

FEBRUARY 8, 2023

学位論文

AdS/CFT 対応において複数の鞍点をもつ  
エンタングルメントエントロピー

JUN TSUJIMURA

---

 NAGOYA UNIVERSITY

DEPARTMENT OF SCIENCE

PARTICLE AND ASTROPHYSICAL SCIENCE

# Abstract

近年の理論物理学では、ある種の物理系同士の双対性に基づいてそれぞれの物理系の性質を解析するということがよく行われている。例えば、AdS/CFT 対応を用いることで、重力を含まない低次元の物理系によって重力系の性質を研究したり、強結合の量子多体系を弱結合の重力系によって解析することができる。笠-高柳予想は AdS/CFT 対応における最も有名で重要な関係式の一つであり、量子もつれの構造を拠り所に AdS/CFT 対応のメカニズムの理解をするための基礎であるとみなされている。半古典極限において、笠-高柳予想は共形場理論 (CFT) のエンタングルメントエントロピー (EE) を双対な重力系の笠-高柳曲面の面積としてあたえる。EE は量子もつれの大きさを定量化する指標の一つであり、笠-高柳曲面はホモロガス条件と呼ばれるトポロジカルな条件を満たす曲面のなかで面積が最小のものである。一般の量子系において、EE を評価する際にはレプリカ法と呼ばれる方法を用いることができ、その  $q$ -類似であるエンタングルメント Renyi エントロピー (ERE) を評価してから  $q \rightarrow 1$  極限をとることで EE を与えることができる。ERE はレプリカ分配関数と呼ばれる  $q$ -分配関数によって与えられ、半古典極限ではその分配関数を表現する経路積分を鞍点近似によって評価することができる。  $q$ -分配関数の鞍点が複数存在する場合、先行研究では値が最小の鞍点だけが EE および ERE に寄与するとされており、笠-高柳予想もこの元で正当化されていた。本研究では、一般の量子系において  $q$  が十分 1 に近い  $q \sim 1$  の場合、  $q$ -分配関数のすべての鞍点が EE および ERE に同程度に寄与し得ることを明らかにした。その具体例として、Liouville CFT における二区間系の EE を数値的に与える。二区間系の  $q$ -分配関数は適当な演算子の四点相関関数によって与えられ、Liouville CFT ではこの相関関数を BPZ 方程式によって解析することができる。特に、四点相関関数に関する BPZ 方程式は Heun の微分方程式と等価で、  $q$ -分配関数の鞍点は Heun の微分方程式のアクセサリーパラメタから得られることになる。この解析から  $q \sim 1$  において  $q$ -分配関数は二つの鞍点を持ち、系の対称性からこれらは等しい重みで ERE に寄与することを見る。一方で、笠-高柳予想は  $q$ -分配関数の最小の鞍点のみが ERE に寄与するという仮定のもとで正当化されていたので、複数の鞍点をもつ一般の系では笠-高柳予想は修正されるべきである。そこで、笠-高柳予想に代わり二区間系の EE を対応する重力系で与える公式を提案し、これを AdS/CFT 対応のもとで導出する。

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Holographic principle and Ryu-Takayanagi conjecture . . . . .	4
1.2	Ryu-Takayanagi conjecture with multiple saddle points in the semi-classical limit . . . . .	6
1.3	Structure of the doctoral thesis . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Replica trick and semi-classical limit</b>	<b>10</b>
2.1	Replica Trick . . . . .	10
2.2	Entanglement entropy in semi-classical limit . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Entanglement entropy in <math>\text{CFT}_{1+1}</math></b>	<b>21</b>
3.1	Replica trick in $\text{CFT}_{1+1}$ . . . . .	21
3.2	Entanglement entropy for general CFT . . . . .	23
3.3	Entanglement Renyi entropy in large $c$ Liouville CFT . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Holographic entanglement entropy</b>	<b>33</b>
4.1	Holographic entanglement Renyi entropy . . . . .	33
4.2	Ryu-Takayanagi conjecture . . . . .	35
4.3	Alternative holographic entanglement entropy . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>Tips</b>	<b>48</b>
A.1	Notation . . . . .	48
A.2	Cosmic string and Conical singularity . . . . .	50
A.3	Schwarzian derivative . . . . .	51

A.4	Heun's differential equation . . . . .	55
A.5	Quantum information . . . . .	58
<b>B</b>	<b>CFT</b>	<b>61</b>
B.1	Conformal symmetry in higher dimension . . . . .	61
B.2	$\text{CFT}_{1+1}$ . . . . .	68
B.3	Liouville CFT . . . . .	76
<b>C</b>	<b>Asymptotically AdS spacetime</b>	<b>81</b>
C.1	Geometry of $\text{AdS}_3$ . . . . .	81
C.2	Einstein-Hilbert action in $\text{AdS}_3$ . . . . .	85
C.3	Space-like geodesic in BTZ spacetime . . . . .	88

# Chapter 1

## Introduction

近年の理論物理学では、ある種の物理系間の双対性に基づいてそれぞれの物理系の性質を解析することがよく行われている。例えば、AdS/CFT 対応 [1, 2, 3] では、重力を含まない低次元の物理系によって重力系の性質を解析したり、強結合の量子多体系を弱結合の重力系によって解析できると考えられている。実際に、AdS/CFT 対応をもつと考えられる具体的な系はいくつか提案されている。一方で、AdS/CFT 対応を証明するには、素朴には、各理論の分配関数を非摂動的に与えるといった困難を乗り越えなければならない。笠-高柳予想 [4, 5] は AdS/CFT 対応における最も有名で重要な関係式の一つであり、半古典極限において、強結合系の量子もつれの大きさを対応する重力系において幾何学的に与える。AdS/CFT 対応における笠-高柳予想の重要性は AdS/CFT 対応の発端となったホログラフィー原理 [6, 7, 8] に遡ると理解しやすい。

### 1.1 Holographic principle and Ryu-Takayanagi conjecture

ホログラフィー原理とは、重力系のもつ自由度は一次元低い平坦な背景時空上の理論の自由度と等しいというものである。日常的によく見る物理系の熱力学的エントロピーは体積則にしたがうとみなせることが多いが、重力系の中には熱力学的エントロピーが面積則に従うものがある。例えば、ブラックホール時空の熱力学的エントロピーは Bekenstein-Hawking によるブラックホールのエントロピー公式 [9, 10] によって次のように与えられる。

$$S_{BH} = \frac{\mathcal{A}}{4G} \quad (1.1)$$

ここで、 $A$  はブラックホールの表面積である。ホログラフィー原理はこの公式から着想を得たものである。

AdS/CFT 対応はホログラフィー原理を実際に実現している物理系であると考えられている。AdS/CFT 対応はもともと超弦理論の文脈で提唱された概念で、漸近 AdS であるある種の超弦理論と平坦背景時空上の超対称ゲージ理論との双対性として提案された。この例を抽象化し、AdS/CFT 対応では物理系の詳細を特定せずに、強結合の共形場理論 (CFT) と漸近 AdS な弱結合の重力理論との対応関係を考えるということがしばしば行われている。一方で、AdS/CFT 対応には不明瞭な部分も多い。どのような CFT にどのような重力双対が存在するかといったことを調べる方法は確立されておらず、また、AdS/CFT 対応が存在するという状況証拠がいくつか知られている系においても、その双対性を素朴に証明するためには理論の分配関数を非摂動的に評価するといったことが必要でそれは非常に困難である。したがって、一方の物理系における物理量や概念が、双対な系においてどのように表現されるかは非自明な問題であることが多い。

笠-高柳予想は CFT のエンタングルメントエントロピー (EE) を双対な重力系を用いて与える方法を提案している。半古典極限では、CFT 側の適当な部分系の EE を式 (1.1) においてブラックホールの表面積の代わりに、その部分系に対する笠-高柳曲面の面積としたものによって与える。笠-高柳曲面はホモロガス条件 [11] と呼ばれる CFT 側の部分系とトポロジカルな制限を満たす曲面の内、面積が最小のものとして定義される。EE は量子もつれの大きさを定量化する指標の一つで、物理系の持つ量子相関の大きさと古典相関の大きさの両方の寄与を合わせた物理量である。特に、EE は物質のトポロジカルな性質を反映し、その基底状態を特徴付けることもある [12]。強相関係では EE の評価は困難であることが多いため、AdS/CFT 対応を使って弱結合の重力側で EE を評価しようとするのは自然な試みである。この点に関して、熱力学的なエントロピーも広い意味では EE であることに注意すると良い。AdS/CFT 対応において CFT の熱力学的なエントロピーは対応するブラックホール時空における Bekenstein-Hawking 公式 (1.1) によって与えられると考えられているので、AdS/CFT 対応を用いて CFT 側の EE を対応する重力系において与えるという考えはこの観点からも自然である。

笠-高柳予想は AdS/CFT 対応、ホログラフィー原理および量子もつれの研究に対して多大な影響を与えている [13, 14, 15, 16, 17, 18]。笠-高柳予想は、CFT の情報がそれと双対な重力系のどの部分にエンコードされているかを示し、CFT 側とそれに双対な重力系のそれぞれの部分系同士の対応関係などの解析や、重力系における量子もつれの構造を解析するという研究も盛んに行われている。笠-高柳予想は AdS/CFT 対応にこのような新たな観点を与

え、量子もつれは物理学の各分野をつなぐ共通言語として認識されるようになった。このように笠-高柳予想は AdS/CFT 対応を理解する上で最も基礎的な関係式の一つとして認識され、今現在でもよく信じられている。

## 1.2 Ryu-Takayanagi conjecture with multiple saddle points in the semi-classical limit

笠-高柳予想は本当に正しいか？というのが本研究の動機である。それを説明するために、まず、EE の一般論について振り返る。EE を評価する際にはレプリカ法と呼ばれる手法を用いて、その  $q$ -類似であるエンタングルメント Renyi エントロピー (ERE) を扱うと都合が良い [19, 20]。すると、ERE はレプリカ理論の分配関数  $Z(q)$  によって与えられることになり、この分配関数はもともとの理論の分配関数  $Z$  の  $q$ -類似となっている。具体的には ERE  $S(q)$  および EE  $S$  は次のように与えられる。

$$S = \lim_{q \rightarrow 1} S(q), \quad S(q) = \frac{1}{1-q} [\log Z(q) - q \log Z] \quad (1.2)$$

これらの分配関数  $Z(q)$  および  $Z$  は経路積分によって与えられ、半古典極限では鞍点近似によってそれぞれの経路積分を評価することができる。ここで問題となるのは、レプリカ分配関数  $Z(q)$  に複数の鞍点が存在する場合である。一見、複数の鞍点が存在する場合、最小値を与える鞍点の寄与は他の鞍点の寄与に比べて指数関数的に大きいため、最小の鞍点のみが ERE に寄与すると考えるかもしれない。従来の半古典極限の EE の解析 [21, 22, 23] ではこのように考えられていたが、 $q \rightarrow 1$  極限の扱いには注意が必要である。レプリカ理論の構成や密度演算子の規格化条件に注意すると、 $q$  が 1 に近い  $q \sim 1$  では各鞍点の値の差が  $O(q-1)$  となり、各鞍点の寄与の間に指数関数的な差はないことを本論文では示す。特に、半古典極限にある Liouville CFT において部分系  $A$  が二区間からなる場合の EE は各鞍点の単純な和として与えられることを示す。

さて、AdS/CFT 対応はそれぞれの理論の分配関数の等価性を主張しているので、CFT 側の  $q$ -分配関数に対応する重力側の  $q$ -分配関数<sup>1</sup>が存在すると考えられる。したがって、重力側の  $q$ -分配関数の具体形が明らかになれば CFT 側の EE を双対な重力側で一意に与えることができる。本論文では、この EE をホログラフィックエンタングルメントエントロピー (HEE) と呼ぶ。ここで重要なことは、AdS/CFT 対応への理解が不完全なために重力側の  $q$ -

<sup>1</sup>CFT 側の  $q$ -分配関数に対応する重力側の  $q$ -分配関数もレプリカ分配関数と呼ばれることもあるが、重力側はレプリカ理論であるとは限らないので、本論文ではこの分配関数を単に重力側の  $q$ -分配関数と呼ぶ。

分配関数の具体形が、半古典極限においてさえ明らかでないことである。笠-高柳予想を信じれば、半古典極限における HEE に寄与する鞍点同士の差を特徴付ける  $O(q-1)$  の項はホモロガス条件を満たす極小曲面の面積に比例し、HEE にはそれらの曲面のうち面積が最小のものだけが寄与すると考えられていた。もちろん、CFT 側で計算された EE と笠-高柳予想による HEE の直接比較によってその正しさが確かめられている系も存在するが、そのような系は我々の知る限り、重力系の分配関数の鞍点が一意に定まる系であり、その場合には面積の最小性が問題にならない。本論文の結果によると、重力側の分配関数の鞍点が複数存在する系において笠-高柳予想を導出するためには、重力側の  $q$ -分配関数を定義する作用は非常に恣意的な形をしている必要がある。そこで我々は笠-高柳予想に代わる HEE 公式および重力系の作用を具体的な系において提案する。

そもそも笠-高柳予想には修正の余地が十分にある。一般の量子系において、EE は強劣加法性と呼ばれる性質を持つ。そこで笠-高柳予想では HEE が強劣加法性をもつための十分条件として、笠-高柳曲面にはホモロガス条件と曲面の最小性が課されている。したがって、重力側の  $q$ -分配関数の鞍点がホモロガス条件を満たす曲面の面積として与えられるとは限らない。近年では、笠-高柳予想に基づいてブラックホールの情報パラドックスを解析する試みであるアイランド予想に関する研究が盛んで、理論のユニタリティと無矛盾な鞍点の足し上げが必要であるという解析が行われている [24, 25, 26]。しかし、各鞍点が分配関数にどのように寄与するかは CFT 側の情報から一意に決まっているはずで、適当な制限から場当たりに導くべきものではない。アイランド予想では部分系がブラックホールの事象の地平面内外に存在する場合の EE を扱うので、本研究で主に取り扱う二区間系は対応するレプリカ分配関が複数の鞍点をもつ最も単純な系でありながら、アイランド予想における最も単純な状況を記述するという意味で重要な物理系となっている。

### 1.3 Structure of the doctoral thesis

本学位論文は著者がこれまでに発表した論文 [27, 28, 29] をまとめたものであり、これらの論文の主な結果は本論文の第 2.2, 3.3 4.3 節に記述されている。本論文のその他の部分はレビューとなっている。本論文では静的な二次元 CFT とそれに双対な三次元の重力系を扱う。特に、CFT の EE としては Riemann 球面上の一区間系、二区間系およびトーラス上の一区間系を扱う。このような低次元系を扱うため、曲面や宇宙膜などを曲線や宇宙ひもなどということがあるので注意してほしい。また、時間依存する系や EE の量子補正項などは本論文では扱わないため他の文献を参照してほしい [30, 31]。



2.1 節では、レプリカ法を導入し、EE を ERE  $S(q)$  によって表現する [19, 20]. このとき、部分系  $A$  の ERE  $S_A(q)$  を評価するためには  $q$  個の部分密度行列  $\rho_A$  の積のトレースを計算する必要があり、その密度行列の経路積分による表式を与える. この  $q$  個の密度行列の積のトレースは単一のレプリカ多様体上の分配関数、もしくはレプリカ場理論におけるツイスト演算子の相関関数によって表現できることを見る. レプリカ多様体は部分系の端点  $\partial A$  では  $q$  の大きさに応じた欠損角を持つことを確認する. この欠損角の大きさは CFT 側のレプリカ多様体と双対な重力系の時空との整合性を考慮する上で重要である. 次に、2.2 節では、著者の提案した方法に基づいて半古典極限をもつ一般の理論において、EE をその分配関数の鞍点によって与える [27]. 特に、その鞍点が複数存在する場合、系の量子状態が各鞍点に対応する量子状態の重ね合わせであると仮定すると、その EE は式 (2.38) のように、Born 則に基づいて、それぞれの鞍点に対応する確率振幅の大きさの二乗のウェイトで足し合わせたものであることを示す.

3.1 節では、二次元 CFT におけるレプリカ法の一般論をまとめる [19, 20]. その共形対称性によって ERE を評価する問題を別の等価な問題に書き換えることができる. 特に、ERE の評価はそれに付随する微分方程式のモノドロミー問題に等価であることを見る. 3.2 節では、一般の CFT について、3.1 節の手法を適用する. Riemann 球面上の一区間系の場合などは理論の詳細に関わらず共形対称性から EE が完全に決定されることがよく知られている. 一方で、Riemann 球面上の二区間系の EE は共形対称性だけでは決まらず、理論の詳細に依存することを確認する. 3.3 節では、Liouville CFT は BPZ 方程式から、3.1 節で導入した微分方程式の解がレプリカ多様体の大域的構造との整合性条件から ERE が決定されることを見る. 二区間系の場合には四点相関関数の評価が必要で、四点相関関数を決定するための BPZ 方程式は Heun の微分方程式と等価になっている. その解の振る舞いは局所的には Frobenius 級数として Heun の微分方程式の特性指数により完全に決定される. しかしながら、その解の大域的振る舞いは Heun の微分方程式に含まれるアクセサリーパラメータに依存するため非自明である. このアクセサリーパラメータは  $q$ -分配関数の鞍点と本質的に等価であり、 $q \sim 1$  において Heun の微分方程式の解の振る舞いがレプリカ多様体の大域的構造との整合的であるようなアクセサリーパラメータを決定することで  $q$ -分配関数の二つの鞍点を得る [27]. 2.2 節の議論をもとに、ERE および EE はこれら二つの鞍点の和として与えられる. この EE はコンパクト化されたボゾンのものと等しく、CFT の構造と無矛盾であることが期待できる.

4.1 節では、AdS/CFT 対応のメカニズムが不明瞭であることに起因する HEE のもつ不定性について指摘する. CFT 側のレプリカ多様体が部分系の端点に  $q$  の大きさに応じた欠損

角を持つことから、対応する重力側の多様体も整合的な欠損角を持つ必要がある。一見、それは  $q$  の大きさに応じた張力を持つ宇宙ひもや宇宙膜によって実現されるが、CFT 側での場の大域的振る舞いが非自明であったように宇宙ひもや宇宙膜の大域的振る舞いも同様の非自明さを持つべきであることを指摘する。4.2 節では、笠-高柳予想がこの宇宙膜の大域的振る舞いをホモロガス条件によって指定していることを確認する。その後、笠-高柳予想を具体的な系に適用し、その問題点を述べる。4.3 節では、まず、Riemann 球面上の二区間系について笠-高柳予想に代わる HEE を与える [28]。この HEE は 3.1 節であたえた Liouville CFT の EE と等しい結果を与える。この結果を参考にトーラス上の CFT とそれに双対な BTZ 時空において、一区間系に対する HEE を予測する [29]。どちらの場合に関しても、重力側の分配関数の鞍点としては対応する時空中に存在可能な全ての極小曲面の組が唯一の鞍点を構成し、その大きさはそれらの面積を適当に足し引きしたものによって与えられる。そのような極小曲面の組み合わせは欠損角の整合性を保証するが、欠損角の整合性だけでは極小曲面の配位は一意に定まらず、やはり重力側の鞍点の構造を決定するにはなんらかの大域的な条件が必要である。本論文ではその条件の特定は行わない。

5 章は本論文の結論である。また、付録 A は本論を読む助けとなる数学、B では共形場理論の基本的な性質、そして C では AdS 時空に関する物理を本論とは独立した形でまとめた。

# Chapter 2

## Replica trick and semi-classical limit

エンタングルメントエントロピー (EE) を計算する手法の一つであるレプリカ法について概観する。レプリカ法によると、EE やその  $q$ -類似であるエンタングルメント Renyi エントロピー (ERE) はレプリカ理論の分配関数によって記述される [19, 20, 32]。半古典極限において、この分配関数を与える経路積分を鞍点近似によって評価する際の注意点を述べる。従来 の取り扱いでは、鞍点が複数存在する場合には最小値を与える鞍点のみが EE に寄与すると考えられていた。しかし、実際にはそれらのすべてが EE に同程度に寄与する可能性がある ことを見る。

### 2.1 Replica Trick

ある物理系において、その部分系  $A$  の密度演算子  $\rho_A$  が与えられたとき、部分系  $A$  のエンタングルメントエントロピー (EE)  $S_A$  は次のように定義される。

$$S_A = -\text{Tr}_A(\rho_A \log \rho_A). \quad (2.1)$$

ここで  $\text{Tr}_A$  は部分系  $A$  におけるトレースである。密度演算子は半正定値行列によって表現されるので、その行列の対数関数はうまく定義されている。具体的には、 $\rho_A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i \geq 0$  のように対角化した基底において関数  $\rho_A \log \rho_A$  の成分は  $\text{diag}(\lambda_1 \log \lambda_1, \dots, \lambda_n \log \lambda_n)$  であり、ここで、 $0 \log 0 := 0$  と定義すればこの行列値関数は常に意味を持つ。この約束のもとでレプリカ法とは次の対数関数の次の極限表示を用いて EE を書き直す手法である。

$$\log(x) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{x^{q-1} - 1}{q - 1} \quad (2.2)$$

密度演算子の規格化  $\text{Tr}_A(\rho_A) = 1$  を用いると、式 (2.1) は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} S_A &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\text{Tr}_A(\rho_A^q) - 1}{1 - q} = -\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial q} \text{Tr}_A(\rho_A^q) \\ &= -\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial q} \log \text{Tr}_A(\rho_A^q) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1 - q} \log \text{Tr}_A(\rho_A^q) \end{aligned} \quad (2.3)$$

このように、EE の  $q$ -類似はいくらでも作ることができるが、代表的なものには次のように定義される Tsallis エントロピー  $S^{\text{Tsallis}}(n)$  やエンタングルメント Renyi エントロピー  $S^{\text{Renyi}}(n)$  がある。

$$S_A^{\text{Tsallis}}(q) = \frac{\text{Tr}(\rho_A^q) - 1}{1 - q}, \quad S_A^{\text{Renyi}}(q) = \frac{1}{1 - q} \log \text{Tr}(\rho_A^q) \quad (2.4)$$

これ以降、エンタングルメント Renyi エントロピー (ERE) を主に扱い、 $S_A^{\text{Renyi}}(q)$  の代わりに単に  $S_A(q)$  と書く。

密度演算子の経路積分表示を与える。本論文では、多様体  $\mathcal{M}$  上に定義された、時間並進対称性を持つ Euclid 化された量子場の理論 (QFT) を想定し、その基本的な場の自由度を  $\phi(x)$ 、Euclid 化された作用を  $S[\phi]$  とする。  $\phi(x)$  の固有状態を定義するために、座標系を  $x = (t, \vec{x})$  のように時間  $t$  とそれ以外に分離する。Schrödinger 描像における  $\phi(x)$  の固有状態  $|\varphi\rangle$  は次のような状態である。

$$\phi(t, \vec{x}) |\varphi, t\rangle = \varphi(t, \vec{x}) |\varphi, t\rangle \quad (2.5)$$

ここで、 $\phi$  は場の演算子で  $\varphi$  は固有値である。このとき、 $\phi(x)$  の固有状態  $|\varphi, t\rangle$  は (過剰) 完全性を持つ。

$$\int \prod_{\vec{x}} d\varphi(t, \vec{x}) |\varphi, t\rangle \langle \varphi, t| = 1 \quad (2.6)$$

すると、基底状態  $|0\rangle$  に対する波動汎関数  $\Psi[\varphi, -0] = \langle \varphi, -0 | 0 \rangle$  は  $t = -\infty$  から  $t = -0$  の経路積分によって与えられる。

$$\Psi[\varphi, -0] = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int \prod_{-0 > t > -\infty} \prod_{\vec{x}} d\phi(t, \vec{x}) e^{-S[\phi(t, \vec{x})]} \delta_{-0}[\phi - \varphi] \quad (2.7)$$

ここで  $Z$  は分配関数、 $\delta_t[\phi - \varphi]$  はデルタ汎関数で次のように定義される。

$$Z = \int \prod_{t, \vec{x}} d\phi(t, \vec{x}) e^{-S[\phi(t, \vec{x})]}, \quad (2.8)$$

$$\langle \varphi, t | \phi, t \rangle = \delta_t[\phi - \varphi] = \prod_{\vec{x}} \delta[\phi(t, \vec{x}) - \varphi(t, \vec{x})] \quad (2.9)$$

$\Psi[\varphi, +0]$  に Hermite 共役な波動関数  $\Psi^*[\varphi, +0] = \langle 0|\varphi, +0\rangle$  は次のように定義される.

$$\Psi^*[\varphi, +0] = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int \prod_{\infty > t > +0} \prod_{\vec{x}} d\phi(t, \vec{x}) e^{-S[\phi(t, \vec{x})]} \delta_{+0}[\phi - \varphi] \quad (2.10)$$

この波動関数は次の意味で規格化されている.

$$\langle 0|0\rangle = \int \prod_{\vec{x}} d\varphi(0, \vec{x}) \langle 0|\varphi, 0\rangle \langle \varphi, 0|0\rangle = \int \prod_{\vec{x}} d\varphi(0, \vec{x}) \Psi^*[\varphi, 0] \Psi[\varphi, 0] = 1 \quad (2.11)$$

ここで,  $\int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}\phi = \int \prod_{t, \vec{x}} d\phi(t, \vec{x})$  として, 基底状態に対する密度演算子  $\rho = |0\rangle\langle 0|$  の成分  $[\rho]_{\varphi_1 \varphi_2} = \langle \varphi_1, -0|0\rangle \langle 0|\varphi_2, +0\rangle$  は

$$[\rho]_{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi(t, \vec{x})]} \delta_{-0}[\phi - \varphi_1] \delta_{+0}[\phi - \varphi_2] \quad (2.12)$$

であり, 部分系  $A$  に対する部分密度行列  $\rho_A$  は  $\vec{x} \notin A$  に対して  $\varphi_1(-0, \vec{x}) = \varphi_2(+0, \vec{x})$  としたものなので,  $\vec{x} \in A$  のデルタ関数のみが残る.

$$[\rho_A]_{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi(t, \vec{x})]} \delta_{A, -0}[\phi - \varphi_1] \delta_{A, +0}[\phi - \varphi_2] \quad (2.13)$$

ここで,  $\delta_{A, \pm 0}$  は式 (2.8) の  $\vec{x}$  に関する積を空間全体でなく,  $\vec{x} \in A$  に制限したものである. すると, 密度行列の  $\varphi_1, \varphi_2$  成分は, 部分系の  $t = \pm 0$  において図 2.1 のような境界条件を課した経路積分を実行することで得られる. 直感的には, 部分系  $A$  以外の部分は既にトレースアウトされているので, 経路積分の際に特に制限なく通過することができる. ERE および  $\text{Tr}_A(\rho_A^q)$  を評価する場合にはレプリカ多様体を導入すると便利である.

## Replica manifold

部分密度演算子の  $q$  乗のトレース  $\text{Tr}_A(\rho_A^q)$ ,  $q \in \mathbb{Z}^+$  は次のように書ける.

$$\text{Tr}_A(\rho_A^q) = \int_{\mathcal{M}} \prod_{\vec{x}} d\varphi_1 \cdots \prod_{\vec{x}} d\varphi_{q-1} [\rho_A]_{\varphi_1 \varphi_2} [\rho_A]_{\varphi_2 \varphi_3} \cdots [\rho_A]_{\varphi_{q-1} \varphi_1} \quad (2.14)$$

ここで各密度行列  $[\rho_A]_{\varphi_i \varphi_{i+1}}$  がデルタ汎関数  $\delta_{A, -0}[\phi - \varphi_i] \delta_{A, +0}[\phi - \varphi_{i+1}]$  を含むことに注意すると, 密度行列の積に対応する  $\varphi_2, \dots, \varphi_{q-1}$  の経路積分によって,  $i$  番目の密度行列の経路積分の  $t = +0$  での場の値と  $i+1$  番目の密度行列の経路積分の  $t = -0$  での場の値が部分系  $A$  上で一致することになる. 最後に  $\varphi_1$  の経路積分によりトレースを取ることで,  $n$  番目の密度行列の経路積分の  $t = +0$  での場の値と 1 番目の密度行列の経路積分の  $t = -0$  での場の値が部分系  $A$  上で一致する.

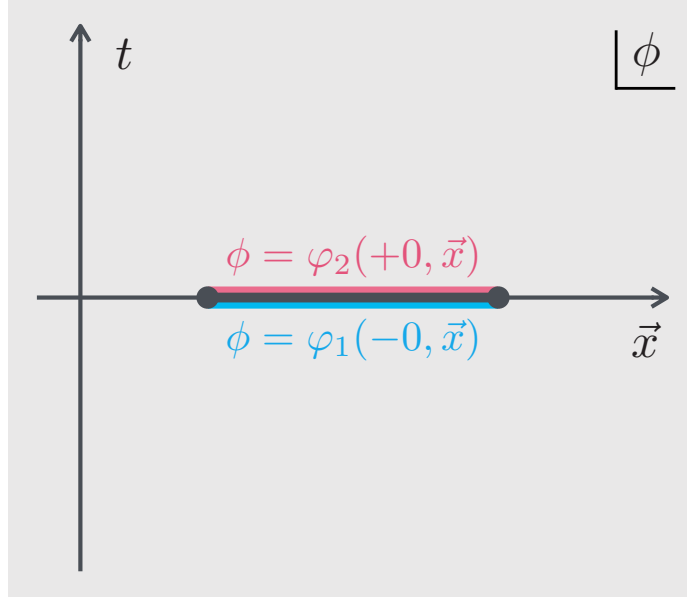


Figure 2.1: この図は部分密度行列を与える経路積分の境界条件を表しており、特に、部分系  $A$  が一つの区間からなる場合のものである。  $t = 0$  において、部分系  $A$  以外はトレースアウトされており、  $\phi$  の経路積分に関して境界条件は課されない。

この描像からレプリカ多様体が自然に導入される。具体的に、部分系  $A$  が一つの区間からなる場合を考える。  $\text{Tr}_A(\rho_A^q)$  を与える一つ目の方法は、図 2.2 の左側のように  $q = 3$  個の経路積分を部分系  $A$  上での境界条件に注意しながら  $\mathcal{M}$  上で実行し、その後で密度行列の積とトレースを取る方法である。 もう一つの方法は、図 2.2 の右のように、あらかじめデルタ汎関数同士の繋がり方と整合的な構造を持ったレプリカ多様体上で一挙に経路積分をする方法である。 まず  $q \in \mathbb{Z}^+$  に対し、作用  $S[\phi]$  を持つ多様体  $\mathcal{M}$  上の理論と部分系  $A$  に対応するレプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  は次を満たす空間であるとする。

$$\text{Tr}_A(\rho_A^q) = \frac{1}{Z^q} \int_{\mathcal{M}_A(q)} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi(t, \vec{x})]} \quad (2.15)$$

また、レプリカ分配関数  $Z_A(q)$  をレプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  上の分配関数として次のように定義する。

$$Z_A(q) = \int_{\mathcal{M}_A(q)} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi(t, \vec{x})]} \quad (2.16)$$

すると、部分系  $A$  に対する ERE  $S_A(q)$  は次のように二種類の分配関数によって表せる。

$$S_A(q) = \frac{1}{1-q} (\log Z_A(q) - q \log Z) \quad (2.17)$$

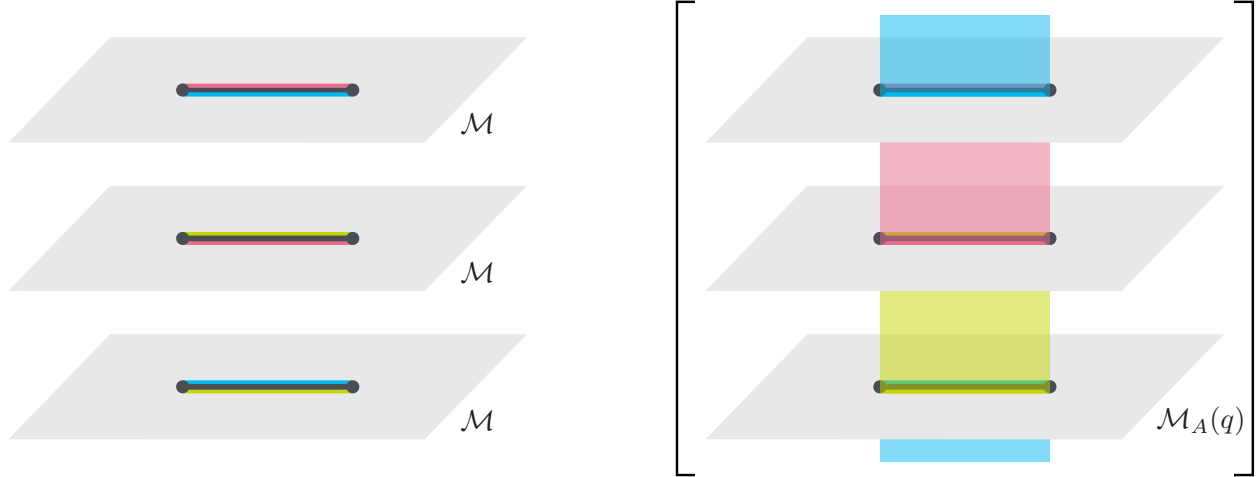


Figure 2.2:  $q = 3$  のときの一区間系の ERE に対するレプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  の模式図. 左図では図 2.1 が独立に  $q = 3$  枚並んでおり, 密度行列の積やトレースによって, 部分系  $A$  上で同じ色の部分の場の値が最終的に同じになる. 右図は部分系  $A$  上で同じ色の部分をあらかじめ連結してできたレプリカ多様体を表現している.

このように  $q \in \mathbb{Z}^+$  で評価した ERE に対し, 形式的に  $q \rightarrow 1$  極限を取ることで EE が与えられる.

レプリカ多様体の構造を理解しておくことは本論文において最も重要である. 直感的には, レプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(n)$  は  $q$  枚の多様体  $\mathcal{M}$  から成り, レプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  上で経路積分をするときに,  $i$  番目の  $\mathcal{M}$  上で部分系  $A$  を通過すると, 通過する方向に依存して  $i \pm 1$  番目の  $\mathcal{M}$  に移動する. このとき部分系  $A$  の端点  $\partial A$  が特異になる. 特に, レプリカ多様体  $\mathcal{M}_A^{(q)}$  は適当な離散群  $\Sigma$  によって  $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_A^{(q)}/\Sigma$  を満たすように作られる. 直感的には  $\mathcal{M}_A^{(q)}/\Sigma$  はレプリカ多様体を構成する  $q$  枚のシートのうちの一枚分に対応している.

### Example: Free massless scalar

$d + 1$  次元平坦時空中の無質量自由スカラー場の EE を考える [33]. この理論の分配関数は形式的に  $Z = [\det(-\nabla^2)]^{-1/2}$  と書くことができ, 次のような運動量空間の積分によって与えられる.

$$\log Z = -\frac{1}{2} \log \left[ \prod_k \vec{k}^2 \right] = -V_{d+1} \int \frac{d^{d+1}k}{2(2\pi)^{d+1}} \log(\vec{k}^2) \quad (2.18)$$

ここで  $V_{d+1}$  は時空の体積である. さらに  $\log(\vec{k}^2)$  は次のように書き直せる.

$$\log(\vec{k}^2) = \int_1^{\vec{k}^2} d\kappa \int_0^\infty ds e^{-s\kappa} = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} [e^{-s\vec{k}^2} - e^{-s}] \rightarrow - \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s\vec{k}^2} \quad (2.19)$$

分配関数の対数を評価する際に定数項は無関係であるので最後に無視した. すると,  $d$  次元球面の面積が  $2\pi^{(d+1)/2}/\Gamma((d+1)/2)$  であることに注意して運動量積分を実行すると

$$\int \frac{d^{d+1}k}{2(2\pi)^{d+1}} \log(\vec{k}^2) = \int_0^\infty \frac{ds}{s(4\pi)^{\frac{d+1}{2}} \Gamma(\frac{d+1}{2})} \int_0^\infty dk k^d e^{-sk^2} \rightarrow - \int_\epsilon^\infty \frac{ds}{s} (4s)^{-\frac{d+1}{2}} \quad (2.20)$$

ここで  $s \sim 0$  のとき運動量積分の紫外発散があるので紫外カットオフ  $\epsilon$  を導入した. したがって, 分配関数 (2.18) は次のように書ける.

$$\log Z = V_{d+1} \int_\epsilon^\infty \frac{ds}{s} (4s)^{-\frac{d+1}{2}} \quad (2.21)$$

次に,  $d+1$  次元時空が  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$  のように複素平面  $\mathbb{C}$  とそれ以外の  $d-1$  次元 Euclid 空間の直積となっているとし, 複素平面上の複素座標系  $z$  において, 部分系を  $A = \{z | \text{Re}\{z\} > 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$  とする. このとき,  $N$  を正整数として  $q = 1/N$  の場合のレプリカ多様体は角度  $\theta_N := 2\pi/N$  の扇形の領域と  $\mathbb{R}^{d-1}$  との直積で, この空間上の理論は角度  $\theta_N$  の回転変換  $g : z \rightarrow e^{i\theta_N} z$  に対して不変である. 対応するレプリカ分配関数  $Z_A(1/N)$  はもともとの分配関数 (2.18) の積分測度をこの対称性で割ることで得られる.

$$\log Z_A(1/N) = -V_{d-1} \int \frac{d^{d-1}k}{2(2\pi)^{d-1}} \log(\vec{k}^2) \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr}\left(\frac{g^j}{N}\right) \quad (2.22)$$

ここで,  $\text{Tr}(g^{j \neq 0})$  に関する部分は次のように計算できる.

$$\text{Tr}(g^j) = \int d^2k \langle \vec{k} | g^j | \vec{k} \rangle = \int d^2k \delta^2(\vec{k} - g^j \vec{k}) = \frac{1}{4 \sin^2(\pi j/N)} \quad (2.23)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{4 \sin^2(\pi j/N)} = \frac{N^2 - 1}{12} \quad (2.24)$$

デルタ関数に関する積分を実行する際には複素座標を用いると良い. したがって, 式 (2.21) を参考にしてレプリカ分配関数は次のようになる.

$$\log Z_A(1/N) = \frac{1}{N} \log Z - \frac{N^2 - 1}{12N} V_{d-1} \int_\epsilon^\infty \frac{ds}{s} (4s)^{-\frac{d-1}{2}} \quad (2.25)$$

特に,  $d = 1$  のとき,  $V_{d-1}$  に代わる紫外カットオフスケールを  $\Lambda$  として ERE (2.17) は次のように求まる.

$$S_A(1/N) = \frac{N}{N-1} \left( \log Z_A(1/N) - \frac{1}{N} \log Z \right) = \frac{N+1}{12} \log \frac{\Lambda}{\epsilon} \quad (2.26)$$



このようにしてレプリカ多様体や ERE が求まった. ここで重要なことはレプリカ分配関数の対数  $\log Z_A(q)$  が  $q \log Z$  に等しい項とデルタ関数による特異的な項の和によって与えられているということである. 特に, 後者のデルタ関数は部分系の端点  $\partial A$  で発散する. したがって, ERE は後者の寄与だけで決まり, 面積則に従う.

レプリカ分配関数を評価する際に現れたデルタ関数的特異性はレプリカ多様体が部分系の境界  $\partial A$  に欠損角をもつ特異な多様体であることを示している. この性質をより詳しく見るためには式 (2.26) をスケール変換するとよい. 多様体  $\mathcal{M}$  上の計量テンソル, その行列式およびその Ricci スカラーを  $g_{\mu\nu}, g$  および  $R$  とし, レプリカ多様体  $\mathcal{M}(q)$  上の対応する量は引数  $(q)$  を書くことで区別する. すると, ERE に対するスケール変換は次のようになる.

$$\begin{aligned} \ell \frac{\partial}{\partial \ell} S(q) &= \frac{2}{1-q} \left( \int_{\mathcal{M}(q)} d^2x g(q)_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g(q)_{\mu\nu}} \log Z(q) - q \int_{\mathcal{M}} d^2x g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \log Z \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi(1-q)} \left( \int_{\mathcal{M}(q)} d^2x \sqrt{|g(q)|} \langle T(q) \rangle - q \int_{\mathcal{M}} d^2x \sqrt{|g|} \langle T \rangle \right) \\ &= \frac{1}{24\pi(1-q)} \left( \int_{\mathcal{M}(q)} d^2x \sqrt{|g(q)|} R(q) - q \int_{\mathcal{M}} d^2x \sqrt{|g|} R \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

ここで, 無質量自由スカラー場を扱っていたことから理論が共形対称性を持つので, 式 (B.61) において中心電荷が 1 であることとエネルギー運動量テンソルの定義 (B.58) を用いた. また,  $\ell$  は系のスケールで, 先程の例 (2.26) の場合,  $\ell = \Lambda/\epsilon$  である. レプリカ多様体の構成方法を元に, この式と式 (2.26) との比較からレプリカ多様体上の Ricci スカラーは次のようなデルタ関数によって与えられると考えられる.

$$R(q) = 2\pi \left( N - \frac{1}{N} \right) \delta^2(\vec{x}) = -2\pi \left( q - \frac{1}{q} \right) \delta^2(\vec{x}) \quad (2.28)$$

となることが分かる. したがって, 式 (A.19) から  $\partial A = (0,0)$  に欠損角の大きさが  $\Delta\phi = \pi(q - 1/q)$  の円錐特異点が存在するとみなせる. これはこの後すぐに議論するツイスト演算子の共形ウェイトと密接に関わっている.

## Replica field theory

一般に, 場の理論における経路積分を実行することは困難である. 先程の例では, 自由場を扱ったため分配関数  $Z$  を簡単に評価できただけでなく, 部分系  $A$  の形が単純であったおかげでレプリカ分配関数  $Z_A(q)$  さえも解析的に評価できたことに注意すべきである. レプリカ多様体上の経路積分を扱う代わりにレプリカ場理論を扱えば, もとの多様体  $\mathcal{M}$  上での演算子形式によってレプリカ分配関数を評価することができる. レプリカ多様体は  $q$  枚の多様体

$\mathcal{M}$  を適切に連結することで得られたが、レプリカ場理論はもとの多様体  $\mathcal{M}$  上で  $q$  個の独立な場をツイスト演算子  $\mathcal{T}_q, \tilde{\mathcal{T}}_q$  によってレプリカ多様体の構造と整合的になるようにつなげたものである。例えば、部分系が  $[u_1, v_1] \cup [u_2, v_2] \cup \dots$  のような複数の区間からなる場合、レプリカ場理論におけるレプリカ分配関数は次のツイスト演算子の相関関数によって与えられる。

$$Z_A(q) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}\phi_1 \dots \mathcal{D}\phi_q e^{-\sum_i S[\phi_i(t, \vec{x})]} \mathcal{T}_q(u_1) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_1) \mathcal{T}_q(u_2) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_2) \dots \quad (2.29)$$

この経路積分において  $\mathcal{T}_q(u_1)$  のみを左回りに回る経路では場の添字が  $+1$  され、 $\tilde{\mathcal{T}}_q(v_1)$  のみを左回りに回る経路では場の添字が  $-1$  される。これから  $\mathcal{T}_q(u_1), \tilde{\mathcal{T}}_q(v_1)$  の両方を一回ずつ左回りに回る経路では場の添字は変わらない。この経路積分はツイスト演算子の多点関数を表しているので、レプリカ場理論においてレプリカ分配関数はツイスト演算子の多点相関関数である。

$$Z_A(q) = \left\langle \mathcal{T}_q(u_1) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_1) \mathcal{T}_q(u_2) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_2) \dots \right\rangle_{\mathcal{M}} \quad (2.30)$$

ここで  $\langle \dots \rangle_{\mathcal{M}}$  は多様体  $\mathcal{M}$  上に定義された場の理論における真空期待値を表す。

最後に、レプリカ多様体上の物理量とレプリカ場理論での物理量の関係を述べておく。 $q > 1$  のとき、レプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  は適当な離散群  $\Sigma$  によって  $\partial A$  を除き  $\mathcal{M}_A(q)/\Sigma \cong \mathcal{M}$  となるように作られている。直感的には  $\mathcal{M}_A(q)/\Sigma$  はレプリカ多様体を構成する  $q$  枚のシートのうちの一枚分に対応している。逆に先程の例では  $q < 1$  で、もとの多様体が  $\mathbb{R}^2$  で、レプリカ多様体は  $\mathbb{R}^2/Z_N$  となっている。そこで、レプリカ多様体上の場  $\mathcal{O}(w)$  の期待値とレプリカ場理論での対応する場の期待値には次の関係がある。

$$\frac{\left\langle \mathcal{O}(w) \mathcal{T}_q(u_1) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_1) \dots \right\rangle_{\mathcal{M}}}{\left\langle \mathcal{T}_q(u_1) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_1) \dots \right\rangle_{\mathcal{M}}} = q \langle \mathcal{O}(w) \rangle_{\mathcal{M}_A(q)/\Sigma} \quad (2.31)$$

ここで、 $\mathcal{M}_A(q)/\Sigma \cong \mathcal{M}$  なので、これらには自然な同一視によって同じ座標系を用いることができる。

## 2.2 Entanglement entropy in semi-classical limit

前節では ERE が式 (2.17) のようにレプリカ分配関数によって表現されることを見た。本節では [27] に基づいて半古典極限における ERE の取り扱いに関する注意を述べる。ここでの半古典極限とは、理論の適当なパラメタの極限をとることで、その分配関数の経路積分を鞍

点近似によって表現することをいう。例えば、 $SU(N)$  ゲージ理論において有限の大きな  $N$  を扱う large  $N$  極限や二次元共形場理論における有限の大きな中心電荷  $c$  を扱う large  $c$  極限などである。このとき、分配関数を与える経路積分はその被積分関数の鞍点の値で代表することができる。例えば、半古典極限に関するパラメタを  $s$  として、 $s$  が大きいときの分配関数  $Z$  を鞍点近似によって表現すると次のようになる。

$$Z = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}\phi \exp[-S[\phi]] = \exp[-sI + O(s^0)] \quad (2.32)$$

ここで、 $sI$  は運動方程式の解を代入した古典作用で、鞍点が一意に定まるとした。本来は、積分測度に由来する定数倍の因子があるので  $Z \propto \exp[-sI + O(s^0)]$  とすべきであるが、本論文では分配関数の比にしか興味がないのでこの因子を無視しても構わない。従来の半古典極限における ERE の評価においては、レプリカ分配関数の鞍点の主要項が  $(q-1)s$  に比例するため、鞍点近似が有効であるためには  $(q-1)s$  が十分大きな値である必要があると考えられている [23]。その結果、レプリカ理論の経路積分に複数の鞍点が存在する場合、EE に関してそのうち最小のものだけが寄与すると考えられている [21, 22]。本節では、 $s$  が有限である限り  $q \rightarrow 1$  極限において、この取り扱いが密度演算子の規格化条件と矛盾することを示し、複数の鞍点が存在する場合の適切な処方箋について述べる。

ここでは簡単のため、元の理論では運動方程式の解が一意に決まり、鞍点の一つだけ存在することを仮定する。一方で、レプリカ分配関数に関しては、鞍点が  $n$  個存在する場合を考え、対応する古典作用を  $sI_{A,i}(q)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) とする。このとき、半古典極限においてレプリカ分配関数は次のようになる。

$$Z_A(q) = \sum_{i=1}^n p_i \exp[-s I_{A,i}(q) + O(s^0)] \quad (2.33)$$

ここで、 $p_i$  は適当な定数である。ここで、密度演算子の規格化条件  $\text{Tr}_A(\rho_A) = 1$  およびレプリカ分配関数の定義 (2.15) および (2.16) から次が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow 1} \sum_{i=1}^n p_i \exp[qsI - sI_{A,i}(q)] = 1 \quad (2.34)$$

レプリカ多様体およびレプリカ場理論の構成方法、ならびに式 (2.26) の ERE を与える前節の例を思い出すと、一般に、レプリカ分配関数の古典作用は  $q \sim 1$  において  $I_{A,i}(q) = qI + O(q-1)$  のように振る舞うことが予想される。少なくとも  $q \rightarrow 1$  において  $I_{A,i}(q \rightarrow 1) = I$  でないと、 $S_A(q \rightarrow 1)$  の極限が存在しなくなってしまう。したがって、式 (2.34) から

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.35)$$

となる。ここで  $q \rightarrow 1$  において鞍点同士が近づいてしまい、区別できなくなる可能性があることに注意すべきである。その一方で、 $q \rightarrow 1$  においてこれらの鞍点の値はいくらでも近くなるが、それぞれの古典解の振る舞いが明確に異なる場合、経路積分としてはこれらの鞍点は区別されるべきであることにも注意すべきである。ここでは後者のように、鞍点同士が経路積分において常に区別されていることを仮定する。改めて、レプリカ分配関数に対する古典作用を  $I_{A,i}(q) = qI + b_{A,i}(q)$ ,  $\lim_{q \rightarrow 1} b_{A,i}(q) = 0$  と表現すると、半古典極限において ERE (2.17) は次のようになる。

$$S_A(q) = \frac{1}{1-q} \left( \log \sum_{i=1}^n p_i \exp[-sb_{A,i}(q)] \right) \quad (2.36)$$

この括弧内の項は  $(q-1)s$  に比例するが、これは  $\log Z_A(q)$  と  $q \log Z$  のそれぞれの主要項である  $qsI$  がキャンセルした結果として式 (2.36) が導かれたことに注意しなければならない。 $s$  が十分大きければ、 $O((q-1)s)$  の項の大きさと無関係に鞍点近似が有効である。したがって、 $s$  が有限である限り、十分 1 に近い  $q$  をとれば ERE は次のように与えられる。

$$S_A(q \sim 1) \sim \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n p_i (1 - sb_{A,i}(q)) \sim \frac{1}{1-q} \left[ \log \sum_{i=1}^n p_i - s \frac{\sum_{i=1}^n p_i b_{A,i}(q)}{\sum_{i=1}^n p_i} \right]. \quad (2.37)$$

規格化条件 (2.35) から EE はすべての鞍点の  $(q-1)s$  に比例する項の和として表現される。

$$S_A = \lim_{q \rightarrow 1} S_A(q) = \lim_{q \rightarrow 1} s \sum_{i=1}^n \frac{p_i b_{A,i}(q)}{q-1} \quad (2.38)$$

このように、EE がすべての鞍点の和として与えられたことは次の二つの理由による。一つ目の理由は、半古典極限において  $\log Z_A(q)$  と  $q \log Z$  の主要項がちょうどキャンセルしたことである。二つ目の理由は、有限の  $s$  に対して  $q \rightarrow 1$  極限を取った結果、各鞍点に対応する指数関数の肩が 0 に漸近したからである。したがって、これは半古典極限における EE に特有の現象であり、通常系における自由エネルギーなどに対しては最小値をとる鞍点のみが寄与することを注意しておく。

ここで鞍点が複数存在する場合の系の量子状態に着目する。鞍点が  $n$  個存在する場合、レプリカ場理論の量子状態としては  $n$  個のほとんど互いに直交する状態が存在することが自然である。したがって、その量子状態が次のように表現できると仮定する。

$$|\Omega\rangle = \sum_{i=1}^n r_i |\Omega_i\rangle, \quad \langle \Omega_i | \Omega_j \rangle \sim 0, \quad i \neq j \quad (2.39)$$

ここで、 $|\Omega_i\rangle$  は各鞍点に対応する状態である。すると、レプリカ分配関数を次のように書くことができる。

$$Z_A(q) = \sum_{i=1}^n |r_i|^2 Z_{A,i}(q) \quad (2.40)$$

ここで、 $Z_A(q) = \langle \Omega | \Omega \rangle$ ,  $Z_{A,i}(q) = \langle \Omega_i | \Omega_i \rangle$  である。この式と式 (2.33) と比較すると、 $p_i = |r_i|^2$  とみなせる。すなわち、 $p_i$  は各古典状態  $|\Omega_i\rangle$  に対する確率振幅の大きさの二乗であり、ERE は各状態のもつ ERE を重み  $p_i$  で足し上げたものになる。ここで  $p_i$  の大きさはそれぞれの物理系の詳細に依存する。例えば、特定の  $p_i$  が非常に小さいために対応する鞍点から ERE への寄与が消失する場合や、時間依存する系では  $p_i$  も時間依存性をもつと考えられる。3.3 節では、Liouville CFT における二区間系の ERE を評価する。この系では二つの鞍点が存在し、系の対称性から重み  $p_i$  は等しい値となることを見る。

# Chapter 3

## Entanglement entropy in $\text{CFT}_{1+1}$

この章では二次元の共形場理論 (CFT) におけるエンタングルメントエントロピー (EE) について基本的な解析を行う。まず、部分系が一区間系の場合には、理論によらず共形対称性から EE が完全に決定されることを見る。次に、二区間系の場合には EE が理論の詳細に依存することを見たあと、large  $c$  極限にある Liouville CFT における二区間系の EE を与える。二次元共形場理論の手法などは付録 B にまとめた。

### 3.1 Replica trick in $\text{CFT}_{1+1}$

二次元共形場理論では共形対称性が強力なので演算子形式を用いて解析すると都合が良い。Riemann 球面  $\mathcal{M} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上で  $N$  区間からなる部分系  $A = [u_1, v_1] \cup \dots \cup [u_N, v_N]$  を考える。中心電荷が  $c$  の CFT に対し、そのプライマリーなツイスト演算子の正則部分を  $\mathcal{T}_q, \tilde{\mathcal{T}}_q$  とすると、これらの共形ウェイトは両方とも  $c(q^2 - 1)/(24q)$  であることが後からわかる。ここではそれらを  $h_q$  と書くことにし、 $T(z)$  をエネルギー運動量テンソルの正則成分とすると式 (B.76) から次が成り立つ。

$$\left\langle T(z) \prod_{i=1}^N \mathcal{T}_q(u_i) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_i) \right\rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{h_q}{(z - z_j)^2} + \frac{1}{z - z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right] \left\langle \prod_{i=1}^N \mathcal{T}_q(u_i) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_i) \right\rangle_{\mathcal{M}} \quad (3.1)$$

さらに、 $c_{z_i} = -\partial_{z_i} \log \left\langle \prod_{i=1}^N \mathcal{T}_q(u_i) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_i) \right\rangle_{\mathcal{M}}$  として、式 (2.31) を用いると次の関係が得られる。

$$q \langle T(z) \rangle_{\mathcal{M}_A(q)/\Sigma} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{h_i}{(z - z_i)^2} - \frac{c_{z_i}}{z - z_i} \right] \quad (3.2)$$

したがって、レプリカ多様体上のエネルギー運動量テンソルの具体系が分かれば、 $c_{z_i}$  およびツイスト演算子の  $2N$  点相関関数  $\langle \prod_{i=1}^N \mathcal{T}_q(u_i) \tilde{\mathcal{T}}_q(v_i) \rangle_{\mathcal{M}}$  が得られ、ERE も得られる。あるいは、共形場理論におけるエネルギー運動量テンソルの変換則 (B.69) によると、多様体  $\mathcal{M}_A(q)/\Sigma$  から Riemann 球面  $\mathcal{M}$  への共形変換  $w(z) : \mathcal{M}_A(q)/\Sigma \rightarrow \mathcal{M}$  が得られれば、式 (3.2) の左辺がわかるので、そのような共形変換を探しても良い。すると、共形変換  $w(z)$  は次の三階の非線形微分方程式を満たすことになる。

$$\frac{qc}{12} \left[ \frac{w'''(z)}{w''(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^N \left( \frac{h_q}{(z-z_i)^2} - \frac{c_{z_i}}{z-z_i} \right) \quad (3.3)$$

この方程式の形式解は次のように与えられることが、付録 A.3 にまとめた Schwarz 微分の性質を使うと分かる。

$$w(z) = \frac{\alpha\Psi_1(z) + \beta\Psi_2(z)}{\gamma\Psi_1(z) + \delta\Psi_2(z)}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (3.4)$$

ここで  $\Psi_1(z), \Psi_2(z)$  は次の二階の線形微分方程式の独立解である。

$$\frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + \frac{6}{qc} \sum_{i=1}^N \left( \frac{h_q}{(z-z_i)^2} - \frac{c_{z_i}}{z-z_i} \right) \Psi(z) = 0 \quad (3.5)$$

一般に、ERE はツイスト演算子の多点相関関数で表された。二次元 CFT では、ERE はレプリカ多様体上のエネルギー運動量テンソルの期待値  $\langle T(z) \rangle_{\mathcal{M}_A(q)/\Sigma}$  から求めることができ、これは  $\mathcal{M}_A(q)/\Sigma$  からもとの多様体への共形変換  $w(z)$  もしくは線形微分方程式 (3.5) の解から与えることができる。図 3.1 は二区間系の場合のこれらの概念をまとめた模式図である。部分系が二区間以上の場合、すなわち四点以上の相関関数は共形対称性だけで決定されない

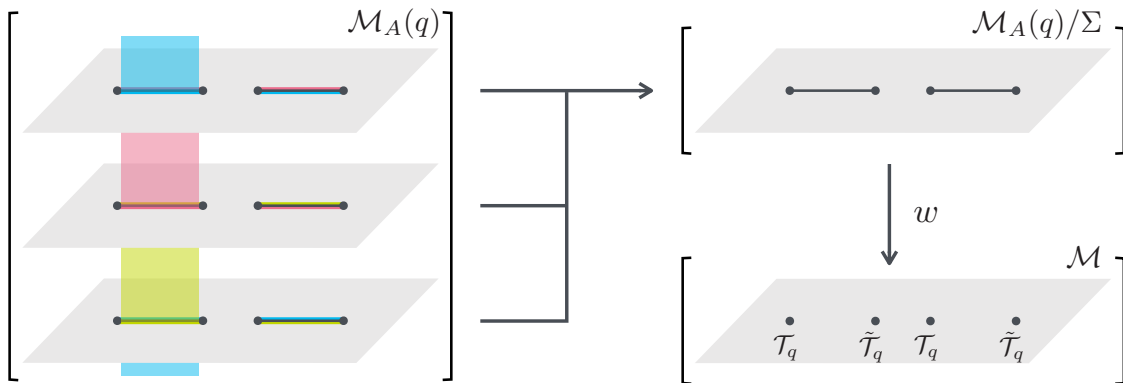


Figure 3.1:  $q = 3$  のときの二区間系の ERE に対するレプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$ , ツイスト演算子  $\mathcal{T}_q, \tilde{\mathcal{T}}_q$ , 共形変換  $w(z)$  の関係。

ことに注意すべきである。このような多点相関関数は CFT の詳細に依存するため、これら

の評価を行う場合にはなんらかの付加的条件が必要である。3.3 節で large  $c$  極限の Liouville CFT の ERE を評価する際には、式 (3.5) の解がレプリカ多様体上の一点相関関数として振る舞うという条件から二区間系の場合において  $c_{z_i}$  と ERE を決定する。

## 3.2 Entanglement entropy for general CFT

一般の CFT について、前節までの手法を Riemann 球面上の一区間系および二区間系に適用する。

### One interval on Riemann sphere

Riemann 球面  $\mathcal{M} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上に定義された中心電荷  $c$  をもつ CFT を考える。部分系  $A$  を  $t = 0$ ,  $x \in [u, v]$  とし、そのレプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  を考える。レプリカ多様体上の複素座標を  $z$  とすると、このレプリカ多様体は次の 2 つの共形変換  $z \rightarrow \zeta \rightarrow w$  によって一枚の Riemann 球面に一致させることができる。

$$w = \zeta^{\frac{1}{q}}, \quad \zeta = \frac{z - u}{z - v} \quad (3.6)$$

まず大域的共形変換  $z \rightarrow \zeta$  によって区間  $z \in [u, v]$  が区間  $\zeta \in [0, \infty]$  に写され、局所的共形変換  $\zeta \rightarrow w$  によって  $q$  枚の Riemann 球面が一枚の Riemann 球面に写される。エネルギー運動量テンソルの正則部分  $T(w)$  の共形変換に対する変換則 (B.69) と  $\langle T(z) \rangle_{\mathcal{M}} = 0$  からレプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  上でのエネルギー運動量テンソルの期待値が次のように求まる。

$$\langle T(z) \rangle_{\mathcal{M}_A(q)/\Sigma} = \frac{c}{24} (1 - q^{-2}) \frac{(v - u)^2}{(z - u)^2 (z - v)^2} \quad (3.7)$$

ツイスト演算子の正則部分の二点相関関数は式 (B.45) で与えられ、共形ウェイトとスケーリング次元の関係 (B.56) に注意して、反正則部分も含めるとツイスト演算子の二点相関関数は次のように決まる。

$$\left\langle \mathcal{T}_q(u, \bar{u}) \tilde{\mathcal{T}}_q(v, \bar{v}) \right\rangle_{\mathcal{M}} \propto \frac{1}{|u - v|^{4h_q}} \quad (3.8)$$

この二点相関関数が非自明な値をもつためには  $\mathcal{T}_q$  と  $\tilde{\mathcal{T}}_q$  のそれぞれの共形ウェイトが等しくなる必要があるが、これは既に仮定していた。さらに、正則部分に関する式 (3.2) から次の関係が導ける。

$$\frac{c}{24} \left( q - \frac{1}{q} \right) \frac{(v - u)^2}{(z - u)^2 (z - v)^2} = \frac{h_q}{(z - u)^2} + \frac{h_q}{(z - v)^2} - \frac{2h_q}{(z - u)(z - v)} \quad (3.9)$$



この式の両辺の係数比較から  $h_q = c(q^2 - 1)/(24q)$  となる。したがって、二点相関関数 (3.8) の比例定数を紫外カットオフスケールと対応するように選ぶと

$$\mathrm{Tr}_A(\rho_A^q) = \left( \frac{|v - u|}{\epsilon} \right)^{-\frac{c}{6}(q - \frac{1}{q})} \quad (3.10)$$

となる。これにより ERE  $S_A(n)$  が求まる。

$$S_A(q) = \frac{c(q + 1)}{6q} \log \frac{|v - u|}{\epsilon} \quad (3.11)$$

一区間系の場合、レプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  を Riemann 球面へと変換する共形変換  $w(z)$  が式 (3.6) によって与えられたため ERE がすぐに求まった。

以上の解析ではこの ERE を与える際に共形変換を式 (3.6) のように仮定した。そこで次はこの仮定に頼らず、よりストイックな方法でこの ERE および対応する共形変換を求める。式 (3.5) において  $N = 1$  とすると次の式を得る。

$$\frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + \frac{6h_q}{qc} \left[ \frac{1}{(z - u)^2} + \frac{1}{(z - v)^2} - \frac{2}{(z - u)(z - v)} \right] \Psi(z) = 0 \quad (3.12)$$

ここで、式 (3.8) から  $c_u = -c_v = 2h_q(u - v)$  であることを使った。この二つの線形独立な解は次のように書ける。

$$\Psi_1(w) = (z - u)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}} \right) (z - v)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}} \right), \quad (3.13)$$

$$\Psi_2(w) = (z - u)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}} \right) (z - v)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}} \right) \quad (3.14)$$

したがって、レプリカ多様体から Riemann 球面への共形変換の一般系は次のようになる。

$$w(z) = \frac{\alpha(z - u)\sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}} + \beta(z - v)\sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}}}{\gamma(z - u)\sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}} + \delta(z - v)\sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}}}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (3.15)$$

レプリカ多様体は  $q$  枚の Riemann 球面からなることを思い出すと、この共形変換は  $z = u$  もしくは  $z = v$  の近傍で  $q$  価となるべきである。この条件から共系ウェイト  $h_q$  が改めて決まる。

$$\sqrt{1 - \frac{24h_q}{qc}} = \pm \frac{1}{q} \implies h_q = \frac{c}{24} \left( q - \frac{1}{q} \right) \quad (3.16)$$

したがって、式 (3.15) で  $\alpha = \delta = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0$  とすると、共形変換 (3.6) を再現する。

Riemann 球面  $\mathcal{M} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の一区間系の例をもとに、空間方向にのみ周期性をもつシリンダーの場合と時間方向にのみ周期性をもつシリンダーの場合で一区間系の ERE をすぐに計算できる。まず、次の共形変換を考える。

$$z = \tan\left(\frac{\pi z'}{C}\right) \quad (3.17)$$

このとき  $z$  を Riemann 球面  $\mathcal{M} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の座標とみなすと、 $z'$  は空間方向の周期が  $C$  のシリンダー  $\mathbb{R} \times S^1$  全体を覆う座標と見なせる。このとき  $\text{Tr}_A(\rho_A^q)$  はプライマリー演算子の変換則から

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{T}_q(u) \tilde{\mathcal{T}}_q(v) \right\rangle_{\mathbb{R} \times S^1} &= \left[ \frac{C}{\pi} \cos\left(\frac{\pi u}{C}\right) \cos\left(\frac{\pi v}{C}\right) \right]^{-\frac{c}{6}(q-\frac{1}{q})} \left\langle \mathcal{T}_q(u') \tilde{\mathcal{T}}_q(v') \right\rangle_{\mathcal{M}} \\ &= \left[ \frac{C}{\pi \epsilon} \sin\left(\frac{\pi l}{C}\right) \right]^{-\frac{c}{6}(1-\frac{1}{q})} \end{aligned} \quad (3.18)$$

となる。ここで  $\epsilon$  は以前の紫外カットオフを適当にスケールしたものである。したがって ERE は次のようになる。

$$S_A(q) = \frac{c(q+1)}{6q} \log \left[ \frac{C}{\pi \epsilon} \sin\left(\frac{\pi l}{C}\right) \right] \quad (3.19)$$

次に、共形変換  $z = \exp\left(\frac{2\pi}{\beta} z'\right)$  は、Riemann 球面  $\mathcal{M} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の座標  $z$  を、時間方向の周期が  $\beta$  のシリンダー  $S^1 \times \mathbb{R}$  上の座標  $z'$  へと写す。同様の計算から ERE は次のようになる。

$$S_A(q) = \frac{c(q+1)}{6q} \log \left[ \frac{\beta}{\pi \epsilon} \sinh\left(\frac{\pi l}{\beta}\right) \right] \quad (3.20)$$

4.2 節では、これらの ERE が対応する重力系で笠-高柳予想によって与えられることを見る。これらの例を元に、空間方向と時間方向とも周期的なトーラス上の場合を扱いたくなるが、一枚の Riemann 球面をトーラスに写す共形変換は存在しない。また、トーラス上の一区間系の ERE は単純でなく理論の詳細に依ることからもこの事実は理解できる。

## Two disjoint intervals on Riemann sphere

二区間系  $A$  が  $t=0$ ,  $x \in [z_1, z_2] \cup [z_3, z_4]$  の場合でも単純には一区間系の場合と同様の共形変換によってレプリカ多様体を一枚の Riemann 球面に変換すれば良い。具体的な計算を行う前に、二区間系の ERE はツイスト演算子の四点相関関数によって与えられるので、大域

的共形対称性を用いて問題をできるだけ単純化しておく．次の大域的共形変換による座標変換を考える．

$$z' = \frac{z_3 - z_4 z - z_1}{z_3 - z_1 z - z_4}, \quad (3.21)$$

この変換は  $x := (z_4 - z_3)(z_2 - z_1)(z_4 - z_2)^{-1}(z_3 - z_1)^{-1}$  として，部分系の端点の座標を  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow (0, x, 1, \infty)$  のように移す．式 (A.21) から，Schwartz 微分は大域的共形変換に対して不変なので，二区間系としてはじめから  $(u_1, v_1, u_2, v_2) = (0, x, 1, \infty)$  の場合を考えても一般性を損なわない．四点相関関数は式 (B.49) および式 (B.77) から次の関係を満たす．

$$\langle \mathcal{T}_q(z_1) \tilde{\mathcal{T}}_q(z_2) \mathcal{T}_q(z_3) \tilde{\mathcal{T}}_q(z_4) \rangle_{\mathcal{M}} = (z_3 - z_1)^{-2h_q} (z_4 - z_2)^{-2h_q} G_{1234}(x) \quad (3.22)$$

$$\sum_i c_i = 0, \quad \sum_i c_i z_i = 4h_q, \quad \sum_i c_i z_i^2 = 2h_q \sum_i z_i \quad (3.23)$$

すると，式 (3.5) は次のようになる．

$$\frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + \frac{6h_q}{qc} Q(q, z) \Psi(z) = 0, \quad (3.24)$$

$$Q(q, z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + 2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) + \frac{2a(q, x)}{z(z-x)(z-1)}, \quad (3.25)$$

$$\frac{2h_q a(q, x)}{x(1-x)} = -\partial_x \log G_{1234}(x) \quad (3.26)$$

また，共形変換  $w(z)$  を与える問題としては次の式を満たすものを探すことになる．

$$\frac{w'''(z)}{w''(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2 = \frac{12h_q}{qc} Q(q, z) \quad (3.27)$$

修正以前の [19] では，次の共形変換が求めるものであると考えられていた．

$$w = \zeta^{\frac{1}{n}}, \quad \zeta = \frac{(z-u_1)(z-u_2)}{(z-v_1)(z-v_2)} \quad (3.28)$$

式 (3.27) の左辺は  $12T(z)/c$  で， $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, x, 1, \infty)$  のとき，それは次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{12}{c} T(z) &= \frac{q^2-1}{2qz^2} + \frac{q^2-1}{2q(z-x)^2} + \frac{q^2-1}{2q(z-1)^2} + \frac{(q^2-1)(1-x)}{qzx} \\ &+ \frac{(q^2-1)x}{q(x-1)(z-1)} + \frac{(q^2-1)(1-2x)}{q(x-1)x(z-x)} + \frac{6qx(1-x)}{(z^2-2xz+x)^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

エネルギー運動量テンソルを含む相関関数の極の位置は式 (3.25) から  $z = 0, x, 1, \infty$  にのみ存在する．しかし，上式の最後の項は  $z = x \pm \sqrt{x(x-1)}$  に極をもつ．したがって，共形変換 (3.28) は二区間系に対するレプリカ多様体を Riemann 球面に移す共形変換ではないとい

う指摘が [34] によってなされ, [19] の多区間系に関する結果が修正されることとなった. 四点以上の相関関数は各 CFT の詳細に依るので, レプリカ多様体を Riemann 球面に移す共形変換も理論に依存する. 実際に, いくつかの自由場の CFT においては ERE の解析的な表式が与えられており, それらは理論の詳細に依る. このような観点からも, そのような共形変換が式 (3.28) のような普遍的な形で与えられないことが理解できる. 次の 3.3 節では Liouville CFT において二区間系の ERE を与える.

次の節に進む前に, 式 (3.29) で  $q \rightarrow 0$  とした場合を考えると面白い. それは次のようになる.

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{12q}{c} T(z) &= -\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2(z-x)^2} - \frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} - \frac{1-2x}{z(z-x)(z-1)} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{12h_q}{c} Q(q, x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

したがって,  $q \rightarrow 0$  においては変換 (3.28) は理論の詳細に依らない求めるべき共形変換となっている可能性がある. 少なくとも Liouville CFT の場合にはこれが実際に求めるべき共形変換となっていることを 3.3 節で確認する.

### 3.3 Entanglement Renyi entropy in large $c$ Liouville CFT

Riemann 球面  $\mathcal{M} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の large  $c$  Liouville CFT において二区間系の ERE を [27] に基づいて与える. まず, 式 (3.5) 中の  $\Psi(z)$  がレプリカ多様体上の一点相関関数として振る舞うことを確認する. 特定の演算子を含む多点相関関数は式 (3.1) のような微分方程式に従うことがある.  $\psi_\chi(z)$  を特異ベクトルに対応する演算子とすると, この演算子を含む多点相関関数は BPZ 方程式と呼ばれる微分方程式に従う. ここでは  $\psi_\chi(z)$  を Liouville CFT において軽い方のレベル 2 の特異ベクトルに対応する演算子とする. 我々は  $q$ -レプリカ Liouville CFT を扱っているので, その中心電荷は  $q$  倍される. したがって, 特異ベクトルの共系ウェイトは式 (B.95) から  $h_\chi = \left(5 - qc + \sqrt{(qc-1)(qc-25)}\right)/16$  となる. すると, ツイスト演算子を四つ含む BPZ 方程式 (B.98) は次のようになる.

$$\left[ \frac{3\partial_z^2}{2(2h_\chi + 1)} - \sum_{i=1}^4 \left( \frac{h_q}{(z-z_i)^2} + \frac{\partial_{z_i}}{z-z_i} \right) \right] \langle \psi_\chi(z) \mathcal{T}_q(z_1) \tilde{\mathcal{T}}_q(z_2) \mathcal{T}_q(z_3) \tilde{\mathcal{T}}_q(z_4) \rangle_{\mathcal{M}} = 0 \quad (3.31)$$

Large  $c$  極限においてこの BPZ 方程式は簡単化される. ツイスト演算子は共形ウェイトが  $h_q = c(q^2 - 1)/(24q)$  の重いプライマリー演算子である一方,  $\psi_\chi(z)$  は軽いプライマリー場な

ので鞍点の構造を変化させず、これを含む五点相関関数は一点相関関数  $\Psi_\chi(z)$  とツイスト演算子の四点相関関数に分離する。

$$\Psi_\chi(z) = \frac{\langle \psi_\chi(z) \mathcal{T}_q(0) \tilde{\mathcal{T}}_q(x) \mathcal{T}_q(1) \tilde{\mathcal{T}}_q(\infty) \rangle_{\mathcal{M}}}{\langle \mathcal{T}_q(0) \tilde{\mathcal{T}}_q(x) \mathcal{T}_q(1) \tilde{\mathcal{T}}_q(\infty) \rangle_{\mathcal{M}}} \quad (3.32)$$

$$\therefore \langle \psi_\chi(z) \mathcal{T}_q(0) \tilde{\mathcal{T}}_q(x) \mathcal{T}_q(1) \tilde{\mathcal{T}}_q(\infty) \rangle_{\mathcal{M}} = \Psi_\chi(z) \sum_i p_i e^{-I_{A,i}(q,x)} \quad (3.33)$$

ここで部分系を  $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, x, 1, \infty)$  とした。さらに、 $h_\chi = -1/2 - 9/(2qc) + O(c^{-2})$  に注意すると、一点相関関数  $\Psi_\chi(z)$  は次の微分方程式に従う。

$$\frac{d^2}{dz^2} \Psi_\chi(z) + \frac{q^2 - 1}{4q^2} Q(q, z) \Psi_\chi(z) = 0, \quad (3.34)$$

$$Q(q, z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + 2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) + \frac{2a(q, x)}{z(z-x)(z-1)}, \quad (3.35)$$

$$a(q, x) = -\frac{12q}{c(q^2 - 1)} x(1-x) \partial_x \log G_{1234}(x) \quad (3.36)$$

したがって、 $\Psi_\chi(z)$  は式 (3.24) と同じ方程式を満たすことがわかる。しかし、いまの場合、 $\Psi_\chi(z)$  はレプリカ多様体上の一点相関関数として振る舞うという条件から  $a(q, x)$  を決定することができる。これ以降、 $a(q, x)$  を ERE の微分と呼ぶことにする。

### WKB analysis for $q \sim 0$

まず、練習問題として、 $q \sim 0$  で  $qc$  が十分大きい場合を考える。この極限においては式 (3.34) を WKB 法によって解析することができる。その WKB 解の主要項は次のように与えられる。

$$\Psi_\chi(z) = \frac{1}{Q(q, z)^{1/4}} \exp \left[ \pm \frac{1}{2q} \int^z \sqrt{Q(q, \zeta)} d\zeta \right] \quad (3.37)$$

このように  $\Psi_\chi(z)$  の積分表示が得られ、その大域的な振る舞いは  $\sqrt{Q(q, z)}$  の留数によって決定される。 $\sqrt{Q(q, z)}$  は次のように書き直せる。

$$\sqrt{Q(q, z)} = \frac{\sqrt{z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2xz + x^2 + 2a(q, x)z(z-x)(z-1)}}{z(z-x)(z-1)} \quad (3.38)$$

この表示によると  $z = 0, x, 1$  における  $\sqrt{Q(q, z)}$  の留数は  $a(q, x)$  によらず  $\pm 1$  のどちらかの値をとり、 $a(q, x)$  はこれらの相対符号のみを決める。 $\Psi_\chi(z)$  が図 3.1 の左側のようなレプリカ多様体上の一点相関関数であるという条件から、 $\sqrt{Q(q, z)}$  が有理関数になり、分岐切断をもってはいけなことがわかる。もし  $\sqrt{Q(q, z)}$  が分岐切断を持てば、 $\Psi_\chi(z)$  をその分岐切断を超えて解析接続したときの振る舞いがレプリカ多様体の構造と矛盾する。この観点から、

$\text{Res}\sqrt{Q(q, z=0)} = -\text{Res}\sqrt{Q(q, z=x)} = \text{Res}\sqrt{Q(q, z=1)}$  となるべきである。この条件から ERE の微分は  $a(q, x) = 1 - 2x$  となり、反正則成分も同様の値を持つので、 $\sqrt{Q(q, z)}$  および ERE は次のように決まる。

$$\sqrt{Q(q \sim 0, z)} = \pm \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-1} \right), \quad (3.39)$$

$$S_A(q \sim 0) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{4h_q}{q-1} \int \frac{1-2x}{x(1-x)} dx = \frac{c}{6q} \log \frac{x(1-x)}{\epsilon^2} \quad (3.40)$$

対応する共形変換は  $w(z) = z^{\frac{1}{q}}(z-x)^{-\frac{1}{q}}(z-1)^{\frac{1}{q}}$  としてよく、これは素朴に仮定された共形変換 (3.28) となっている。これは、 $q \sim 0$  において元の理論の鞍点よりもツイスト演算子が  $q$ -分配関数の鞍点を支配的に決定するであろうことから理解できる。有限の  $q$  に対しては WKB 法の高次項まで含めればエネルギー運動量テンソルの余分な極  $z^2 - 2xz + x = 0$  を除去できるかもしれない。

ここで注意として、 $a(q, x) = \pm 1$  のときにも  $\sqrt{Q(q, z)}$  は次のような有理関数となる。

$$a(q, x) = 1 \iff \sqrt{Q(q, z)} = \pm \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-1} \right), \quad (3.41)$$

$$a(q, x) = -1 \iff \sqrt{Q(q, z)} = \pm \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-1} \right). \quad (3.42)$$

留数の相対符号から各  $a(q, x)$  は次のツイスト演算子の四点相関関数に対応していると思なせる。

$$a(q, x) = 1 \iff \langle \mathcal{T}_q(z_1) \tilde{\mathcal{T}}_q(z_2) \tilde{\mathcal{T}}_q(z_3) \mathcal{T}_q(z_4) \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (3.43)$$

$$a(q, x) = -1 \iff \langle \mathcal{T}_q(z_1) \mathcal{T}_q(z_2) \tilde{\mathcal{T}}_q(z_3) \tilde{\mathcal{T}}_q(z_4) \rangle_{\mathcal{M}} \quad (3.44)$$

以上の解析は各四点相関関数と各レプリカ多様体の幾何学との対応関係を明確に表している。この例では、各  $a(q, x)$  と各レプリカ多様体間の一对一に対応する。しかし、一般的な  $q$  では一つのレプリカ多様体に対して複数の鞍点が得られることになる。

### Numerical approach for $q \sim 1$

次に、 $q \sim 1$  の ERE を数値計算によって与える。まず、 $\Phi(z) = g(x)\Psi_x(z)$ ,  $g(z) = z^{\frac{q-1}{2q}}(z-x)^{\frac{q+1}{2q}}(z-1)^{\frac{q-1}{2q}}$  によって各確定特異点における特性指数を調整すると、式 (3.34) は次のパラ

メタをもつ Heun の微分方程式となる.

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\epsilon}{z-x} + \frac{\delta}{z-1}\right) \frac{d}{dz}\Phi(z) + \frac{\alpha\beta z - p}{z(z-x)(z-1)}\Phi(z) = 0, \quad (3.45)$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1 - \frac{1}{q}, \quad \gamma = 1 - \frac{1}{q}, \quad \delta = 1 - \frac{1}{q}, \quad \epsilon = 1 + \frac{1}{q}, \quad (3.46)$$

$$p = \frac{q-1}{2q^2} [1 - 2x + q - (q+1)a(q, x)] \quad (3.47)$$

Heun の微分方程式に関しては付録 A.4 にまとめた. この微分方程式の解である Heun 関数の振る舞いは式 (A.46) の接続行列によって与えられ, この接続行列がレプリカ多様体の構造と無矛盾であるという条件から ERE の微分  $a(q, x)$  を決定する. Schottky 単一化を実現するにはモノドロミー行列 (A.46) の一方が単位行列になれば良い [22, 35, 36].

上の解析を行うと先行研究 [21, 22] と同じく ERE の微分として二つの候補  $a(q, x) = 1 - x, -x$  が得られる. その前に, ERE の微分  $a(q, x)$  と式 (2.36) における  $b_{A,i}(q)$  および  $p_i$  との対応関係を決定しておく. まず, 二区間系  $A$  は交差比  $x$  によって特徴づけられるので, ここでは  $b_{A,i}(q)$  の代わりに  $b_i(q, x)$  と書くことにする. 2.2 節の最後にレプリカ場理論の量子状態を考えたことを思い出すと, 式 (3.26) および (2.40) から ERE の微分は次のように書ける.

$$\frac{2h_q}{x(1-x)}a(q, x) = -\frac{p_1\partial_x Z_{A,1}(q) + p_2\partial_x Z_{A,2}(q)}{Z_A(q)} = -\frac{p_1\partial_x e^{-b_1(q,x)} + p_2\partial_x e^{-b_2(q,x)}}{p_1e^{-b_1(q,x)} + p_2e^{-b_2(q,x)}} \quad (3.48)$$

$q \sim 1$  では式 (2.38) のように ERE が  $b_i(q, x)$  を重み  $p_i$  で足し上げたものになっているので, 少なくとも  $q \sim 1$  では  $a(q, x) = p_1a_1(q, x) + p_2a_2(q, x)$  となっていることが自然である. したがって,  $a_i(q, x)$  と  $b_i(q, x)$  の関係を次のように仮定する.

$$\frac{2h_q}{x(1-x)}a_i(q, x) = -\frac{\partial_x e^{-b_i(q,x)}}{p_1e^{-b_1(q,x)} + p_2e^{-b_2(q,x)}} \sim \partial_x b_i(q \sim 1, x) \quad (3.49)$$

反正則成分も同様の関係を仮定する. ERE の微分の候補  $a(q \sim 1, x) = 1 - x, -x$  は量子状態を特定せず, 単に式 (3.34) から得られたことに注意すべきである. そこで次の関係を仮定する.

$$p_1a_1(q \sim 1, x) = 1 - x, \quad p_2a_2(q \sim 1, x) = -x \quad (3.50)$$

ここで得られたのは  $p_i a_i$  の組であって,  $p_i$  および  $a_i$  そのものではない. したがって, 式 (2.36) によって ERE を与えるには  $p_i$  を特定する必要がある. 付録 A.4 にまとめたように BPZ 方程式を Heun の微分方程式の標準形に変形する際に, 確定特異点の移動方法には不定性があり, 一見異なるパラメタをもつ Heun の微分方程式でも等価な方程式になることがある. こ

れによって四点相関関数は  $G_{1234}(x) = G_{3214}(1-x)$  という交差対称性を持つ. ERE を与える四点相関関数の一番目と三番目の演算子は同じものなので  $G_{1234}(x) = G_{3214}(x)$  であるから,  $G_{1234}(x) = G_{1234}(1-x)$  という関係が成り立つ. したがって, 二区間系の ERE は  $x \rightarrow 1-x$  という置き換えに対し不変なので,  $p_1 = p_2 = 1/2$  と見なせる. 以上で二区間系の ERE を与えるための準備が整った.

先行研究 [21] によると, 任意の  $q$  に対し,  $a(q, x \sim 0) \sim 1$  もしくは  $a(q, x \sim 1) \sim -1$  のように振る舞うことが知られている. そこで,  $a(q, x)$  の候補が二つだけのとき, 前者を  $p_1 a_1(q, x)$  と呼ぶことにする. 二つのモノドロミー行列の交換関係の全成分が同時にゼロになるという条件から  $p_1 a_1(q, x)$  を数値的に与える事ができる. そのようにして得られた  $p_1 a_1(q, x)$  と ERE を図 3.2 に示した.  $(q-1)c \sim 0$  のとき, ERE は  $c$  に線形に依存するので, 図 3.2

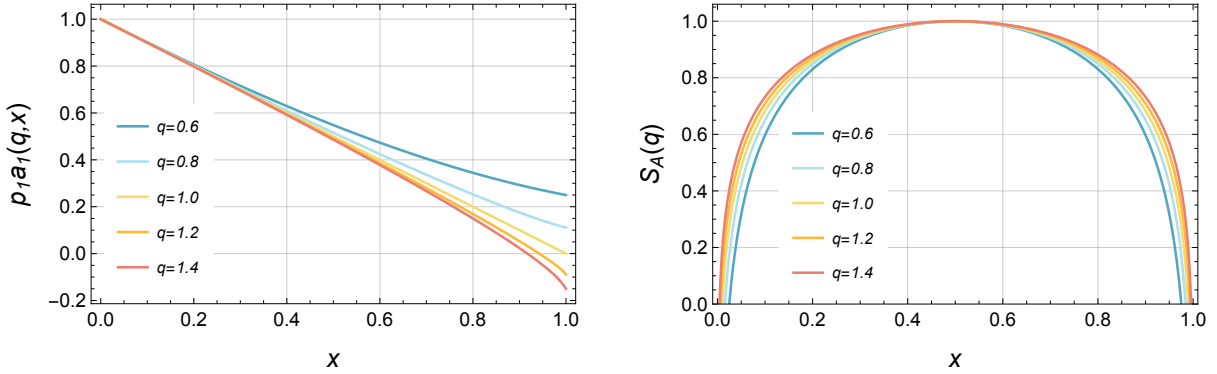


Figure 3.2: 左側:  $q = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$  のときの  $p_1 a_1(q, x)$ . 右側: 各  $p_1 a_1(q, x)$  に対応する ERE である. ここで,  $x = 1/2$  において  $S_A(q) = 1$  となるように規格化しており, 中心電荷は形式的に  $c = 1$  とし, 紫外カットオフスケールを  $\epsilon = 0.1$  とした.

で形式的に  $c = 1$  とした ERE も意味を持つ.  $q \rightarrow 1$  において  $p_1 a_1(q \rightarrow 1, x) \rightarrow 1-x$  および  $p_2 a_2(q \rightarrow 1, x) \rightarrow -x$  と見なせるので, 式 (2.38) から large  $c$  Liouville CFT における二区間系の EE は次のようになる.

$$S_A = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{4h_q}{q-1} \int \frac{1-2x}{x(1-x)} dx = \frac{c}{3} \log \frac{x(1-x)}{\epsilon^2}, \quad (3.51)$$

ここで  $\epsilon$  は紫外カットオフスケールである. これはコンパクト化された無質量ボゾンの EE [32] と同じものである. CFT の一般的な構造とは無矛盾であることが期待できる.  $q \sim 1$  でない ERE を与えるのは困難である. 特に,  $q < 0.5$  のとき,  $q$  の値が小さくなるにつれて  $a_1(q, x)$  の候補がいくらかでも増え, 数値計算が困難になる. その他にも各候補に対して  $p_i$  を



決定する必要がある。したがって、本論文ではそのような領域は扱わない。

# Chapter 4

## Holographic entanglement entropy

ホログラフィックエンタングルメントエントロピー (HEE) とは、共形場理論 (CFT) のエンタングルメントエントロピー (EE) を AdS/CFT 対応を用いて与えたものである。HEE を与えると考えられている公式は笠-高柳予想として知られ、半古典極限において HEE は対応する重力系の中の適当な曲面の面積として与えられる。本章では笠-高柳予想を紹介した後、その問題点を指摘し、Riemann 球面上の二区間系およびトーラス上の一区間系に対してこの予想に変わる HEE 公式を提案する。

### 4.1 Holographic entanglement Renyi entropy

一般にエンタングルメント Renyi エントロピー (ERE) はレプリカ分配関数によって式 (2.17) のように表現される。AdS/CFT 対応 [1] によれば、CFT のレプリカ分配関数を扱う代わりに、対応する重力理論の分配関数を用いることができる。このようにして双対な重力系で得られた EE および ERE を HEE およびホログラフィックエンタングルメント Renyi エントロピー (HERE) と呼ぶ。対応する重力系の時空  $\mathcal{B}_A(q)$  は漸近 AdS 時空であり、その AdS 境界に CFT が定義されていると考えられている。この AdS 境界  $\partial\mathcal{B}_A(q)$  は、CFT 側のレプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  と同じ構造をもつ必要がある。具体的には、重力系の多様体の AdS 境界と CFT 側の多様体が共形変換で結ばれていなければならない。ここで重要なことは、CFT が定義された多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  はレプリカ多様体であるが、対応する重力系の時空  $\mathcal{B}_A(q)$  はレプリカ多様体でなくてよい。この意味は 4.2 節で改めて説明する。

これ以降、我々は二次元 CFT とそれと対応する三次元重力理論のみを取り扱う。すると、2.1 節の無質量自由スカラー場の例からも理解できるように、CFT 側のレプリカ多様体  $\mathcal{M}_A(q)$  は部分系の各端点に欠損角  $\Delta\phi = \pi(q-1/q)$  の円錐特異点を持つ。その他にも、微分

方程式 (3.5) の各確定特異点近傍での解の振る舞いからこのような円錐特異点が存在することがわかる。したがって、AdS 境界付近では部分系の各端点から張力が  $T = (q^2 - 1)/(8qG)$  の宇宙ひもが生えていると考えられる [37, 38]。より一般的には、部分系の一つの端点から複数の宇宙ひもが生えていてもよく、その張力の合計が  $T = (q^2 - 1)/(8qG)$  となっていれば良い。ひとまず部分系の各端点から宇宙ひもが一本ずつ生えている場合のみを考える。

元の重力理論の作用が Einstein-Hilbert 作用 (C.17) によって次のように与えられているとする。

$$I[g] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{B}} dx^3 \sqrt{g} (R - 2L^{-2}) \quad (4.1)$$

ここで  $L$  は AdS 半径で、 $\mathcal{B}$  は Einstein 方程式の解となる時空である。すると、CFT 側のレプリカ理論に双対な重力側の  $q$ -分配関数の各鞍点  $I_{A,i}[g]$  は次のように書ける。

$$\begin{aligned} I_{A,i}[g] &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{B}_{A,i}(q)} dx^3 \sqrt{g} (R - 2L^{-2}) \\ &= \frac{q}{16\pi G} \int_{\mathcal{B}} dx^3 \sqrt{g} (R - 2L^{-2}) + \frac{q^2 - 1}{8qG} \int_{\mathcal{C}_{A,i}} dy \sqrt{h} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで、 $\mathcal{B}_{A,i}(q)$  は宇宙ひもを含む Einstein 方程式の解となる時空で、宇宙ひも  $\mathcal{C}_{A,i}$  の上の座標および誘導計量を  $y$  および  $h$  とし、宇宙ひもは AdS 境界上の部分系  $A$  の端点から  $\mathcal{B}$  の内部に伸びている。Brown-Henneaux 公式  $2c = 3L/G$  [39] によれば、large  $c$  極限は重力系において  $G$  が十分に小さい極限に対応するので、Einstein-Hilbert 作用を考えれば十分である。この古典作用は赤外発散を取り除く必要があり、それによって得られる有効作用は Liouville CFT の作用と等しいことを C.2 節にまとめた。AdS 境界上の計量テンソルはたしかに部分系  $A$  の各端点において欠損角  $\Delta\phi = \pi(q - 1/q)$  を持つことがわかる。さらに、各古典作用  $I_{A,i}[g]$  のレプリカ分配関数への寄与の重みを  $p_i$  とすると、式 (2.36) から HERE は次のように書ける。

$$S_A(q) = \frac{1}{1-q} \left( \log \sum_i p_i \exp \left[ -\frac{q^2 - 1}{8qG} \int_{\mathcal{C}_{A,i}} dy \sqrt{h} \right] \right) \quad (4.3)$$

$q \sim 1$  のとき、宇宙ひもの張力が 0 に近くなり、時空を背景時空として見なせるようになる。このとき、宇宙ひもの配位はその背景時空中の極小曲面となり、HEE は極小曲面の面積によって表される。

$$S_A = \frac{1}{4G} \sum_i p_i \int_{\mathcal{C}_{A,i}} dy \sqrt{h} \quad (4.4)$$

一見、式 (4.4) は HEE を一意に与えると考えられるかもしれない。しかし、いまのところ時空の内部構造、少なくとも各宇宙ひもの配位には依然として不定性が残っている。例えば、さきほど注意したように部分系の一つの端点から複数の宇宙ひもが生えていてもよく、その張力の合計が部分系の各端点で  $T = (q^2 - 1)/(8qG)$  となっていれば良い。また、宇宙ひもが時空の内部に終端を持つ可能性もあるかもしれない。これは CFT 側で ERE を決定する際に、レプリカ多様体の局所的な振る舞いは簡単に決定されるが、大域的な振る舞いを解析することは困難であったことと類似している。したがって、[40] でも指摘されているように HEE を与えるためには重力系の古典解あるいは時空の大域的構造を詳細に決定する必要がある。この問題に関しては、笠-高柳予想について概観したあとで改めて述べることにする。

## 4.2 Ryu-Takayanagi conjecture

$\text{AdS}_{d+1}/\text{CFT}_d$  において、笠-高柳予想は半古典極限における HEE を次のように与える。

$$S_A = \frac{\text{Area of } \gamma_A}{4G} \quad (4.5)$$

$\gamma_A$  は笠-高柳曲面で、CFT 側の部分系  $A$  が  $m$  次元のとき、ホモロガスな  $m$  次元曲面の中で面積が最小のものである。ホモロガス条件とは  $\partial\mathcal{R}_A = \gamma_A \cup A$  となる  $m+1$  次元空間  $\mathcal{R}_A$  が存在するというものである [11]。つまり、 $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$  において笠-高柳予想は宇宙ひもの大域的振る舞いをホモロガス条件と面積の最小性によって決定する。これらの条件の妥当性は本節の最後に議論することにして、まず、Riemann 球面上の一区間系、二区間系、およびトーラス上の一区間系の HEE が笠-高柳予想によってどのように与えられるかを確認する。

### Example: One interval

$\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$  における一区間系に対して式 (4.5) を適用する。以下では、笠-高柳曲面は空間的な 1 次元多様体となるので笠-高柳曲線と呼ぶ。まず、Riemann 球面上の CFT を考える。対応する時空は三次元 AdS 時空のうちの Poincaré パッチと呼ばれる部分で、例えば、座標系 (C.6) によって張られる部分である。この座標系において部分系  $A$  を  $r = L^2/\epsilon$ ,  $t = 0$ ,  $x \in [u, v]$  としたとき、笠-高柳曲線は図 4.1 のようになっており、ホモロガス条件から笠-高柳曲線は AdS 時空中で途切れることはなく、AdS 境界上の二点  $x = u, v$  をつなぐ。すると、面積の最小性から笠-高柳曲線  $\gamma_A$  は式 (C.55) から次のようになり、

$$r(x) = \frac{L^2}{\sqrt{(v-u)^2 + x^2}} \quad (4.6)$$

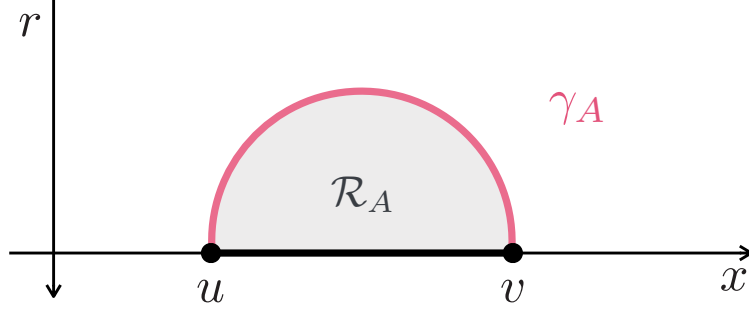


Figure 4.1: Riemann 球面上の一区间系  $A$  の HEE を与える笠-高柳曲線  $\gamma_A$  は Poincaré パッチの  $t$  一定面に存在する. ホモロガス条件:  $\exists \mathcal{R}_A$  s.t.  $\partial \mathcal{R}_A = \gamma_A \cup A$  によって, 笠-高柳曲線は AdS 時空中で途切れることはなく AdS 境界上の二点  $x = u, v$  をつなぐ.

EE は式 (C.56) として次のように与えられる.

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{v-u}{\epsilon} \quad (4.7)$$

これはたしかに CFT 側での式 (3.11) を再現する.

次に, CFT が空間的に周期的なシリンダー  $\mathbb{R} \times S$  上にある場合, 対応する時空はグローバルな三次元 AdS 時空で, その線素は式 (C.15) によって与えられる. 部分系  $A$  を  $r = LC/(2\pi\epsilon)$ ,  $\tau = 0$ ,  $\theta \in [u, v]$  としたとき, 測地線の長さは式 (C.54) から次のように与えられる.

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{C}{\pi\epsilon} \sin \left\{ \frac{\pi(v-u)}{C} \right\} \right] \quad (4.8)$$

さらに, CFT が時間的に周期的なシリンダー  $S \times \mathbb{R}$  上にある場合, 対応する時空は planar BTZ 時空 (C.9) である. 部分系  $A$  を  $r = L^2/\epsilon$ ,  $t = 0$ ,  $x \in [u, v]$  としたとき, その EE は式 (C.52) から次のようになる.

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left\{ \frac{\pi(v-u)}{\beta} \right\} \right] \quad (4.9)$$

これらの三つの例では, AdS 境界上の二点を結ぶ極小曲線が一意に定まることに注意すべきである. したがって, 笠-高柳予想におけるホモロガス条件や面積の最小性は実質的に効いてこない. 次に, これらの条件が本質的に重要な二区間系の場合を取り扱う.

### Example: Two disjoint intervals

Riemann 球面上の CFT に対し, 部分系  $A$  を二区間系  $r = L^2/\epsilon$ ,  $t = 0$ ,  $x \in [z_1, z_2] \cup [z_3, z_4]$  としたときの HEE を笠-高柳予想によって与える. 笠-高柳曲線の候補としては図 4.2 のよ

うな三つの極小曲線の組が考えられる．それぞれの曲線の長さは，図 4.2 の左上，左下，右の順に次のように与えられる．

$$\frac{c}{3} \log \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{\epsilon^2}, \quad \frac{c}{3} \log \frac{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)}{\epsilon^2}, \quad \frac{c}{3} \log \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{\epsilon^2} \quad (4.10)$$

左上の曲線の長さは他二つの曲線の長さより常に長いので笠-高柳予想による HEE は次のように与えられる．

$$S_A = \min \left\{ \frac{c}{3} \log \frac{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)}{\epsilon^2}, \quad \frac{c}{3} \log \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{\epsilon^2} \right\} \quad (4.11)$$

この内のどちらが選ばれるかは複比  $x = (z_4 - z_3)(z_2 - z_1)(z_4 - z_2)^{-1}(z_3 - z_1)^{-1}$  を用いて表現できる． $(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)(z_4 - z_1)^{-1}(z_3 - z_2)^{-1} = x/(1-x)$  となることに注意すると， $x < 1/2$  のとき前者が選ばれ， $x > 1/2$  のとき後者が選ばれる．二区間系を  $x \in [0, x] \cup [1, \infty]$  とした場合，笠-高柳予想による HEE は

$$S_A = \min \left\{ \frac{c}{3} \log \frac{x}{\epsilon}, \quad \frac{c}{3} \log \frac{1-x}{\epsilon} \right\} \quad (4.12)$$

となる．

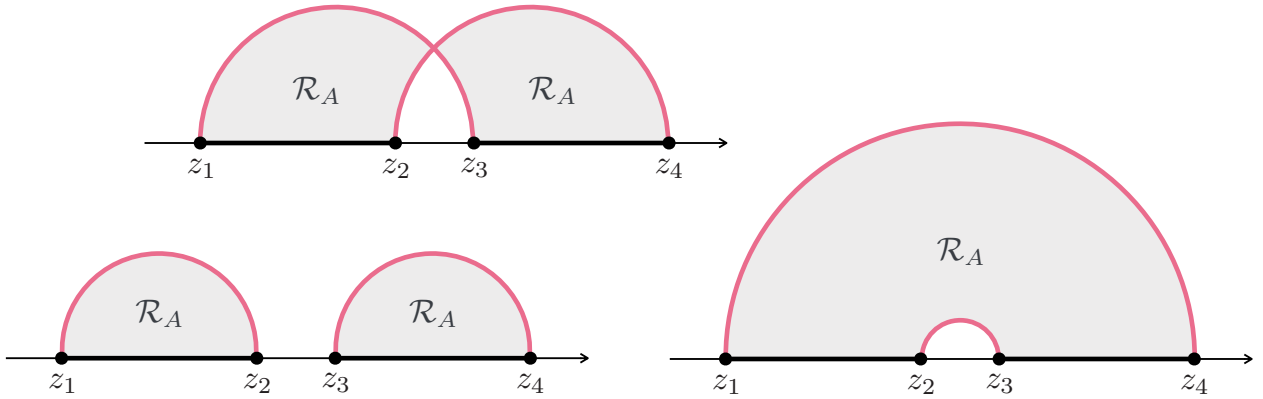


Figure 4.2: 二区間系に対してホモロガス条件を満たす極小曲線の組み合わせはこの図の三組である．左上の図の曲線の長さは他二つよりも常に長いので，笠-高柳予想による HEE は左下の曲線の組もしくは右の曲線の組によって与えられる．

### Example: One interval on Torus

円周の長さが  $C$  の円周上に定義された逆温度  $\beta$  の CFT を考える．このトーラス上に定義された CFT において，笠-高柳予想を部分系が一区間系の場合に適用する．対応する時空は

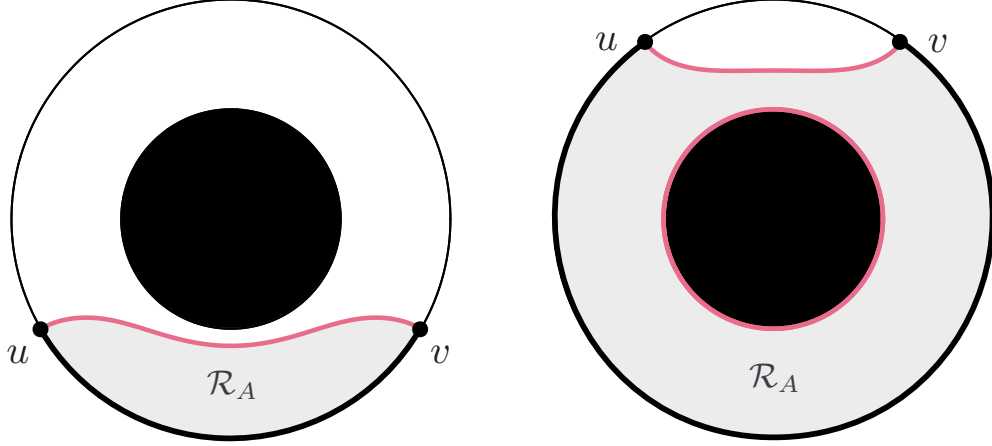


Figure 4.3: トーラス上の一区間系の HEE を与えるとされている二種類の笠-高柳曲線.

BTZ 時空 (C.8) である. ブラックホール表面が極小曲線であることに注意すると笠-高柳曲線の候補は図 4.3 のような二種類のタイプがある. まず,  $|v - u|$  が円周の長さの半分に比べて小さいとき, 部分系に対してブラックホールの向こう側を通らない極小曲線が笠-高柳曲線であり, その長さは式 (C.50) において  $m = 0$  によって与えられる. 次に,  $|v - u|$  が円周の長さの半分以上を超えたとしても, 部分系に対してブラックホールの向こう側を通る極小曲線だけではホモログス条件を満たさないのでブラックホールの表面の寄与を考慮する必要がある. すると, 対応する HEE は次のように与えられる.

$$S_A = \min \left\{ \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi \epsilon} \sinh \left( \frac{\pi |v - u|}{\beta} \right) \right], \frac{c\pi C}{3\beta} + \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi \epsilon} \sinh \left\{ \frac{\pi(C - |v - u|)}{\beta} \right\} \right] \right\} \quad (4.13)$$

これらの二種類の曲線の長さが等しくなる部分系の大きさは次のように与えられる.

$$|v - u| = \frac{C}{2} + \frac{\beta}{2\pi} \log \left[ \cosh \left( \frac{\pi C}{\beta} \right) \right] \quad (4.14)$$

したがって, 部分系の大きさがこれよりも小さいとき図 4.3 の左側のような笠-高柳曲線が選ばれ, 部分系の大きさがこれよりも大きいとき図 4.3 の右側の笠-高柳曲線が選ばれる. 補足として, 曲線の長さが式 (C.50) で  $s(1 + |v - u|)$  として与えられる極小曲線もホモログス条件を満たすが, 図 4.3 のどちらの曲線よりも長いので笠-高柳予想では考慮する必要はない.

### Gravity action for Ryu-Takayanagi conjecture

笠-高柳予想を AdS/CFT 対応に基づいて導出するには次のような問題点がある. 第一に, 2.2 節の議論から高柳予想を与える AdS 側の作用は少なくとも二区間系では次の条件を満たす

必要がある。図 4.2 の左上, 左下, 右の曲面の ERE への寄与の重みを  $p_1, p_2, p_3$  とすると,  $x < 1/2$  のとき  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1$  あるいは  $x > 1/2$  のとき  $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0$  となる。したがって, 各鞍点の寄与がこのような重みとなるメカニズムを説明する必要がある。また, C.2 節にまとめたように, AdS 側の有効作用は Liouville CFT の作用と等しいので, これは Liouville CFT とも無矛盾である必要がある。ただし,  $(q-1)/G \rightarrow \infty$  となるように  $q \rightarrow 1$  極限と  $G \rightarrow 0$  極限をとることを約束すれば, 最小の値を持つ古典作用のみが EE に寄与すると見なせるので, その場合には笠-高柳予想は正しい HEE を与える可能性がある。もちろん形式的にそのような EE を考えることも可能であるが, EE の量子補正 [31] を扱う場合などではやはり有限の  $G \sim 0$  で  $q \rightarrow 1$  とした分配関数を扱う必要がある。

第二の問題点として, 2.2 節の議論とは無関係に, 4.1 節の最後で述べたように, AdS 側の内部の時空構造が不明瞭な点である。この点に関して, 笠-高柳予想は笠-高柳曲面の最小性とホモロガス条件によって時空構造を指定する。例えば [40] では, 部分系の各端点から極小曲面が一枚ずつ時空中に伸び, AdS 側の多様体も CFT 側のレプリカ多様体と同じレプリカ対称性をもつという仮定の上でホモロガス条件を導出できることが示されている。しかし, 4.1 節で注意したように, AdS 側の多様体にもレプリカ対称性を課すことは条件が強すぎる上に, 部分系の各端点からは欠損角の大きさが整合的であれば極小曲面が複数本伸びている場合も考えられる。したがって, 少なくとも, ホモロガス条件は HEE を与える極小曲面を決定するための唯一の条件ではない。また, 歴史的には, ホモロガス条件は EE の強劣加法性不等式 (A.57) との無矛盾性のために適当に付け加えられた十分条件に過ぎないため, AdS 側が他の時空構造を許容する可能性は十分にある。次節 4.3 では, 笠-高柳予想とは別の HEE の候補を具体的な系で提案する。

### 4.3 Alternative holographic entanglement entropy

Riemann 球面上の二区間系およびトーラス上の一区間系の EE に対し, 笠-高柳予想に代わる HEE を提案する。特に, その HEE を与える古典作用を提示する [28, 29]。

#### Two disjoint intervals in $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$

二区間系の端点を  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  とする。  $q \sim 1$  のとき, これらのうち二点をつなぐ宇宙ひもの組み合わせは図 4.2 のように六種類ある。単純にこの六種類の曲面の面積の和として HEE が与えられると仮定すると,  $q \rightarrow 1$  において EE の劣加法性不等式 (A.59) と矛盾してしまう。そこで, この六本の宇宙ひもの張力が均一でなく  $z_i$  と  $z_j$  をつなぐ宇宙ひも  $C_{ij}$  の張力



を  $\mu_{ij}$  とし、これらの六本の宇宙ひもの組が唯一の古典解を与える場合を考える。すなわち、古典作用  $I(q, x)$  が次のようにあたえられる場合を考える。

$$I_A(q) = \frac{q}{16\pi G} \int_{\mathcal{B}} dx^3 \sqrt{g} (R - 2L^{-2}) + \sum_{i < j} \mu_{ij} \int_{\mathcal{C}_{ij}} dy \sqrt{h} \quad (4.15)$$

すると、HERE は次のようにあたえられることになる。

$$S_A(q) = \frac{1}{q-1} \sum_{i < j} \mu_{ij} \int_{\mathcal{C}_{ij}} dy \sqrt{h} \sim \frac{1}{q-1} \sum_{i < j} \log |z_j - z_i|^{\mu_{ij}} \quad (4.16)$$

ここで後半の  $\sim$  では  $q \sim 1$  とした場合に宇宙ひもの古典作用が極小曲面の面積によって与えられ、背景時空が AdS 時空であることを使った。ここで重要なことは六本の宇宙ひもの組が一つの古典解を与え、それぞれの張力は負の値も取れることである。以下では、これらの張力を適当な条件から制限する。

区間の端点同士が近付く場合、EE は一区間系の場合に漸近することが CFT 側の解析によって明らかになっている [21]。例えば、 $q \sim 1$  かつ  $z_2 - z_1 \sim \epsilon$  のとき、 $S_A(q)$  は次のように書ける。

$$\frac{1}{q-1} \log \epsilon^{\mu_{12}} |z_3 - z_2|^{\mu_{23}} |z_4 - z_3|^{\mu_{34}} |z_3 - z_2 + \epsilon|^{\mu_{13}} |z_4 - z_2|^{\mu_{24}} |z_4 - z_2 + \epsilon|^{\mu_{14}} \quad (4.17)$$

この HERE が次のように与えられる一区間系  $[z_3, z_4]$  の HERE と一致するべきである。

$$\frac{q+1}{8qG} \log \frac{|z_4 - z_3|}{\epsilon} \quad (4.18)$$

したがって、宇宙ひもの張力に関する次の制限が得られる。

$$\mu_{23} + \mu_{13} = 0, \quad \mu_{34} = \frac{q^2 - 1}{8qG}, \quad \mu_{24} + \mu_{14} = 0 \quad (4.19)$$

また  $z_3 - z_2 \sim \epsilon$  および  $z_4 - z_3 \sim \epsilon$  の場合を考えることで次の関係を得る。

$$\mu_{12} + \mu_{13} = 0, \quad \mu_{14} = \frac{q^2 - 1}{8qG}, \quad \mu_{24} + \mu_{34} = 0 \quad (4.20)$$

$$\mu_{13} + \mu_{14} = 0, \quad \mu_{12} = \frac{q^2 - 1}{8qG}, \quad \mu_{23} + \mu_{24} = 0 \quad (4.21)$$

したがって、宇宙ひもの各張力は次のように決まり、HERE も求まる。

$$\mu_{12} = -\mu_{13} = \mu_{14} = \mu_{23} = -\mu_{24} = \mu_{34} = \frac{q^2 - 1}{8qG} \quad (4.22)$$

$$S(q, x) \sim \frac{q+1}{8qG} \log \frac{|z_2 - z_1| |z_3 - z_2| |z_4 - z_3| |z_4 - z_1|}{|z_3 - z_1| |z_4 - z_2| \epsilon^2} \quad (4.23)$$

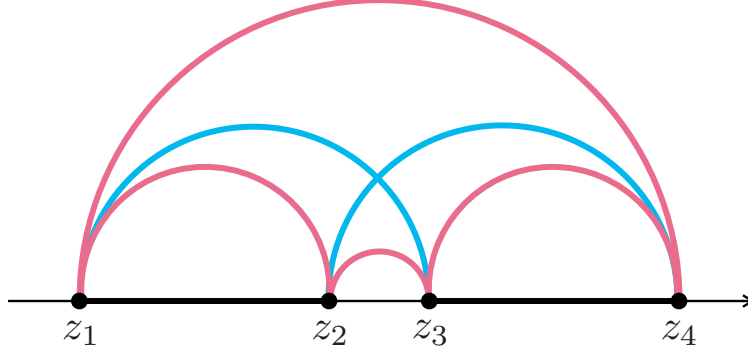


Figure 4.4: 本論文で提案された二区間系の HEE (4.22) を与える極小曲面の組み合わせ. 赤色の曲線が張力  $\mu = (q^2 - 1)/(8qG)$  の宇宙ひもを表し, 青色の曲線が張力  $\mu = -(q^2 - 1)/(8qG)$  の宇宙ひもを表している.

この宇宙ひもの組み合わせはたしかに部分系の各端点で欠損角の整合性を満たすことは, 図 4.4 を見れば直感的に理解できる. 赤色の曲線が張力  $(q^2 - 1)/(8qG)$  を持つ宇宙ひもを表しており, 青色の曲線が張力  $-(q^2 - 1)/(8qG)$  を持つ宇宙ひもを表している. たしかに, 部分系の各端点からは赤色の曲線が二本ずつ, 青色の曲線が一本ずつ伸びているため, 各端点での欠損角は  $\Delta\phi = \pi(q - 1/q)$  となっている. また, Brown-Henneaux 公式 (C.39) を用いれば, この HEE (4.22) は Liouville CFT の ERE (3.51) と一致する. 図 4.4 を参考にして, 同様の議論から,  $N$  区間系  $\cup_{i=1}^N [u_i, v_i]$  の HEE は次のように予想することができる.

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{\prod_{i,j} |v_i - u_j|}{\prod_{i < j} |u_i - u_j| |v_i - v_j|} + \text{const.} \quad (4.24)$$

我々は二区間系の場合に HEE の候補 (4.22) を提案した. この HEE は対応する古典作用が式 (4.15) として具体的に与えられる. その他の系ではやはり AdS 側の多様体の構造と CFT 側のレプリカ多様体の構造の整合性を詳細に解析することで, AdS 側の宇宙ひもや宇宙膜の配位を決定する必要がある. それは前節 4.2 の最後に述べた注意点に気を付けながら [40] の解析を再考することで実行可能かもしれない. 次の小節ではそのような解析は行わず, 単にトーラス上の一区間系に対する HEE の候補を提案する.

### Single interval in BTZ spacetime

トーラス上の CFT に対応する重力系の時空は BTZ 時空であると考えられている. 付録 C.3 にまとめたように, 部分系が一つの区間からなる場合でも, その端点から伸びる無限個の極小曲面を持つ. 一区間系の場合には適当な極限を考えたり, エントロピー不等式などから EE

の形を制限することが難しいので、先程の二区間系の HERE の例やコンパクト化されたボゾンの EE を参考にして HERE の候補を提案する。二区間系の例から、HEE は時空中に存在する全ての極小曲面の面積を適切に足し引きすることで与えられると予想できる。先ほど提案した HERE (4.22) は Liouville CFT およびコンパクト化されたボゾンの ERE と等しいので、コンパクト化されたボゾンなどの EE はおよそ次のように与えられることを参考にす [32, 41, 42].

$$\begin{aligned}
S_A &= \frac{c}{3} \left\{ \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left( \frac{\pi\ell}{\beta} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \log \frac{(1 - e^{2\pi\ell/\beta} e^{-2\pi m/\beta})(1 - e^{-2\pi\ell/\beta} e^{-2\pi m/\beta})}{(1 - e^{-2\pi m/\beta})^2} \right\} \\
&= \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left( \frac{\pi\ell}{\beta} \right) \right] + \frac{c}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \log \frac{\sinh \left[ \frac{\pi}{\beta}(m - \ell) \right] \sinh \left[ \frac{\pi}{\beta}(m + \ell) \right]}{\sinh^2 \left( \frac{\pi m}{\beta} \right)} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

ここで、円周の長さは  $C = 1$  である。もちろん、コンパクト化されたボゾンは自由場であり対応する重力系を持たないが、二区間系の場合がそうであったように、ERE の振る舞いが偶然一致する可能性はある。そこでこの式 (4.25) をよく見ると、対数関数の中の項をうまく分解することで、BTZ 時空の各極小曲面の面積 (C.50) によって表現できる。そこで、BTZ 時空での EE は次のように書けると予想できる。

$$S_A = s(\ell) + \sum_{m=1}^{\infty} [s(m - \ell) + s(m + \ell) - 2s(m)] \quad (4.26)$$

EE の式 (4.26) からは各曲線の配位は決まらないが、欠損角の整合性から対応する極小曲面の配位は図 4.5 のようになっていると考えられる。

この HEE とブラックホールエントロピーとの関係を述べておく。部分系の長さが  $1 - \delta$  のとき、HEE は次のようになる。

$$\begin{aligned}
S(1 - \delta) &= \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left( \frac{\pi\delta}{\beta} \right) \right] + \frac{c}{3} \lim_{m \rightarrow \infty} \log \frac{\sinh \left( \frac{\pi}{\beta}(m + 1) \right)}{\sinh \left( \frac{\pi m}{\beta} \right)} + O(\delta) \\
&= \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left( \frac{\pi\delta}{\beta} \right) \right] + \frac{c\pi}{3\beta} + O(\delta) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{\delta, \epsilon \rightarrow 0} S(1 - \delta) - S(\delta) = \frac{c\pi}{3\beta} = S_{BH} \quad (4.28)$$

となる。すなわち、ブラックホールの表面は無数個の極小曲面がキャンセルした結果得られ、ブラックホールエントロピー  $S_{BH}$  が得られることになる。この式の両辺は単に代数的に値が一致しているだけでなく幾何学的に一致していることを強調しておく。

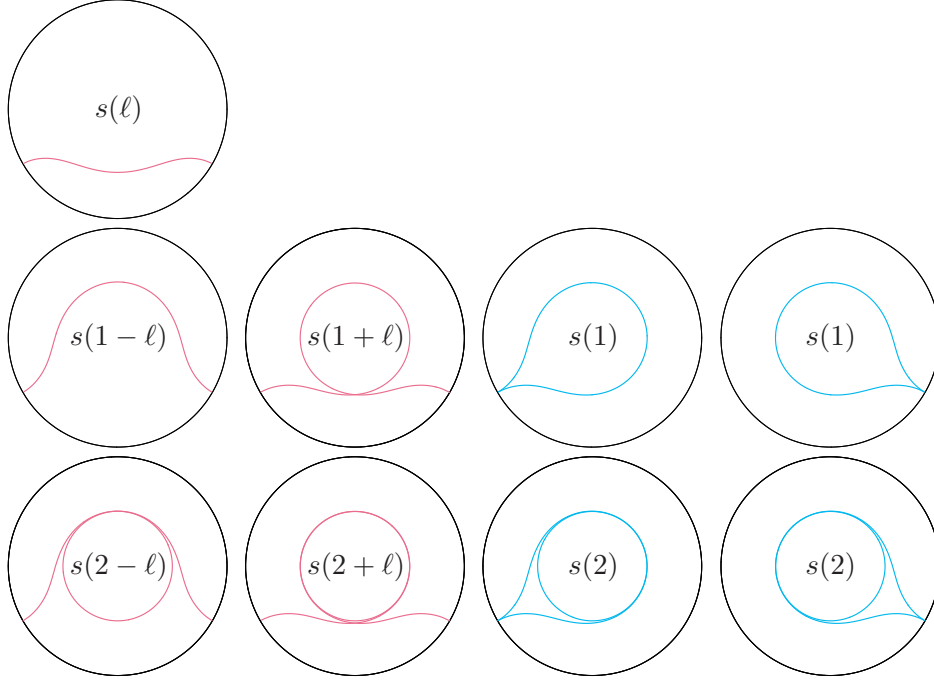


Figure 4.5: 本論文で提案された BTZ 時空で HEE を与える極小曲面の組み合わせのうち、式 (C.50) において  $m \leq 2$  であるものの一覧. 各円盤の中心には各極小曲線の長さ (C.50) が書かれている. 赤色の曲線は HEE に正の寄与をし、青色の曲線は HEE に負の寄与をする. また、欠損角の整合性のために青色の曲線は各部分系の端点から均等に伸びることになる.

### Holographic entanglement entropy and Bulk reconstruction

本論文で提案した HEE (4.24) および (4.26) と笠-高柳予想 (4.11) および (4.13) のどちらが HEE として正しいかを検証するべきである. それは例えば, [43] などから各鞍点の重み  $p_i$  を定めることであったり, GKP-Witten 関係式 (C.14) に基づいて CFT 側のレプリカ多様体上の場の大域的振る舞いと, それに双対な AdS 側の場の大域的振る舞いの整合性から AdS 側の多様体の構造を定めることによって検証されるかもしれない. その際には, 次の点に注意すべきである.

- 重力側の多様体はレプリカ多様体でなくてよい
- CFT 側のレプリカ多様体と重力側の多様体の AdS 境界が欠損角の整合性を満たせばよく, 時空内部では宇宙ひもの本数や張力には不定性がある
- 鞍点が複数存在する場合はそれらの重みを求め, 適切に足し上げる必要がある

これらの注意点を考慮して [40] と同様の解析を行えば, 重力側の時空構造を特定し HEE を

与えられるかもしれない。以下ではそのような解析は行わず、物理的な議論から我々の HEE が AdS/CFT 対応およびホログラフィー原理あるいは情報理論的観点において笠-高柳予想よりも好ましい性質をもつことを論じる。

ホログラフィー原理に立ち返ると、CFT 側の情報だけから対応する AdS 側の時空構造を構成を試みることは AdS/CFT 対応において基本的な問題である。笠-高柳予想による HEE だけの情報から時空構造を決定できる場合 [44] があり、HEE は時空の再構成において基本的な情報であると言える。しかし、一般の時空では、笠-高柳曲面が到達しない時空領域であるエンタングルメントシャドウ領域の存在のために、HEE の情報だけでは時空の再構成ができないと考えられている [45]。例えば、BTZ 時空では図 4.3 のような曲線が選ばれるが、どのような部分系を考えてもブラックホール表面近傍の領域に笠-高柳曲線は到達しない。これは高次元ブラックホール時空でも同様である。この観点によるとブラックホール近傍の時空構造は HEE に全く影響を与えないことになる。一方で、本論文で提案した HEE (4.26) は時空中に存在するすべての極小曲面の寄与を考慮することになり、式 (4.28) から分かるようにそれらはブラックホール時空全体が HEE に影響を与える。すると、BTZ 時空でもエンタングルメントシャドウ領域は存在せず時空の再構成が可能となるかもしれない。高次元 AdS-Schwarzschild 時空でも極小曲面は無数にあり、それらすべての寄与を考慮すればエンタングルメントシャドウ領域が存在しなくなることに注意すると、時空中に存在するすべての極小曲面が HEE に寄与することが期待できる。

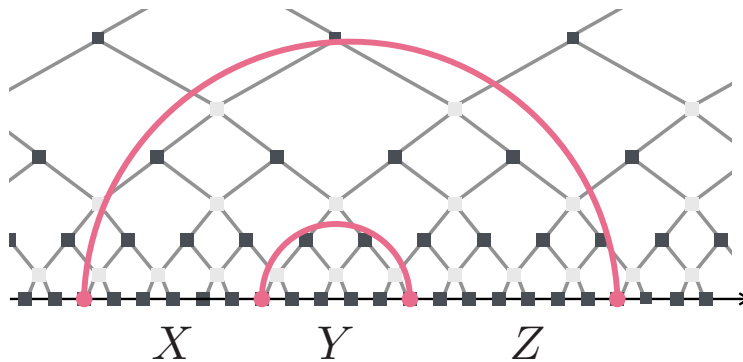


Figure 4.6: AdS/CFT 対応のテンソルネットワークとしての解釈と極小曲面によるネットワークの切断。ネットワーク構造と AdS 時空の構造が同一視され、部分系  $Y$  や  $X+Y+Z$  に関するネットワークを外部と切断する最小の切断部分が笠-高柳曲面となっている。

本論文で提案した HEE には負の張力を持つ宇宙ひもの寄与があった。この物理的意味を考慮するにあたって AdS/CFT 対応のテンソルネットワークとしての側面に注目したい

[18, 46]. この解釈では, CFT に双対な時空はテンソルネットワークと同一視され, 笠-高柳曲面は注目している部分系とその外部とのネットワークを切断するための最小の切断部分に対応する. したがって, EE はネットワークの切断本数によって与えられることになる. 例えば, 図 4.6 で一区間系  $X+Y+Z$  のもつ EE は部分系の両端をつなぐ極小曲面の面積として与えられる. 次に, この一区間系から  $Y$  部分をトレースアウトする. すると, 笠-高柳予想による解釈では  $Y$  の両端をつなぐ極小曲面を考えることで二区間系はその外部とネットワークを切断することができる. 区間同士が離れている場合には  $X$  の両端をつなぐ極小曲線と  $Z$  の両端をつなぐ極小曲線によってネットワークを切断されると考えられる. ここで情報 Venn 図 A.3 を思い出すとよい. 一般の系では  $S_{X+Z}$  は  $X$  と  $Y$  の相関の大きさを与える相互情報量  $I(X:Y)$  と  $Z$  と  $Y$  との相関の大きさである  $I(Y:Z)$  の寄与を含む. 二区間系に戻ると,  $Y$  の両端をつなぐ極小曲面は  $I(X:Y)$  および  $I(Y:Z)$  の寄与も切断してしまうことに注意する. もちろん  $I(X:Y) = I(Y:Z) = 0$  であれば問題ないが, GKP-Witten 関係式や共形対称性から明らかに  $Y$  は  $X$  および  $Z$  と相関を持つ. したがって,  $Y$  の両端をつなぐ極小曲面だけではネットワークを切断しすぎてしまう. そこで,  $X+Y$  および  $Y+Z$  の両端をつなぐ極小曲面の面積を差し引くことで切断しすぎた情報量を補填する. すると今度は,  $X$  および  $Z$  の情報を足しすぎているので,  $X$  および  $Z$  の両端をつなぐ極小曲面を足すことで  $X$  および  $Z$  の情報を差し引くことで二区間系  $X+Z$  の EE を与えていると解釈できる. ここで, 我々の提案する HEE によると三者間相互情報量  $I(X:Y:Z)$  (A.56) はこの系において  $I(X:Y:Z) = 0$  になっている. このように HERE に負の寄与をする曲面の意味を解釈することができ, むしろ笠-高柳予想よりも適切なネットワークの切断をあたえると考えられる.

# Chapter 5

## Conclusion

まず、本論文の主要な結果をまとめる。2章では、半古典極限をもつ一般の理論において、レプリカ分配関数の鞍点が複数存在する場合の EE を与えた。先行研究では、そのような鞍点が複数存在する場合、最小の値をもつ鞍点のみが EE を代表すると仮定されていた。しかし、密度行列の規格化条件とレプリカ理論の構成方法から、EE は式 (2.38) のように各鞍点の線形和として与えられることを示した。これはレプリカ理論によって記述される系の量子状態が各鞍点に対応する半古典的な状態の線形和であると考え、各鞍点から EE への寄与の重みはその確率振幅の大きさの二乗によって与えられる。3章では、Riemann 球面上に定義された large  $c$  Liouville CFT における二区間系の EE を数値的に評価した。 $q \sim 1$  のとき、二区間系ではレプリカ分配関数の鞍点が二つ存在し、系の交差対称性から EE はこれらの単純な和として与えられた。偶然にもその EE はコンパクト化されたボゾンの EE と等しく、これは CFT の EE として妥当であることが期待できる。4章では、HEE を与えるには CFT 側と同様、系の大域的振る舞いを特定する必要があることを強調し、笠-高柳予想を導出するには不自然な仮定をおく必要があることを指摘した。そこで、Riemann 球面上の二区間系において笠-高柳予想に代わる HEE 公式を提案し、それを与える重力側の古典作用を具体的に与えた。また、二区間系の例を参考に Riemann 球面上の  $N$  区間系の HEE およびトーラス上の一区間系の HEE を予想した。

EE を評価する際に重要な視点は、レプリカ多様体上の場の局所的な振る舞いはよく解析できるが、その大域的な振る舞いを解析することは困難だということである。半古典極限における二次元系の解析ですら、複素上半平面を円弧多角形内部へと写す正則全単射を探す問題と同程度に難しい。ホログラフィー原理の思想に則れば、CFT 側のこのような性質あるいは困難さが重力側にも反映されるべきで、おそらくそれは重力側の多様体内部の構造に反映されるであろう。すると、AdS/CFT 対応を用いても問題は簡単にならないように見える

かもしれないが、4.3 節での解析に基づけば、各宇宙ひもの張力の相対符号を決定すれば EE を評価することができるかもしれない。この観点からは AdS/CFT 対応によって問題が単純化されることが期待できる。

将来的な課題の一つ目として ERE を解析的評価を行いたい。本論文では二区間系の EE を評価する際にツイスト演算子の四点相関関数の評価を数値的に取り扱ったが、[43] の方法を用いてこの四点相関関数を各鞍点の重み  $p_i$  も含めて解析的に評価することが可能かもしれない。また、同様にトールス上の一区間系の場合に関しても解析的な評価が得られると HEE を構成する際の参考にすることができる。

二つ目の課題として、本論文では半古典極限において  $q$ -分配関数の各鞍点が ERE に同程度に寄与することを示したので、改めて HEE を与える古典作用を特定する必要がある。すなわち、CFT 側のレプリカ多様体に双対な重力側の多様体の構造、特に宇宙ひもの配位を決定することで HEE を与える公式を確立を行いたい。そこで重要になることは、CFT 側のレプリカ理論との整合性であり、まず局所的な視点からは欠損角の整合性が要請される。BTZ 時空の例からもわかる通り、欠損角の整合性だけでは曲面の配位を一意に定めないで [40] で行われているトポロジカルな解析によって時空の大域的な構造を特定する必要がある。このような解析によって笠-高柳予想に代わる HEE 公式が構築され、改めて AdS/CFT 対応をはじめとするホログラフィー原理の理解が進むことを願っている。

## Acknowledgements

議論の中で有益なコメントをいただいただけでなく、博士前後期課程において研究の指導をしていただいた指導教員の南部保貞准教授に感謝します。また、森崇人さんと寺嶋靖治さんからは本研究に対する適切な批判および助言をいただきましたことを感謝します。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2125 の財政支援を受けたものです。この場を借りて「東海国立大学機構融合フロンティア次世代研究事業」に御礼申し上げます。また、本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費 22J14390 の助成を受けたものです。



# Appendix A

## Tips

この付録は本論文の主要部の理解の助けとなる数学的概念をまとめたものである。

### A.1 Notation

この節では、本論文における記法の一覧と公式集を提供する。

#### Riemann geometry

Lorentz 計量  $\eta_{\mu\nu}$  は次の符号を採用する。

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \quad (\text{A.1})$$

Levi-Civita 接続:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.2})$$

Riemann 曲率テンソル

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} \quad (\text{A.3})$$

Riemann テンソル

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (\text{A.4})$$

Einstein-Hilbert 作用  $S_{\text{E.H.}}$ :

$$S_{\text{E.H.}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad (\text{A.5})$$

## Riemann geometry in complex coordinate

Euclid な平坦な座標系  $ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2$  に対して、複素座標系を  $z = x_0 + ix_1$ ,  $\bar{z} = x_0 - ix_1$  と定義すると、線素は次のようになる。

$$ds^2 = dzd\bar{z} \quad (\text{A.6})$$

したがって、計量テンソルは次のようになる。

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2 \quad (\text{A.7})$$

座標変換  $w = f^{-1}(z)$  に対し、計量テンソルは次のように変化する。

$$g_{w\bar{w}} = g_{z\bar{z}} f'(w) \bar{f}'(\bar{w}) = \frac{1}{2} f'(w) \bar{f}'(\bar{w}) \quad (\text{A.8})$$

Levi-Civita 接続 (A.2) の非自明な成分は次の二つだけである。

$$\Gamma_{ww}^w = g^{w\bar{w}} \partial_w g_{w\bar{w}} = \partial_w \log f'(w), \quad \Gamma_{\bar{w}\bar{w}}^{\bar{w}} = \partial_{\bar{w}} \log \bar{f}'(\bar{w}) \quad (\text{A.9})$$

Riemann テンソル (A.3):

$$R_{ww\bar{w}}^w = -\partial_{\bar{w}} \Gamma_{ww}^w = -\partial_{\bar{w}} \partial_w \log f'(w), \quad R_{\bar{w}\bar{w}w}^{\bar{w}} = -\partial_w \partial_{\bar{w}} \log \bar{f}'(\bar{w}) \quad (\text{A.10})$$

Ricci テンソル (A.4) は  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$  を用いると次のようになる。

$$R_{w\bar{w}} = -\partial_w \partial_{\bar{w}} (\log f'(w) + \log \bar{f}'(\bar{w})) \quad (\text{A.11})$$

Ricci スカラー:

$$R = -2g^{w\bar{w}} \partial_w \partial_{\bar{w}} (\log f'(w) + \log \bar{f}'(\bar{w})) \quad (\text{A.12})$$

対数関数とデルタ関数

$$\Delta \log |z| = 4\partial_z \partial_{\bar{z}} \log |z| = 2\pi \delta^2(z, \bar{z}) \quad (\text{A.13})$$

## A.2 Cosmic string and Conical singularity

宇宙ひもと欠損角の関係をまとめる.

### Cosmic string

簡単のため, 3次元 Euclid 空間中の直交座標系  $(\tau, x, z)$  において, エネルギー運動量テンソルが  $T^\mu_\nu = \mu \delta(\tau)\delta(x)\text{diag}(0, 0, 1)$  で与えられるオブジェクトを考える. ここでは [38] に習い, このオブジェクトを宇宙ひもと呼ぶ. 宇宙論の文脈で議論されるような宇宙ひもに関しては [47]などを参照されたい. 以下では,  $\tau = 0$  の瞬間にだけ  $z$  軸に張力が  $\mu$  の宇宙ひもが存在すると,  $(t, x)$  平面の原点周りに  $\Delta\phi = 8\pi G\mu$  の欠損角ができることを見る. まず, Einstein 方程式のトレースを取ることで Ricci スカラーは次のように決まる.

$$R = -16\pi G\mu \delta(t)\delta(x) \quad (\text{A.14})$$

次に弱重力近似のもとで計量テンソルの形を調べる. 本論文では  $G\mu \sim 0$  となる張力が小さい極限のみに興味があるのでこの解析で十分である. まず, 計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  を次のように分解する.

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (\text{A.15})$$

すると, Einstein 方程式から  $h_{00}, h_{11}$  成分のみが次のような非自明な値をもつ.

$$h_{00} = h_{11} = 8G\mu \log(r/r_0), \quad r = \sqrt{\tau^2 + x^2} \quad (\text{A.16})$$

したがって,  $(\tau = r \sin \theta, x = r \cos \theta), r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi)$  となる極座標を用いて線素を表現すると次のようになる.

$$ds^2 = dz^2 + [1 + 8G\mu \log(r/r_0)](dr^2 + r^2 d\theta^2) \quad (\text{A.17})$$

ここで極座標を次のように再定義する.

$$\tilde{r} = r \sqrt{\frac{1 + 8G\mu \log(r/r_0)}{1 + 8G\mu}}, \quad \tilde{\theta} = (1 - 4G\mu)\theta \quad (\text{A.18})$$

すると,  $G\mu \sim 0$  のとき,  $ds^2 = dz^2 + (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\theta}^2)$  なので,  $\tilde{\theta}$  座標の周期が  $\tilde{\theta} \sim \tilde{\theta} + (2\pi - 8\pi G\mu)$  となる. したがって, この時空は欠損角  $\Delta\phi = 8\pi G\mu$  を持つことがわかる. また, 3次元空間に張力の小さな宇宙ひもがあるとき, Ricci スカラーと宇宙ひも周りの欠損角の間に次の関係が見いだせる.

$$R = -2\Delta\phi \delta(t)\delta(x) \quad (\text{A.19})$$

## A.3 Schwarzian derivative

### Schwarzian derivative

関数  $f(z)$  の Schwarz 微分  $Sf(z)$  は次の微分である.

$$Sf(z) = \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \quad (\text{A.20})$$

Schwarzian derivative  $Sf(z)$  を  $\{f; z\}$  と書く流儀もあるが本論文ではこの表記は用いない. Schwarz 微分の基本的な性質を列挙する. まず,  $f \circ g$  に対する Schwarz 微分は次のようになる.

$$S(f \circ g)(z) = g'(z)^2 (Sf \circ g)(z) + Sg(z) \quad (\text{A.21})$$

ここで  $g$  が次のような一次分数変換 (Möbius 変換) である場合を考える.

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{A.22})$$

ここで  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  かつ  $ad - bc \neq 0$  である. すると,  $Sg(z) = 0$  なので, 式 (A.21) は次のようになる.

$$S(f \circ g)(z) = g'(z)^2 (Sf \circ g)(z) \quad (\text{A.23})$$

次の微分方程式を考える.

$$\Psi''(z) + \frac{1}{2}Q(z)\Psi(z) = 0 \quad (\text{A.24})$$

この方程式の線形独立な二つの解を  $\Psi_1(z), \Psi_2(z)$  としたとき,  $f(z) = \Psi_1(z)/\Psi_2(z)$  は次の式を満たす.

$$Sf(z) = Q(z) \quad (\text{A.25})$$

これは直接計算することで確かめられる. すると, この  $f(z)$  を一次分数変換 (A.22) した

$$f(z) = \frac{a\Psi_1(z) + b\Psi_2(z)}{c\Psi_1(z) + d\Psi_2(z)} \quad (\text{A.26})$$

この関数も三階非線形微分方程式 (A.25) の解となる.

## Schwarz–Christoffel mapping

三階非線形微分方程式 (A.25) において,

$$Q(z) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1 - \alpha_i^2}{2(z - z_i)^2} + \frac{\beta_i}{z - z_i} \right] \quad (\text{A.27})$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n [2\beta_i z_i + 1 - \alpha_i^2] = 0, \quad \sum_{i=1}^n [\beta_i z_i^2 + z_i(1 - \alpha_i^2)] = 0. \quad (\text{A.28})$$

とすると, 微分方程式 (A.25) の解  $f(z)$  は複素上半平面  $\mathbb{H} = \{z | \text{Im}(z) > 0\}$  から各頂点の角度が  $\pi\alpha_i$  である円弧  $n$  角形の内部への正則な全単射を与える.

この意味を理解するために, まず, 複素上半平面から長方形の内部への正則な全単射  $f$  を考える. このような写像の存在は Riemann の写像定理をうまく適用することで証明でき, これは Schwarz–Christoffel 写像の特別な場合となる. 以下では, この写像がどのように構成されるかを見る. まず, 図 A.1 のように  $f$  を実軸上の区間  $[z_2, z_3]$  を通って複素下半平面に解

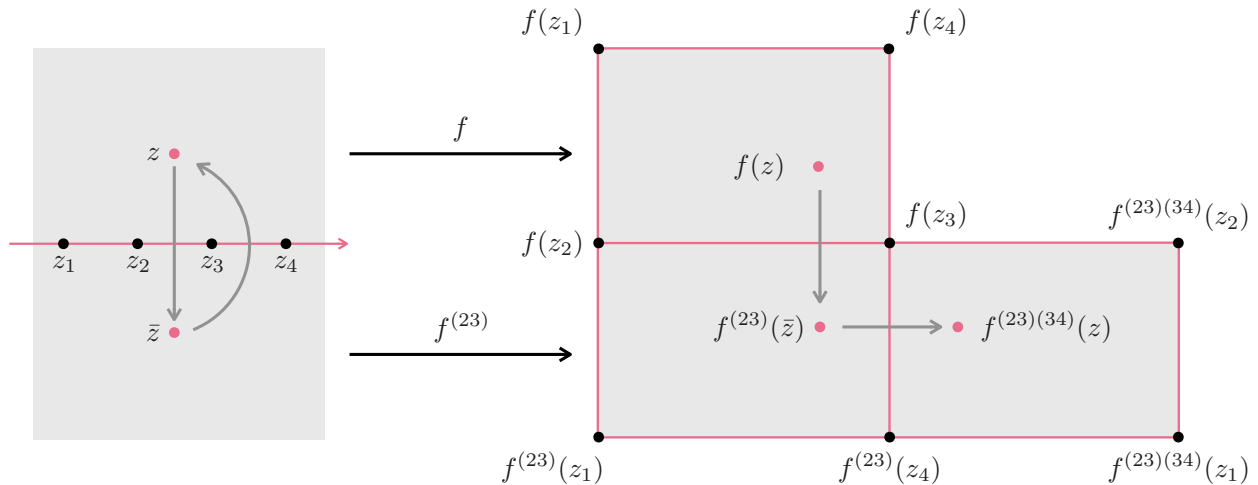


Figure A.1: 複素上半平面から長方形への正則全単射を与える Schwarz–Christoffel 写像  $f$  の模式図. 図の左側の実軸が図の右側の各長方形の辺に写される.

析接続を行う. これは Schwarz の鏡像原理から可能である. このように定義域が拡張された  $f$  の複素下半平面への制限を  $f^{(23)}$  とし, さらに,  $f^{(23)}$  を区間  $[z_3, z_4]$  を通って複素上半平面に解析接続し定義域を複素上半平面に制限したものを  $f^{(23)(34)}$  とする. ここで, 図 A.1 からわかるように解析接続された  $f$  は多価関数となる. ここで,  $\angle f(z_2)f(z_3)f(z_4) := \pi\alpha_3 = \pi/2$  なので,

$$f^{(23)(34)}(z) = \exp(2\pi i\alpha_3)f(z) + \text{const}. \quad (\text{A.29})$$

となっている。この両辺を  $z$  で微分し、対数を取り、もう一度微分すると次のように  $f$  の多価性を消去できる。

$$Pf^{(23)(34)}(z) = Pf(z), \quad Pf := (\log f'(z))' \quad (\text{A.30})$$

ここで  $Pf$  は前 Schwarz 微分と呼ばれ、 $Pf$  は  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{z_1, \dots, z_4\}$  上の一価関数となる。

次に、 $f(z)$  の  $f(z_i)$  近傍での局所的な性質に着目する。複素上半平面上の次の関数を考える。

$$g(z) = (f(z) - f(z_i))^{1/\alpha_i} \quad (\text{A.31})$$

この  $g(z)$  を  $z = z_i$  で Laurent 展開すると、各  $z = z_i$  近傍で  $f(z)$  について次のように解き直せる。

$$f(z) = f(z_i) + (z - z_i)^{\alpha_i} \tilde{g}(z), \quad g(z) = (z - z_i) \tilde{g}(z)^{\alpha_i} \quad (\text{A.32})$$

ここで  $\tilde{g}(z_i) \neq 0$  であることを示すことができ、 $Pf$  は次のようになる。

$$Pf \simeq \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i - 1}{z - z_i} \quad (\text{A.33})$$

ここで  $\simeq$  は特異な部分が両辺で等しいことを表す。実は正則部分は 0 となることが示せるのでこの式の両辺は等しくなる。この微分方程式の解は次の Schwarz–Christoffel 写像である。

$$f'(z) = C(z - z_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - z_4)^{\alpha_4 - 1} \quad (\text{A.34})$$

$f(z)$  が複素上半平面から円弧多角形への正則全単射である場合を考える。円弧多角形の場合には各頂点毎に適当な一次分数変換によって各辺を直線に直してから先ほどと同様の議論を行えば良い。このとき、 $f$  から一価関数を構成する際に一次分数変換に対する不変性を保証するために前 Schwarz 微分の代わりに Schwarz 微分を用いることになる。式 (A.32) の Schwarz 微分は次のように与えられる。

$$Sf = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1 - \alpha_i^2}{2(z - z_i)^2} + \frac{\beta_i}{z - z_i} \right] \quad (\text{A.35})$$

ここで  $Sf(z \rightarrow \infty) = O(z^{-4})$  という条件から次の条件を得る。

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n [2\beta_i z_i + 1 - \alpha_i^2] = 0, \quad \sum_{i=1}^n [\beta_i z_i^2 + z_i(1 - \alpha_i^2)] = 0. \quad (\text{A.36})$$

もしこれらの条件が満たされない場合，反転変換  $w = 1/z$  を行うと  $Sf$  は  $w = 0$  で特異性を持ってしまい， $f$  の定義と矛盾する． $n \geq 4$  の場合， $\beta_i$  は上記の局所的な解析からは決定できない係数で，一般に  $\beta_i$  を決定することは一般には難しい． $\beta_i$  は上記の局所的な解析からは決定できない係数である．これは  $n = 3$  のとき，三階非線形微分方程式 (A.25) に付随する二階線形微分方程式は Gauss の超幾何微分方程式である一方， $n = 4$  のときは Heun の微分方程式となり，解くことが格段に難しくなることと対応している．これは  $\beta_i$  に対する代数的な制限が三つしかないことから理解できる．

## A.4 Heun's differential equation

### Regular singular point and Characteristic multiplier

はじめに確定特異点と特性指数について見ておく．Riemann 球面  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上で次の微分方程式を考える．

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + R_1(z)\frac{d}{dz}\psi(z) + R_2(z)\psi(z) = 0 \quad (\text{A.37})$$

ここで  $R_1(z), R_2(z)$  は有理関数とする．無限遠点  $z = \infty$  近傍での解析は  $w = 1/z$  とした  $w = 0$  近傍で考える． $z = a$  が特異点であるとは  $R_1(z), R_2(z)$  のいずれか一方が正則でないことである．特に，

$$R_1(z) = \frac{r_1}{z-a} + (z=a \text{ で正則な関数}), \quad R_2(z) = \frac{r_2}{(z-a)^2} + \frac{(z=a \text{ で正則な関数})}{z-a} \quad (\text{A.38})$$

であるとき， $z = a$  は確定特異点であるという．特に，すべての特異点が確定特異点であるとき，微分方程式は Fuchs 型であるという．この微分方程式 (A.37) に次のべき級数

$$\psi(z) = (z-a)^s \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad (\text{A.39})$$

を代入すると  $s^2 + (r_1 - 1)s + r_2 = 0$  となる必要があり，この二つの根  $s_1, s_2$  を微分方程式 (A.37) の  $z = a$  における特性指数と呼ぶ．すると， $z = a$  周りでの二つの独立解  $\psi^{s_1}(z), \psi^{s_2}(z)$  は次のように書ける．

$$\psi^{s_1}(z) = (z-a)^{s_1} \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(s_1)} z^i, \quad \psi^{s_2}(z) = (z-a)^{s_2} \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(s_2)} z^i \quad (\text{A.40})$$

次に， $s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$  として，これらの二つの解の解析接続を考える． $C$  を  $z = a$  の周りを左回りに回る経路で，他の特異点を含まないものとする． $C$  上の適当な点から  $C$  に沿って  $\psi^{s_1}(z), \psi^{s_2}(z)$  を解析接続した二つの解を  $\psi_C^{s_2}(z), \psi_C^{s_1}(z)$  とすると，次のように特性指数のみで完全に記述される．

$$\begin{pmatrix} y_x^0(z) \\ y_x^{1-\epsilon}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(2\pi i s_1) & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i s_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_x^0(z) \\ y_x^{1-\epsilon}(z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

この係数行列を局所モノドロミー行列という．複数の特異点を回る経路で解析接続をするには，各特異点周りの局所解同士の接続行列を知る必要がある．



## Heun's differential equation

Heun の微分方程式とは次の二階線形微分方程式である。

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-x} + \frac{\epsilon}{z-1}\right)\frac{d}{dz}\Phi(z) + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-x)(z-1)}\Phi(z) = 0 \quad (\text{A.42})$$

ここで、 $\alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \epsilon$  であり、 $q$  はアクセサリーパラメータと呼ばれる。Heun の微分方程式は Riemann 球面  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上で確定特異点  $\{0, x, 1, \infty\}$  を持つ。  $z = 0$  での特性指数は  $0, \gamma$  であり、 $z = x$  での特性指数は  $0, \delta$  であり、 $z = 1$  での特性指数は  $0, \epsilon$  であり、 $z = \infty$  での特性指数は  $\alpha, \beta$  である。ここでアクセサリーパラメータは解の局所モノドロミー行列には無関係で局所解同士の接続行列のみに現れる。

Heun の微分方程式は四つの確定特異点を持つ Fuchs 型微分方程式の標準形である。一次分数変換 (A.22) によって四つの確定特異点を  $\{0, x, 1, \infty\}$  に写した後、適当な冪関数を乗じて特性指数をずらせばよい。ここで、確定特異点の移動方法が  $4! = 24$  通り、無限遠点を除いた各確定特異点での特性指数のずらし方が  $2^{(4-1)} = 8$  通りあるので、196 通りの Heun の微分方程式が得られる。このように一見パラメータの異なる Heun の微分方程式でも同一の方程式である可能性に注意する必要がある。

Heun の微分方程式の解は Heun 関数と呼ばれる。各確定特異点での Frobenius 解は局所 Heun 関数と呼ばれる。例えば、 $z = 0$  近傍の二つの線形独立な局所 Heun 関数は次のように書ける。

$$\Phi(z \sim 0) \sim \text{HeunG}[x, p, \alpha, \beta, \gamma, \delta, z], \quad (\text{A.43})$$

$$\Phi(z \sim 0) \sim z^{1-\gamma} \text{HeunG}[x, p + (1-\gamma)(\delta x + \epsilon), \alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \delta, z]. \quad (\text{A.44})$$

ここで局所 Heun 関数は  $\text{HeunG}[x, p, \alpha, \beta, \gamma, \delta, z = 0] = 1$  [48] のように規格化されているとする。これ以降、 $z = z_i$  近傍で特性指数  $s$  を持った局所 Heun 関数を  $y_{z_i}^s(z)$  と書くことにする。各局所 Heun 関数同士は接続行列によって関係する。例えば、 $y_x^s(z)$  と  $y_0^s(z)$  をつなぐ接続行列  $C_{x0}$  は次のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} y_x^0(z) \\ y_x^{1-\epsilon}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_0^0, y_0^{1-\gamma})} \begin{pmatrix} W(y_x^0, y_0^{1-\gamma}) & W(y_0^0, y_x^0) \\ W(y_x^{1-\epsilon}, y_0^{1-\gamma}) & W(y_0^0, y_x^{1-\epsilon}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^0(z) \\ y_0^{1-\gamma}(z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

ここで  $W$  は Wronskian で、 $W(y_x^0, y_x^{1-\epsilon}) = y_x^0(z)\partial_z y_x^{1-\epsilon}(z) - \partial_z y_x^0(z)y_x^{1-\epsilon}(z)$  などである。これらの Wronskians の比は  $z$  に対して一定値を取るが、各 Wronskians 自体は一定値を取るわけではないことを注意しておく。これらの接続行列は Mathematica を使って数値的に好きな精度で計算することができる [49]。

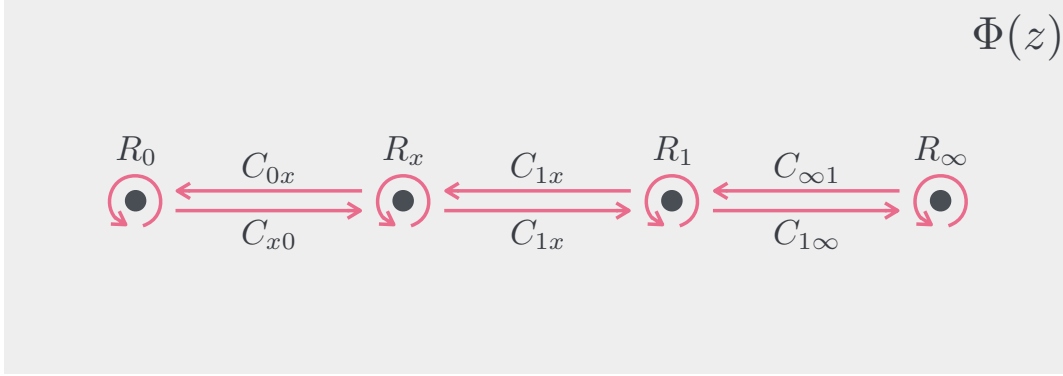


Figure A.2: 左から順に黒い点は  $z = 0, x, 1, \infty$  を表し、各線に沿った解析接続はそれぞれの行列を左から乗じることにより表現できる。

各局所 Heun 関数に関する接続行列と各確定特異点での局所モノドロミー行列を用いて大域的なモノドロミー行列を構成する。  $[0, x]$  もしくは  $[x, 1]$  を反時計回りに回る経路  $P_{0x}$  および  $P_{1x}$  を考える。さらに、各確定特異点における局所モノドロミー行列を  $R_0 = R_x^{-1} = R_1 = R_\infty^{-1} = \text{diag}(1, \exp[2\pi i/q])$  とすると、  $y_x^0$  および  $y_x^{1-\epsilon}$  を  $P_{0x}$  に沿って解析接続した結果は大域的なモノドロミー行列  $M_{0x} = C_{x0}R_0C_{0x}R_x$  により、一方で  $P_{1x}$  に沿った解析接続に対するモノドロミー行列は  $M_{1x} = C_{x1}R_1C_{1x}R_x$  によって次のように記述される。

$$\begin{pmatrix} y_x^0(z) \\ y_x^{1-\epsilon}(z) \end{pmatrix} = M_{0x} \begin{pmatrix} y_x^0(z) \\ y_x^{1-\epsilon}(z) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_x^0(z) \\ y_x^{1-\epsilon}(z) \end{pmatrix} = M_{1x} \begin{pmatrix} y_x^0(z) \\ y_x^{1-\epsilon}(z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

この様子を表したものが図 A.2 である。

## A.5 Quantum information

### Classical information theory

文献 [50] を参考にエンタングルメントエントロピー (EE) などの情報理論的側面を述べる。情報量に関する直感を養うために古典情報理論から始める。事象  $x$  が確率  $p(x)$  で起こったとき、そのときの情報量は  $-\log p(x)$  と定義される。これは事象  $x$  が起こることの非自明さを与える。同様にして、確率変数  $X$  のもつ情報量は次のように定義される。

$$H(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log p(x) \quad (\text{A.47})$$

これは確率変数  $X$  の持つ非自明さの期待値である。情報理論では対数関数の底を 2 にすることが多いがここでは自然対数を使う。この  $H(X)$  は Shannon エントロピーと呼ばれ、情報源符号化定理によれば  $H(X)$  は確率変数を符号化したときの下限値を与える。したがって、確率変数  $X$  は情報量を  $H(X)$  nat 持つと言える<sup>1</sup>。

確率変数  $X, Y$  のそれぞれの事象  $x, y$  が同時に生じる事象  $(x, y)$  を考えることができ、その事象が結合確率分布  $P(X, Y)$  に従うとする。一般に、事象  $x$  と  $y$  は独立でなく、事象  $y$  が起きた前提で事象  $x$  が起こる確率は条件付き確率  $p(x|y) = p(x, y)/p(y)$  によって与えられる。このとき、条件付きエントロピーを次のように定義する。

$$H(X|Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) + \sum_y p(y) \log p(y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (\text{A.48})$$

直感的には、確率変数  $Y$  の情報を知っているときに、確率変数  $X$  のもつ非自明さを定量化している。さらに、確率変数  $X, Y$  の相互情報量  $I(X : Y)$  を次のように定義する。

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (\text{A.49})$$

すると、相互情報量  $I(X : Y) = H(X) - H(X|Y)$  は確率変数  $Y$  の情報を知っているときに確率変数  $X$  の情報をどの程度知ることができるかを定量化する。さらに、確率変数  $X, Y, Z$  に関して条件付き相互情報量  $I_{X:Y|Z}$  を次のように定義する。

$$I(X : Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X, Y|Z) \quad (\text{A.50})$$

また、三者間相互情報量  $I(X : Y : Z)$  を次のように定義する。

$$I(X : Y : Z) = H(X) + H(Y) + H(Z) - H(X + Y) - H(Y + Z) - H(Z + X) + H(X + Y + Z) \quad (\text{A.51})$$

---

<sup>1</sup>通常、符号化はバイナリに行われるので情報量の単位は bit である。ここでは Shannon エントロピーを定義する際に対数関数の底を Napier 数にしたので情報量の単位は nat となっている。

以上の情報量の相互関係は情報 Venn 図 A.3 によって表現できる．量子情報理論では von

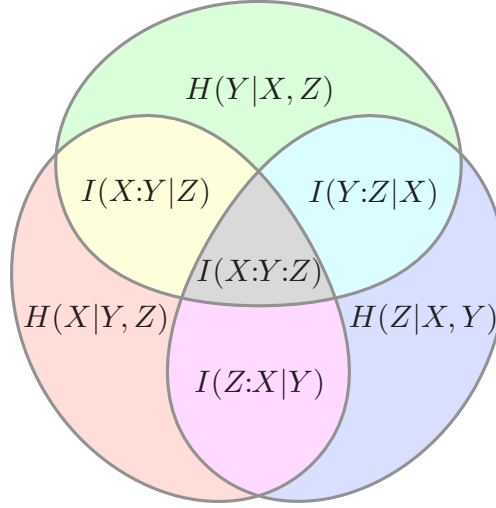


Figure A.3: 各情報量の相互関係を表す情報 Venn 図． $H(X) = H(X|Y, Z) + I(X : Y|Z) + I(Z : X|Y) + I(X : Y : Z)$  や  $I(X : Y) = I(X : Y|Z) + I(X : Y : Z)$  などの関係がある．

Neumann エントロピーが Shannon エントロピーと同等の役割をすることになる．

### Quantum information theory

量子力学系における種々の情報量の相互関係とそれらが満たす不等式を与える．まず，Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  が与えられたとき， $\mathcal{H}$  に作用する線形演算子の集合を  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  とする．このとき，密度演算子  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  は，Hermite 性:  $\rho^\dagger = \rho$ ，半正定値性:  $\rho \geq 0$  を満たし，規格化条件:  $\text{Tr}[\rho] = 1$  を満たす．物理系  $A, B$  およびそれぞれの Hilbert 空間を  $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$  とする．このとき物理系  $A, B$  からなる複合系  $A + B$  の量子状態を与える密度演算子  $\rho_{A+B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A+B})$  は一般に次のように表現できる．

$$\rho_{A+B} = \sum_{ij} p_{ij} \rho_{A,i} \otimes \rho_{B,j} = \sum_{ijkl} c_{ijkl} |\phi_{A,i}\rangle\langle\phi_{A,j}| \otimes |\phi_{B,k}\rangle\langle\phi_{B,l}| \quad (\text{A.52})$$

ここで， $|\phi_{A,i}\rangle \in \mathcal{H}_A$  および  $|\phi_{B,i}\rangle \in \mathcal{H}_B$  は  $\mathcal{H}_A$  および  $\mathcal{H}_B$  のそれぞれの規格化された完全系である．複合系  $A + B$  がこの状態にあるとき，部分系  $B$  をトレースアウトすると次を得る．

$$\rho_A = \text{Tr}_B \left[ \sum_i p_{ij} \rho_{A,i} \otimes \rho_{B,j} \right] = \sum_{ijk} c_{ijkk} |\phi_{A,i}\rangle\langle\phi_{A,j}| \quad (\text{A.53})$$

このようにして得られた  $\rho_A$  は密度演算子となっており，部分系  $A$  の部分密度行列と呼ぶ．

密度行列  $\rho$  の von Neumann エントロピーは次のように定義される.

$$S = -\text{Tr}[\rho \log \rho] \quad (\text{A.54})$$

部分系  $A$  のエンタングルメントエントロピー (EE) (2.1):  $S_A$  は部分密度行列  $\rho_A$  に対する von Neumann エントロピーとなっている. 量子系では密度行列が量子状態の確率分布を与えるので, von Neumann エントロピーは Shannon エントロピーのある種の一般化となっている. 古典情報理論と同様にして複合系  $A+B$  において, 部分系  $A$  と  $B$  の間の相互情報量  $I_{A:B}$  を次のように定義することができる.

$$I_{A:B} = S_A + S_B - S_{A+B} \quad (\text{A.55})$$

また, 三者間相互情報量  $I_{A:B:C}$  も同様に定義される.

$$I_{A:B:C} = S_A + S_B + S_C - S_{A+B} - S_{B+C} - S_{C+A} + S_{A+B+C} \quad (\text{A.56})$$

von Neumann エントロピーが満たす不等式をまとめる. ここで複合系  $A+B+C$  を考えると, 各部分系の EE の間には次の強劣加法性不等式が成り立つ.

$$S_{A+B+C} + S_B \leq S_{A+B} + S_{B+C} \quad (\text{A.57})$$

次の不等式はこの式 (A.57) と等価であり, 同様に強劣加法性不等式と呼ばれる.

$$S_A + S_B \leq S_{A+C} + S_{B+C} \quad (\text{A.58})$$

空集合  $\emptyset$  の von Neumann エントロピーは  $S_\emptyset = 0$  であることに注意して, これらの不等式 (A.57),(A.58) で  $B$  を空集合にしたあと, 適当に記号を書き直すことで次の不等式が得られる.

$$|S_A - S_B| \leq S_{A+B} \leq S_A + S_B \quad (\text{A.59})$$

この式の左辺と中辺の関係を Araki-Lieb 不等式, 中辺と右辺の関係を劣加法性不等式という.

# Appendix B

## CFT

共形場理論 (CFT) で扱う基本的な概念をまとめる。まず、一般次元の CFT においてプライマリー場や量子状態を導入する。その後、 $1+1$  次元 CFT に特有の性質についてまとめる。

### B.1 Conformal symmetry in higher dimension

#### Conformal algebra

$\mathbb{R}^{p,q}$  と局所的に微分同相で、計量テンソル  $g_{\mu\nu}(x)$  が定義された  $d$  次元時空を扱う。ここで局所平坦座標系における計量テンソルの負符号の成分が  $p$  個、正符号の成分が  $q$  個あるとする。<sup>1</sup> 次の変換を Weyl 変換という。

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{B.1})$$

例えば、Polyakov 作用は Weyl 変換に対し不変である。座標変換  $\varphi: x^\mu \mapsto x'^\mu$  による変換後の計量テンソル  $g'_{\mu\nu}(x')$  がもとの計量テンソル  $g_{\mu\nu}(x)$  と Weyl 変換によって結びつく場合、

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{B.2})$$

であり、この座標変換  $\varphi$  を共形変換と呼ぶ。共形変換はベクトルの内積を不変に保つとは限らないが、ベクトル間の角度を不変に保つ。一般座標不変かつ Weyl 不変な理論において、計量を背景場として取り扱おうと共形不変な理論になる。これ以降の議論は断りがなければ計

---

<sup>1</sup>数学の文献でよく見る記法では、正符号の成分が  $p$  個、負符号の成分が  $q$  個あると定義され、不定特殊直交群  $SO(p+1, q+1)$  も対応した回転変換の群であるとされる。この文献ではこれらの符号に関して逆の定義をする。

量は背景場とし、大域的に平坦な  $d$  次元 Euclid 空間  $(p, q) = (0, d)$  もしくは Minkowski 時空  $(p, q) = (1, d-1)$  のみを扱い、 $\eta_{\mu\nu}$  をそれぞれの平坦計量を表すとしてどちらのものかを区別せずに表記する。

共形変換が満たす性質をまとめる。式 (B.2) の両辺の行列式を比較すれば

$$\Omega^d = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right| \quad (\text{B.3})$$

であることが分かる。無限小変換  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$  を考えると、次の共形 Killing 方程式が得られる。

$$\partial_\mu \epsilon_\nu(x) + \partial_\nu \epsilon_\mu(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho(x) \eta_{\mu\nu} \quad (\text{B.4})$$

$d > 2$  のとき、この方程式 (B.4) の一般解は定数  $\lambda$ 、定数ベクトル  $a^\mu, b^\mu$ 、反対称な定数行列  $\omega^\mu{}_\nu$  を用いて次のように書ける。

$$\epsilon^\mu(x) = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + (x^2 b^\mu - 2b_\nu x^\nu x^\mu) \quad (\text{B.5})$$

これらは順に無限小の並進、回転、スケール変換、特殊共形変換を表し、それぞれに対応する生成子は次の通り。

$$\mathcal{P}_\mu = -i\partial_\mu, \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{D} = -ix^\mu \partial_\mu, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{K}_\mu = -i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu) \quad (\text{B.9})$$

本論文では各生成子の相対符号をこのように定義する。すると、これらの演算子の交換関係で非自明なものは次の通り。

$$[\mathcal{D}, \mathcal{P}_\mu] = i\mathcal{P}_\mu, \quad (\text{B.10})$$

$$[\mathcal{D}, \mathcal{K}_\mu] = -i\mathcal{K}_\mu, \quad (\text{B.11})$$

$$[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{K}_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu} \mathcal{D} - \mathcal{M}_{\mu\nu}), \quad (\text{B.12})$$

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{P}_\rho] = i(\eta_{\mu\rho} \mathcal{P}_\nu - \eta_{\nu\rho} \mathcal{P}_\mu), \quad (\text{B.13})$$

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{K}_\rho] = i(\eta_{\mu\rho} \mathcal{K}_\nu - \eta_{\nu\rho} \mathcal{K}_\mu), \quad (\text{B.14})$$

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{M}_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} \mathcal{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} \mathcal{M}_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \mathcal{M}_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} \mathcal{M}_{\mu\rho}) \quad (\text{B.15})$$

このように代数が閉じるので上記の変換の生成子の組を共形代数と呼ぶ。共形代数から導かれる  $\mathbb{R}^{p,q}$  上での共形変換群は  $SO(p+1, q+1)$  に同型なので非コンパクトな単純群である。 $d=2$  の場合は、上記の変換を包含するより広い変換が共形変換に属することを後の節で見る。

## Primary field

場の変換性について見る。共形変換群の既約表現に属する場  $\phi^a(x)$  は次のように変換することがわかる。

$$P_\mu \phi^a(x) = -i\partial_\mu \phi^a(x), \quad (\text{B.16})$$

$$M_{\mu\nu} \phi^a(x) = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi^a(x) + i(S_{\mu\nu})^a_b \phi^b(x), \quad (\text{B.17})$$

$$D \phi^a(x) = -ix^\mu \partial_\mu \phi^a(x) - i\Delta \phi^a(x), \quad (\text{B.18})$$

$$K_\mu \phi^a(x) = -i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu) \phi^a(x) + 2i(\Delta x_\mu - S_{\mu\nu} x^\nu)^a_b \phi^b(x) \quad (\text{B.19})$$

ここで  $S_{\mu\nu}$  は既約行列で、 $\Delta$  は  $\phi^a(x)$  のスケーリング次元と呼ばれる。通常、量子論においてスケーリング次元は実数で下限値をもつ。これらの演算子も式 (B.10) ~ (B.15) と同様の交換関係を満たす。有限の共形変換に対する場の変換性は、系の並進不変性から  $x=0$  における変換性を考えれば十分で、スカラー場  $\phi(x=0)$  の場合、並進とスケール変換のみが非自明である。例えば、有限のスケール変換  $x'^\mu = e^\omega x^\mu$  を考えると、 $\phi'(x'=0) = e^{-\omega\Delta} \phi(x=0)$  で、より一般にスカラー場は次のように変換する。

$$\phi'(x') = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|^{-\frac{\Delta}{d}} \phi(x) \quad (\text{B.20})$$

テンソル場  $T_{\mu_1 \dots \mu_s}(x)$  の変換性は、 $S_{\mu\nu}$  と  $\Delta$  が可換で、 $T_{\mu_1 \dots \mu_s}(x) dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_s}$  がスカラーであることから次のようになる。

$$T'_{\mu_1 \dots \mu_s}(x') = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|^{-\frac{\Delta-s}{d}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial x'^{\mu_s}} T_{\nu_1 \dots \nu_s}(x) \quad (\text{B.21})$$

このような変換性をもつ場を  $d > 2$  のときにはプライマリー場と呼び、 $d=2$  のときには準プライマリー場と呼ぶ。特に、プライマリー場が  $K_\mu \phi^a(x=0) = 0$  という性質をもつことは次に見る状態-演算子対応において重要である。

## Quantum conformal field theory

Minkowski 時空  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  上の共形場理論の量子状態と場の演算子について見る。Weyl 不変性を持ち、(逆) Wick 回転により Lorentzian な理論と Euclidean な理論が等価な場合のみを扱



う. Wick 回転を一度実行したあと Euclid 空間  $\mathbb{R}^{0,d}$  から始める. この Euclid 空間は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 = e^{2\tau_E} (d\tau_E^2 + d\Omega_{d-1}^2) = e^{2i\tau} (-d\tau^2 + d\Omega_{d-1}^2) \quad (\text{B.22})$$

のように Lorentzian なシリンダー  $\mathbb{R} \times S^{d-1}$  と Weyl 変換により移り合う. ここで逆 Wick 回転  $\tau_E \rightarrow i\tau$  をした. したがって, Minkowski 時空  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  上での理論と Lorentzian なシリンダー  $\mathbb{R} \times S^{d-1}$  上での理論は等価になる. そこで共形場理論では Minkowski 時空  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  上の Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  とシリンダー  $\mathbb{R} \times S^{d-1}$  上の Hilbert 空間  $\tilde{\mathcal{H}}$  を同時に扱う. 本論文では諸量がどちらの空間で定義されているかを明確にするために  $\mathbb{R} \times S^d$  に関する量は  $\tilde{\mathcal{H}}$  のようにチルダをつけて区別する.

まず Minkowski 時空上の Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  を考える. この Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  に作用する共形変換の生成演算子  $P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu$  は式 (B.10) ~ (B.15) と同様の交換関係を満たすエルミート演算子である. 真空  $|0\rangle \in \mathcal{H}$  はエネルギー最低状態で,  $P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu$  を作用しても不変であるとする.

$$P_\mu |0\rangle = M_{\mu\nu} |0\rangle = D |0\rangle = K_\mu |0\rangle = 0 \quad (\text{B.23})$$

$\mathcal{H}$  に作用する局所演算子でプライマリー場と同じ変換性を持つものをプライマリー演算子と呼ぶ. すなわち,  $\mathcal{H}$  に作用する局所演算子  $\mathcal{O}(x)$  のうち, これらの生成子によって次の交換関係を満たすものをスケーリング次元  $\Delta$  をもつプライマリー演算子と呼ぶ.

$$[P_\mu, \mathcal{O}(x)] = i\partial_\mu \mathcal{O}(x), \quad (\text{B.24})$$

$$[M_{\mu\nu}, \mathcal{O}(x)] = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \mathcal{O}(x) - iS_{\mu\nu} \mathcal{O}(x), \quad (\text{B.25})$$

$$[D, \mathcal{O}(x)] = ix^\mu \partial_\mu \mathcal{O}(x) + i\Delta \mathcal{O}(x), \quad (\text{B.26})$$

$$[K_\mu, \mathcal{O}(x)] = i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu) \mathcal{O}(x) - 2i(\Delta x_\mu - S_{\mu\nu} x^\nu) \mathcal{O}(x) \quad (\text{B.27})$$

特に, プライマリー演算子は  $[K_\mu, \mathcal{O}(x=0)] = 0$  を満たす. また  $[D, P_\mu] = iP_\mu$  から  $P_\mu$  をプライマリー演算子に作用させるとスケーリング次元が 1 大きい演算子が得られる. このようにして得られる演算子をディセendant演算子という. これらの演算子がシリンダー上の量子状態と一対一対応することをこれから見る.

次にシリンダー上の Hilbert 空間  $\tilde{\mathcal{H}}$  を考える.  $x^\mu = rn^\mu$  として, 並進, スケール変換,

特殊共形変換のそれぞれの生成子 (B.6), (B.8), (B.9) をシリンダー上の座標系で表示すると

$$\tilde{P}_\mu = ie^{-i\tau} \left[ in_\mu \frac{\partial}{\partial \tau} - (\delta_\mu^\nu - n_\mu n^\nu) \frac{\partial}{\partial n^\nu} \right], \quad (\text{B.28})$$

$$\tilde{D} = -\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (\text{B.29})$$

$$\tilde{K}_\mu = -ie^{i\tau} \left[ in_\mu \frac{\partial}{\partial \tau} + (\delta_\mu^\nu - n_\mu n^\nu) \frac{\partial}{\partial n^\nu} \right] \quad (\text{B.30})$$

である。 $\tilde{H}$  に作用する演算子を  $\tilde{P}_\mu, \tilde{M}_{\mu\nu}, \tilde{D}, \tilde{K}_\mu$  などとすると  $i\tilde{D}$  はシリンダー上での時間並進の生成子で、符号に注意して  $\tilde{H} := -i\tilde{D}$  はハミルトニアン演算子となっている。また、(B.28), (B.30) および演算子の交換関係から  $\tilde{P}_\mu^\dagger = \tilde{K}_\mu$  となる。特に、

$$\left[ \tilde{H}, \tilde{P}_\mu \right] = \tilde{P}_\mu, \quad (\text{B.31})$$

$$\left[ \tilde{H}, \tilde{K}_\mu \right] = -\tilde{K}_\mu, \quad (\text{B.32})$$

$$\left[ \tilde{P}_\mu, \tilde{K}_\nu \right] = -2 \left( \eta_{\mu\nu} \tilde{H} + i\tilde{M}_{\mu\nu} \right) \quad (\text{B.33})$$

なので  $\tilde{P}_\mu, \tilde{K}_\mu$  は系のエネルギーを  $\pm 1$  する。そこで  $\tilde{K}_\mu$  によって消える  $\tilde{H}$  の固有状態をプライマリー状態と呼び、プライマリー状態に  $\tilde{P}_\mu$  を作用させて得られる状態をディセリダント状態という。

状態-演算子対応についてまとめる。Minkowski 時空上のプライマリー演算子とシリンダー上のプライマリー状態は一対一対応している。まず、 $\tilde{H}$  における共形不変なエネルギー最低状態を  $|\tilde{0}\rangle$  とする。このとき Minkowski 時空上の局所演算子  $O(x)$  が  $x=0$  にあるとき、シリンダー上の状態  $|\tilde{O}\rangle := \tilde{O}(\tau = -\infty) |\tilde{0}\rangle$  を定義できる。特に、 $O(x)$  がプライマリー演算子なら対応する状態はプライマリー状態で唯一に定まり、その逆も言える。これはディセリダント演算子とディセリダント状態の対応関係を自然に誘導し、まとめて状態-演算子対応という。ここで  $O(x)$  のスケーリング次元が  $\Delta$  のとき、

$$\tilde{H} |\tilde{O}\rangle = -i[D, \mathcal{O}(x=0)] |\tilde{0}\rangle = \Delta |\tilde{O}\rangle, \quad \tilde{K}_\mu |\tilde{O}\rangle = 0 \quad (\text{B.34})$$

となり、対応するプライマリー状態  $|\tilde{O}\rangle$  は固有値  $\Delta$  をもつハミルトニアンの固有状態  $|\tilde{O}\rangle$  で、特殊共形変換で消えることが確かめられる。ここでハミルトニアンはエルミート性から  $\Delta$  は実数であることがわかる。

次に BPZ 共役について述べる。エルミート共役な状態  $\langle \tilde{O} | = \langle \tilde{0} | \tilde{O}^\dagger(\tau = -\infty)$  に関して離散的な共形変換である反転変換  $x^\mu = x^{-2} x^\mu$  を考える。反転変換はシリンダー上で  $\tau' = -\tau$  によって実現され、 $|\partial x'^\mu / \partial x^\nu| = e^{-2di\tau} |\delta_\nu^\mu - n^\mu n_\nu| = e^{-2di\tau}$  である。例えば、スケーリング

次元が  $\Delta$  のスカラープライマリ演算子の場合、 $\tilde{O}'(-\tau) = e^{2i\Delta\tau}\tilde{O}(\tau)$  のように変換する。そこで、 $\langle \tilde{O} | = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \tilde{0} | e^{2i\Delta\tau} \tilde{O}^\dagger(\tau)$  のようにできる。Euclidean なシリンダー上では

$$\langle \tilde{O} | = \lim_{\tau_E \rightarrow \infty} \langle \tilde{0} | e^{2\Delta\tau_E} \tilde{O}^\dagger(\tau_E) \quad (\text{B.35})$$

であり、これを  $|\tilde{O}\rangle$  の BPZ 共役という<sup>2</sup>。

シリンダー上で共形代数のユニタリ表現の構成をする。その準備として  $SU(2)$  のユニタリ表現の構成方法を復習しておくが良い。  $\mathfrak{su}(2)$  代数は

$$[S_z, S_+] = S_+, \quad (\text{B.36})$$

$$[S_z, S_-] = -S_-, \quad (\text{B.37})$$

$$[S_+, S_-] = 2S_z \quad (\text{B.38})$$

である。ここで  $S^2 |s, s_z\rangle = s(s+1) |s, s_z\rangle$  を満たす全角運動量  $S^2 = S_- S_+ + S_z(S_z + 1)$  の固有ベクトルの内、 $S_z |s, s\rangle = s |s, s\rangle$ ,  $S_+ |s, s\rangle = 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$  となる最高ウェイトベクトル  $|s, s\rangle$  の存在を仮定する。 $S_\pm$  は  $S_z$  の固有値を  $\pm 1$  し、 $S_z$  の固有値が  $s - n$  の固有ベクトルを作る。このように作られた規格化をする前のベクトルを  $|s, s - n\rangle$ ,  $n \geq 0$  と書き、これらすべての固有ベクトルによって張られる無限次元の空間  $V_s$  は最高ウェイト  $s$  の Verma 加群となる。ここで、

$$\langle s, s - n | S_- S_+ |s, s - n\rangle = n(2s - n + 1) \langle s, s - n |s, s - n\rangle \langle s, s - n |s, s - n\rangle \quad (\text{B.39})$$

$$\langle s, s - n | S_+ S_- |s, s - n\rangle = (2s - n)(n + 1) \langle s, s - n |s, s - n\rangle \langle s, s - n |s, s - n\rangle \quad (\text{B.40})$$

なので、 $2s - n \geq 0$  でないとノルムが負のベクトルが現れる。 $SU(2)$  のユニタリ表現では  $2s$  が整数となる必要があり、 $|s, s - n\rangle$ ,  $(n > 2s)$  は零ベクトルであるとみなして取り除き、 $|s, s - n\rangle$ ,  $(0 \leq n \leq 2s)$  からなる有限次元で既約な Verma 加群のみを扱う。

共形代数の場合、スケーリング次元が  $\Delta$  のプライマリ状態  $|\Delta\rangle$  に  $\tilde{P}_\mu$  を何度も作用させ、すべてのディセendant状態からなる最低ウェイト  $\Delta$  の Verma 加群  $V_\Delta$  を作る<sup>3</sup>。この Verma 加群は一般に可約である。例えば、エネルギー運動量テンソルに対応する状態  $|\tilde{T}_{\mu\nu}\rangle$  から得られる  $\tilde{P}^\mu |\tilde{T}_{\mu\nu}\rangle$  は保存則からゼロベクトルであるので、既約表現を得るにはこの状態を取り除く必要がある。Verma 加群のユニタリな既約表現を得るには  $\tilde{K}_\mu$  によって消える

<sup>2</sup>Euclidean な理論におけるエルミート共役を取るときには Wick 回転により虚数単位が消えているので注意が必要である。例えば、 $\tilde{O}(\tau_E) = e^{H\tau_E} \tilde{O}(0) e^{H\tau_E}$  のとき  $\tilde{O}^\dagger(\tau_E) = e^{-H\tau_E} \tilde{O}^\dagger(0) e^{H\tau_E}$  である。

<sup>3</sup>これは最低ウェイト状態から Verma 加群を構成することになっている。しかし、共形場理論の文献ではこの最低ウェイト状態を最高ウェイト状態と呼ぶことが慣例になっている。

ディセダント状態として定義される特異ベクトルと、特異ベクトルから生成されるすべてのディセダント状態を取り除く必要がある。このようにして得られたユニタリ表現を使えば、シリンダー上のユニタリ性に関する条件をもとに Minkowski 時空上のユニタリ性に関する条件を与えることができる。例えば、スケーリング次元が  $\Delta$  のスカラープライマリー状態  $|\tilde{O}\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}$  に対し、

$$\langle \tilde{P}_\mu \tilde{O} | \tilde{P}_\nu \tilde{O} \rangle = \langle \tilde{O} | \tilde{K}_\mu \tilde{P}_\nu | \tilde{O} \rangle = - \langle \tilde{O} | 2i \left( \eta_{\mu\nu} \tilde{D} - \tilde{M}_{\mu\nu} \right) | \tilde{O} \rangle = 2\eta_{\mu\nu} \Delta \quad (\text{B.41})$$

であり、ユニタリな場の理論では  $\Delta \geq 0$  となる必要がある。このような制限をユニタリバウンドと呼ぶ<sup>4</sup>。

### Conformal symmetry and correlation function

共形対称性は相関関数の形を強く制限する。例えば、相関関数は次の意味で並進不変である。

$$\langle 0 | [P_\mu, O_1(x_1) \cdots O_n(x_n)] | 0 \rangle = 0 \quad (\text{B.42})$$

ここで  $O_i(x_i)$  は局所演算子の組である。このような相関関数は常にプライマリー演算子の相関関数の組み合わせで表現できるので、以下では  $O_i(x_i)$  はスケーリング次元  $\Delta_i$  をもつスカラープライマリー演算子であるとする。まず一点相関関数について、並進不変性から

$$i \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} \langle 0 | O_1(x_1) | 0 \rangle = 0 \implies \langle 0 | O_1(x_1) | 0 \rangle = \text{const.} \quad (\text{B.43})$$

であり、さらにスケール変換不変性から

$$i \left( x_1^\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \Delta_1 \right) \langle 0 | O_1(x_1) | 0 \rangle = 0 \implies \Delta_1 = 0 \text{ or } \langle 0 | O_1(x_1) | 0 \rangle = 0 \quad (\text{B.44})$$

なので恒等演算子のみが非自明な一点相関関数である。

ここで  $x_{ij} := x_i - x_j$  とすると、同様の議論から並進および回転で不変な一般の相関関数は  $|x_{ij}|$  のみの関数であることが言える。これを踏まえて、二点相関関数を  $g(x_1, x_2)$  と書くことにすると、スケール変換および特殊共形変換不変性から

$$g(x_1, x_2) \propto \frac{\delta_{\Delta_1, \Delta_2}}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \quad (\text{B.45})$$

のように決まり、三点相関関数  $g(x_1, x_2, x_3)$  は

$$g(x_1, x_2, x_3) \propto \frac{1}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_{31}|^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}} \quad (\text{B.46})$$

<sup>4</sup>不定値計量を扱うのは面倒なので Euclidean な理論で考えると良い。スピンを持つ演算子の場合、スケーリング次元に対する下限値はより厳しくなる。

のように共形対称性から完全に決定される．四点以上の相関関数は共形不変性だけからは完全に決定されないが，四点相関関数の場合は次の形にまでは制限される．

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2} x_{34}^{\Delta_3 + \Delta_4}} \left( \frac{x_{24}}{x_{14}} \right)^{\Delta_1 - \Delta_2} \left( \frac{x_{14}}{x_{13}} \right)^{\Delta_3 - \Delta_4} f(u, v) \quad (\text{B.47})$$

ここで  $u = x_{12}x_{34}/x_{13}x_{24}$ ,  $v = x_{14}x_{23}/x_{13}x_{24}$  は交差比と呼ばれる共形不変な量で， $f$  は適当な関数である．特に， $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, u, 1, \infty)$  としたとき，次のように規格化された四点相関関数を  $G_{1234}(u)$  と書くことにすると

$$G_{1234}(u) = \lim_{x_4 \rightarrow \infty} x_4^{2\Delta_4} g(0, u, 1, x_4) = u^{-h_1 - h_2} f(u, v) \quad (\text{B.48})$$

なので，一般の四点相関関数  $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$  を  $G_{1234}(u)$  を用いて次のように書くことができる．

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{x_{34}}{x_{13}x_{14}} \right)^{\Delta_1} \left( \frac{x_{14}x_{34}}{x_{13}x_{24}^2} \right)^{\Delta_2} \left( \frac{x_{14}}{x_{13}x_{34}} \right)^{\Delta_3} \left( \frac{x_{13}}{x_{14}x_{34}} \right)^{\Delta_4} G_{1234}(u) \quad (\text{B.49})$$

これらの多点相関関数に関する性質は， $d$  次元共形変換群を  $d + 2$  次元空間の回転群とみなすと比較的簡単に得ることができる．具体的には，その  $d + 2$  次元空間における不変な相関関数を評価し，もとの空間に射影すればよい．

## B.2 CFT<sub>1+1</sub>

### Primary field

$d = 2$  次元の Minkowski 時空  $\mathbb{R}^{1,1}$  を Wick 回転した Euclid 空間  $\mathbb{R}^2$  を扱う．線素が  $ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2$  である直交座標系  $(x_0, x_1)$  において共形 Killing 方程式 (B.4) は Cauchy–Riemann の方程式になる．

$$\frac{\partial \epsilon^1}{\partial x^1} = \frac{\partial \epsilon^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \epsilon^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial \epsilon^2}{\partial x^1} \quad (\text{B.50})$$

さらに  $z = x^0 + ix^1$ ,  $\bar{z} = x^0 - ix^1$  によって複素座標  $(z, \bar{z})$  に移ると，計量テンソルの非自明な成分は  $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = 1/2$  のみである．この座標系において 2 次元時空における共形変換は正則関数 (holomorphic function)  $f(z)$  によって表現される．

$$z \mapsto z' = f(z), \quad \bar{z} \mapsto \bar{z}' = \overline{f(z)} \quad (\text{B.51})$$

無限小共形変換  $z' = z + \epsilon(z)$  を  $z = 0$  周りで Laurent 展開すると、共形変換の生成子  $l_n$  が定義できる。

$$z \mapsto z' = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n z^{n+1}, \quad l_n = -z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{B.52})$$

これらの生成子は次のような Witt 代数  $\{l_n | n \in \mathbb{Z}\}$  をなす。

$$[l_m, l_n] = (m - n) l_{m+n} \quad (\text{B.53})$$

$l_{-1}, l_0, l_1$  は並進、回転かつスケール変換、特殊共形変換の生成子で共形代数を成す。  $d = 2$  の場合、これらを大域的共形変換と呼び、共形代数の既約表現に属する場を準プライマリー場と呼ぶ。一方で、大域的でない共形変換を局所的共形変換と呼ぶ。Witt 代数の既約表現に属する場の変換性は  $[l_0, l_n] = -n l_n$  と高次元共形場の変換性 (B.16)~(B.19) との類似性に注意すると

$$L_n \phi^a(z, \bar{z}) = z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} \phi^a(z, \bar{z}) + (n+1) h z^n \phi^a(z, \bar{z}), \quad (\text{B.54})$$

$$\bar{L}_n \phi^a(z, \bar{z}) = \bar{z}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \phi^a(z, \bar{z}) + (n+1) \bar{h} \bar{z}^n \phi^a(z, \bar{z}) \quad (\text{B.55})$$

となり、このような場をプライマリー場と呼ぶ。ここで  $h, \bar{h}$  は  $z = 0$  における  $L_0, \bar{L}_0$  の固有値でプライマリー場の共形ウェイトと呼ばれる。これらはスケーリング次元  $\Delta$  およびスピン  $s$  と次の関係がある。

$$\Delta = h + \bar{h}, \quad s = h - \bar{h} \quad (\text{B.56})$$

プライマリー場の有限共形変換に対する変換性は次のように与えられる。

$$\phi'(z', \bar{z}') = \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-h} \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \quad (\text{B.57})$$

## Energy momentum tensor and Weyl anomaly

エネルギー運動量テンソルを定義し、Weyl アノマリーが存在する場合の座標変換性についてまとめる。まず、平坦とは限らない背景場でない一般の計量を  $g_{\mu\nu}$ 、それ以外の場の力学変数を  $X$  として、その一般座標不変な作用  $S[X, g_{\mu\nu}]$  を考える。  $g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\nu} + (\delta g^{\mu\rho}) g_{\rho\nu} = 0$  に注意して、力学変数  $X$  を固定して計量のみを変分する。

$$\delta S[g_{\mu\nu}] := S[X, g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}] - S[X, g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2x \sqrt{g(x)} T_{\mu\nu}(x) \delta g^{\mu\nu}(x) \quad (\text{B.58})$$

ここで  $\mathcal{M}$  は時空全体を表す。このとき、エネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は次のように定義される<sup>5</sup>。

$$T_{\mu\nu}(x) = -\frac{4\pi}{\sqrt{g(x)}} \frac{\delta S[g_{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \quad (\text{B.59})$$

このように定義されたエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は対称テンソル  $T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x)$  であり、また作用  $S[X, g_{\mu\nu}]$  が一般座標変換不変であるならエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は保存則  $\nabla^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$  を満たす。さらに作用  $S[X, g_{\mu\nu}]$  が Weyl 不変であるなら、エネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  はトレースレス  $g^{\mu\nu}(x)T_{\mu\nu}(x) = 0$  である。以上の条件からエネルギー運動量テンソルの四つの成分のうち独立なものは  $T_{zz}$ ,  $T_{\bar{z}\bar{z}}$  の2つである。特に、保存則から

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_{zz} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (\text{B.60})$$

なので  $T(z) := T_{zz}$ ,  $\bar{T}(\bar{z}) := T_{\bar{z}\bar{z}}$  のように正則成分と半正則成分に分かれる。

古典的に Weyl 不変な理論であっても、量子場の理論では Weyl 不変性が破れることがある。量子場の理論において相関関数を計算する際には有効作用や経路積分を用いることになるが、どちらにしても Weyl 不変性が破れ [51, 52],  $d = 2$  次元の理論では次の Weyl アノマリーが存在することになる。

$$g^{\mu\nu}(x) \langle T_{\mu\nu}(x) X \rangle = -\frac{c}{12} R(x) \langle X \rangle \quad (\text{B.61})$$

ここで  $R$  は背景時空の Ricci スカラーである。また  $c$  は無次元のパラメータで、共形場理論の中心電荷と呼ばれる。Weyl アノマリーが存在する場合のエネルギー運動量テンソルの座標変換則について見ておく。 $(w, \bar{w})$  をこれまでの平坦な  $(z, \bar{z})$  から正則関数による座標変換  $w = f^{-1}(z)$  によって得られた複素座標とする。計量テンソルは

$$g_{w\bar{w}} = g_{z\bar{z}} f'(w) \bar{f}'(\bar{w}) = \frac{1}{2} f'(w) \bar{f}'(\bar{w}) \quad (\text{B.62})$$

と変化する。Levi-Civita 接続  $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$  の非自明な成分は二つだけで、一つは

$$\Gamma^w_{ww} = \frac{f''(w)}{f'(w)} =: Pf(w) \quad (\text{B.63})$$

であり、ここで  $Pf(w)$  は  $f(w)$  の pre-Schwarz 微分である。もう一つは  $w$  を  $\bar{w}$  に置き換えたもので、これ以降省略する。次に  $R = 2g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  および  $R_{w\bar{w}} = -\partial_{\bar{w}} Pf(w)$  を用いると、

$$\nabla_w R = \partial_w (4g^{w\bar{w}} R_{w\bar{w}}) = -4g^{w\bar{w}} \partial_{\bar{w}} \left\{ \partial_w Pf(w) - \frac{1}{2} (Pf(w))^2 \right\} =: -4g^{w\bar{w}} \partial_{\bar{w}} Sf(w) \quad (\text{B.64})$$

<sup>5</sup>エネルギー運動量テンソルをこの  $1/2\pi$  倍として定義する流儀もあるので、文献ごとの定義に注意してほしい。それに伴い、エネルギー運動量テンソルの正則部分や Weyl アノマリーの定義も定数倍だけ異なる場合がある。

であり，ここで  $Sf(w)$  は  $f(w)$  の Schwarz 微分である．ここで Weyl アノマリーの関係式 (B.61) およびエネルギー運動量テンソルの保存則  $\nabla^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$  から

$$-\frac{c}{12}\nabla_w R = \partial_w(4g^{w\bar{w}}T_{w\bar{w}}) = 4\nabla^{\bar{w}}T_{\bar{w}w} = -4\nabla^w T_{ww} = -4g^{w\bar{w}}\partial_{\bar{w}}T_{ww} \quad (\text{B.65})$$

式 (B.64) から式 (B.65) を引いたものはゼロベクトルの正則成分であるから，座標系に依らず次の式が成り立つ．

$$g^{w\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\left(T_{ww} + \frac{c}{12}Sf(w)\right) = 0, \quad g^{w\bar{w}}\partial_w\left(T_{\bar{w}\bar{w}} + \frac{c}{12}\bar{S}\bar{f}(\bar{w})\right) = 0 \quad (\text{B.66})$$

正則関数による座標変換を行う限り，成分ごとにこれらの式が成り立つ． $f(w)$  を恒等写像にとり，もともとの座標  $(z, \bar{z})$  で書き直したものと成分を比較すると，

$$g^{w\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\left(T_{ww} + \frac{c}{12}Sf(w)\right) = g^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}}T_{zz} = g^{w\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\left(f'(w)^2 T_{zz}\right) \quad (\text{B.67})$$

なので，次の微分方程式を得る．

$$\partial_{\bar{w}}\left(f'(w)^2 T_{zz} - T_{ww} + \frac{c}{12}Sf(w)\right) = 0 \quad (\text{B.68})$$

$f(w)$  が一次分数変換の場合， $Sf(w) = 0$  であり， $R = 0$  であるから  $f'(w)^2 T_{zz} = T_{ww}$  となる．この条件からこの微分方程式の解が一意に定まる． $Sf(w)$  は特異点を除き正則なので  $T_{ww}$  も特異点を除き正則である．したがって，Weyl アノマリーが存在する場合でもエネルギー運動量テンソルは正則成分と反正則成分に分離できて，共形変換  $z' = f(z)$  に対してエネルギー運動量テンソルの正則成分は次のように変換する．

$$T'(z') = \left(\frac{dz}{dz'}\right)^2 \left(T(z) - \frac{c}{12}Sf(z)\right) \quad (\text{B.69})$$

反正則成分に関しても同様で，この変換則は  $(z, \bar{z})$  および  $(z', \bar{z}')$  が平坦でない一般の場合でも成り立つことを注意しておく．また，無限小共形変換  $z' = z + \epsilon(z)$  に対し，エネルギー運動量テンソルは

$$\delta T := T'(z) - T(z) = \epsilon(z)\partial_z T + 2(\partial_z \epsilon(z))T + \frac{c}{12}\partial_z^3 \epsilon(z) \quad (\text{B.70})$$

のように変換する．したがって，エネルギー運動量テンソルは準プライマリー演算子であるがプライマリー演算子でない．



## Correlation function and Ward identity

エネルギー運動量テンソルと Virasoro 演算子の関係を与え、Weyl アノマリーの大きさ  $c$  と Virasoro 代数の中心電荷との関係を与え、最後に BPZ 方程式 (B.98) を導く。

エネルギー運動量テンソルが無小共形変換の生成子であることをみるために Ward 恒等式を導く。  $\phi$  を理論の基本的な力学変数とし、それによって作られる  $N$  個のプライマリー場  $\Phi_i$  の相関関数を考える。

$$\left\langle \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle := \int D\phi \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) e^{-S[\phi]} \quad (\text{B.71})$$

経路積分測度  $D\phi$  の共形不変性を仮定し、共形変換とは限らない無限小微分同相変換  $z' = z + \epsilon(z, \bar{z})$  をする。このとき  $\delta g^{zz} = -4\partial_z \epsilon(z, \bar{z})$ ,  $\delta g^{\bar{z}\bar{z}} = -4\partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon}(z, \bar{z})$  であり、 $\phi$  の変換を  $\phi'(z') = \phi(z) + \delta\phi(z)$  と書く。このとき、計量を固定して力学変数のみを変分した作用を  $\delta S[\phi]$  と書くと、微分同相不変性  $\delta S[\phi] + \delta S[g_{\mu\nu}] = 0$  に注意して、式 (B.58) から次の関係を得る。

$$\delta S[\phi] = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2x \left( T(z) \partial_{\bar{z}} \epsilon(z, \bar{z}) + \bar{T}(\bar{z}) \partial_z \bar{\epsilon}(z, \bar{z}) \right) \quad (\text{B.72})$$

したがって、次の Ward 恒等式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta\Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \cdots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2x \left\langle \left( T(z) \partial_{\bar{z}} \epsilon(z, \bar{z}) + T(\bar{z}) \partial_z \bar{\epsilon}(z, \bar{z}) \right) \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

ここで  $\epsilon$  が時空全体で正則関数となる大域的無限小共形変換の場合を考えると、 $\mathcal{M}$  全域で  $\partial_{\bar{z}} \epsilon(z) = \partial_z \bar{\epsilon}(\bar{z}) = 0$  なので相関関数は変化しない。

$$\sum_{i=1}^n \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta\Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \cdots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = 0 \quad (\text{B.74})$$

次に大域的とは限らない無限小共形変換を考える。  $\Omega$  をすべての  $z_i$  を含む領域とし、  $\epsilon(z, z')$  を  $\Omega$  上で正則関数とすると Stokes の定理によって次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta\Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \cdots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle \\ & = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{C_{z=z_i}} dz \frac{\epsilon(z)}{2\pi i} \left\langle T(z) \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle - \int_{C_{z=\bar{z}_i}} d\bar{z} \frac{\bar{\epsilon}(\bar{z})}{2\pi i} \left\langle \bar{T}(\bar{z}) \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

ここで  $C_{z=z_i}$  はそれぞれの  $z_i$  のみを左回りに囲む ( $\bar{z}_i$  のみを右回りに囲む) 十分小さい経路で,  $-\partial\Omega$  から積分経路の変更により作られる. 特に,  $\Phi_i$  がすべてプライマリー演算子の場合, その変換則を代入すると次の関係が得られる.

$$\left\langle T(z) \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{h_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right] \left\langle \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle \quad (\text{B.76})$$

ここで,  $h_i$  は各プライマリー演算子の共形ウェイトである. また, 式 (B.75) に大域的共形変換  $\epsilon(z) = \epsilon_{-1} + \epsilon_0 z + \epsilon_1 z^2$  を代入すると, 式 (B.74) との整合性から, 任意の  $\epsilon_{-1,0,1}$  に対して留数の和が相殺する必要がある. この条件から  $c_{z_i} = -\partial_{z_i} \log \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle$  に関して次の三つの関係式が得られる.

$$\sum_{i=1}^N c_{z_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^N c_{z_i} z_i - \sum_{i=1}^N h_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N c_{z_i} z_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N h_i z_i = 0 \quad (\text{B.77})$$

したがって, 三点相関関数までは大域的共形変換によって完全に決定される. これは前節 B.1 の最後で議論した相関関数の性質と整合的である.

次に, エネルギー運動量テンソルと Virasoro 演算子の関係を与えるために, エネルギー運動量テンソルを2つ含む関係式を考える. もう一度変分を行うと次の関係が得られる.

$$\begin{aligned} \langle (\delta T)(z_0) X(z_1, \dots, z_n) \rangle + \langle T(z_0) \delta X(z_1, \dots, z_n) \rangle \\ + \sum_{i=0}^n \int_{C_i} dz \frac{\epsilon(z)}{2\pi i} \langle T(z) T(z_0) X(z_1, \dots, z_n) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

ここで  $X$  は他のプライマリー演算子をまとめたもので, 反正則部分については省略した. 式 (B.70) とこの式から  $T(z)T(w)$  の極は次のようになる.

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \frac{\partial}{\partial w} T(w) + (\text{regular terms}) \quad (\text{B.79})$$

エネルギー運動量テンソルを二つ以上含む場合, 平坦な時空においても Weyl アノマリーの影響が現れる. 以上の Ward 恒等式の議論から

$$Q(\epsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{z=0}} dz \epsilon(z) T(z) \quad (\text{B.80})$$

として定義される演算子  $Q(\epsilon)$  は  $[Q(\epsilon), \Phi(z)] = -\delta\Phi(z)$  を満たし, 無限小共形変換  $z' = z + \epsilon(z)$  の生成演算子となっている. 特に,  $\epsilon(z) = -z^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  としたときの生成子を

$$L_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{z=0}} dz z^{n+1} T(z) \quad (\text{B.81})$$

と書くと,  $L_n$  は Virasoro 代数を満たす演算子となっている. Virasoro 代数  $\{\mathcal{L}_n | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$  は Witt 代数  $\{\ell_n | n \in \mathbb{Z}\}$  の中心拡大であり, その代数は次のように与えられる.

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] = (m - n)\mathcal{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m+1)(m-1)\delta_{m+n,0} \quad (\text{B.82})$$

$$[\mathcal{L}_m, c] = [c, c] = 0 \quad (\text{B.83})$$

最後に, ディセンダント演算子を挿入した相関関数について見る.  $\phi$  を共形ウェイト  $h$  のプライマリー演算子としてディセンダント演算子  $L_{-n}\phi$  を考える.

$$L_{-n}\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{w=z}} dw (w - z)^{-n+1} T(w)\phi(z) \quad (\text{B.84})$$

すると,  $\Phi_i$  をウェイト  $h_i$  のプライマリー場として, 積分経路を適当に取り直せば次の関係を得る.

$$\left\langle L_{-n}\phi(z) \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(n-1)h_i}{(z_i - z)^n} - \frac{1}{(z_i - z)^{n-1}} \frac{\partial}{\partial z_i} \right] \left\langle \phi(z) \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle \quad (\text{B.85})$$

$n = 1$  の場合には積分経路を変更せずに次の関係が得られる.

$$\left\langle L_{-1}\phi(z) \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial z} \left\langle \phi(z) \prod_{i=1}^N \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle \quad (\text{B.86})$$

## BPZ equation

Virasoro 代数の表現を構成し, 特異ベクトルの存在条件を与え, BPZ 方程式を導く. まず,  $L_0$  はシリンダー上の対称性変換の生成子なので, シリンダー上の Hilbert 空間  $\tilde{\mathcal{H}}$  に作用する演算子  $L_0$  は Hermite 演算子である. また,

$$[L_0, L_n] = -nL_n \quad (\text{B.87})$$

なので  $L_{n>0}$  は  $L_0$  の固有値を  $n$  下降させる演算子であり,  $L_{n<0}$  は  $L_0$  の固有値を  $n$  上昇させる演算子になっている. そこで高次元の共形場の場合と同様, シリンダー上の Hilbert 空間  $\tilde{\mathcal{H}}$  で

$$L_0 |c, h\rangle = h |c, h\rangle, \quad (\text{B.88})$$

$$\forall L_{n>0} |c, h\rangle = 0, \quad (\text{B.89})$$

となるウェイトが  $h$  の最低ウェイト状態  $|c, h\rangle$  を考える. ウェイト  $h$  の Verma module  $V(c, h)$  の元は  $L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots|c, h\rangle$  のように表され,  $N = n_1 + n_2 + \cdots$ , ( $n_i > 0$ ) をレベルという.

レベル 0 の状態をプライマリー状態, レベル 1 以上の状態をディセendant状態という.  $|\tilde{0}\rangle$  を  $\forall L_{n \geq -1} |\tilde{0}\rangle = 0$  となる真空として, プライマリー場とプライマリー演算子の間に

$$|\tilde{O}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \tilde{O}(z, \bar{z}) |\tilde{0}\rangle, \quad (\text{B.90})$$

$$\langle \tilde{O} | = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} \langle \tilde{0} | z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}} \tilde{O}^\dagger(z, \bar{z}) \quad (\text{B.91})$$

が成り立ち, 状態-演算子対応も成り立つ.  $L_0$  の Hermite 性と Virasoro 代数の交換関係から  $L_n^\dagger = L_{-n}$  となり,  $L_{-n_1} L_{-n_2} \cdots |c, h\rangle$  の Hermite 共役は  $\langle c, h | \cdots L_{n_2} L_{n_1}$  となる.

CFT<sub>1+1</sub> において, 特異ベクトルは  $\forall L_{n>0} |\chi\rangle = 0$  となるディセendant状態  $|\chi\rangle$  である. この定義から特異ベクトルは任意の Verma module  $V(c, h)$  の元と直交することがわかる. 例として, レベル 2 の特異ベクトルが存在する条件について見る. レベル 2 の空間は  $L_{-2} |c, h\rangle, L_{-1}^2 |c, h\rangle$  によって張られるので, 特異ベクトルが存在すると次の Kac 行列式が 0 になる.

$$\det \mathcal{M}_2(c, h) = \det \begin{pmatrix} \langle c, h | L_1^2 L_{-1}^2 |c, h\rangle & \langle c, h | L_1^2 L_{-2} |c, h\rangle \\ \langle c, h | L_2 L_{-1}^2 |c, h\rangle & \langle c, h | L_2 L_{-2} |c, h\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.92})$$

Virasoro 代数の交換関係から Kac 行列式は次のように計算できる.

$$\det \mathcal{M}_2(c, h) = \det \begin{pmatrix} 4h(2h+1) & 6h \\ 6h & 4h + \frac{1}{2}c \end{pmatrix} \quad (\text{B.93})$$

この行列式が消えることから特異ベクトルが存在するための  $c$  と  $h$  の関係が決まる.

$$4h \left\{ 8h^2 + (c-5)h + \frac{1}{2}c \right\} = 0 \quad (\text{B.94})$$

したがって, 次の共形ウェイト  $h_\chi$  を持つプライマリー状態が存在するならレベル 2 の特異ベクトルが存在する.

$$h_\chi = 0, \frac{1}{16} \left( 5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)} \right) \quad (\text{B.95})$$

特に,  $h_\chi \neq 0$  のとき特異ベクトル  $|\chi\rangle$  は次のように表現できる.

$$|\chi\rangle = \left\{ L_{-2} - \frac{3}{2(2h_\chi + 1)} L_{-1}^2 \right\} |c, h_\chi\rangle \quad (\text{B.96})$$

この特異ベクトルの存在は Minkowski 空間上の Hilbert 空間  $\tilde{H}$  上の相関関数に微分方程式による制限を与える. 状態  $|\chi\rangle, |c, h_\chi\rangle$  に対応する演算子を  $\chi, \phi_\chi$  とすると演算子として次の関係を得る.

$$\chi(z) = \left[ \left\{ L_{-2} - \frac{3}{2(2h_\chi + 1)} L_{-1}^2 \right\} \phi_\chi \right] (z) \quad (\text{B.97})$$

式 (B.84) および (B.86) から次の微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \chi(z) \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \cdots \phi_n(z_n) \rangle \\
&= \left[ \frac{3}{2(2h_\chi + 1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right\} \right] \langle \phi_\chi(z) \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \cdots \phi_n(z_n) \rangle \quad (\text{B.98})
\end{aligned}$$

ここで,  $\phi_i$  は共形ウェイト  $h_i$  のプライマリー演算子である. この微分方程式を BPZ 方程式という.

## B.3 Liouville CFT

### Massless free scalar

Liouville CFT について議論する前に, 作用が次のように与えられる Euclidean 無質量自由スカラー場について見る.

$$S[\phi] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x \sqrt{g(x)} g^{\mu\nu}(x) \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) \quad (\text{B.99})$$

ここで  $\alpha'$  は適当な定数で,  $\phi(x)$  の二点相関関数は次のように与えられる.

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \left( -\frac{\Delta}{2\pi\alpha'} \right)^{-1} \delta^2(x - y) \quad (\text{B.100})$$

平坦な複素座標系  $(z, \bar{z})$  に移ると, この式の右辺は式 (A.13) から与えられ,  $\phi(x)$  の二点相関関数は次のようになる.

$$\langle \phi(z, \bar{z}) \phi(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \log |z - w|^2 \quad (\text{B.101})$$

そこで, スカラー場が  $\phi(z, \bar{z}) = \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})$  のように正則部分と反正則部分に分解できると仮定すると, この二点相関関数 (B.101) は正則部分と反正則部分に分離できる.

$$\langle \phi(z) \phi(w) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \log(z - w), \quad \langle \bar{\phi}(\bar{z}) \bar{\phi}(\bar{w}) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \log(\bar{z} - \bar{w}) \quad (\text{B.102})$$

プライマリー場の二点相関関数は式 (B.45) のように振る舞うのでスカラー場はプライマリー場ではない. この二点相関関数 (B.102) を微分することで  $\partial\phi(z)$  を含む二点相関関数が次のようになることがわかる.

$$\langle \phi(z) \partial\phi(w) \rangle = \frac{\alpha'}{2} (z - w)^{-1}, \quad \langle \partial\phi(z) \partial\phi(w) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} (z - w)^{-2} \quad (\text{B.103})$$

自由場の積は Wick の定理を用いることで二点相関関数と正規積の和に分解できる。例えば、二つのスカラー場の積  $\phi(z)\phi(w)$  は次のように書ける。

$$\phi(z)\phi(w) =: \phi(z)\phi(w) : + \langle \phi(z)\phi(w) \rangle \quad (\text{B.104})$$

ここで  $: \phi(z)\phi(z) :$  は正規積を表す。

古典的なエネルギー運動量テンソル (B.58) およびその正則成分  $T(z) = T_{zz}$  は次のように与えられる。

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\alpha'} \left( \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi \right) \quad (\text{B.105})$$

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} (\partial\phi(z))^2 \quad (\text{B.106})$$

量子論において同一点での演算子の積は発散するので、この代わりに正規積を用いて  $T(z)$  を次のように定義する。

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial\phi(z)\partial\phi(z) : = \lim_{w \rightarrow z} \left( -\frac{1}{\alpha'} \partial\phi(z)\partial\phi(w) + \frac{1}{2(z-w)^2} \right) \quad (\text{B.107})$$

さらに、Wick の定理を用いることで場の積について次の関係を得る。

$$T(z)\partial\phi(w) = -\frac{2}{\alpha'} \langle \partial\phi(z)\phi(w) \rangle \partial\phi(z) + (\text{regular terms}) \simeq \frac{\partial\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\partial\phi(w)}{z-w} \quad (\text{B.108})$$

この節では  $\simeq$  は両辺の特異な項が等しいことを表す。さらに、 $T$  同士の積からこの理論の中心電荷が  $c = 1$  であることがわかる。

$$T(z)T(w) \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \quad (\text{B.109})$$

以上の演算子積の性質は正準量子化によって正準交換関係から導くこともできる。

頂点演算子  $V_p(z) = : \exp(2p\phi(z)) :$  は Liouville CFT において重要なプライマリー演算子であり、本論文においてはツイスト演算子の役割を果たす。頂点演算子を含む演算子積について見るために、 $n \geq 1$  に対して次が成り立つことに注意すると良い。

$$\partial\phi(z) : \phi(w)^n : \simeq n \langle \partial\phi(z)\phi(w) \rangle : \phi(w)^{n-1} : \quad (\text{B.110})$$

したがって、次の関係を得る。

$$\partial\phi(z)V_p(w) \simeq -\frac{n\alpha'}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-w} \frac{(2p)^n}{n!} : \phi(w)^{n-1} : = -\frac{\alpha' p V_p(w)}{z-w} \quad (\text{B.111})$$

$T(z)$  との演算子積から  $V_p(w)$  の共形ウェイトが  $h = -\alpha' p^2/4, \bar{h} = 0$  であることがわかる。

$$T(z)V_p(w) \simeq -\frac{\alpha' p^2}{(z-w)^2} V(w) + \frac{\partial V(w)}{z-w} \quad (\text{B.112})$$

## Linear dilaton model

次の線形ディラトン模型を考える。

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x \sqrt{g} [(\partial\phi)^2 + QR\phi] \quad (\text{B.113})$$

共形変換  $z' = z'(z)$  を行うと, Ricci スカラーの変換は式 (A.12) から次のようになる。

$$R'(z', \bar{z}') = R(z, \bar{z}) - 2g^{z\bar{z}} \partial_z \partial_{\bar{z}} \left( \log \frac{dz}{dz'} + \log \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} \right) \quad (\text{B.114})$$

したがって, 座標変換後の作用 (B.113) は次のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x' \sqrt{g'} \left[ (\partial'\phi)^2 + QR'\phi + \phi \square' \log \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x' \sqrt{g'} \left[ (\partial'\phi)^2 + QR'\phi - Qg'^{\mu\nu} \nabla'_\mu \log \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 \nabla'_\nu \phi \right] \end{aligned} \quad (\text{B.115})$$

もし  $Q = 0$  であれば, ディラトン場  $\phi$  の変換則は  $\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z})$  となるべきなので, 共形変換に対するディラトン場  $\phi$  の変換則を  $\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}) - Qf(z', \bar{z})$  と仮定する。このとき, 作用 (B.113) は次のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x' \sqrt{g'} \left[ (\partial'\phi')^2 + QR'\phi' \right. \\ &\quad \left. + 2g'^{z'\bar{z}'} \{ Q\partial' \phi' \bar{\partial}' f + Q\partial_{z'} \phi' \partial_{\bar{z}'} f + Q^2 \partial_{z'} f \partial_{\bar{z}'} f \} \right. \\ &\quad \left. - g'^{z'\bar{z}'} \left\{ Q\partial_{z'} \phi \partial_{\bar{z}'} \log \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 + Q^2 \partial_{z'} f \partial_{\bar{z}'} \log \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 + (z' \leftrightarrow \bar{z}') \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.116})$$

したがって, 作用 (B.113) の共形不変性を仮定するとディラトン場  $\phi$  の変換則は次のようになり, ディラトン場  $\phi$  はプライマリー場ではない。

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}) - \frac{1}{2} Q \log \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 \quad (\text{B.117})$$

$R = 0$  となる平坦な複素座標系をとれば, ディラトン場の二点相関関数は式 (B.101) と同じである。しかし, この座標系においてもエネルギー運動量テンソルは次のように変更を受ける。

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial\phi(z)\partial\phi(z) : + \frac{Q}{\alpha'} \partial^2\phi(z) \quad (\text{B.118})$$

エネルギー運動量テンソル同士の演算子積は次のようになり, 中心電荷は  $c = 1 + 6\alpha'^{-1}Q^2$  である。

$$T(z)T(w) \simeq \frac{1 + 6\alpha'^{-1}Q^2}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \quad (\text{B.119})$$

また、頂点演算子の共形ウェイトは  $h = p(Q - \alpha'p)$ ,  $\bar{h} = 0$  であることが次の式からわかる。

$$T(z)V_p(z) \simeq \frac{p(Q - \alpha'p)}{(z-w)^2}V(w) + \frac{\partial V(w)}{z-w} \quad (\text{B.120})$$

したがって、頂点演算子のパラメタ  $p$  を適当に選ぶことで任意の複素数値をもつ共形ウェイトの場を作ることができる。例えば、この理論において共形ウェイトが  $(h, \bar{h}) = (1, 0)$  の演算子は  $p = (Q \pm \sqrt{Q^2 - 4\alpha'})/(2\alpha')$  とすることで構築できる。 $\alpha = 1$  のときは  $Q$  を次のように書き直すと見通しが良い。

$$p = b, \quad Q = b + b^{-1}, \quad 0 < b < 1 \quad (\text{B.121})$$

反正則な頂点演算子を含めて共形ウェイトが  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$  の場を相互作用項として加えた理論が Liouville CFT である。

## Liouville CFT

Liouville CFT の作用は次のように与えられる。

$$S_L = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} [(\partial\phi)^2 + QR\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}] \quad (\text{B.122})$$

ここで、 $Q = b + b^{-1}$  である。共形変換  $z' = z'(z)$  に対する Liouville 場  $\phi$  の変換則は次の通りである。

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}) - \frac{1}{2}Q \log \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 \quad (\text{B.123})$$

シリンダー上で正準量子化を行うなどにより各演算子積を計算することができる。すると中心電荷は  $c = 1 + 6Q^2$  であり、頂点演算子  $V_p(w)$  の共形ウェイトは  $h = p(Q - p)$ ,  $\bar{h} = 0$  となって、線形 dilaton 模型の場合と同じになる。Liouville CFT では作用 (B.122) に現れる計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  をレファレンス計量と呼び、 $\gamma_{\mu\nu}(x) = \exp[2\phi(x)/Q] g_{\mu\nu}(x)$  を物理的な計量という。

Liouville CFT の半古典極限である  $b \sim 0$  を考える。このとき Liouville 場を  $\phi_c = 2b\phi$  とすると作用 (B.122) は次のようになる。

$$S_L = \frac{1}{16\pi b^2} \int d^2x \sqrt{g} [(\partial\phi_c)^2 + 2(1 + b^2)R\phi_c + 16\pi b^2 \mu e^{\phi_c}] \quad (\text{B.124})$$

このとき運動方程式は次のようになる。

$$\partial\bar{\partial}\phi_c = \frac{1}{2}(1 + b^2)R + 2\pi b^2 \mu e^{\phi_c} \quad (\text{B.125})$$



この運動方程式は平坦な座標系では次の古典的な Liouville 方程式に帰着する。

$$\partial\bar{\partial}\phi_c = 2\pi b^2 \mu e^{\phi_c} \quad (\text{B.126})$$

ここで、 $\lambda := \pi b^2 \mu$  を定数に保ちながら  $b \rightarrow 0$  とすると  $\phi_c$  は非自明な極限をもつことになる。頂点演算子  $V_p(z)$  に関して、 $p = \eta/b$  である頂点演算子を重いプライマリー場、 $p = b\sigma$  である頂点演算子を軽いプライマリー場という。重いプライマリー場の相関関数は次のようになる。

$$\langle V_{\eta_1/b}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\eta_n/b}(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \int \mathcal{D}\phi_c e^{-S_L} \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\eta_i \phi_c(z_i, \bar{z}_i)}{b^2}\right) \quad (\text{B.127})$$

$b \sim 0$  なので、この相関関数を鞍点近似によって評価すると、 $\phi_c$  の運動方程式は次のように変更を受ける。

$$\partial\bar{\partial}\phi_c = 2\lambda e^{\phi_c} - 2\pi \sum \eta_i \delta^2(z - z_i, \bar{z} - \bar{z}_i) \quad (\text{B.128})$$

この方程式とその解は  $z \sim z_i$  において次のように振る舞うことが期待される。

$$\partial\bar{\partial}\phi_c = -2\pi\eta_i \delta^2(z - z_i, \bar{z} - \bar{z}_i) \implies \phi_c = -4\eta_i \log|z - z_i| + \text{const.} \quad (\text{B.129})$$

ここで、 $\delta^2(z - z_i, \bar{z} - \bar{z}_i) \sim |z - z_i|^{-2}$  と見なすと、 $z \sim z_i$  において運動方程式中のデルタ関数の項が指数関数の項  $e^{\phi_c}$  よりも卓越するには  $-4\text{Re}(\eta_i) \geq -2$  となる必要がある。したがって、この解が有効である  $\eta_i$  の実部の上限値は次の通りである。

$$\text{Re}(\eta_i) \leq \frac{1}{2} \quad (\text{B.130})$$

これを Seiberg バウンドという。すると、 $z \sim z_i$  において物理的な計量  $\gamma_{\mu\nu} = \exp(\phi_c)g_{\mu\nu}$  は次のように振る舞う。

$$ds^2 = \frac{1}{r^{4\eta_i}} (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad z - z_i = r e^{i\theta} \quad (\text{B.131})$$

座標変換  $\tilde{r} = (1 - 2\eta_i)^{-1} r^{1-2\eta_i}$ ,  $\tilde{\theta} = (1 - 2\eta_i)^{-1} \theta$  をするとこの線素は

$$ds^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\theta}^2 \quad (\text{B.132})$$

となって、 $\tilde{\theta} \in [0, (1 - 2\eta_i)2\pi]$  となり、物理的な計量を与える座標系からは頂点演算子の挿入点に欠損角が  $4\pi\eta_i$  の円錐特異点が存在しているように見える。

# Appendix C

## Asymptotically AdS spacetime

この付録では、まず、AdS 時空の構造を確認する。次に、半古典極限において負の宇宙項をもつ Einstein-Hilbert 作用を正則化すると Liouville CFT の作用が得られることを見る。その後、BTZ 時空における空間的測地線を与える。

### C.1 Geometry of AdS<sub>3</sub>

#### AdS spacetime

$d + 1$  次元 AdS 時空  $\text{AdS}_{d+1}$  は、計量  $\eta = \text{diag}(-1, -1, +1, \dots, +1)$  をもつ  $d + 2$  次元の空間  $\mathbb{R}^{d,2}$  に埋め込める。具体的には、この空間の線素が  $ds^2 = \eta_{MN} dX^M dX^N$  となる座標系  $(X^{-1}, X^0, X^1, \dots, X^d)$  において、 $\text{AdS}_{d+1}$  は次の超曲面として埋め込まれる。

$$\eta_{MN} X^M X^N = -L^2 \tag{C.1}$$

ここで、 $L$  は AdS 半径と呼ばれる。これからすぐに AdS 時空の対称性は  $O(2, d)$  であるとわかる。

AdS 時空を記述するためによく使用される座標系を紹介する。 $\tau \in [0, 2\pi)$ ,  $\rho \in \mathbb{R}^+$  および  $\Omega_i$  を  $d - 1$  次元球面  $S^{d-1}$  上の座標として、

$$\begin{aligned} X^{-1} &= L \cosh \rho \sin \tau \\ X^0 &= L \cosh \rho \cos \tau \\ X^i &= L \sinh \rho \Omega_i \end{aligned} \tag{C.2}$$

を考えると、この座標系は  $\text{AdS}_{d+1}$  全体を張り、その線素は次のようになる。

$$ds^2 = L^2 \left( -\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_i^2 \right) \quad (\text{C.3})$$

ここで、 $\tan \theta = \sinh \rho$ ,  $\theta \in [0, \pi/2)$  とすると次のようにコンパクト化できる。

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \theta} \left( -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_i^2 \right) \quad (\text{C.4})$$

ここで  $\theta = \pi/2$  を  $\text{AdS}_{d+1}$  の共形境界、もしくは  $\text{AdS}$  境界という。  $\text{AdS}$  境界の定義から、適当な共形変換で移り合う  $\text{AdS}$  境界は同一視される。

次に、 $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x^i \in \mathbb{R}$  として、次の変換を行う。

$$\begin{aligned} X^{-1} &= \frac{rt}{L} \\ X^0 &= \frac{L^2}{2r} \left( 1 + \frac{r^2}{L^4} (\bar{x}^2 - t^2 + L^2) \right) \\ X^i &= \frac{rx^i}{L}, \quad (i = 1, \dots, d-1) \\ X^d &= \frac{L^2}{2r} \left( 1 + \frac{r^2}{L^4} (\bar{x}^2 - t^2 - L^2) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

この座標系は  $r$  座標系と呼ばれ、これによって張られる部分は Poincaré パッチと呼ばれる。 Poincaré パッチは  $\text{AdS}$  時空全体のうち図 C.1 の黄色く塗りつぶされた部分のみを覆い、その線素は次で与えられる。

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\bar{x}^2) \quad (\text{C.6})$$

あるいは、 $z = L^2/r$  や  $\rho = z^2$  とした座標系を使うことが多い。

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 - dt^2 + d\bar{x}^2) = L^2 \left( \frac{d\rho^2}{4\rho^2} + \frac{1}{\rho} (-dt^2 + d\bar{x}^2) \right) \quad (\text{C.7})$$

特に、前者の座標系は  $z$  座標系と呼ばれ、後者の座標系は Fefferman-Graham 座標系の特別な場合である。

漸近  $\text{AdS}$  な  $2+1$  次元のブラックホール時空として BTZ 時空 [53] が知られている。その線素は次のように与えられる。

$$ds^2 = - \left( \frac{r^2}{L^2} - M \right) dt^2 + \left( \frac{r^2}{L^2} - M \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (\text{C.8})$$

各座標は  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in [\sqrt{ML}, \infty]$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  をとる。また、 $\text{AdS}$  時空における Poincaré パッチに対応する平坦な BTZ 時空は次のように与えられる。

$$ds^2 = - \left( \frac{r^2}{L^2} - M \right) dt^2 + \left( \frac{r^2}{L^2} - M \right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} dx^2 \quad (\text{C.9})$$

各座標は  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in [\sqrt{ML}, \infty]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  をとる。

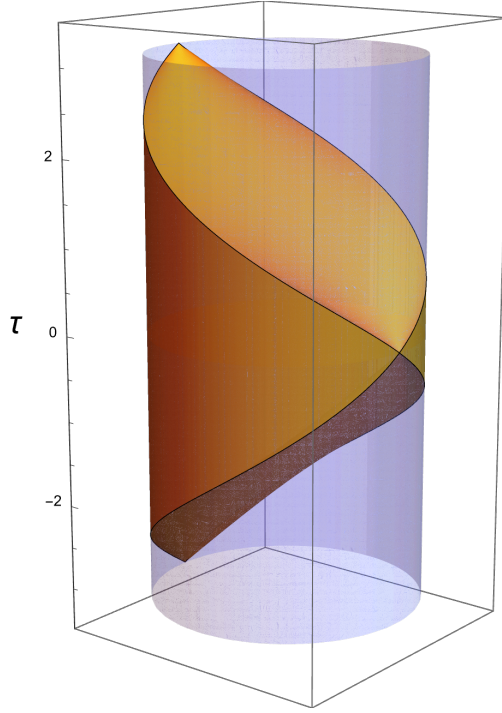


Figure C.1: Poincaré パッチを大域的な座標に埋め込んだ図. 青く塗りつぶされた円柱部分が AdS 時空全体であるとする、黄色く塗りつぶされた部分が Poincaré パッチに対応する. この図は AdS 時空をコンパクト化して描画しており, AdS 境界は円柱の表面に対応する.

### AdS/CFT correspondence

AdS/CFT 対応とは,  $d+1$  次元 CFT と  $d+2$  次元漸近 AdS な重力理論の等価性である. 本論文では半古典極限における二次元 CFT に興味があるので, 主にその場合について述べる. また, これ以降それぞれの系に属する物理量などを単に CFT 側, AdS 側の物理量などという.

AdS/CFT 対応の詳細を述べるにあたって, 漸近 AdS 時空中の古典場が AdS 境界近傍でどのように振る舞うかを見ておくとよい. 例えば,  $d+1$  次元 Poincaré パッチ  $\mathcal{B}$  背景時空上に定義された次のような作用に従う古典スカラー場を  $\Phi$  考える.

$$I = \int_{\mathcal{B}} d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \Phi(x) \partial_{\nu} \Phi(x) + \frac{1}{2} m^2 \Phi(x)^2 \right] \quad (\text{C.10})$$

座標系 (C.7) において, Klein-Gordon 方程式からスカラー場  $\Phi(x)$  は次のように振る舞う.

$$\Phi(z, t, \vec{x}) = z^{\Delta_-} \phi_0(t, \vec{x}) + z^{\Delta_+} \phi_{(+)}(t, \vec{x}) + \dots \quad (\text{C.11})$$

ここで、 $\Delta_{\pm} = (d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2 L^2})/2$  である。スカラー場  $\Phi(x)$  の振る舞いを決定するにはスカラー場自身の大きさと  $\phi_0(t, \vec{x})$  を与えれば良い。

次に、CFT 側と AdS 側で次のような理論を考える。まず、場の変数が  $\phi$ 、計量テンソルが  $\gamma_{\mu\nu}$ 、作用が  $S_{\text{CFT}}$  によって与えられる CFT が多様体  $\mathcal{M}$  上に定義されているとする。この場が外場  $\mathcal{O}$  に結合しているとき、分配関数  $Z_{\text{CFT}}$  は次のように与えられる。

$$Z_{\text{CFT}} = \left\langle \exp \left[ -S_{\text{CFT}}[\phi, \gamma_{\mu\nu}] - \int_{\mathcal{M}} \phi \mathcal{O} \right] \right\rangle_{\mathcal{M}} \quad (\text{C.12})$$

次に、漸近 AdS な重力理論を考える。多様体  $\mathcal{B}$  上において物質場を  $\Phi$ 、計量テンソルを  $g_{\mu\nu}$  としたとき、その作用を  $S_{\text{AdS}}$  とする。このとき、半古典極限における分配関数  $Z_{\text{AdS}}$  は次のように与えられる。

$$Z_{\text{AdS}} = \exp[-S_{\text{AdS}}[\Phi, g_{\mu\nu}]] \quad (\text{C.13})$$

これらの系に AdS/CFT 対応が存在するとは、次のような分配関数の等価性が成り立つ事を言う [2, 3]。

$$\left\langle \exp \left[ -S_{\text{CFT}}[\phi_{(0)}, \gamma_{\mu\nu}] - \int_{\partial\mathcal{B}} \phi_{(0)} \mathcal{O} \right] \right\rangle_{\partial\mathcal{B}} = \exp[-S_{\text{AdS}}[\Phi, g_{\mu\nu}]] \quad (\text{C.14})$$

ここでそれぞれの理論における物質場は  $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \Phi = \phi_0$  によって関連付けられており、左辺の CFT は漸近 AdS 時空  $\mathcal{B}$  の AdS 境界  $\partial\mathcal{B}$  に定義されている。この等式から AdS 側と CFT 側での理論間の対応関係を与えることができる。

AdS 境界の構造は AdS/CFT 対応において重要である。まず、AdS 時空の大域的な座標 (C.3) において  $r = L \sinh \rho$  とすると、線素は次のように与えられる。

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right) d\tau^2 + \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (\text{C.15})$$

この座標系 (C.15) を用いると  $\text{AdS}_{2+1}$  全体の AdS 境界と BTZ 時空 (C.8) の AdS 境界はどちらも  $r \sim \infty$  によって与えられ、同じ構造をもつ。一方で、2+1 次元の Poincaré パッチ (C.6) と平坦な BTZ 時空 (C.9) との場合も AdS 境界はどちらも  $r \sim \infty$  によって与えられ、同じ構造をもつ。特に、前者の AdS 境界での時間一定面は  $\theta \in [-\pi, \pi]$  によって与えられる円周と同一視され、後者の AdS 境界での時間一定面は無限に長い直線  $x \in \mathbb{R}$  と見なされる。また、各ブラックホール時空では時間方向の周期性が AdS 境界にも誘導されることになる。ここで、円周  $\theta \in [-\pi, \pi]$  と無限に長い直線  $x \in \mathbb{R}$  は同じものであるから、これらには対応関係がある。座標系 (C.15) で AdS 境界を与える  $r$  を  $r = r_{\infty}^G$  とし、座標系 (C.6) のものを  $r = r_{\infty}^P$  と書くことにすると、 $r_{\infty}^G$  と  $r_{\infty}^P$  との関係を与えることができる。両者の座

標系において AdS 境界中の時間一定面  $t = 0$  と  $\tau = 0$  は同一の空間を与えることに注意する。その円周の長さを  $C := \int_{-\infty}^{\infty} dx$  とすると、次の関係が見いだせる。

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} dx = \frac{L}{r_{\infty}^P} \int_{-\infty}^{\infty} dX^1 = \frac{Lr_{\infty}^G}{r_{\infty}^P} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi Lr_{\infty}^G}{r_{\infty}^P} \quad (\text{C.16})$$

AdS/CFT 対応においては AdS 側の赤外カットオフスケールと CFT 側の紫外カットオフスケールが対応している。特に、Poincaré パッチ (C.6) において、CFT 側の紫外カットオフスケールを  $\epsilon$  とすると、AdS 側の赤外カットオフスケールは  $r_{\infty}^P = L^2/\epsilon$  とみなされる。すると、円周上に定義された CFT では  $r_{\infty}^G = LC/(2\pi\epsilon)$  という関係が見いだせる。このような各理論のパラメタ間の対応関係は AdS/CFT 辞書と呼ばれる。他にも、CFT 側の中心電荷  $c$  と、AdS 側の重力定数  $G$  および AdS 半径  $L$  の間には Brown-Henneaux 公式  $2c = 3L/G$  と呼ばれる関係が知られている。

## C.2 Einstein-Hilbert action in AdS<sub>3</sub>

### Effective action and Liouville CFT

漸近 AdS 時空は負の宇宙項をもった重力理論の運動方程式の解である。本論文では large  $c$  極限にある CFT のみを取り扱うので、重力理論としては高階微分項を含まない、Einstein-Hilbert 作用が基本的である。

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} dx^3 \sqrt{-g} (R + 2L^{-2}) \quad (\text{C.17})$$

計量テンソル (C.7) は Einstein 方程式の解であり、 $R = -6L^{-2}$  となる。これらをこの作用 (C.17) に代入すると、

$$S[g] = -\frac{L}{8\pi G} \int dt dx \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (\text{C.18})$$

となって AdS 境界付近で発散するので、この作用を正則化するために重力系に赤外カットオフを導入する必要がある [54, 55, 56]。それに伴い、境界付きの多様体を扱うことになる。そこで、多様体内部で Einstein 方程式が成り立つように、一般共変性を壊さない作用の境界項として Gibbons-Hawking-York 項を導入する。

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} dx^3 \sqrt{-g} (R + 2L^{-2}) + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-\gamma} K \quad (\text{C.19})$$

ここで、 $\gamma$  および  $K$  は  $\partial\mathcal{M}$  上の計量の行列式と外曲率である。

以上の議論は純粋な AdS 時空の例であった。次に、一般の 3 次元時空として次の計量  $(\rho, x^i)$  を考える。

$$ds^2 = L^2 \left( \frac{d\rho^2}{4\rho^2} + \frac{h(\rho, x)_{ij}}{\rho} dx^i dx^j \right) \quad (\text{C.20})$$

この座標系を Fefferman-Graham 座標系と呼ぶ。Weyl テンソルが消えるという条件は次の方程式を与える。

$$R_{ijkl} = h_{ik}h'_{jl} + h_{jl}h'_{ik} - h_{il}h'_{jk} - h_{jk}h'_{il} + \rho (h'_{ik}h'_{jl} - h'_{il}h'_{jk}) \quad (\text{C.21})$$

$$\nabla_i h'_{jk} - \nabla_j h'_{ik} = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$h''_{ij} - \frac{1}{2} (h' h^{-1} h')_{ij} = 0 \quad (\text{C.23})$$

ここで  $h'_{jl}$  などは  $\rho$  微分を表しており、 $\nabla$  は  $h_{ij}$  に付随する共変微分である。いま時空の次元が 3 なので、これらの方程式を解けば十分で、その解は次のように与えられる。

$$h(\rho, x)_{ij} = h_{(0)}(x)_{ij} + h_{(1)}(x)_{ij} \rho + \frac{1}{4} h_{(1)}(x) h_{(0)}^{-1}(x) h_{(1)}(x)_{ij} \rho^2 \quad (\text{C.24})$$

$$h_{(1)ij} = -\frac{1}{2} (R_{(0)} h_{(0)ij} - T_{ij}) \quad (\text{C.25})$$

ここで  $R_{(0)}$  は  $h_{(0)}$  から得られる Ricci スカラーで、 $T_{ij}$  は  $\nabla^i T_{ij} = 0$ ,  $\text{Tr}(h_{(0)}^{-1} T) = R_{(0)}$  を満たすテンソルであれば任意である。このテンソルが Liouville CFT のエネルギー運動量テンソルと見なせることを後で見る。

以下では、多様体の境界が

$$\rho = \exp(2H(t, x)) = \epsilon \exp(2\phi(t, x)) + O(\epsilon^2) \quad (\text{C.26})$$

として与えられ、多様体の内部が  $\rho > \rho(t, x)$  であると仮定する。このとき、 $\epsilon \sim 0$  は重力系の赤外カットオフを与えるスケールであり、CFT 側では紫外カットオフスケールを与えることになる。すると、計量テンソル (C.24) を式 (C.19) に代入した Einstein-Hilbert 作用に対応する部分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\rho \geq e^{2H(x)}} d^3x \sqrt{-g} (R + 2L^{-2}) &= -2L \int_{\rho \geq e^{2H(x)}} d^3x \sqrt{-h} \rho^{-2} \\ &= -2L \int_{\rho \geq e^{2H(x)}} d^3x \sqrt{-h_{(0)}} \left[ \rho^{-2} - \frac{R_{(0)}}{4\rho} + O(\rho^0) \right] \\ &= -2L \int_{\rho = e^{2H(x)}} d^2x \sqrt{-h_{(0)}} \left[ \rho^{-1} + \frac{R_{(0)}}{4} \log \rho + O(\rho) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

ここで一般的な行列の公式  $\det(A_0 + \epsilon A_1) = \det A_0 + \epsilon \text{Tr}(A_0^{-1} A_1) + O(\epsilon^2)$  を使った。一方, Gibbons-Hawking-York 項に関連する量は次のように表される。

$$\sqrt{-\gamma} = L\sqrt{-h_{(0)}} \left( \rho^{-1} + \frac{(\partial H)^2}{2} - \frac{R_{(0)}}{4} + O(\rho) \right) \quad (\text{C.28})$$

$$K = 2 + \rho \left( \square_{(0)} H + \frac{1}{2} R_{(0)} \right) + O(\rho) \quad (\text{C.29})$$

したがって, 式 (C.19) は  $\epsilon^{-1}$  の発散項を持つことになる。この発散項を除去するために次のような一般共変性を壊さない相殺項を導入する。

$$S_{ct} = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-\gamma} \quad (\text{C.30})$$

したがって, 次の重力系の作用を得る。

$$\begin{aligned} S + S_{ct} &= \frac{1}{16\pi G} \left( \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-\gamma} K - 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-\gamma} \right) \\ &= \frac{L}{16\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h_{(0)}} \left[ -HR_{(0)} + (\partial H)^2 + \frac{1}{2} R_{(0)} + 2\square_{(0)} H + O(\rho) \right] \\ &= \frac{L}{16\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h_{(0)}} \left[ -\frac{1}{2} R_{(0)} \log \epsilon + \frac{1}{2} R_{(0)} + 2\square_{(0)} \phi + (\partial\phi)^2 - \phi R_{(0)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

ここで第一, 二項は Euler 標数をあたえるので  $\phi$  の運動方程式に無関係であり, 第三項は全微分項であるため無視できる。したがって,  $\phi$  の作用として次の有効作用を得たことになる。

$$S = \frac{L}{16\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h_{(0)}} \left[ (\partial\phi)^2 - \phi R_{(0)} \right] \quad (\text{C.32})$$

この有効作用は相互作用項のない Liouville CFT である。一見,  $\phi$  は余分な自由度のようにみえるが, 運動方程式が  $\square_{(0)} \phi = -R_{(0)}/2$  であることから補助場となっている。Liouville CFT のエネルギー運動量テンソルは次のように与えられる。

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i \phi \nabla_j \phi + \nabla_i \nabla_j \phi - \frac{1}{2} \left( (\nabla\phi)^2 + 2\square_{(0)} \phi \right) h_{(0)ij} \quad (\text{C.33})$$

運動方程式を用いると, このテンソルが  $\nabla^i T_{ij} = 0$ ,  $\text{Tr}(h_{(0)}^{-1} T) = R_{(0)}$  を満たすので, 式 (C.24) のテンソル  $T_{ij}$  をこのエネルギー運動量テンソルとしてよい。もし,  $T_{ij}$  を  $h_{(0)}$  のみで構成しようとする,  $\phi = -\square_{(0)}^{-1} R_{(0)}/2$  なので非常に非局所的になってしまうことを注意しておく。

このように得られた Liouville CFT の作用の Weyl アノマリーについて見ておく。正則化された部分の有効 Lagrangian 密度  $\mathcal{L}_{ren}$  を次のように定義する。

$$\mathcal{L}_{ren} = \sqrt{-h_{(0)}} \left[ \frac{1}{2} R_{(0)} + 2\square_{(0)} \phi + (\partial\phi)^2 - \phi R_{(0)} \right] \quad (\text{C.34})$$



有効作用 (C.31) は一般座標不変であるから、 $h_{(0)}$  に対して次のような大域的な共形変換を引き起こすような一般座標変換に対しても作用は不変である。

$$h_{(0)}(x) \rightarrow e^{2\delta\sigma} h_{(0)}(x), \quad \epsilon \rightarrow e^{2\delta\sigma} \epsilon \quad (\text{C.35})$$

この変換は AdS 境界上で Weyl 変換を引き起こす。したがって、この変換に対する正規化された有効 Lagrangian 密度  $\mathcal{L}_{ren}$  の変分は対数発散項によって次のように代表される。

$$\delta\mathcal{L}_{ren} = \frac{1}{2} \sqrt{-h_{(0)}} R_{(0)} \delta \log \epsilon = \sqrt{-h_{(0)}} R_{(0)} \delta\sigma \quad (\text{C.36})$$

したがって、Weyl アノマリー  $\delta A_W / (\delta\sigma)$  は次で与えられる。

$$\frac{\delta A_W}{\delta\sigma} = \frac{L}{16\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h_{(0)}} R_{(0)} \quad (\text{C.37})$$

一方で、中心電荷  $c$  を持つ CFT では Weyl アノマリーは次のように与えられる。

$$\frac{\delta A_W}{\delta\sigma} = \frac{c}{24\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h_{(0)}} R_{(0)} \quad (\text{C.38})$$

これらの Euler 標数の整合性から Brown-Henneaux の公式:

$$c = \frac{3L}{2G} \quad (\text{C.39})$$

が得られる。Brown-Henneaux の公式はもともと漸近 AdS 時空において適当な条件によって導出されたが [39], ここでは AdS 側と CFT 側での Euler 数の一致というトポロジカルなレベルでの整合性を保証する関係であることが理解できる。AdS 側の作用が宇宙ひもを含む場合には、最終的に得られる有効作用の項の種類は変わらず、 $R_{(0)}$  に  $\delta$  関数の寄与が含まれるだけなので省略する。

### C.3 Space-like geodesic in BTZ spacetime

BTZ 時空における空間的測地線とその長さを与える。BTZ 時空の線素は次のように書ける。

$$ds^2 = - \left( \frac{r^2}{L^2} - M \right) dt^2 + \left( \frac{r^2}{L^2} - M \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (\text{C.40})$$

ここで  $M$  はブラックホールの質量で、 $L$  は AdS 半径である。各座標値は  $t \in [-\infty, \infty]$ ,  $r \in [\sqrt{ML}, \infty]$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  を取り、 $\theta$  の周期は  $2\pi$  である。以下では  $\partial A = \{(0, L^2/\epsilon, \pm\theta_A)\}$  から BTZ 時空中の  $t = 0$  一定面に伸びる空間的測地線を与える。ここで  $\epsilon$  は重力系の赤外カットオフに対応するスケールである。

BTZ 時空ではブラックホールの存在と空間的な周期性によって、空間的測地線がブラックホールに何度も巻き付くことができるため、部分系の端点を指定しても空間的測地線が一意に定まらない。そこであらかじめ空間的測地線に添え字  $m$  を付け  $\theta = \theta_m(r)$  と書くことにする。これらの測地線は次の曲線の長さ  $l$  を極小化するという条件から求められる。

$$l = 2 \int_{r_{\min}}^{L^2/\epsilon} dr \sqrt{\left(\frac{r^2}{L^2} - M\right)^{-1} + r^2 \left(\frac{d\theta_m}{dr}\right)^2}. \quad (\text{C.41})$$

ここで、空間的測地線  $\theta = \theta_m(r)$  の定義域は  $r \in [r_{\min}, L^2/\epsilon]$  となる。この  $r_{\min}$  は部分系  $A$  の大きさによって決まる離散的な値である。このとき Euler-Lagrange 方程式は次の通りである。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\sqrt{\left(\frac{r^2}{L^2} - M\right)^{-1} + r^2 \left(\frac{d\theta_m}{dr}\right)^2}} \frac{d\theta_m}{dr} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\theta_m}{dr} &= \pm \frac{L r_{\min}}{r \sqrt{(r^2 - r_{\min}^2)(r^2 - ML^2)}} \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

$r \geq \sqrt{ML}$  のもとで、この解は次のように与えられる。

$$\theta_m(r) = \mp \frac{1}{\sqrt{M}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{L \sqrt{M(r^2 - r_{\min}^2)}}{r_{\min} \sqrt{r^2 - ML^2}} \right) + \theta_0 \quad (\text{C.43})$$

この式 (C.43) を  $r$  について次のように解き直すと便利である。ただし、この表示は各測地線毎に座標系  $\theta$  の原点が異なることに注意してほしい。

$$r_m(\theta) = \frac{\sqrt{ML} r_{\min} \operatorname{sech}(\sqrt{M} \theta)}{\sqrt{ML^2 - r_{\min}^2 \tanh^2(\sqrt{M} \theta)}} \quad (\text{C.44})$$

$$r_{\min} = \sqrt{ML} \coth[\sqrt{M}(m\pi \pm \theta_A)], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.45})$$

ここで、 $r_{\min}$  は空間的な周期性に注意して  $r_m(m\pi \pm \theta_A) = L^2/\epsilon$  であるという条件から決定された。測地線の長さ (C.41) は次のように表現できる。

$$l = 2L \log \left[ \frac{2L}{\sqrt{M}\epsilon} \sinh(\sqrt{M}(\pi m \pm \theta_A)) \right] \quad (\text{C.46})$$

さらに、BTZ 時空の場合には、 $(0, L^2/\epsilon, \theta_A)$  のみから時空中に伸びる空間的測地線が存在することに注意すべきである。それは次のように与えられる。

$$r_m(\theta) = \frac{\sqrt{ML} r_{\min} \operatorname{sech}(\sqrt{M}(\theta - \theta_A))}{\sqrt{ML^2 - r_{\min}^2 \tanh^2(\sqrt{M}(\theta - \theta_A))}} \quad (\text{C.47})$$

$$r_{\min}(\theta_A, m) = \sqrt{ML} \coth[\sqrt{M}m\pi], \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{C.48})$$

$(0, L^2/\epsilon, -\theta_A)$  のみから時空中に伸びる空間的測地線に関しては  $\theta_A \rightarrow -\theta_A$  とすればよい. どちらの場合もその測地線の長さ (C.41) は次のように表現できる.

$$l = 2L \log \left[ \frac{2L}{\sqrt{M}\epsilon} \sinh \left( \sqrt{M} \pi m \right) \right] \quad (\text{C.49})$$

この測地線の長さ (C.49) は部分系の大きさが 0 である  $\theta = 0$  の場合に対応している.

AdS/CFT 対応において, BTZ 時空はトーラス上の CFT と対応すると考えられている. 円周の長さが  $C$  の円周上に定義された逆温度  $\beta$  の CFT を考える. これらのパラメタはブラックホールの質量と  $\beta/C = 1/\sqrt{M}$  と  $\epsilon = LC/(2\pi r_{\max})$  という関係がある. 部分系  $-\theta_A \leq \theta \leq \theta_A$  の長さは  $l := C\theta_A/\pi$  として翻訳され, また Brown-Henneaux 公式を使うと, 式 (C.46) について  $l/4G$  は次のように表現される.

$$s(mC \pm l) := \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left\{ \frac{\pi(mC \pm l)}{\beta} \right\} \right], \quad mC \pm l > 0. \quad (\text{C.50})$$

図 C.2 は  $\theta_A = \pi/3$  としたときの空間的測地線の例である. この図からわかるように整数  $m$

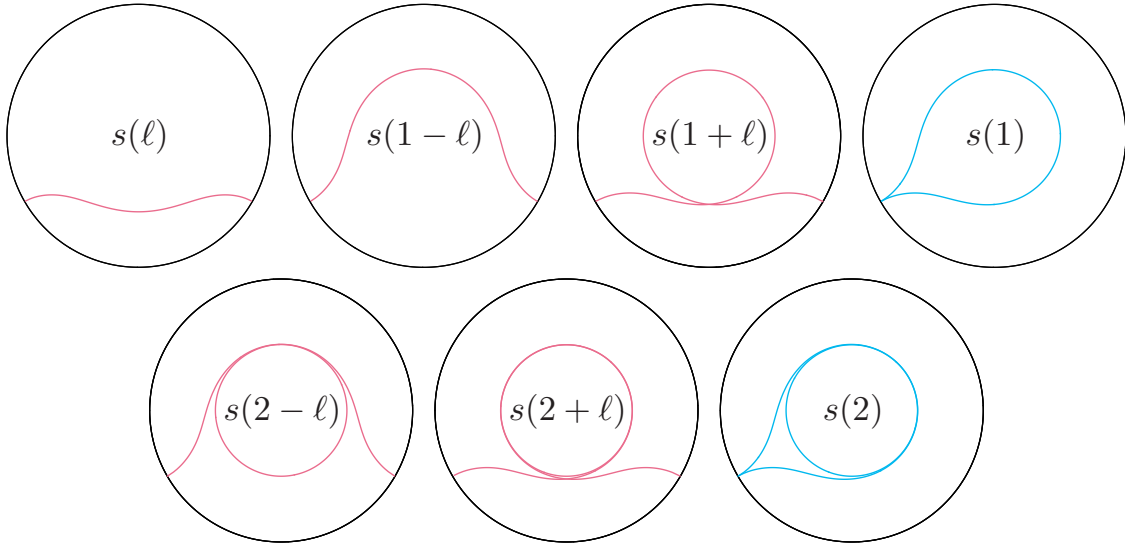


Figure C.2:  $M = 1, L = 1, \theta_A = \pi/3$  としたときの BTZ 時空の空間的測地線の概形. 各測地線はその長さ (C.50) によって指定され, ここでは  $m \leq 2$  の場合を図示した. それぞれの円盤は時空の時間一定面を表しており, 動径方向をコンパクト化したものである. 外側の円周は AdS 境界を表しているが, ブラックホールはこれらの円盤中には描かれていない. マゼンタの曲線は  $\theta_A = \pm\pi/3$  の両方から時空中に伸びる測地線であり, シアンの曲線は  $\theta_A = -\pi/3$  のみから伸びる測地線である. これらを図示する際には式 (C.44), (C.47) において適当に原点の位置を移動させる必要がある.

は AdS 境界上の部分系  $A = [-\theta_A, \theta_A]$  に対し, 測地線がブラックホールの向こう側を通った回数を表している. 動径座標  $r$  の最小値  $r_{\min}(\theta_A, m)$  は  $m \rightarrow \infty$  においてブラックホール半径  $\sqrt{ML}$  に漸近する.

適当な極限を考えることで, 平面的な BTZ 時空, 大域的な AdS 時空, Poincaré パッチにおける測地線の式およびその長さを BTZ 時空のものからすぐに与えられる. まず, 平面的な BTZ 時空は  $\ell = \text{const.}, \theta_A \rightarrow 0, C \rightarrow \infty$  に対応し,  $\theta$  の定義域も同様に大域的な BTZ 時空に比べると微小な領域になる. したがって, ブラックホールの向こう側を回る測地線は存在しなくなり,  $m = 0$  の解のみが許される. したがって, 式 (C.44) および (C.50) から測地線および HEE は次のように与えられる.

$$r(x) = \frac{\sqrt{ML} \coth[\sqrt{M}\ell/L] \operatorname{sech}(\sqrt{M}x/L)}{\sqrt{1 - \coth^2[\sqrt{M}\ell/L] \tanh^2(\sqrt{M}x/L)}} \quad (\text{C.51})$$

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left\{ \frac{\pi\ell}{\beta} \right\} \right] \quad (\text{C.52})$$

また, 形式的に式 (C.44) および (C.50) において  $M = -1$  とすると大域的な AdS 時空の対応物が得られる.

$$r(\theta) = \frac{L \cot[\pi\ell/C] \sec(\theta)}{\sqrt{1 + \cot^2[\pi\ell/C] \tanh^2(\theta)}} \quad (\text{C.53})$$

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{C}{\pi\epsilon} \sin \left\{ \frac{\pi\ell}{C} \right\} \right] \quad (\text{C.54})$$

さらに, 平面的な BTZ 時空で  $\beta \rightarrow \infty$  とするか, 大域的な AdS 時空において  $C \rightarrow \infty$  とすると Poincaré パッチの対応物が得られる.

$$r(x) = \frac{L^2}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} \quad (\text{C.55})$$

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\ell}{\epsilon} \right] \quad (\text{C.56})$$

# Bibliography

- [1] J.M. Maldacena, *The Large  $N$  limit of superconformal field theories and supergravity*, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113 [[hep-th/9711200](#)].
- [2] S. Gubser, I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105 [[hep-th/9802109](#)].
- [3] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [[hep-th/9802150](#)].
- [4] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602 [[hep-th/0603001](#)].
- [5] S. Ryu and T. Takayanagi, *Aspects of Holographic Entanglement Entropy*, *JHEP* **08** (2006) 045 [[hep-th/0605073](#)].
- [6] G. 't Hooft, *Dimensional reduction in quantum gravity*, *Conf. Proc. C* **930308** (1993) 284 [[gr-qc/9310026](#)].
- [7] L. Susskind, *The World as a hologram*, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377 [[hep-th/9409089](#)].
- [8] R. Bousso, *The Holographic principle*, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 825 [[hep-th/0203101](#)].
- [9] J.D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.
- [10] S.W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.
- [11] M. Headrick and T. Takayanagi, *A Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 106013 [[arXiv:0704.3719](#)].

- [12] N. Laflorencie, *Quantum entanglement in condensed matter systems*, *Phys. Rept.* **646** (2016) 1 [[1512.03388](#)].
- [13] B. Czech, J.L. Karczmarek, F. Nogueira and M. Van Raamsdonk, *The Gravity Dual of a Density Matrix*, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 155009 [[arXiv:1204.1330](#)].
- [14] B. Swingle, *Entanglement Renormalization and Holography*, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 065007 [[arXiv:0905.1317](#)].
- [15] F. Pastawski, B. Yoshida, D. Harlow and J. Preskill, *Holographic quantum error-correcting codes: Toy models for the bulk/boundary correspondence*, *JHEP* **06** (2015) 149 [[arXiv:1503.06237](#)].
- [16] N. Lashkari, M.B. McDermott and M. Van Raamsdonk, *Gravitational dynamics from entanglement 'thermodynamics'*, *JHEP* **04** (2014) 195 [[arXiv:1308.3716](#)].
- [17] X. Dong, D. Harlow and A.C. Wall, *Reconstruction of Bulk Operators within the Entanglement Wedge in Gauge-Gravity Duality*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 021601 [[arXiv:1601.05416](#)].
- [18] G. Vidal, *Entanglement Renormalization*, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 220405 [[cond-mat/0512165](#)].
- [19] P. Calabrese and J.L. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, *J. Stat. Mech.* **0406** (2004) P06002 [[hep-th/0405152](#)].
- [20] P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement entropy and conformal field theory*, *J. Phys. A* **42** (2009) 504005 [[arXiv:0905.4013](#)].
- [21] T. Hartman, *Entanglement Entropy at Large Central Charge*, [arXiv:1303.6955](#).
- [22] T. Faulkner, *The Entanglement Renyi Entropies of Disjoint Intervals in AdS/CFT*, [1303.7221](#).
- [23] X. Dong, A. Lewkowycz and M. Rangamani, *Deriving covariant holographic entanglement*, *JHEP* **11** (2016) 028 [[1607.07506](#)].
- [24] G. Penington, S.H. Shenker, D. Stanford and Z. Yang, *Replica wormholes and the black hole interior*, *JHEP* **03** (2022) 205 [[1911.11977](#)].

- [25] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian and A. Tajdini, *Replica Wormholes and the Entropy of Hawking Radiation*, *JHEP* **05** (2020) 013 [[1911.12333](#)].
- [26] A. Almheiri, R. Mahajan, J. Maldacena and Y. Zhao, *The Page curve of Hawking radiation from semiclassical geometry*, *JHEP* **03** (2020) 149 [[1908.10996](#)].
- [27] J. Tsujimura and Y. Nambu, *Entanglement Renyi entropy of two disjoint intervals for large  $c$  Liouville field theory*, [2210.00011](#).
- [28] J. Tsujimura and Y. Nambu, *Holographic entanglement entropy of two disjoint intervals in  $AdS_3/CFT_2$* , [2106.00015](#).
- [29] J. Tsujimura, *Holographic description of entanglement entropy of free CFT on torus*, [2011.00407](#).
- [30] V.E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, *A Covariant holographic entanglement entropy proposal*, *JHEP* **07** (2007) 062 [[arXiv:0705.0016](#)].
- [31] T. Faulkner, A. Lewkowycz and J. Maldacena, *Quantum corrections to holographic entanglement entropy*, *JHEP* **11** (2013) 074 [[arXiv:1307.2892](#)].
- [32] P. Calabrese, J. Cardy and E. Tonni, *Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory*, *J. Stat. Mech.* **0911** (2009) P11001 [[0905.2069](#)].
- [33] T. Nishioka and T. Takayanagi, *AdS Bubbles, Entropy and Closed String Tachyons*, *JHEP* **01** (2007) 090 [[hep-th/0611035](#)].
- [34] M. Caraglio and F. Gliozzi, *Entanglement Entropy and Twist Fields*, *JHEP* **11** (2008) 076 [[0808.4094](#)].
- [35] K. Krasnov, *Holography and Riemann surfaces*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000) 929 [[hep-th/0005106](#)].
- [36] P.G. Zograf and L.A. Takhtadzhyan, *On uniformization of riemann surfaces and the weil- petersson metric on teichmller and schottky spaces*, *Mathematics of the USSR-Sbornik* **60** (1988) 297.
- [37] A. Lewkowycz and J. Maldacena, *Generalized gravitational entropy*, *JHEP* **08** (2013) 090 [[arXiv:1304.4926](#)].

- [38] X. Dong, *The Gravity Dual of Renyi Entropy*, *Nature Commun.* **7** (2016) 12472 [[arXiv:1601.06788](#)].
- [39] J. Brown and M. Henneaux, *Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity*, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207.
- [40] F.M. Haehl, T. Hartman, D. Marolf, H. Maxfield and M. Rangamani, *Topological aspects of generalized gravitational entropy*, *JHEP* **05** (2015) 023 [[arXiv:1412.7561](#)].
- [41] S. Datta and J.R. David, *Rényi entropies of free bosons on the torus and holography*, *JHEP* **04** (2014) 081 [[arXiv:1311.1218](#)].
- [42] T. Azeyanagi, T. Nishioka and T. Takayanagi, *Near Extremal Black Hole Entropy as Entanglement Entropy via AdS(2)/CFT(1)*, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 064005 [[arXiv:0710.2956](#)].
- [43] G. Bonelli, C. Iossa, D.P. Lichtig and A. Tanzini, *Irregular Liouville correlators and connection formulae for Heun functions*, [2201.04491](#).
- [44] M. Headrick, V.E. Hubeny, A. Lawrence and M. Rangamani, *Causality & holographic entanglement entropy*, *JHEP* **12** (2014) 162 [[arXiv:1408.6300](#)].
- [45] B. Freivogel, R. Jefferson, L. Kabir, B. Mosk and I.-S. Yang, *Casting Shadows on Holographic Reconstruction*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 086013 [[arXiv:1412.5175](#)].
- [46] H. Matsueda, M. Ishihara and Y. Hashizume, *Tensor network and a black hole*, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 066002 [[1208.0206](#)].
- [47] A. Vilenkin, *Gravitational Field of Vacuum Domain Walls and Strings*, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 852.
- [48] <https://reference.wolfram.com/language/ref/HeunG.html>.
- [49] Y. Hatsuda, *Quasinormal modes of Kerr-de Sitter black holes via the Heun function*, *Class. Quant. Grav.* **38** (2020) 025015 [[2006.08957](#)].
- [50] M. Wilde, *Quantum Information Theory*, Cambridge University Press (2017).



- [51] S. Deser and A. Schwimmer, *Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions*, *Phys. Lett. B* **309** (1993) 279 [[hep-th/9302047](#)].
- [52] K. Fujikawa, *Energy Momentum Tensor in Quantum Field Theory*, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 2262.
- [53] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *The Black hole in three-dimensional space-time*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849 [[hep-th/9204099](#)].
- [54] K. Nguyen, *Holographic boundary actions in  $AdS_3/CFT_2$  revisited*, *JHEP* **10** (2021) 218 [[2108.01095](#)].
- [55] M. Henningson and K. Skenderis, *The Holographic Weyl anomaly*, *JHEP* **07** (1998) 023 [[hep-th/9806087](#)].
- [56] N. Seiberg and E. Witten, *The  $D1 / D5$  system and singular CFT*, *JHEP* **04** (1999) 017 [[hep-th/9903224](#)].