータについて有効ポテンシャルを図示した. ただし変数はブラックホール質量を用いて規格化してあり, さらに粒子のエネルギーだけシフトした. 四次元時空との大き

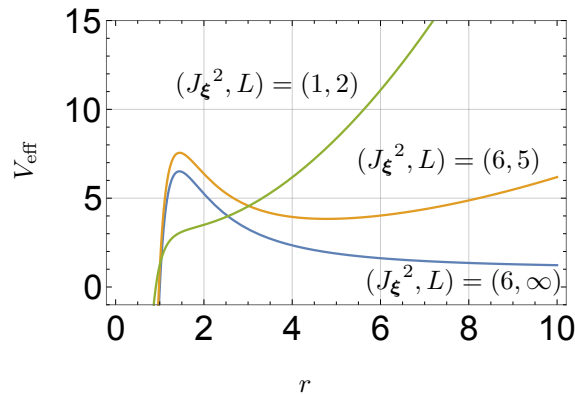


図 7.1 球対称な場合の有効ポテンシャル. 四次元の場合と異なるのは, 漸近平坦な場合に安定円軌道が存在しないことである.

な違いは, 漸近平坦な場合には極値が一つしかなく不安定円軌道しかないことである. 実は $D \geq 5$ の場合, 漸近平坦な Schwarzschild 時空には安定円軌道は存在しない. それ以外に関しては四次元の場合と同様で, AdS 半径にはある臨界値 L_* が存在し, $L > 0$ では安定円軌道と不安定円軌道が存在し, $L = L_*$ でそれらが一致したのち $L < L_*$ では単調増加となる. すなわちブラックホールの質量が十分大きければ粒子は円軌道を作ることができず, ブラックホールに落下するのみとなる.

次に $a \neq 0$ の場合について考える. ここでも変数及びパラメータは全てブラックホール質量で規格化されているものとする. 簡単のため $L \rightarrow \infty$ の極限を考えることとし, (a, J_ξ, ε) を適当な値に固定したときに j_σ の符号だけを変更することで有効ポテンシャルがどのような影響を与えるかのみに注目する. 図 7.2 は, $(a, J_\xi^2, \varepsilon) = (0.4, 4, 2)$ と固定した上で j_σ を $j_\sigma = \pm 2$

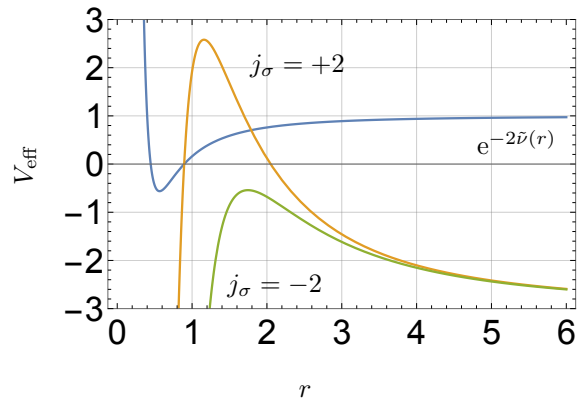


図 7.2 有限の角運動量を持つ場合の有効ポテンシャル.

の二つの値にした場合の有効ポテンシャルと関数 $e^{-2\tilde{\nu}}$ を同時に図示したものである. 図 7.2 からわかるように, $j_\sigma = -2$ の場合は $j_\sigma = 2$ の場合に比べて架空運動量によるポテンシャル障壁が低くなっている. いまブラックホールのスピンを $a = 0.4$ に固定して考えているので, j_σ の符号はブラックホールの回転との相対的な符号を表している. つまり, $j_\sigma < 0$ の場合にはブラックホールの回転に対して逆らって運動することになるので, その分有効ポテンシャルが低くなり, ブラックホールに落下しやすくなっていると考えることができる.

第 8 章 漸近 AdS 等角運動量 Einstein–Vlasov 系

8.1 Einstein–Vlasov 系の運動量空間積分

まずは球対称系の場合と同様に、粒子の運動量空間積分がどのように与えられるかを考える。いまの座標系において、運動量空間の積分測度は以下のように書ける：

$$dV_p := -\frac{16\delta(p^2 + m^2)\theta(\tilde{\varepsilon})}{r^2\sqrt{F}e^\nu \sin\theta} dp_t \wedge dp_r \wedge dp_\theta \wedge dp_\phi \wedge dp_\psi. \quad (8.1)$$

これをまずは、測地線の保存量で書き直すことを考える。このとき、全角運動量の定義から

$$(J_\xi^2 - j_\sigma^2) \sin^2\theta = (p_\theta \sin\theta)^2 + (p_\psi - p_\phi \cos\theta)^2 \quad (8.2)$$

なので、変数 (J_ξ, j_σ) のとりうる範囲は独立でなく、 $J_\xi^2 \geq j_\sigma^2$ を満たすことに注意する。角度変数 $\chi \in (0, 2\pi]$ を、

$$R \cos\chi = p_\theta \sin\theta, \quad R \sin\chi = p_\psi - p_\phi \cos\theta \quad (8.3)$$

で導入する。ここで動径変数として $R^2 := (J_\xi^2 - j_\sigma^2) \sin^2\theta$ とした。これは単なる半径 R の円の方程式なので、積分測度の角度方向の運動量部分について

$$\begin{aligned} dp_\theta \wedge dp_\phi \wedge dp_\psi &= R \csc\theta dR \wedge dj_\sigma \wedge d\chi \\ &= J_\xi \sin\theta dJ_\xi \wedge dj_\sigma \wedge d\chi \end{aligned} \quad (8.4)$$

と書き直せることがわかる。次に時間方向と動径方向部分について、デルタ関数を用いて時間方向の積分を実行する。式 (7.18) を $q := e^\nu p^r$ について解くと、正の根は

$$q(\varepsilon, J_\xi, j_\sigma) = \left[\frac{G}{F} \left(\varepsilon - \frac{2ah}{G} j_\sigma \right)^2 - \left(m^2 + \frac{4}{r^2} \left(J_\xi^2 - \frac{a^2 h}{G} j_\sigma^2 \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.5)$$

となる。分布関数は q について偶関数なので、負の根からの寄与は単に二倍の因子をつければ良い。従って、

$$-2\delta(p^2 + m^2) dp_t \wedge dp_r = \frac{2e^\nu d\varepsilon}{q(\varepsilon, J_\xi, j_\sigma)} \quad (8.6)$$

となる。最終的に、保存量と補助的な角度変数 $(\varepsilon, J_\xi, j_\sigma, \chi)$ による表現での積分測度は、

$$dV_p = \frac{16\theta(\tilde{\varepsilon})J_\xi}{r^2 q(\varepsilon, J_\xi, j_\sigma) \sqrt{F}} d\varepsilon \wedge dJ_\xi \wedge dj_\sigma \wedge d\chi \quad (8.7)$$

となる. 変数 $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{J})$ を用いれば, その定義から

$$dV_p = \frac{16\theta(\tilde{\varepsilon})\tilde{J}}{r^2\sqrt{F}} \left[\frac{G}{F}\tilde{\varepsilon}^2 - \left(m^2 + \frac{4\tilde{J}^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\tilde{\varepsilon} \wedge d\tilde{J} \wedge dj_\sigma \wedge d\chi \quad (8.8)$$

とも書き直せる.

球対称系では, 適当な変数変換を施すことで積分を分離させることができた. 今の場合にも, 少し条件は厳しくなるものの, 分布関数がある条件を満たす場合には同様に積分が分離できる. これを実現するために, 積分変数 $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{J}, j_\sigma, \chi)$ の取りうる範囲を考える. 既に述べたように, j_σ は $j_\sigma^2 \leq J_\xi^2 = \tilde{J}^2 + \frac{a^2 h}{G} j_\sigma^2$ を満たすので,

$$-\frac{\sqrt{G}}{r}\tilde{J} \leq j_\sigma \leq \frac{\sqrt{G}}{r}\tilde{J} \quad (8.9)$$

が j_σ の取りうる範囲となる. 一方, J_ξ については球対称系と同様に,

$$\tilde{J}^2 = \frac{r^2}{4} \left[\frac{G}{F}\tilde{\varepsilon}^2 - (m^2 + q^2) \right] \leq \frac{r^2}{4} \left[\frac{G}{F}\tilde{\varepsilon}^2 - m^2 \right] =: J_{\max}^2 \quad (8.10)$$

のように最大値を持ち, $0 \leq \tilde{J} \leq J_{\max}$ の範囲を動く. 最後に, $\tilde{\varepsilon}$ は $j_\sigma = \tilde{J} = 0$ のとき最小値 $m\sqrt{F/G}$ をとるので,

$$m\sqrt{\frac{F}{G}} \leq \tilde{\varepsilon} < \infty \quad (8.11)$$

の範囲を動く. ここで, 以降では粒子の質量は有限の値をとるものとする.

以上を踏まえ, 新たな変数として

$$\tilde{\varepsilon} := \sqrt{\frac{G}{F}} \frac{\tilde{\varepsilon}}{m}, \quad \tilde{J} := \frac{\tilde{J}}{J_{\max}}, \quad \tilde{j} := \frac{r}{\sqrt{G}} \frac{j_\sigma}{J_{\max}} \quad (8.12)$$

を導入すると, 定義よりこれらの取りうる範囲は

$$\tilde{\varepsilon} \in [1, \infty), \quad \tilde{J} \in [0, 1], \quad \text{and} \quad \tilde{j} \in [-\tilde{J}, \tilde{J}] \quad (8.13)$$

で, 積分測度の表式として

$$dV_p = \frac{2\theta(\tilde{\varepsilon})k^2\tilde{J}}{\sqrt{1-\tilde{J}^2}} d\tilde{\varepsilon} \wedge d\tilde{J} \wedge d\tilde{j} \wedge d\chi \quad (8.14)$$

を得る.

8.2 回転を伴う Einstein–Vlasov 系

8.2.1 拡張された分布関数

第 II 部で取り扱った相対論的な熱平衡状態の拡張として,

$$f(\varepsilon, j_\sigma) = \exp[\alpha - \beta(\varepsilon - \Omega j_\sigma)] \quad (8.15)$$

の形の分布関数を考える。これは $\Omega = 0$ のときに式 第 II 部で導出した熱平衡分布関数 (Maxwell–Jüttner 分布関数) に帰着するという意味で、熱平衡状態を拡張した分布関数と見做せる。当然ながらその場合には系は静的球対称時空を記述する。拡張された分布関数 (8.15) は、以下のように書き直せる:

$$f(\varepsilon, j_\sigma) = \exp[\alpha - \bar{\beta}(\bar{\varepsilon} - \bar{\Omega}k\bar{j})] = \exp(\alpha - \bar{\beta}\bar{\varepsilon} + uk\bar{j}). \quad (8.16)$$

ただし、新たな変数を

$$\bar{\beta}(r) := \beta\sqrt{\frac{F}{G}}, \quad \bar{\Omega}(r) := \frac{G}{2\sqrt{F}}\left(\Omega - \frac{2ah}{G}\right), \quad u(r) := \bar{\beta}\bar{\Omega} \quad (8.17)$$

で定義した。

8.2.2 系の物理量

いま考えている系における、Einstein 方程式を解く際に必要なエネルギー運動量テンソルの成分に対応する運動量の値は以下の通りである:

$$(p_t)^2 = \frac{F}{G}\left(\bar{\varepsilon}^2 + \frac{2ah}{\sqrt{F}}\bar{\varepsilon}k\bar{j} + \frac{a^2h^2}{F}k^2\bar{j}^2\right), \quad (8.18a)$$

$$p_t p_\phi = -\varepsilon j_\sigma = -\frac{\sqrt{F}}{2}\left(\bar{\varepsilon}k\bar{j} + \frac{ah}{\sqrt{F}}k^2\bar{j}^2\right), \quad (8.18b)$$

$$(p_\phi)^2 = j_\sigma^2 = \frac{G}{4}k^2\bar{j}^2, \quad (8.18c)$$

$$(p_r)^2 = e^{2\nu}k^2(1 - \bar{J}^2), \quad (8.18d)$$

$$\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = 4J_\xi = r^2\left(k^2\bar{J}^2 + \frac{a^2h}{r^2}k^2\bar{j}^2\right), \quad (8.18e)$$

$$g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = -m^2. \quad (8.18f)$$

拡張された分布関数 (8.15) に対し、実際に積分を実行することでエネルギー運動量テンソルや粒子数密度などの物理量を具体的に与える。

式 (8.18) に含まれる積分は、まとめて

$$2 \int_1^\infty d\bar{\varepsilon} \int_0^1 d\bar{J} \int_{-\bar{J}}^{\bar{J}} d\bar{j} \bar{\varepsilon}^i k^j e^{-\bar{\beta}\bar{\varepsilon}} \cdot \bar{J}^{m+1} (1 - \bar{J}^2)^{\pm\frac{1}{2}} \cdot \bar{j}^n e^{\omega\bar{j}} \quad (8.19)$$

と表すことができる。これを実行するために、まずは角運動量積分について考える。関数 $\mathcal{J}_{m,n}^\pm(\omega)$ を以下で定義する:

$$\mathcal{J}_{m,n}^\pm(\omega) = 2 \int_0^1 d\bar{J} \bar{J}^{m+1} (1 - \bar{J}^2)^{\pm\frac{1}{2}} \int_{-\bar{J}}^{\bar{J}} d\bar{j} \bar{j}^n e^{\omega\bar{j}}. \quad (8.20)$$

ここで $\omega = uk$ とすれば式 (8.19) の角運動量積分を再現できる。ただし、 m は偶数で n は非負整数の場合を考えれば十分であることに注意する。すると、被積分関数は \bar{J} に関して偶関数に

なるので,

$$\mathcal{K}_n(\omega, \bar{J}) = \int_{-\bar{J}}^{\bar{J}} d\bar{j} \bar{j}^n e^{\omega\bar{j}} \quad (8.21)$$

を定義すれば

$$\mathcal{J}_{m,n}^{\pm}(\omega) = \int_{-1}^1 d\bar{J} \bar{J}^{m+1} (1 - \bar{J}^2)^{\pm\frac{1}{2}} \mathcal{K}_n(\omega, \bar{J}) \quad (8.22)$$

と表すことができる. 関数 $\mathcal{K}_n(\omega, \bar{J})$ は解析的に積分を実行することができ, n が非負整数であれば

$$\mathcal{K}_n(\omega, \bar{J}) = \frac{\Gamma(1+n, \omega\bar{J}) - \Gamma(1+n, -\omega\bar{J})}{(-\omega)^{1+n}} \quad (8.23)$$

と書ける. 実用上は, 具体的な n の場合の関数系を書いておくと便利なので, $n = 0, 1, 2$ の場合の表式を書いておく:

$$\mathcal{K}_0(\omega, \bar{J}) = \frac{e^{\omega\bar{J}} - e^{-\omega\bar{J}}}{\omega}, \quad (8.24a)$$

$$\mathcal{K}_1(\omega, \bar{J}) = -\frac{e^{\omega\bar{J}} - e^{-\omega\bar{J}}}{\omega^2} + \frac{\bar{J}(e^{\omega\bar{J}} + e^{-\omega\bar{J}})}{\omega}, \quad (8.24b)$$

$$\mathcal{K}_2(\omega, \bar{J}) = \frac{(2 + \omega^2 \bar{J}^2)(e^{\omega\bar{J}} - e^{-\omega\bar{J}})}{\omega^3} - \frac{2\bar{J}(e^{\omega\bar{J}} + e^{-\omega\bar{J}})}{\omega^2}. \quad (8.24c)$$

これらの具体的な表式を用いれば, \bar{j} 積分も直接的に計算できる. 第一種変形 Bessel 関数 $I_\nu(z)$ を導入すれば, いま必要な具体的な表式として

$$\mathcal{J}_{0,0}^-(\omega) = \frac{2\pi I_1(\omega)}{\omega}, \quad (8.25a)$$

$$\mathcal{J}_{0,1}^-(\omega) = \frac{2\pi I_2(\omega)}{\omega}, \quad (8.25b)$$

$$\mathcal{J}_{0,2}^-(\omega) = \frac{2\pi(I_2(\omega) + \omega I_3(\omega))}{\omega^2}, \quad (8.25c)$$

$$\mathcal{J}_{2,0}^-(\omega) = \frac{2\pi(3I_2(\omega) + \omega I_3(\omega))}{\omega^2}, \quad (8.25d)$$

$$\mathcal{J}_{0,0}^+(\omega) = \frac{2\pi I_2(\omega)}{\omega^2} \quad (8.25e)$$

を得る. 以上で角運動量積分が導出できた.

最後にエネルギー積分を求める. $\omega = uk$ であることを思い出すと, 必要な積分は全て次の形で表せる:

$$\mathcal{I}_{i,j,\nu}(u) = \int_1^\infty d\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}^i k^j I_\nu(uk) \exp(-\bar{\beta}\bar{\varepsilon}). \quad (8.26)$$

ところがこの積分は解析的に実行することが一般にはできないので, Einstein 方程式の各段階で数値積分を実行する必要がある. そこで数値積分を行いやすくするために, 積分変数を

$s := \arctan \bar{\varepsilon}$ に変換する. このとき積分は

$$\mathcal{I}_{i,j,\nu}(u) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{\cos^2 s} \tan^i s (\tan^2 s - 1)^{\frac{j}{2}} I_\nu \exp(-\bar{\beta} \tan s) \quad (8.27)$$

と表せる.

以上の結果を用いて式 (8.18) に対応するエネルギー運動量テンソルの表式を求めると,

$$T_{tt} = \frac{4\pi^2 e^\alpha F}{G} \left[\frac{\mathcal{I}_{2,1,1}}{u} + \frac{2ah}{\sqrt{F}} \frac{\mathcal{I}_{1,2,2}}{u} + \frac{a^2 h^2}{F} \left(\frac{\mathcal{I}_{0,2,2}}{u^2} + \frac{\mathcal{I}_{0,3,3}}{u} \right) \right], \quad (8.28a)$$

$$T_{t\phi} = -2\pi^2 e^\alpha \sqrt{F} \left[\frac{\mathcal{I}_{1,2,2}}{u} + \frac{ah}{\sqrt{F}} \left(\frac{\mathcal{I}_{0,2,2}}{u^2} + \frac{\mathcal{I}_{0,3,3}}{u} \right) \right], \quad (8.28b)$$

$$T_{\phi\phi} = \pi^2 e^\alpha G \left(\frac{\mathcal{I}_{0,2,2}}{u^2} + \frac{\mathcal{I}_{0,3,3}}{u} \right), \quad (8.28c)$$

$$T_{rr} = 4\pi^2 e^\alpha e^{2\nu} \frac{\mathcal{I}_{0,2,2}}{u^2}, \quad (8.28d)$$

$$\gamma^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 4\pi^2 e^\alpha r^2 \left[\left(3 + \frac{a^2 h}{r^2} \right) \frac{\mathcal{I}_{0,2,2}}{u^2} + \left(1 + \frac{a^2 h}{r^2} \right) \frac{\mathcal{I}_{0,3,3}}{u} \right], \quad (8.28e)$$

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -4\pi^2 e^\alpha \frac{\mathcal{I}_{0,1,1}}{u} \quad (8.28f)$$

となることがわかる. 同様にして, 粒子数密度を求めると,

$$N^t = \int dV_p p^t f = 4\pi^2 e^\alpha \sqrt{\frac{G}{F}} \frac{\mathcal{I}_{1,1,1}}{u}, \quad (8.29)$$

となる.

8.2.3 大域的な物理量

時空が対称性を持つとき, それを生成する Killing ベクトルを用いて保存量を構成することができる. 孤立系において, 保存量は系を特徴づける物理量とみなすことができる. これらは静的球対称な場合には熱力学量と呼んでいたものに対応する. まず, 系の全質量は時間的 Killing ベクトルに関する Komar 積分:

$$M_K := \int d\Sigma n_\mu T^\mu{}_\nu \eta^\nu \quad (8.30)$$

で定義される. ここで $d\Sigma$ は時間一定面の面積要素であり, いまの系では $d\Sigma = 2\pi^2 r^2 e^\nu \sqrt{G} dr$ と表せる. Komar 質量の具体的な表式は

$$M_K = 2\pi^2 \int dr \frac{r^2 e^\nu}{\sqrt{F}} (GT_{tt} + 2ahT_{t\phi}) \quad (8.31)$$

と書ける. ここで重要なことは, 宇宙定数が $\Lambda < 0$ にしていることである. これまでも述べているように, 負の宇宙項が存在することで系は有限の質量を持つことができる. 同様に, ϕ 方向の角運動量は σ_3 に関する Komar 積分:

$$J_\phi := - \int d\Sigma n_\mu T^\mu{}_\nu \sigma_3^\nu \quad (8.32)$$

として定義でき、その具体的な表式は

$$J_\phi = -2\pi^2 \int dr \frac{r^2 e^\nu}{\sqrt{F}} (GT_{t\phi} + 2ahT_{\phi\phi}) \quad (8.33)$$

で表せる。一方、 ψ 方向の角運動量は ξ_3 に関する Komar 積分で記述されるがこれは対称性から自明に零になる。従って、いま考えている系では一つの角運動量パラメータを持つ。全質量 M_K と全角運動量 J_ϕ に加え、Einstein–Vlasov 系では全粒子数

$$N := - \int d\Sigma n_\mu N^\mu = 2\pi^2 \int dr r^2 e^\nu \sqrt{F} N^t \quad (8.34)$$

も保存する。これは Vlasov 方程式が満たされていることの帰結である。

結局、計量 (7.14) で記述される Einstein–Vlasov 系は保存量として全質量 M_K 、全角運動量 J_ϕ 、そして全粒子数 N を持つ。これらは系を特徴付ける物理量となる。

8.3 Einstein 方程式

8.3.1 Einstein 方程式の具体的な表式の導出

時空次元が $D = 5$ のとき、一般に Einstein 方程式は、

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(\tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{T}}{3} g_{\mu\nu} \right), \quad \tilde{T}_{\mu\nu} := T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu} \quad (8.35)$$

と書き直せる。ここで $\tilde{T} := g^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu}$ とした。

球対称系と同様に、系を特徴付ける長さスケール ℓ で方程式系を無次元化しておく。ここでは $T_{tt}^c := T_{tt}(0)$ を用いて

$$\ell := (8\pi T_{tt}^c)^{-1/2} \quad (8.36)$$

とすると、 $r_{\mu\nu} := \ell^2 R_{\mu\nu}$ および $\tau_{\mu\nu} := \tilde{T}_{\mu\nu}/T_{tt}^c$ を定義すれば、

$$r_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} - \frac{\tau}{3} g_{\mu\nu} =: s_{\mu\nu} \quad (8.37)$$

とできる。さらに、計算の都合上の理由で新たな計量関数を

$$y_1(x) := \frac{ah}{\ell}, \quad y_2(x) := \frac{a^2 h}{\ell^2}, \quad y_3(x) := e^{2\mu} - h, \quad y_4(x) := e^{2\nu} \quad (8.38)$$

で定義する。これらは全て無次元量である。それに伴って無次元関数 $f_1(x) := G/\ell^2 = x^2 + y_2$ および $f_2(x) := F/\ell^2 = y_1^2 + f_1 y_3$ も定義しておく。このとき、互いに独立な Einstein 方程式

は以下の四本の連立常微分方程式に帰着する:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} = & \frac{2x(v_1 y_3 - v_3 y_1)}{f_2} + \frac{f_1 v_1 v_3 + v_1^2 y_1 + v_1 v_2 y_3 - v_2 v_3 y_1}{f_2} \\ & + 4s_{t\phi} y_4 + \frac{v_1(f_3 y_4 - 2)}{2x} + \frac{2v_1 y_2 y_4}{x^3} + \frac{4f_1 y_1 y_4}{x^4}, \end{aligned} \quad (8.39a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_2}{dx^2} = & \frac{4x(v_1 y_1 + v_2 y_3)}{f_2} + \frac{v_2^2 y_3 - f_1 v_1^2 + 2v_1 v_2 y_1 - 4(y_1^2 + y_2 y_3)}{f_2} \\ & + f_4 y_4 + \frac{v_2(f_3 y_4 - 2)}{2x} + \frac{2y_2 y_4}{x^2} \left(6 + \frac{v_2}{x} + \frac{2y_2}{x^2} \right), \end{aligned} \quad (8.39b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_3}{dx^2} = & \frac{f_1 v_3^2 - v_1^2 y_3 + 2v_1 v_3 y_1}{f_2} \\ & + 2s_{tt} y_4 + \frac{v_3(f_3 y_4 - 2)}{2x} + \frac{2v_3 y_2 y_4}{x^3} - \frac{4y_1^2 y_4}{x^4}, \end{aligned} \quad (8.39c)$$

$$\frac{dy_4}{dx} = y_4 \left[\frac{2x y_3}{f_2} + \frac{f_1 v_3 + 2v_1 y_1 + v_2 y_3}{f_2} + \frac{f_3 y_4 + 2}{x} + \frac{4y_2 y_4}{x^3} \right]. \quad (8.39d)$$

ただし記法の簡略化のために、補助的な関数として $f_3 = -4(1 + s_{\phi\phi}) + \gamma^{\mu\nu} s_{\mu\nu}$ および $f_4 = -12s_{\phi\phi} + \gamma^{\mu\nu} s_{\mu\nu}$ を定義した. なお, Einstein 方程式の他の成分は式 (8.39) とエネルギー運動量保存則から導ける.

8.3.2 境界条件と漸近解

Einstein 方程式 (8.39) は三本の二階微分方程式と一本の一階微分方程式の四本からなる. 従って, 合計七個の境界条件を与えることで解を求めることができる. 実際の数値計算では, 中心での適切な境界条件を設定することで漸近的に AdS 時空となるような時空を構成することになる. これを見るために, 中心における解の振る舞いを調べる. 求めるべき関数は中心近傍において以下のように展開できる:

$$y_1(x) \simeq x^2 \left[z_1^{(0)} + z_1^{(1)} x + \frac{z_1^{(2)}}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3) \right], \quad (8.40a)$$

$$y_2(x) \simeq x^2 \left[z_2^{(0)} + z_2^{(1)} x + \frac{z_2^{(2)}}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3) \right], \quad (8.40b)$$

$$y_3(x) \simeq y_3^{(0)} + y_3^{(1)} x + \frac{y_3^{(2)}}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad (8.40c)$$

$$y_4(x) \simeq y_4^{(0)} + y_4^{(1)} x + \frac{y_4^{(2)}}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3). \quad (8.40d)$$

ここで $z_1^{(i)}$, $z_2^{(i)}$, $y_3^{(i)}$ および $y_4^{(i)}$ は展開係数である.

球対称系の場合と同様に, ここでは時空が中心近傍で正則であることを要請する. すなわち, 式 (7.2) で用いた Cartesian 座標 (t, x_i) によって, $g_{tt} = -y_3^{(0)}$, $g_{x_i x_i} = 1 + \mathcal{O}(r^2)$ を満たし, かつ他の成分については $\mathcal{O}(r^2)$ であるとする. このとき Ricci 曲率は $R_{\mu\nu} = \text{const.} + \mathcal{O}(r)$ で, 条件

$$z_1^{(0)} = z_1^{(1)} = z_2^{(0)} = z_2^{(1)} = y_3^{(1)} = 0, \quad y_4^{(0)} = 1 \quad (8.41)$$

が導かれる。このとき $y_3^{(0)}$ は決定されず、系のパラメータとして扱われる。

以上の下で多体系の効果まで考慮して中心での漸近解がどのように表されるかを考える。式 (8.17) の中心近傍での振る舞いは、

$$\bar{\beta}(x) \simeq \beta_c \left[1 + \frac{u^{(2)}}{4} x^2 + \frac{u^{(3)}}{12} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \right], \quad (8.42a)$$

$$\bar{\Omega}(x) \simeq \frac{1}{2} \Omega_c x \left[1 - \frac{u^{(2)} + w^{(2)}}{4} x^2 \right] + \mathcal{O}(x^4), \quad (8.42b)$$

$$u(x) \simeq \frac{1}{2} \beta_c \Omega_c x \left[1 - \frac{w^{(2)}}{4} x^2 \right] + \mathcal{O}(x^4) \quad (8.42c)$$

と表される。ここで記法を簡便にするため、 $\beta_c := \beta \sqrt{y_3^{(0)}}$ および $\Omega_c := \Omega / \sqrt{y_3^{(0)}}$ を導入し、さらに

$$u^{(i)} := \frac{y_3^{(i)}}{y_3^{(0)}} \quad \text{and} \quad w^{(i)} := \frac{4z_1^{(i)}}{\Omega_c \sqrt{y_3^{(0)}}} - z_2^{(i)} \quad (8.43)$$

とした。すると、

$$\zeta_2 := \frac{\beta_c^2 \Omega_c^2}{4(1+\nu)} k^2 - \beta_c u^{(2)} \bar{\varepsilon} - \nu w^{(2)}, \quad \zeta_3 := -\beta_c u^{(3)} \bar{\varepsilon} - \nu w^{(3)} \quad (8.44)$$

として、

$$I_\nu(uk) \exp(-\bar{\beta}\bar{\varepsilon}) \simeq \frac{e^{-\beta_c \bar{\varepsilon}}}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{\beta_c \Omega_c}{4} kx \right)^\nu \left[1 + \frac{\zeta_2}{4} x^2 + \frac{\zeta_3}{12} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \right] \quad (8.45)$$

と展開できるので、

$$\mathcal{I}_{i,j,\nu} \simeq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left[\frac{\beta_c \Omega_c}{4} x \right]^\nu \int_1^\infty d\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}^i k^{j+\nu} e^{-\beta_c \bar{\varepsilon}} \left[1 + \frac{\zeta_2}{4} x^2 + \frac{\zeta_3}{12} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \right] \quad (8.46)$$

となる。また、中心の T_{tt} の値は

$$T_{tt}^c = \frac{4\pi^2 e^\alpha (2 + \beta_c)(6 + 3\beta_c + \beta_c^2)}{\beta_c^5} y_3^{(0)} e^{-\beta_c} \quad (8.47)$$

と書けることもわかる。従って、Einstein 方程式 (8.37) の右辺を

$$s_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{\mu\nu}^{(n)}}{n!} x^n, \quad \gamma^{\mu\nu} s_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_\gamma^{(n)}}{n!} x^n, \quad g^{\mu\nu} s_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{(n)}}{n!} x^n \quad (8.48)$$

と展開すれば、最低次の係数は

$$s_{tt}^{(0)} = \left[\frac{2(18 + \beta_c(18 + \beta_c(7 + \beta_c)))}{3(2 + \beta_c)(6 + \beta_c(3 + \beta_c))y_3^{(0)}} + \frac{4}{\lambda^2} \right] y_3^{(0)}, \quad (8.49a)$$

$$s_{rr}^{(0)} = \frac{9 + \beta_c(9 + \beta_c(4 + \beta_c))}{3(2 + \beta_c)(6 + \beta_c(3 + \beta_c))y_3^{(0)}} - \frac{4}{\lambda^2}, \quad (8.49b)$$

$$s^{(0)} = \frac{2\beta_c^2(1 + \beta_c)}{3(2 + \beta_c)(6 + \beta_c(3 + \beta_c))y_3^{(0)}} - \frac{20}{\lambda^2}, \quad (8.49c)$$

$$s_{t\phi}^{(2)} = -\frac{15 + \beta_c(15 + 6\beta_c + \beta_c^2)}{2(2 + \beta_c)(6 + 3\beta_c + \beta_c^2)\sqrt{y_3^{(0)}}} \Omega_c \quad (8.49d)$$

と求めることができる. また, $s_\gamma^{(2)} = 12s_{\phi\phi}^{(2)} = 3s_{rr}^{(0)}$ である. これらを式 (8.39) に代入して x の次数ごとに解くことで,

$$z_1^{(2)} = -\frac{15 + \beta_c(15 + 6\beta_c + \beta_c^2)}{6(2 + \beta_c)(6 + 3\beta_c + \beta_c^2)\sqrt{y_3^{(0)}}}\Omega_c, \quad (8.50)$$

$$y_3^{(2)} = \frac{18 + \beta_c(18 + \beta_c(7 + \beta_c))}{3(2 + \beta_c)(6 + \beta_c(3 + \beta_c))} + \frac{2}{\lambda^2}y_3^{(0)}, \quad (8.51)$$

$$y_4^{(2)} = z_2^{(2)} + \frac{1}{3y_3^{(0)}} - \frac{2}{\lambda^2} \quad (8.52)$$

を得る. ところが, $z_2^{(2)}$ は方程式から決定することはできず, 系のパラメータとなる. 一方, それ以外の係数は全て逐次的に求めることができ, 従って, 系は $(y_3^{(0)}, z_2^{(2)}, \bar{\beta}(0), \Omega, \lambda)$ を決めれば一意に解を求めることができる.

パラメータ $z_2^{(2)}$ の役割を見るために, 計量を

$$\bar{g} = -\frac{f_2}{f_1} dt^2 + y_4 dx^2 + \frac{x^2}{4} \left[(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + \frac{f_1}{x^2} \left(\sigma^3 - \frac{2y_1}{f_1} dt \right)^2 \right] \quad (8.53)$$

と書き直す. ここで, 真空の場合における遠方での漸近解を構成する. 多体系のエネルギー運動量テンソルを $T_{\mu\nu} = 0$ として, $\bar{x} := 1/x$ とすると, $\bar{x} \simeq 0$ 近傍における漸近解は

$$\begin{aligned} \frac{f_2}{f_1} &= \frac{1}{\bar{x}^2\lambda^2} + 1 - s + \mathcal{O}(\bar{x}), \\ \frac{1}{y_4} &= \frac{1}{\bar{x}^2\lambda^2} + 1 - \frac{5}{3}s + \mathcal{O}(\bar{x}), \\ \frac{f_1}{x} &= 1 + s - 2s(1+s)\bar{x}^2\lambda^2 + \mathcal{O}(\bar{x}^3), \\ \frac{2y_1}{f_1} &= \omega + \mathcal{O}(\bar{x}^3) \end{aligned} \quad (8.54)$$

となることが確認できるので, 遠方の漸近解は二つのパラメータ (s, ω) を持った系列になる. 適当な境界条件を中心で与えて数値的に解を構成すると, 一般には (s, ω) は有限の値を持つ. このとき遠方で, $\hat{\phi} := \phi - \omega t$ を定義することで ω の効果は打ち消すことができる. $\hat{\phi}$ による座標系を共動 (co-rotating) 座標系と呼び, ω は遠方における角度座標の引きずりを表す. そこでここでは関数 $Dr(x) := 2y_1/x$ 引き摺り関数 (dragging function) と呼ぶことにする. 一方パラメータ s は遠方での三次元球面 S^3 の歪みを表し, 回転の無い場合において [101] などでも生じることが知られている. そこで $Sq(x) := f_1/x^2$ を歪み関数 (Squashing function) と呼ぶと, $s = Sq(\infty)$ とかける. 漸近 AdS 時空を構成するためには, 遠方での歪みパラメータが $s = 0$ にならなければならない. 実は s が零になるように調整するパラメータが中心のパラメータ $z_2^{(2)}$ であり, 適切に $z_2^{(2)}$ を選ぶことで遠方で歪みのない三次元球面を持つ解を構成できる. これについても [101] と同様であり, 次節で数値解を構成する. なお, 当然ながら $(s, \omega) = (0, 0)$ の場合には球対称系になる.

8.4 数値計算による解の配位

8.4.1 $\Omega = 0$ の場合

$\Omega = 0$ の場合には, 系は角運動量を持たない. さらに $z_2^{(2)} = 0$ に設定すれば $s = 0$ となり, 静的球対称な Einstein–Vlasov 系を構成することができる. この場合には当然, 第 II 部で構成した球対称系の $D = 5$ の場合と同じ解が構成できる. 実際に数値解を構成し, そのエネルギー密度の配位を図 8.1 である. この場合のパラメータ依存性は第 II 部で構

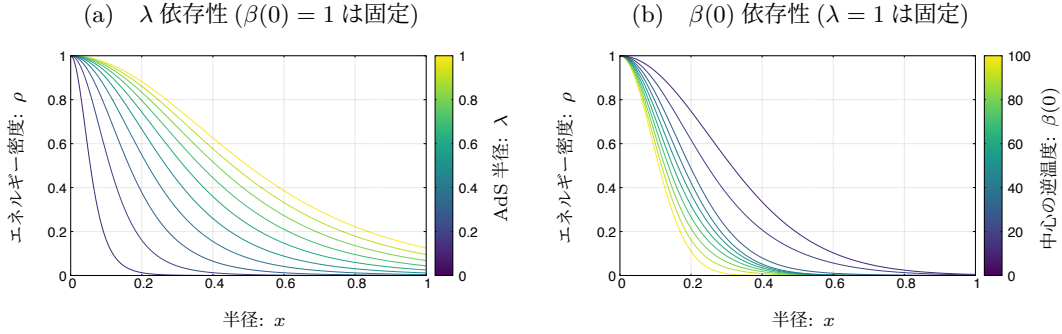


図 8.1 静的球対称な場合におけるエネルギー密度の $(\beta(0), \lambda)$ 依存性. この場合は第 II 部で示した場合と等しい結果を与える. 実際, 逆温度に関しては, 小さな $\beta(0)$ ほど系が相対論的になる. AdS 半径 λ に関しては大きな λ の解ほど系のサイズが大きくなる.

成した解の配位と全く同様である. つまり, 中心の逆温度に対応するパラメータ $\beta(0)$ が小さいほど, すなわち中心が高温であるほど系は相対論的になる. また AdS 半径 λ が大きいほど多体系が作る系のサイズが大きくなる. ここでも AdS 障壁により多体系が閉じ込められた結果得られた解であることを反映している.

ここでは系の全質量として Komar 質量を採用している. 静的球対称な場合には, 時空全域におけるその値は第 II 部で採用していた Misner–Sharp と等しくなる. これを見るために, Komar 質量の空間依存性を図 8.2 に図示した. まず, AdS 半径程度を超えると質量の増加率が減少し始め, $x \gg \lambda$ で Komar 質量が一定値に近づいていく様子が見取れる. これは AdS 半径が大きくなるほど系のサイズも大きくなることを示している. 逆温度依存性については, 第 II 部と同様に AdS 半径を用いたコンパクトネス関数:

$$\mathcal{C}(x) := M_K(r)/r^2, \quad (8.55)$$

を考えると理解しやすい. ある x の値においては M_K の値の比較がそのままコンパクトネスの比較になるので, 小さな $\beta(0)$, つまり中心温度が高いほどコンパクトネス関数が大きな値になることができ, 系が相対論的になることを示している. 以上より, 確かに Misner–Sharp 質量を用いた場合と同様の性質を示していることが確認できる.

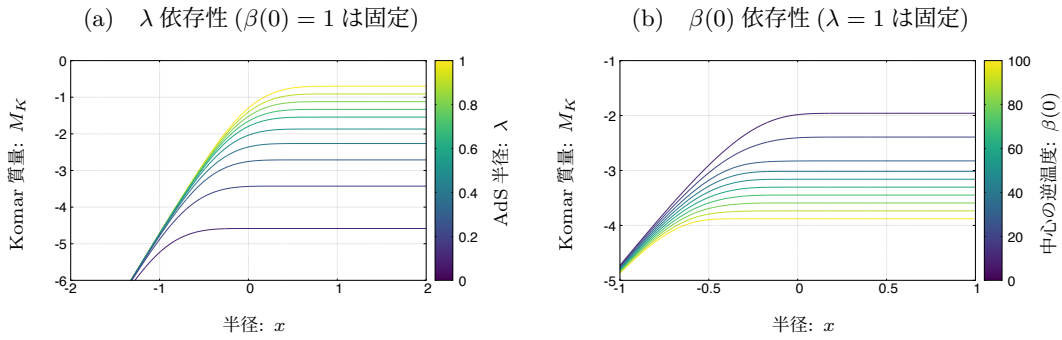


図 8.2 球対称な場合での Komar 質量の空間依存性. Misner–Sharp 質量を用いた場合と同様に, AdS 半径を超えると質量が有限の値に近づいていくことがわかる. 従って AdS 半径が大きいほど系のサイズが大きくなることも, この図からも確認できる. また, パラメータ依存性についても高温ではコンパクトネスの最大値が大きな値をとっており, 相対論的であると言える.

8.4.2 $\Omega \neq 0$ の場合

次に $\Omega \neq 0$ の場合について考える. パラメータ ($\beta(0), \lambda$) 依存性については $\Omega = 0$ の場合と同様なので, ここでは $(\Omega, z_2^{(2)})$ 依存性に注目する. まずは $z_2^{(2)} = 0$ とした場合について, 角運動量密度 $j_\phi := T^t_\phi$ と Komar 積分による全角運動量の値を図 8.3 に図示した. 角運動量密

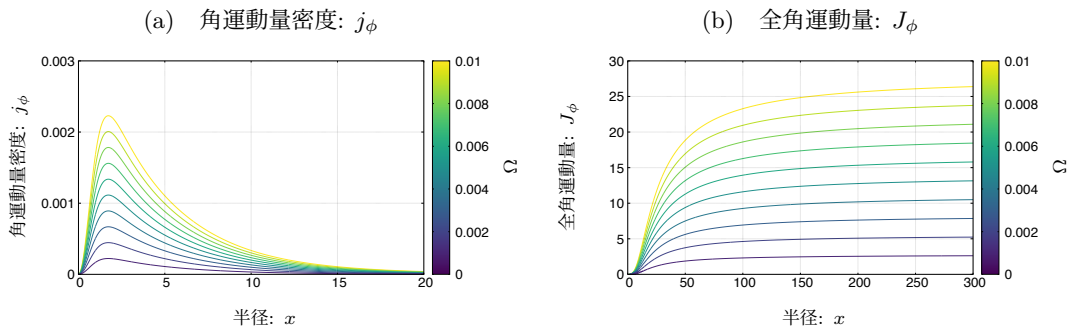


図 8.3 $(\beta(0), \lambda) = (0.02, 10)$ における角運動量密度と全角運動量の x 依存性. 角運動量密度が中心から外側に行くにしたがって増加し, ある位置で最大値を迎えた後に減少していくことが読み取れる. その空間積分である全角運動量については中心から単調に増加していき, 遠方である有限の値に近づく.

度に関しては, 境界条件より中心で $j_\phi = 0$ で, 外側に向かって増加していき, ある位置で最大値を迎えた後に減少する. これは AdS 障壁により閉じ込められているために粒子自体の密度が薄くなることで, 角運動量についても遠方で値が小さくなることを示している. 全角運動量はその空間積分なので, 中心から単調増加していき, 遠方で適当な有限の値に近づく.

Komar 積分としての全角運動量の値から確かに有限の角運動量を持つ解を構成できたことが確かめられたので、次に計量関数の振る舞いを調べると共に漸近構造についても調べてみる。図 8.4 には $(\beta(0), \lambda, z_2^{(2)}) = (0.001, 10, 0)$ における歪み関数と引き摺り関数を図示した。まず図 8.4b から、引き摺り関数が遠方で有限の値を持つことがわかる。これは、回転する粒子

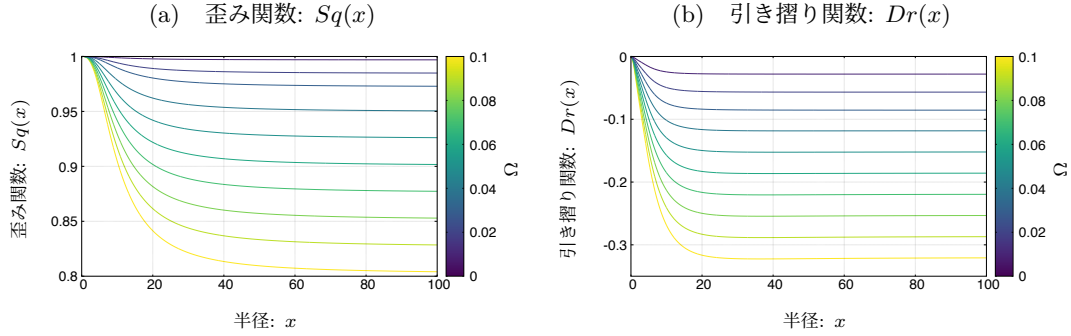


図 8.4 パラメータ $(\beta(0), \lambda, z_2^{(2)}) = (0.001, 10, 0)$ における歪み関数図 a と引き摺り関数図 b. 引き摺り関数が遠方で有限の値になることから、回転する粒子系により時空が引きずられ、遠方においてその効果が一定値になっていることがわかる。また、遠方で歪み関数が 1 でない定数に漸近していることから、この場合には遠方で S^3 が歪んでいることがわかる。

系が時空を引きずることで、遠方において角度座標 ϕ が定数シフトを受けることを意味する。次に図 8.4a から、歪み関数が 1 でない定数に漸近していることがわかる。この結果は $\Omega = 0$ の場合では $z_2^{(2)} = 0$ とすれば自動的に $Sq \rightarrow 1$ となっていたことと対照的である。従って、回転する粒子系は引き摺りだけでなく球面を歪める作用も持っており、その結果遠方で三次元球面が歪められていると結論づけられる。そのため、漸近 AdS 時空を構成するためには中心のパラメータを調整することにより粒子系の歪み関数に対する効果を打ち消し、遠方で球面になるようにすれば良いと期待できる。そこでパラメータ $(\beta(0), \lambda, \Omega) = (0.001, 10, 0.1)$ において $z_2^{(2)}$ を変化させたときの歪み関数と引き摺り関数の振る舞いを図 8.5 に図示した。図 8.5a より、確かに $z_2^{(2)}$ を調整して歪み関数に粒子系の寄与と逆向き寄与を中心で与えることで、遠方で零に漸近するように選べることが確認できる。また、図 8.5b からそのような調整を行っても引き摺り関数は遠方で有限の値をとっており、漸近 AdS ながらも回転を伴っていることがわかる。

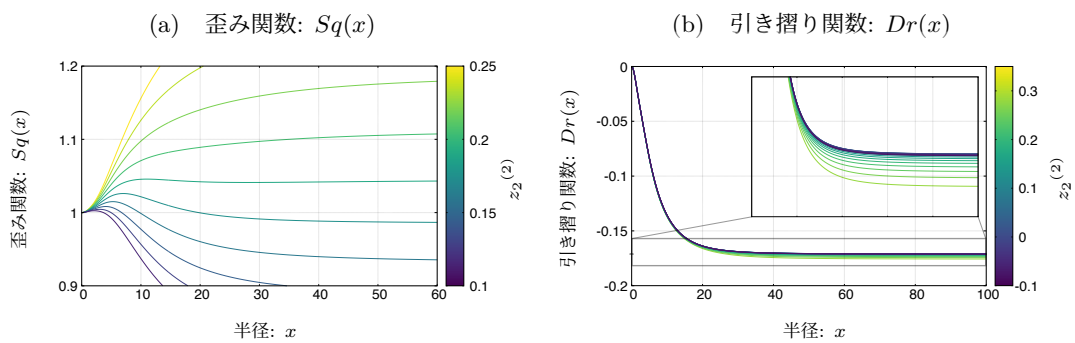


図 8.5 パラメータ $(\beta(0), \lambda, \Omega) = (0.001, 10, 0.1)$ で $z_2^{(2)}$ を変化させたときの歪み関数 (図 a) と引き摺り関数 (図 b). 中心でのパラメータ $z_2^{(2)}$ を調整することで回転する粒子系が及ぼす歪みを打ち消すことができることがわかる. また, そのような調整を行なったとしても引き摺り関数は有限の値を保つことができおり, 回転を伴った漸近 AdS 時空を構成できていることが確認できる.

第 III 部 まとめ

第 III 部では、等長変換群 $R_t \times SU(2)_\xi \times U(1)_\sigma$ を持つ回転を伴う五次元漸近 AdS 非球対称 Einstein–Vlasov 系の解を構成した。

その準備として、第 7 章ではまず三次元球面の対称性について議論した。三次元球面は四次元 Euclid 空間の埋め込みとして定義でき、自然な角度座標である Hopf 座標を導入することで具体的な計量を求めることができる。Hopf 座標の代わりに新たな角度座標を導入することで、三次元球面の持つ等長変換群 $SO(4)$ の代数は、二個の可換な $SU(2)$ に分離することができる。第 7 章ではその具体的な表式を与え、さらに Killing ベクトル $\{\xi_i, \sigma_i\}$ についても具体的な表式を導出した。次に三次元球面で定義した Killing ベクトルを用いて $R_t \times SU(2)_\xi \times U(1)_\sigma$ を持つ時空の計量を与えた。 $R_t \times SU(2)_\xi \times U(1)_\sigma$ は高い対称性を持ち、非球対称ながら余等質が 1 となる時空の一つである。従ってその上の粒子を考えると、軌道に沿った保存量を用いて一般性を失わずに有効ポテンシャルを導入することができる。第 7 章ではさらに、その具体的な例として等角運動量 Myers–Perry–AdS₅ を考え、その有効ポテンシャルの具体系を見た。その結果、ブラックホールの回転方向に逆らって動く粒子については実行的にポテンシャル障壁が低くなり、ブラックホールに落下し易くなることを確認した。

次に第 8 章では、熱平衡分布を一般化した分布関数を導入することで $R_t \times SU(2)_\xi \times U(1)_\sigma$ 対称性を持つ Einstein–Vlasov 系の定常解を構成した。ただしここでは、分布関数として回転軸方向の粒子の角運動量 j_σ に関して指数関数的な分布関数を仮定した。このような仮定の下では、エネルギー分布に関して AdS 障壁によって分布関数が減少するので自動的に質量と角運動量が有限の解を構成できる。またこのような仮定の下では、時空には質量と角運動量の他に遠方で球面を歪ませる自由度がある。この自由度は中心における自由なパラメータを選ぶことで調整することができ、特に回転を伴う場合には微調整しなければ漸近 AdS 時空を構成することができないことを数値計算により示した。

第 9 章 結論と今後の展望

9.1 結論及び本研究に関する考察

本研究では漸近 AdS 時空における自己重力多体系の解の構成とその安定性解析を行なった。

漸近 AdS 時空はその特殊な漸近構造により、内部の物質が拡散できずに閉じ込められるという性質を持つ。まず我々は、この性質を用いることで静的球対称時空において熱平衡状態を構成し、AdS 半径程度の大きさを持つ熱平衡状態を確かに構成できることを示した。このようにして構成した熱平衡状態は二つのパラメータを持ち、熱力学によって作られる三次元空間内で二次元曲面を描く。我々はこの解が描く曲面に対して転回点法を適用することで熱力学的な安定性解析を行なった。具体的には、系の静止質量と AdS 半径の比によって定義されるパラメータ γ を固定することで、解の系列をエネルギーと温度による二次元面 $(\bar{E}, \bar{\beta})$ での一次元曲線に帰着させ、その配位を見ることで状態が安定性の臨界点となる条件を見出した。その結果として、 $4 \leq D \leq 10$ のとき熱平衡状態は典型的には二重渦構造を持ち、各渦に対応した二つの重力熱的不安定性を持つことを示した。ここでは低エネルギー領域のものを cold spiral と呼び、高エネルギー領域のものを hot spiral と呼んでいるが、これらは AdS 半径により定義される系のコンパクトネスによって分類されている。先行研究などとの整合性から、cold spiral に対応する不安定性は Newton 重力でよく知られる系の分裂を引き起こす重力熱的不安定性であり、hot spiral に対応する不安定性は一般相対論特有の重力崩壊を引き起こす重力熱的不安定性であると結論づけた。これらの二つの不安定性は、エネルギー密度の配位で特徴付けられるシャープネスパラメータ σ の観点ではいずれも σ が大きな値で生じる不安定性であることも確認した。この事実からいずれの渦構造に対応する不安定性も重力系の負の比熱によって引き起こされていると結論づけられる。なお、転回点の存在は不安定平衡状態の存在だけでなく系のエネルギー \bar{E} の値に制限がつくことも意味している。相対論的な系では二つの渦構造が存在し、エネルギー \bar{E} は上限と下限を持ちその値は有限の領域しか取ることもできない。つまりそれ以外の領域のエネルギーを持つような熱平衡状態は不安定なものも含め存在しないということになる。このような不安定性を強い不安定性と呼び、上で述べた不安定平衡解の形成を弱い不安定性と表現することもある。

次に γ を変化させることで解の系列がどのように変化するかを見た。パラメータ γ は系の相対論的效果の大きさを担っており、 γ が小さくなるほどその効果は強まる。十分大きな γ では系は Newton 的になり、hot spiral がより高エネルギー領域に移動する。 γ を小さくすると二つの渦は互いに近づき、やがて衝突する。その結果解の系列は分裂し、二つの不連続な系列

を形成する。これは上述した二種類の不安定性の区別がつかなくなっていると解釈することもできる。さらに γ を小さくすると、熱平衡状態は存在できなくなる。つまりそのような領域では、熱平衡状態は強い不安定性のみを持つ。これは、AdS 半径に比べて大きな静止質量が存在する場合には自己重力が強すぎるあまりに多体系がある位置に留まることができないために起こる不安定性であるといえる。なおこのような振る舞いについては Schwarzschild–AdS 時空においても質量と AdS 半径の関係性によって有効ポテンシャルの形状が変化し、十分質量が大きい場合には極値を持たなくなることに対応していると考えられる。

また、時空次元 D に対して系の安定性がどう変化するかについても解析を行なった。その結果、 $4 \leq D \leq 10$ では熱平衡状態が二重渦構造を持つのに対して $D \geq 11$ では渦を持たないことが判明した。従って $D \geq 11$ では熱平衡状態は弱い不安定性を持たない。一方で系のエネルギー \bar{E} は依然有限領域のみを取ることができ、強い不安定性は持つ。また十分小さな γ で熱平衡状態が完全に消失することも同様である。

以上の結果は全て、多体系を断熱壁に閉じ込めた系で解析した文献 [57, 58] と定性的には同様の結果を与えている。すなわち自己重力多体系の安定性について、その中で漸近 AdS 時空の閉じ込め機構についても説明する依存しない普遍的な結果を得たと結論づけた。

最後に我々は、等長変換群 $R_t \times SU(2)_\xi \times U(1)_\sigma$ を持つ回転を伴う五次元漸近 AdS 非球対称 Einstein–Vlasov 系の解を構成した。一般には時空が球対称性を破ると保存量の数が減るためその方程式系は遥かに複雑になる。そこで三次元球面の特殊性を利用することで非球対称ながら高い対称性を保つ時空を、分布関数として回転軸方向の粒子の角運動量 j_σ に関して指数関数的な分布関数を仮定することで構成した。結果として、確かに有限の角運動量を持つ Einstein–Vlasov 系の定常解を構成できることを示した。ただしこのとき、多体系が非自明に寄与するために、中心で適切な境界条件を与えなければ遠方の球面が歪んでしまい、漸近 AdS 時空を構成できない。そこで歪み関数と引き摺り関数の中心の自由なパラメータに対する依存性を見ることで遠方での漸近 AdS 条件を満たしながらも有限の角運動量を持つ定常解を構成できることを示した。

以上をまとめると、本研究の主な結果は以下の通りである：

1. D 次元における静的球対称な相対論的自己重力多体系は二種類の不安定性を持つことを示した。
2. これらの不安定性の存在が次元に依存し、 $D \geq 11$ では消失することを示した。
3. 有限の角運動量を持つ五次元漸近 AdS 自己重力多体系の解を構成した。

9.2 今後の展望

本研究では中心で正則な自己重力多体系の解を取り扱った。ところが我々の目的は、漸近 AdS 時空において乱流現象が生じることで高エネルギーモードが顕著になった物質場をモデル化することにある。そのため一般には、ブラックホールが存在する場合のような非自明な因

果構造を持つ時空を考える必要があると思われる。漸近 AdS 条件を満たすブラックホールを伴う解を構成し、その安定性を議論することでこれまでにないような最終状態の候補を探索することが可能になる。ここで問題になるのはどのような拘束条件を課すのか、である。本研究で取り扱った系においては、通常の孤立系と同様に全粒子数と全エネルギーを固定したエントロピーの変分問題として考えたが、ブラックホールを伴う場合には粒子がブラックホールに落ちることができる上にブラックホールのエントロピーについても考慮しなければならない。そのためブラックホールを含む系の変分問題としての新たな定式化が必要となることが考えられる。

また、ここでは回転系に対する熱的安定性の議論は行っていない。これは静的でなく定常となっていることで変分問題としての取り扱いが非自明になっているからである。これに関しては、系の角運動量がその定義より保存量となることから、本研究で取り扱った安定性解析と類似した手法を適用可能な可能性がある。また上記の場合と同様にブラックホールを伴う解を構成することで回転するブラックホールと物質の相互作用といった物理現象の効果を取り入れることが可能になる。これに関しても今後の展望としたい。

謝辞

本研究にあたり、ご多忙の中多大なるご指導ご鞭撻をいただきました。指導教員である柳哲文講師に深く感謝申し上げます。柳講師には卒業論文執筆時より、研究の初歩から本論文のとりまとめに至るまでご教示いただきました。この場を借りて深く感謝申し上げます。QG 研の野尻教授、南部准教授には本研究に関して有用なご指摘をいただいただけでなく、研究会などの参加に際して資金面でのご支援をしていただきましたことにも深く感謝いたします。立教大学の原田教授、日本大学の村田准教授には研究会などで数多くの有用なコメント、ご助言をいただきました。その他、研究会で議論、コメントしていただいた方々にもこの場を借りてお礼申し上げます。家族をはじめ QG 研および E 研、H 研の先輩方、同期や後輩の皆様、事務や秘書の方々にも大変お世話になりました。その他数多くの方の支えにより本論文を完成するに至りましたこと、改めて心より感謝申し上げます。

また本研究の一部は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2125 の財政支援を受けたものです。この場を借りて「東海国立大学機構融合フロンティア次世代研究事業」に御礼申し上げます。

付録

付録 A 一般次元の Newton 極限

空間 d 次元 Poisson 方程式は式 (3.7) で与えられ, その係数に含まれる重力定数 G_N は重力ポテンシャルが式 (3.2) の形で書かれるように選んでいる. そしてそれは,

$$\nabla^2 G(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = -\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (\text{A.1})$$

により定義される d 次元 Green 関数 $G(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ が以下のように表されることによる:

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{1}{(d-2)S_d |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{d-2}}. \quad (\text{A.2})$$

一方 Einstein 方程式では, その結合定数は式 (4.29) のようになる. ここではこの状況設定の下で Newton の重力定数 G_N と Einstein の重力定数 G_D がどのような関係を満たすかを, それぞれの静水圧平衡の式を考えることで議論する.

まず Newton 重力における静水圧平衡の式は, 圧力 $p(r)$ に対して以下のように表現できる:

$$\frac{dp}{dr} = -G_N \frac{\rho M}{r^{d-1}}. \quad (\text{A.3})$$

次に相対論的な系を考える. 重力定数 G_D と光速 c を復活させて式 (5.42) と式 (5.44), およびエネルギー-運動量保存則より

$$\frac{dp}{dr} = -\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{\frac{k(D-3)G_D M(r)}{2r^{D-3}} + \frac{8\pi r^2 p(r)}{(D-2)c^2}}{r\left(1 - \frac{kG_D M(r)}{c^2 r^{D-3}}\right)} \quad (\text{A.4})$$

を得る. ただし簡単のため $\Lambda = 0$ とした. 式 (A.4) は相対論的な静水圧平衡状態を記述する方程式で, $D = 4$ の場合には Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) 方程式と呼ばれる. この方程式で $c \rightarrow \infty$ により非相対論的極限をとると,

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{8\pi(D-3)G_D}{S_{D-1}(D-2)} \frac{\rho M}{r^{D-2}} \quad (\text{A.5})$$

となる. 式 (A.3) と式 (A.5) を見比べれば,

$$G_N = \frac{8\pi(D-3)}{S_{D-1}(D-2)} G_D = \frac{8\pi(d-2)}{S_d(d-1)} G_{d+1} \quad (\text{A.6})$$

となり, 一般次元における重力定数の関係式が求まった.

付録 B 小さな熱平衡状態の安定性

この付録では, Newton 重力において十分小さな壁に閉じ込められた熱平衡状態が安定であることを示す. そのためには, エントロピーの二次変分の無次元化された核を見れば,

$$\int_0^{x_1} dx \left[\frac{1}{x^{d-1}} \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 - \frac{d-2}{x^{d-1}} q^2 \right] > 0 \quad (\text{B.1})$$

となるような x_1 が存在することを示せれば良い. これは汎関数

$$Q[q] := \frac{\int_0^{x_1} dx \frac{1}{x^{d-1}} \left(\frac{dq}{dx} \right)^2}{\int_0^{x_1} dx \frac{d-2}{x^{d-1}} q^2} \quad (\text{B.2})$$

に関する最小化問題と解釈でき, この汎関数の最小値が 1 以上となるような x_1 の存在性を示すことがこの付録の目的である.

まず関数 $\mathcal{F}_0(x)$ を

$$\mathcal{F}_0(x) := x^d n(x) - m(x) = m(x)(u(x) - d + 2) \quad (\text{B.3})$$

で定義すると, 実はこの関数は式 (3.52) で定義した演算子 \hat{L} の零固有関数になっている:

$$\hat{L}\mathcal{F}_0(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^{d-1}n} \frac{d}{dx} \right) \mathcal{F}_0(x) = -\frac{d-2}{x^{d-1}} \mathcal{F}_0(x). \quad (\text{B.4})$$

中心近傍の振る舞いを調べてみると, 式 (3.38) より $\mathcal{F}_0(x) \simeq 2m$ と振る舞う. また定義より明らかに $u = d - 2$ となる x において $\mathcal{F}(x) = 0$ なので, 必ず $\mathcal{F}(x_1) = 0$ となるような $x_1 > 0$ が存在する. するとこれは, 固有値方程式:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^{d-1}n} \frac{d}{dx} \right) \mathcal{F}_0(x) = -\zeta \frac{d-2}{x^{d-1}} \mathcal{F}_0(x) \quad (\text{B.5})$$

の $\zeta = 1$ の場合になっており, かつ定義より $\zeta = 1$ は最小固有値になっている. ところでこの方程式は汎関数 (B.2) の最小値を与える式となっているから, $\zeta = 1$ が最小固有値であることは $Q[q]$ の最小値が 1 であることを示している. 従って $x < x_1$ とすればエントロピーは常に極大であり, 系が安定であることが示された.

付録 C 転回点法による安定性解析

Poincaré の安定性解析 [40] について, [41, 43] などに沿って簡単に説明する.

C.1 転回点法

系は適当な関数 $f(x)$ で記述されており¹⁾, さらにその平衡状態はポテンシャル関数と呼ばれる汎関数 $S[f]$ が

$$\text{grad } S = \frac{\delta S}{\delta f(x)} = 0 \quad (\text{C.1})$$

を満たす状態として定義されるものとする. このとき, 安定な熱平衡状態は任意の変分 $\delta f(x)$ に対して

$$\frac{\delta^2 S}{\delta f(x) \delta f(y)} < 0 \quad (\text{C.2})$$

を満たす平衡状態として定義される. ここで汎関数 $S[f]$ が一つのパラメータ E を持つとすると, 式 (C.1) の解は一般に

$$f(x) = F_a(x; E) \quad (\text{C.3})$$

と表すことができる. ここで a は解の系列を指定するパラメータで, 一般にはパラメータ E を一つ指定したとしても解が一意的に決まるとは限らないことを表している. ある E に対して解が n 個あるとすると重複度が n であると言い, a は $a = 1, 2, \dots, n$ を動く. 以降ではポテンシャル関数 $S[f]$ は $f(x)$ 及び E に関して二階微分可能であり, かつ平衡解 $F_a(x; E)$ は E に関して連続であるとする. このとき平衡解 $F_a(x; E)$ は, $f(x)$ に (S, E) を加えたより広い空間の中に N 本の曲線を描き, 場合によってはそれらは互いに共有点を持ちうる. つまりその共有点において状態はある系列から他の系列に分岐する. この点が安定性解析においては重要となる.

各系列に対して, ポテンシャル関数の二階変分は離散的な縮退のない固有値を持ち, かつその値には最大値が存在すると仮定する. すなわち $K_a(x, x') := (-\delta^2 S / \delta f(x) \delta f(y))_a$ の固有値を χ_a としたとき, それらは各 a について

$$\chi_a^1 < \chi_a^2 < \dots \quad (\text{C.4})$$

1) [41, 43] などでは有限次元の空間で記述されるとしているが, 本論文で扱う系に合わせて, 無限次元空間で記述されているとしている.

を満たすものとする²⁾. この仮定の下では, ポテンシャル関数の二階変分の固有値がパラメータ E により決定されると思うとある E を固定したとき固有値が零になることができるのはただ一つである. 系の安定性が変わる点 (臨界点) とは, ある $E = E_0$ で固有値が $\chi_a^h = 0$ となるときその近傍で χ_a^h の符号が変化する点である. これを調べるために, 平衡解 $F_a(x; E)$ によって (S, E) 平面に射影されたポテンシャル関数を

$$S_a(E) := S[F_a(x; E), E] \quad (\text{C.5})$$

で定義する. すると, その全微分は $E \neq E_0$ 以外で

$$\frac{dS_a}{dE} = \int dx \frac{\partial F_a}{\partial E} \frac{\delta S}{\delta f(x)} \Big|_{f=F_a} + \frac{\partial S}{\partial E} \Big|_{f=F_a} = \frac{\partial S}{\partial E} \Big|_{f=F_a} \quad (\text{C.6})$$

と書ける. そこで E の共役量として

$$\beta_a := \frac{dS_a}{dE} = \frac{\partial S}{\partial E} \Big|_{f=F_a} \quad (\text{C.7})$$

を定義する. もう一度 E に関して微分すれば,

$$\frac{d\beta_a}{dE} = \int dx \frac{\partial F_a}{\partial E} \frac{\partial}{\partial E} \frac{\delta S}{\delta f(x)} \Big|_{f=F_a} + \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \Big|_{f=F_a} \quad (\text{C.8})$$

となる. ここで式 (C.1) を射影して E で微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\delta S}{\delta f(x)} \Big|_{f=F_a} \right) = \int dx' \frac{\delta S}{\delta f(x) \delta f(x')} \Big|_{f=F_a} \frac{\partial F_a}{\partial E} + \frac{\partial}{\partial E} \frac{\delta S}{\delta f(x)} \Big|_{f=F_a} = 0 \quad (\text{C.9})$$

となる. 核 K_a は $E \neq E_0$ であれば逆を持つので,

$$\frac{\partial F_a}{\partial E} = \int dx' K_a^{-1}(x, x') \frac{\partial}{\partial E} \frac{\delta S}{\delta f(x')} \Big|_{f=F_a} \quad (\text{C.10})$$

と書ける. これを式 (C.8) に代入すれば,

$$\frac{d\beta_a}{dE} = \int dx dx' \frac{\partial}{\partial E} \frac{\delta S}{\delta f(x)} \Big|_{f=F_a} K_a^{-1}(x, x') \frac{\partial}{\partial E} \frac{\delta S}{\delta f(x')} \Big|_{f=F_a} + \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \Big|_{f=F_a} \quad (\text{C.11})$$

となる. 臨界点近傍における振る舞いを調べる. 核 K_a の固有関数で展開すると, 仮定より $S[f]$ は二階微分可能なので, 臨界点近傍では零固有値に対応する固有関数 u_a^h の寄与が主要になる. 従って, 展開係数を c_a^h と書くことにすれば, 臨界点近傍で

$$\frac{d\beta_a}{dE} \simeq \frac{1}{\chi_a^h} \left[\int dx c_a^h u_a^h \right]^2 \quad (\text{C.12})$$

のように振る舞うことがわかる. つまり, (E, β) 平面内で平衡状態の描く曲線の傾きが不連続になるとき, 核 K_a は零固有値を持ち, 臨界点となる. 特に, 式 (C.12) の形を見ればわかるよ

2) ここで系が無限次元空間であることにより固有値が上に有界でなくなっているが, 下に有界であれば議論に変更はない. このような性質は Liouville-Sturm 型微分方程式などに見られる性質である.

うに、傾きの符号が変化するときはその固有値の符号が逆転するので、安定性が変化するということができる。

C.2 簡単な具体例

ここでは簡単な具体例として、第 II 部で登場した Schwarzschild 時空中における有質量粒子の軌道の安定性について考えてみる。ポテンシャル関数として有効ポテンシャル

$$V(r; a) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) \quad (\text{C.13})$$

を考える。すると平衡状態 (円軌道) は $V' = 0$ より

$$r_{\pm} = a \pm \sqrt{a(a-3)} \quad (\text{C.14})$$

と求まる。ここで添字 \pm は平衡解の系列を指定する添字とみなす。すると、共役量 W が

$$W_{\pm} := \left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_{r=r_{\pm}} = \frac{1}{r_{\pm}^2} \left(1 - \frac{1}{r_{\pm}}\right) \quad (\text{C.15})$$

と定義できる。これを図示したものが図 C.1 である。確かに $a = 3$ において解の系列が共有点

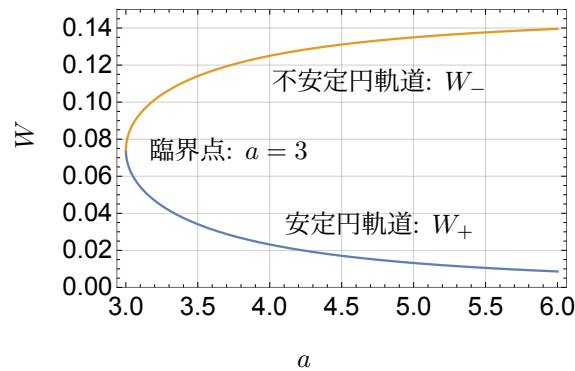


図 C.1 共役量 W とパラメータ a との関係。確かに $a = 3$ で解の系列が分岐していることがわかる。

を持ち、分岐していることがわかる。この場合は臨界点が転回点になっており、傾きの符号が逆転しているから安定性が切り替わっていることが確認できる。

付録 D 無質量スカラー場の伝搬

ここでは漸近 AdS 時空における無質量スカラー場の伝搬について [102] の補遺を参考に議論する。ただし簡単のため次元は $D = 4$ とする。静的球対称時空における Klein-Gordon 方程式は、式 (5.15) と同じ座標を用いれば以下のように表せる:

$$\left[-e^{-2\mu}(\partial_t)^2 + e^{2\mu}(\partial_r)^2 + 2e^{2\mu}\left(\mu' + \frac{1}{r}\right)\partial_r + \frac{\mathcal{D}^2}{r^2} \right] \Phi = 0. \quad (\text{C.1})$$

スカラー場を球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ と動径方向の方向の場 ϕ_l を用いて展開する。時間方向に関しては振動数 ω の単一モードのみとし、さらに簡単のため $m = 0$ のモードのみとすれば、スカラー場は

$$\Phi = e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} c_l \phi_l(r) Y_{l0}(\theta). \quad (\text{C.2})$$

のように展開できる。これより動径方向のスカラー場 ϕ_l の方程式

$$\left[e^{-2\mu}\omega^2 + e^{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + 2e^{2\mu}\left(\mu' + \frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \phi_l = 0 \quad (\text{C.3})$$

を得る。ここで $\psi := r\phi$ で場を再定義すると、

$$\left[\omega^2 + e^{4\mu}(\partial_r)^2 + 2\mu'e^{4\mu}\partial_r + \frac{l(l+1)e^{2\mu}}{r^2} \right] \psi_l = 0 \quad (\text{C.4})$$

となる。これは式 (4.77) で定義した toroise 座標 r_* を用いれば

$$\left[\omega^2 + (\partial_*)^2 - \frac{l(l+1)e^{2\mu}}{r^2} - 2\frac{\mu'e^{4\mu}}{r} \right] \psi_l = 0. \quad (\text{C.5})$$

と書き直せる。以上より、スカラー場 ψ_l に対する有効ポテンシャルを

$$V_{\text{scalar}} := -\frac{l(l+1)e^{2\mu}}{r^2} + 2\frac{\mu'e^{4\mu}}{r}. \quad (\text{C.6})$$

で定義できる。ただし r は r_* の関数とみなす。粒子に対する有効ポテンシャル (4.59) 見比べると、

$$V_{\text{curv}} := V_{\text{scalar}} - V_{\text{eff}} = 2\frac{\mu'e^{4\mu}}{r} \quad (\text{C.7})$$

が補正項として現れていることが確認できる。この効果を見るために最も簡単な AdS 時空で考えてみると、

$$V_{\text{curv}} = \frac{1}{L^2} \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) \quad (\text{C.8})$$

となる。補正項 V_{curv} は遠方で主要な寄与を与え、それは負の宇宙項が及ぼすポテンシャル障壁として働く。このような理由から、AdS 境界近傍では無質量スカラー場を幾何光学近似で取り扱うことはできない。

付録 E 等式の証明

E.1 式 (5.59) の証明

座標系 $(\hat{\varepsilon}, J, \psi_i)$ において, 式 (5.59) の左辺は次のように書ける:

$$\int dV_p \left. \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right|_J (p_t)^i (p_r)^j = \int d\varepsilon \wedge dJ \wedge d\Omega_{D-3} \frac{J^{\frac{D-4}{2}}}{r^{2(D-2)}} \left(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 \left(1 + \frac{J}{r^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left. \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right|_J (p_t)^i (p_r)^j. \quad (\text{D.1})$$

従って, 部分積分すれば

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_J \left(\left(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 \left(1 + \frac{J}{r^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} (p_t)^i (p_r)^j \right) \\ &= e^{j(-\mu+\nu)} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_J \left((-\varepsilon)^i \left(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 \left(1 + \frac{J}{r^2} \right) \right)^{\frac{i-1}{2}} \right) \\ &= e^{j(-\mu+\nu)} \left(-i(-\varepsilon)^{i-1} \left(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 \left(1 + \frac{J}{r^2} \right) \right)^{\frac{i-1}{2}} - (j-1)(-\varepsilon)^{i+1} \left(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 \left(1 + \frac{J}{r^2} \right) \right)^{\frac{i-3}{2}} \right) \\ &= \left(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 \left(1 + \frac{J}{r^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left[-i(p_t)^{i-1} (p_r)^j - (j-1)e^{-2\mu+2\nu} (p_t)^{i+1} (p_r)^{j-2} \right], \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

となり, 式 (5.59) を得る. \square

参考文献

- [1] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari, and et al. Binary black hole mergers in the first advanced ligo observing run. *Physical Review X*, 6(4), Oct 2016.
- [2] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari, and et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6), Feb 2016.
- [3] The Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole, 2019.
- [4] Juan Maldacena. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4), 1999.

- [5] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, and A.M. Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Physics Letters B*, 428(1-2), May 1998.
- [6] Edward Witten. Anti de sitter space and holography, 1998.
- [7] Piotr Bizoń and Andrzej Rostworowski. Weakly turbulent instability of anti-de sitter spacetime. *Physical Review Letters*, 107(3), Jul 2011.
- [8] Ben Craps, Oleg Evnin, and Joris Vanhooft. Renormalization group, secular term resummation and ads (in)stability. *Journal of High Energy Physics*, 2014(10), Oct 2014.
- [9] Ben Craps and Oleg Evnin. Ads (in)stability: an analytic approach. *Fortschritte der Physik*, 64(4-5), Mar 2016.
- [10] Maciej Maliborski. Instability of flat space enclosed in a cavity. *Physical Review Letters*, 109(22), Nov 2012.
- [11] Hirotada Okawa, Vitor Cardoso, and Paolo Pani. Study of the nonlinear instability of confined geometries. *Physical Review D*, 90(10), Nov 2014.
- [12] Remi Carles and Erwan Faou. Energy cascades for nls on the torus, 2010.
- [13] Oscar J. C. Dias, Gary T. Horowitz, Don Marolf, and Jorge E. Santos. On the Nonlinear Stability of Asymptotically Anti-de Sitter Solutions. *Class. Quant. Grav.*, 29:235019, 2012.
- [14] Maciej Maliborski and Andrzej Rostworowski. Time-Periodic Solutions in an Einstein AdS–Massless-Scalar-Field System. *Phys. Rev. Lett.*, 111:051102, 2013.
- [15] Alex Buchel, Steven L. Liebling, and Luis Lehner. Boson stars in AdS spacetime. *Phys. Rev. D*, 87(12):123006, 2013.
- [16] Venkat Balasubramanian, Alex Buchel, Stephen R. Green, Luis Lehner, and Steven L. Liebling. Holographic Thermalization, Stability of Anti-de Sitter Space, and the Fermi-Pasta-Ulam Paradox. *Phys. Rev. Lett.*, 113(7):071601, 2014.
- [17] Venkat Balasubramanian, Alex Buchel, Stephen R. Green, Luis Lehner, and Steven L. Liebling. Reply to Comment on “Holographic Thermalization, Stability of Anti-de Sitter Space, and the Fermi-Pasta-Ulam Paradox”. *Phys. Rev. Lett.*, 115(4):049102, 2015.
- [18] Piotr Bizoń, Maciej Maliborski, and Andrzej Rostworowski. Resonant Dynamics and the Instability of Anti-de Sitter Spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, 115(8):081103, 2015.
- [19] Fotios Dimitrakopoulos and I-Sheng Yang. Conditionally extended validity of perturbation theory: Persistence of AdS stability islands. *Phys. Rev. D*, 92(8):083013, 2015.
- [20] Stephen R. Green, Antoine Maillard, Luis Lehner, and Steven L. Liebling. Islands of stability and recurrence times in AdS. *Phys. Rev. D*, 92(8):084001, 2015.
- [21] David Garfinkle and Leopoldo A. Pando Zayas. Rapid Thermalization in Field Theory

- from Gravitational Collapse. *Phys. Rev. D*, 84:066006, 2011.
- [22] Joanna Jalmuzna, Andrzej Rostworowski, and Piotr Bizon. A Comment on AdS collapse of a scalar field in higher dimensions. *Phys. Rev. D*, 84:085021, 2011.
- [23] P. Bizoń and A. Rostworowski. Gravitational Turbulent Instability of AdS₅. *Acta Phys. Polon. B*, 48:1375, 2017.
- [24] Ben Craps, Oleg Evnin, and Joris Vanhoof. Renormalization group, secular term resummation and AdS (in)stability. *JHEP*, 10:048, 2014.
- [25] Ben Craps, Oleg Evnin, and Joris Vanhoof. Renormalization, averaging, conservation laws and AdS (in)stability. *JHEP*, 01:108, 2015.
- [26] Oleg Evnin. Resonant Hamiltonian systems and weakly nonlinear dynamics in AdS spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 38(20):203001, 2021.
- [27] Georgios Moschidis. A proof of the instability of AdS for the Einstein–null dust system with an inner mirror. *Anal. Part. Diff. Eq.*, 13(6):1671–1754, 2020.
- [28] Georgios Moschidis. The Einstein–null dust system in spherical symmetry with an inner mirror: structure of the maximal development and Cauchy stability. 4 2017.
- [29] Sebastian Günther, Jacob Körner, Timo Lebeda, Bastian Pötzl, Gerhard Rein, Christopher Straub, and Jörg Weber. A numerical stability analysis for the Einstein–Vlasov system. *Class. Quant. Grav.*, 38(3):035003, 2021.
- [30] Matthew W. Choptuik, Jorge E. Santos, and Benson Way. Charting islands of stability with multioscillators in anti–de sitter space. *Physical Review Letters*, 121(2), Jul 2018.
- [31] Ramon Masachs and Benson Way. New islands of stability with double-trace deformations. *Physical Review D*, 100(10), Nov 2019.
- [32] Vitor Cardoso and Óscar J. C. Dias. Small kerr–anti-de sitter black holes are unstable. *Physical Review D*, 70(8), Oct 2004.
- [33] Vitor Cardoso, Óscar J. C. Dias, and Shijun Yoshida. Classical instability of kerr-ads black holes and the issue of final state. *Physical Review D*, 74(4), Aug 2006.
- [34] Vitor Cardoso, Roman Konoplya, and José P. S. Lemos. Quasinormal frequencies of schwarzschild black holes in anti–de sitter spacetimes: A complete study of the overtone asymptotic behavior. *Physical Review D*, 68(4), Aug 2003.
- [35] Hari K. Kunduri, James Lucietti, and Harvey S. Reall. Gravitational perturbations of higher dimensional rotating black holes: Tensor perturbations. *Physical Review D*, 74(8), Oct 2006.
- [36] Benedict M. N. Carter and Ishwaree P. Neupane. Thermodynamics and stability of higher dimensional rotating (kerr-)ads black holes. *Physical Review D*, 72(4), Aug 2005.
- [37] Alikram N. Aliev and Özgür Delice. Superradiant instability of five-dimensional rotating charged ads black holes. *Physical Review D*, 79(2), Jan 2009.

- [38] V. A. ANTONOV. Most probable phase distribution in spherical star systems and conditions for its existence. *Vest. Leningrad Univ.*, 7:135, 1962.
- [39] D. Lynden-Bell and Roger Wood. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems. *mnras*, 138:495, Jan 1968.
- [40] H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Math.*, 7:259–380, 1885.
- [41] J. Katz. On the number of unstable modes of an equilibrium. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 183:765–770, June 1978.
- [42] J. Katz. On the Number of Unstable Modes of an Equilibrium - Part Two. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 189:817, December 1979.
- [43] R. Sorkin. Criterion for the onset of instability at a turning point. *Astrophys. J.*, 249:1, 10 1981.
- [44] R. Sorkin. A Stability Criterion for Many Parameter Equilibrium Families. *Astrophys. J.*, 257:847, June 1982.
- [45] M. Lecar and J. Katz. The stability of the grand microcanonical ensemble for bounded isothermal spheres. *Astrophys. J.*, 243:983–986, February 1981.
- [46] Chavanis, P. H. Gravitational instability of finite isothermal spheres. *Astron. Astrophys.*, 381(1):340–356, 2002.
- [47] Chavanis, P. H. Gravitational instability of isothermal and polytropic spheres. *Astron. Astrophys.*, 401(1):15–42, 2003.
- [48] E. Bettwieser and D. Sugimoto. Post-collapse evolution and gravothermal oscillation of globular clusters. *mnras*, 208:493–509, Jun 1984.
- [49] Izumi Hachisu and Daiichiro Sugimoto. Gravothermal Catastrophe and Negative Specific Heat of Self-Gravitating Systems. *Progress of Theoretical Physics*, 60(1):123–135, 07 1978.
- [50] Izumi Hachisu, Yoshikazu Nakada, Ken'ichi Nomoto, and Daiichiro Sugimoto. Gravothermal Catastrophe of Finite Amplitude. *Progress of Theoretical Physics*, 60(2):393–402, 08 1978.
- [51] D. Lynden-Bell and P. P. Eggleton. On the consequences of the gravothermal catastrophe. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 191:483–498, May 1980.
- [52] Junichiro Makino and Piet Hut. On Core Collapse. *Astrophys. J.*, 383:181, December 1991.
- [53] Zacharias Roupas. Thermodynamical instabilities of perfect fluid spheres in General Relativity. *Class. Quant. Grav.*, 30(11):115018, 2013. [Erratum: *Class.Quant.Grav.* 32, 119501 (2015)].
- [54] Zacharias Roupas. Relativistic Gravothermal Instabilities. *Class. Quant. Grav.*,

- 32(13):135023, 2015.
- [55] Zacharias Roupas. Corrigendum: Thermodynamical instabilities of perfect fluid spheres in general relativity (2013 class. quantum grav.30115018). *Classical and Quantum Gravity*, 32(11):119501, may 2015.
- [56] Zacharias Roupas. Gravitational instability caused by the weight of heat. *Symmetry*, 11(12):1435, 2019.
- [57] Giuseppe Alberti and Pierre-Henri Chavanis. Caloric curves of classical self-gravitating systems in general relativity. *Phys. Rev. E*, 101(5):052105, 2020.
- [58] Pierre-Henri Chavanis. Statistical mechanics of self-gravitating systems in general relativity: II. the classical boltzmann gas. *The European Physical Journal Plus*, 135(3):310, 2020.
- [59] Rafael D. Sorkin, Robert M. Wald, and Zhang Zhen Jiu. Entropy of self-gravitating radiation. *General Relativity and Gravitation*, 13(12):1127–1146, 1981.
- [60] Pierre-Henri Chavanis. Relativistic stars with a linear equation of state: analogy with classical isothermal spheres and black holes. *Astron. Astrophys.*, 483:673, 2008.
- [61] Vladislav Vaganov. Self-gravitating radiation in AdS(d). 7 2007.
- [62] John Hammersley. A Critical dimension for the stability of radiating perfect fluid stars. *Class. Quant. Grav.*, 25:205010, 2008.
- [63] A A Vlasov. THE VIBRATIONAL PROPERTIES OF AN ELECTRON GAS. *Soviet Physics Uspekhi*, 10(6):721–733, jun 1968.
- [64] Gerhard Rein. Chapter 5 collisionless kinetic equations from astrophysics — the vlasov-poisson system. *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations*, 3, 12 2007.
- [65] Håkan Andréasson, David Fajman, and Maximilian Thaller. Models for self-gravitating photon shells and geons, 2015.
- [66] Håkan Andréasson, Markus Kunze, and Gerhard Rein. Rotating, stationary, axially symmetric spacetimes with collisionless matter. *Communications in Mathematical Physics*, 329(2), Feb 2014.
- [67] G. Rein and A. D. Rendall. Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system with small initial data. *Communications in Mathematical Physics*, 150(3):561 – 583, 1992.
- [68] G. Rein. Static solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 115:559, 1994.
- [69] Håkan Andréasson, David Fajman, and Maximilian Thaller. Static solutions to the Einstein-Vlasov system with non-vanishing cosmological constant. *SIAM J. Math. Anal.*, 47(4):2657–2688, 2014.
- [70] Hakan Andreasson and Gerhard Rein. A Numerical investigation of the stability of

- steady states and critical phenomena for the spherically symmetric Einstein-Vlasov system. *Class. Quant. Grav.*, 23:3659–3678, 2006.
- [71] MAHIR HADŽIĆ and GERHARD REIN. Stability for the spherically symmetric einstein–vlasov system—a coercivity estimate. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 155(3):529–556, sep 2013.
- [72] Mahir Hadzic, Zhiwu Lin, and Gerhard Rein. Stability and instability of self-gravitating relativistic matter distributions. 10 2018.
- [73] Sebastian Günther, Christopher Straub, and Gerhard Rein. Collisionless Equilibria in General Relativity: Stable Configurations beyond the First Binding Energy Maximum. *Astrophys. J.*, 918(2):48, 2021.
- [74] Mahir Hadžić and Zhiwu Lin. Turning point principle for relativistic stars. *Communications in Mathematical Physics*, 387(2):729–759, sep 2021.
- [75] Hakan Andreasson. The Einstein-Vlasov System/Kinetic Theory. *Living Rev. Rel.*, 14:4, 2011.
- [76] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. Relativistic Stellar Systems with Spindle Singularities. *Astrophys. J.*, 419:622, December 1993.
- [77] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. Relativistic Stellar Systems with Rotation. *Astrophys. J.*, 419:636, December 1993.
- [78] Hakan Andreasson, Markus Kunze, and Gerhard Rein. Rotating, stationary, axially symmetric spacetimes with collisionless matter. *Commun. Math. Phys.*, 329:787–808, 2014.
- [79] Ellery Ames, Håkan Andréasson, and Anders Logg. On Axisymmetric and Stationary Solutions of the Self-Gravitating Vlasov System. *Class. Quant. Grav.*, 33(15):155008, 2016.
- [80] Maximilian Thaller. Rotating Clouds of Charged Vlasov Matter in General Relativity. *Class. Quant. Grav.*, 37(3):035008, 2020.
- [81] R.C Myers and M.J Perry. Black holes in higher dimensional space-times. *Annals of Physics*, 172(2):304–347, 1986.
- [82] S. W. Hawking, C. J. Hunter, and Marika Taylor. Rotation and the AdS / CFT correspondence. *Phys. Rev. D*, 59:064005, 1999.
- [83] G. W. Gibbons, H. Lu, Don N. Page, and C. N. Pope. The General Kerr-de Sitter metrics in all dimensions. *J. Geom. Phys.*, 53:49–73, 2005.
- [84] G. W. Gibbons, H. Lu, Don N. Page, and C. N. Pope. Rotating black holes in higher dimensions with a cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 93:171102, 2004.
- [85] Hari K. Kunduri, James Lucietti, and Harvey S. Reall. Gravitational perturbations of higher dimensional rotating black holes: Tensor perturbations. *Phys. Rev. D*, 74:084021, 2006.

- [86] 牧野 淳一郎. 重力多体系の数値計算 (< シリーズ > 物性研究者のための計算手法入門). 2001.
- [87] David Tong. Kinetic Theory. 2012.
- [88] Pierre-Henri Chavanis. Hamiltonian and brownian systems with long-range interactions: I statistical equilibrium states and correlation functions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 361(1):55–80, 2006.
- [89] Pierre-Henri Chavanis. Hamiltonian and brownian systems with long-range interactions: II. kinetic equations and stability analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 361(1):81–123, 2006.
- [90] Pierre-Henri Chavanis. Hamiltonian and brownian systems with long-range interactions: III. the BBGKY hierarchy for spatially inhomogeneous systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(4):787–805, feb 2008.
- [91] T. Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating systems. *Physics Reports*, 188(5):285 – 362, 1990.
- [92] J. H. Jeans. On the Theory of Star-Streaming and the Structure of the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 76(2):70–84, 12 1915.
- [93] Hiroki Asami and Chul-Moon Yoo. Thermal equilibrium states and instability of self-gravitating particles in an asymptotically AdS spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 38(16):165014, jul 2021.
- [94] Hiroki Asami and Chul-Moon Yoo. Gravo-thermal catastrophe and critical dimension in a D -dimensional asymptotically AdS spacetime. *Phys. Rev. D*, 106(4):044065, 2022.
- [95] 佐藤文隆 小玉英雄. 一般相対性理論 (現代物理学叢書) . 岩波書店, 2000.
- [96] Izaak Neutelings. Penrose diagrams of minkowski and schwarzschild spacetime. 2021.
- [97] Matthew W. Choptuik. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, 70:9–12, Jan 1993.
- [98] Akihiro Ishibashi and Robert M Wald. Dynamics in non-globally-hyperbolic static spacetimes: III. anti-de sitter spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 21(12), May 2004.
- [99] Jack Schaeffer. A class of counterexamples to jeans’ theorem for the vlasov–einstein system. *Communications in Mathematical Physics*, 204(2):313–327, 1999.
- [100] Hiroki Asami, Chul-Moon Yoo, Ryo Kitaku, and Keiya Uemichi. Einstein-Vlasov system with equal-angular momenta in AdS₅. 10 2022.
- [101] Keiju Murata, Tatsuma Nishioka, and Norihiro Tanahashi. Warped AdS(5) Black Holes and Dual CFTs. *Prog. Theor. Phys.*, 121:941–957, 2009.
- [102] Koji Hashimoto, Shunichiro Kinoshita, and Keiju Murata. Imaging black holes through ads/cft, 2018.