

学位論文

高次元アクション電気力学の高次群構造の解析

名古屋大学大学院理学研究科

中島 立稀

Contents

1	序論	4
2	一般的な大域的対称性	10
2.1	大域的対称性の一般化	10
2.2	高次形式対称性	12
2.2.1	背景ゲージ場	13
2.2.2	4次元マクスウェル理論	14
2.3	高次群	20
3	$2n$次元アクシオン電気力学における高次群構造	24
3.1	$2n$ 次元アクシオン電気力学	24
3.2	対称性	26
3.3	背景ゲージ場の導入	27
4	6次元系の解析	33
4.1	荷電物体	36
4.1.1	運動方程式由来の対称性	36
4.1.2	チャーン・ヴェイユ対称性	39
4.2	対称性生成子の相関関数	43
4.2.1	運動方程式由来の対称性生成子2つの相関関数	44
4.2.2	その他の2つの生成子の相関関数	48
4.2.3	3つの生成子の相関関数	49
5	結論および展望	51

<i>CONTENTS</i>	3
A 数学的補遺	57
A.1 諸公式	57
A.1.1 微分形式	57
A.1.2 デルタ関数	57
A.1.3 二重和の取り扱い	58
A.2 2接合加群	59
B 4次元アキシオン電気力学の高次群構造	61
C 相関関数に関する恒等式の別の導出	63
Bibliography	65

Chapter 1

序論

対称性は物理における最も基本的な性質の一つである。対称性は理論を構成する際の重要な指針となるものであり、作用を構成する際には注目する対称性を尊重するように構成する。また強結合領域などの、摂動的に取り扱うことのできず解析が困難な物理を調べる時にも対称性を用いることで定性的な分析が可能になることがある。対称性を用いた議論の大きな利点は、同じ対称性の構造を有した理論であれば系の詳細に関わらずに同様の性質を持つ点である。エネルギースケールが違うなど一見全く違う物理現象に見えたとしても対称性の観点からは同一視できる場合もある。このように対称性は物理のユニバーサルな性質の解明に重要である。対称性は以上のような観点から場の理論の解析に利用されるとともに、それ自体が研究の対象となってきた。

近年ガイオットらによる重要な提案 [1] により、従来の大域的対称性の定義が見直され大域的対称性の一般化が議論されている。この提案以降さまざまな新しい対称性が研究されており、それらの新しい対称性に伴う物理現象やそれらの数学的な構造などが活発に調べられている。具体例¹としては本論文でも取り扱う高次形式対称性 [1, 15–17] が挙げられる。これは局所的な場だけでなく様々な次元に広がった荷電物体に作用するような対称性である。一般に p 次元の広がりを持つ荷電物体に作用するような対称性を p 形式対称性と呼ぶ。つまり 0 次元の荷電物体に作用する通常の対称性は、この文脈では 0 形式対称性に分類される。高次形式対称性は、トーフト量子異常 [18] とその釣り合い条件を用いて場の理論の相構造を調べるなど、場の理論の非摂動的な性質の解析への応用などが提案されている [19–27]。トフ

¹他の例としては非可逆対称性 (non-invertible symmetry) [2–9] や、部分系対称性 (subsystem symmetry) [10–14] がある。

トフーフト量子異常は背景ゲージ場の変換の下での分配関数の非自明な変換ことである。例えば、背景ゲージ場 A を引数に持つ分配関数（有効作用） $Z[A]$ が背景ゲージ場の変換 $A \rightarrow A + d\Lambda$ に対して $Z[A] \rightarrow Z[A + d\Lambda] = e^{iA(A,\Lambda)} Z[A]$ のように変換する時、 $A(A, \Lambda)$ をトフーフト量子異常という。トフーフト量子異常の重要な性質に、繰り込み群変換で繋がる紫外領域の理論と赤外領域の理論の間でトフーフト量子異常が不変であるという、「トフーフト量子異常の釣り合い条件」がある。この釣り合い条件を利用して低エネルギー有効理論についての情報を得るといったように場の理論の非摂動的な性質を調べることに利用されてきた。上で述べたように高次形式対称性が提案されてからは高次形式対称性に対してのトフーフト量子異常を用いた解析は様々な理論に適用されている。

本論文の主題となる高次群構造をもつ対称性 [15, 28–31] も一般化された大域的対称性の一つである。高次群構造とは階数の異なる複数の高次形式対称性が理論に存在する時、これらの対称性が非自明に混ざるような構造のことである。例えば、高次群の一種である 2 群 [32] は 2 つの階数の異なる高次形式対称性の間の非自明な関係であり、具体的には 0 形式対称性の生成子が 1 形式対称性の生成子に作用して別の 1 形式対称性の生成子を生成するといった構造が挙げられる。より一般に n 個の階数の異なる高次形式対称性が非自明に関係づいている時、このような代数構造を n 群と呼ぶ。場の理論における高次群構造を持つ対称性は他にも [20, 33–51] など調べられている。これらの研究から、階数が異なる高次形式対称性が存在している時には、その理論が高次群構造を持ち得ることが明らかになってきている。その一方で、一般にどのような時に高次群構造が現れるのか、どのような物理的意味を持つのかなどについては依然として未解明の部分が多い。また系が高次群構造を持つことが分かったとしても、その数学的な記述については詳しく分析されていない場合も多い。場の理論における高次群構造についての一般的な性質の理解は場の理論の構造を理解する上で重要な課題であると考えられる。

このような状況下で近年の重要な発展の一つがアクシオン電気力学に高次群構造の分析である。特に [52, 53] で 4 次元の無質量アクシオン電気力学が 3 群の構造を持つことが示された。そこでは単に 0 形式から 2 形式の 3 つの高次形式対称性が混ざることを示しただけでなく、これらが 2 接合加群 [54] と呼ばれる代数で記述されることを示した。2 接合加群というのは 3 つの群とそれらの間を関係づけるいくつかの写像を合わせた代数構造のことである²。加えてそこでは 2 接合加群を成す各種演算の物理的な意味を明らかにしている。例えばこの

²2 接合加群の定義は A.2 を参照せよ。

系ではウィッテン効果 [55] が生じることが知られているが、これに2接合加群の対応する演算は「0形式対称性の1形式対称性に対する作用」であることが明らかにされた。この結果は既に知られていた物理現象を対称性の立場からの再解釈を与えている。このように彼らは高次群構造を持つ比較的解析が容易な具体例を与えるとともにもその数学的構造および物理的な解釈を詳しく分析しており、場の理論における高次群構造のより詳しい性質を明らかにした。他にも有質量アクシオン電気力学の場合には4群の構造を持ち、その代数は3接合加群で記述されることが [56] で示されている。

本論文はこのような背景から、アクシオン電気力学が場の理論における高次群構造を調べるための良い模型になっていると考え、アクシオン電気力学を通して場の理論における高次群構造の具体的な解析及びその物理的意味を分析することを目的としている。特に本論文では先行研究で扱われていた4次元の場合よりも高次元のアクシオン電気力学に注目しその高次群構造を調べる。具体的には一般の $2n$ 次元での解析を行うことで高次元のアクシオン電気力学における高次群構造を系統的に調べることを目標にする。加えて本論文では $2n = 6$ 次元の場合に対してより詳しい解析を行い、高次群構造の物理的な解釈を試みる。このように具体的な模型の解析により高次群の物理的な解釈を議論する事もこの論文における主題である。

ここで本論文でアクシオン電気力学を高次元へ拡張する動機についてまとめる。4次元のアクシオン電気力学が2接合加群の構造を持つことを示した前述の論文 [53] では、高次群構造ではチャーン・ヴェイユ対称性 [57] が重要な役割を持つ。チャーン・ヴェイユ対称性とはそのカレントの保存則がビアンキ恒等式によって保証されるような対称性のことである。実際4次元のアクシオン電気力学は2接合加群の構造を有しているが、この構造はチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場の変換則に反映されていた。一般に高次元ではより多くのチャーン・ヴェイユ対称性が存在することから、高次元への拡張を行うことにより4次元の時に比べ多くのチャーン・ヴェイユ対称性が混ざり合い、理論の大域的対称性はより大きい高次群構造を持つことが期待される。さらに単純により大きい代数構造が期待されるだけでなく、その代数的構造の詳しい分析が可能であると期待される。前述の通り4次元の場合では単に3つの群が混合するという事以上に2接合加群の構造を持つということが明らかになっているとともに、その物理的な解釈が与えられている。このように詳しく調べられたのにはアクシオン電気力学は比較的単純な模型であるために解析が容易であることに一因があると考えられる。高次元に拡張しても複雑さは増すものの同様の解析ができるため物

理的な解釈などを考察するのが容易である。また高次元における高次群構造を既に詳しくわかっている4次元の構造と比較することで詳しい代数構造に関しての詳しい解析を行うことができると考えられる。実際後で議論するように高次元のアクシオン電気力学の高次群構造は、4次元時の構造である2接合加群を内部構造として含んでいることが分かる。このように高次元アクシオン電気力学における高次群構造の系統的な分析により、単純に複数の群が混合している以上の情報を抽出し、未知の部分が多い場の理論における高次群の一般的な性質について重要な示唆を与えることが期待される。以上が高次元のアクシオン電気力学の高次群構造を分析する意義である。

実際この論文の後の部分で詳しく議論するように一般の偶数次元に対してチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場の変換則がグリーン・シュワルツ機構 [58] によって変形され、そこから高次群構造を読み取ることができる。特に高次元への拡張により4次元の時には見られなかった構造が現れ、一般に $2n$ 次元のアクシオン電気力学では、 $(2n-1)$ 個の階数の異なる高次形式対称性が混ざり合い、 $(2n-1)$ 群と呼ばれる構造が現れることを指摘する。グリーン・シュワルツ機構は元々弦理論における量子異常の相殺の方法の一つである。量子異常は量子効果によって古典的に存在した対称性が破れる現象であるが、元の作用に変換則を修正したゲージ場とゲージ不変な場の強さの結合項（チャーン・サイモンズ項）を相殺項として導入することでこの破れを消去する方法をグリーン・シュワルツ機構といい、歴史的にはタイプI超弦理論における量子異常の相殺として提案された。大域的対称性の高次群構造が背景ゲージ場の変換則の修正に反映されるという議論は、これに関する初期の研究 [15] で既に見ることができる。ここで高次群構造を反映するのは背景ゲージ場についての修正だが、従来のグリーン・シュワルツ機構で変更を受けるのは力学的なゲージ場である。この相違点を考慮して、[30,31]等では背景ゲージ場についての修正を「グリーン・シュワルツ機構の一般化」と呼ぶ場合がある。本論文では背景ゲージ変換則の修正とそれに伴うゲージ不変な場の強さの修正も単にグリーン・シュワルツ機構と呼ぶ。

グリーン・シュワルツ機構によるゲージ場の変換則の修正の結果、典型的にはある大域的対称性に対する背景ゲージ場が他の対称性の変換の下で変換する。例えば、1形式対称性の背景ゲージ場のゲージ変換則が別の0形式対称性の変換パラメーターに依存するといったことが起きる。これにより、上の例だと0形式対称性の変換によって1形式対称性変換が生成されるといったことが起こる。これは0形式対称性と1形式対称性という異なる階数の高次形式対称性が混合して高次群構造をもつことを反映している。以上をまとめると、背景ゲー

ジ場の導入に伴って生じるオペレーター値不定性を相殺するために導入された相殺項に含まれる背景ゲージ場の修正された変換則から理論の高次群構造を読み取ることができる。本論文でもこの方法に従って高次群構造を調べる。

以下に本論文で議論する主要な結果をまとめる。

1. $2n$ 次元アクシオン電気力学に対して運動方程式由来の対称性に対する背景ゲージ場を導入すると、理論にオペレーター値不定性と呼ばれる不定性が生じる。
2. 上述の不定性を取り除き理論をゲージ不変にするためには1形式, \dots , $(2n - 2)$ 形式チャーン・ヴェイユ対称性についても同時に背景ゲージを導入しなければならない。さらにこれらのゲージ場の変換則はグリーン・シュワルツ機構によって修正される。
3. グリーン・シュワルツ機構から理論の高次群構造を読み取ることができる。具体的には $2n$ 次元の場合には0形式, \dots , $(2n - 2)$ 形式対称性が混ざった高次群構造が得られる。
4. $2n$ 次元の場合の高次群構造は n 項演算を含む。また部分構造として $(2n - 2)$ 次元の代数構造を含む。

$(2n - 2)$ 個のチャーン・ヴェイユ対称性も同時に背景ゲージ化を行う必要はあるという結果は、高次元拡張することで得られる帰結である。また、 n 項演算の存在の指摘や部分構造に関するの情報も、一般の $2n$ 次元への拡張を通して系統的に調べられる結果である。

構成

ここでこの論文の構成についてまとめる。2章では大域的対称性の一般化に関する近年の発展を紹介する。特に高次形式対称性の定義などについてここで詳しく議論する。高次形式対称性は4次元のマクスウェル理論を例として具体的にその性質を見る。この具体例を通して高次形式対称性変換の物理的な解釈や、本論文で用いる背景ゲージ場を用いた相関関数の計算方法を紹介する。高次形式対称性を導入した後で本論文の主題である高次群構造を説明する。ここでは詳細な議論には立ち入らず、後の議論で重要になる諸性質の説明を行う。特に理論の高次群構造は背景ゲージ場の変換則がグリーン・シュワルツ機構により変形を受ける事に反映されること、および後の議論で重要な役割を持つオペレーター値不定性についての説明を行う。3章では、まず $2n$ 次元のアクシオン電気力学のもつ大域的対称性を見る。その際

以下の議論で重要となる運動方程式由来の対称性とチャーン・ヴェイユ対称性をそれぞれ導入し、それらの生成子などの各種定義を与える。次に運動方程式由来の大域的対称性に対し背景ゲージ場を導入することでゲージ化を行う。その際に生じるオペレーター値不定性を系統的に取り除く方法を議論する。これにより1形式, \dots , $(2n-2)$ 形式チャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場の場の強さを決定する。またチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場のゲージ変換則がグリーン・シュワルツ機構によって修正を受けることを見る。このゲージ変換則が理論の高次群構造を反映している。4章では上の一般的な議論で得た高次群構造について結果について、 $2n = 6$ 次元の場合に詳しい分析を行う。ここでは高次群構造を反映するような相関関数間の非自明な関係を全て網羅的に計算することで6次元アクション電気力学における高次群構造を具体的に調べ、さらにいくつかの場合に具体的に物理的な解釈を議論する。具体的にはアキシオンドメインウォールに対するウィッテン効果 [55, 59] や異常ホール効果 [60–62] の6次元への拡張を議論する。また代数構造に非自明な3項演算を含むことなど、高次元に特有だと考えられる構造について議論する。なお3, 4章の内容は [63] に基づく。5章でこの論文の主要な結果について総括するとともに高次元のアキシオン電気力学における高次群構造の解析とその周辺に関する今後の展望を議論する。

Appendix A に数学的な事実や本文中でよく使う公式などをまとめた。特に高次群構造の先行研究で重要であった2接合加群に関してその定義などはここで議論する。Appendix B では [52, 53] で議論された4次元アクション電気力学における高次群構造についてまとめる。これは本論文では3章で議論する一般の偶数次元での議論における $n = 2$ の場合に相当している。上述の通り4次元アクション電気力学の高次群構造は2接合加群という数学を用いて記述できることが示されている。ここではその数学的な詳細も含めて議論を行う。Appendix C では生成子の相関関数の別の導出を紹介する。この論文の主要な部分では一貫して背景ゲージ場を用いた計算を行ったが、ここで紹介するのは [52] などで議論されているシュインガー・ダイソン方程式を用いた方法である。

Chapter 2

一般的な大域的対称性

ガイオットらによって大域的対称性の一般化 [1] が提案されて以降、様々な拡張が提案されてきた。ここでは一般的な大域的対称性についての近年の発展をまとめる。まず通常の大域的対称性がどのように一般化されるのか、またどのような拡張が実際に考えられているかを見る。その後で特に本論文で重要となる高次形式対称性および高次群対称性をはじめとした諸概念を導入する。高次形式対称性は2.2.2節で4次元マクスウェル理論の具体例を用いて議論する。

2.1 大域的対称性の一般化

はじめに、大域対称性の一般化を考える際に議論の見通しを良くするために通常の大域的対称性の性質についてまとめる。場の大域的な変換の下で作用が不変である時、理論がその変換の下で対称性を持つという。時空 d 次元の系に大域的対称性が存在する時にはネーターの定理よりその対称性に付随した保存カレントが存在し、以下の保存則を満たすことが知られている。

$$dj^{[d-1]} = 0 \tag{2.1}$$

ここで $j^{[d-1]}$ は $(d-1)$ 形式の場である³。この保存カレントを $(d-1)$ 次元閉多様体 \mathcal{M}_{d-1} で積分すると、この対称性のネーター電荷が得られる、これを指数関数の肩に乗せることでこ

³文献によっては1形式の保存カレント $j^{[1]}$ を用いることがある。この時はカレントの保存則は $d \star j^{[1]} = 0$ と表される。本論文の表記との関係は、 $j^{[d-1]} = \star j^{[1]}$ である。

の対称性の生成子が定義される。

$$U(\mathcal{M}_{d-1}, \alpha_g) = e^{i\alpha_g \int_{\mathcal{M}_{d-1}} j^{[d-1]}} \quad (2.2)$$

ただし第二引数の α_g はこの生成子によって引き起こされる変換のパラメーターである。尚、これらの通常の対称性が作用する荷電物体は局所的な演算子である。また、通常の対称性は群の構造を持つためこの変換のパラメーターは群の要素に値を取る。

$$U(\mathcal{M}_{d-1}, \alpha_g) U(\mathcal{M}_{d-1}, \alpha_{g'}) = U(\mathcal{M}_{d-1}, \alpha_{g \cdot g'}) \quad (2.3)$$

ただし通常の対称性に対しては群構造は可換でも非可換でもどちらもあり得る。

また以上で定義された生成子はトポロジカル演算子である。つまり以下が成立する。

$$U(\mathcal{M}_{d-1} \sqcup \Delta \mathcal{M}_{d-1}, \alpha_g) = U(\mathcal{M}_{d-1}, \alpha_g) \quad (2.4)$$

ただし、 $\Delta \mathcal{M}_{d-1}$ は $d-1$ 次元の閉多様体である。具体的には以下の Figure 2.1 のように、 \mathcal{M}_{d-1} をトポロジカルに変形させる操作（右図から中央図）を左図のように $\Delta \mathcal{M}_{d-1}$ を用いて表している。

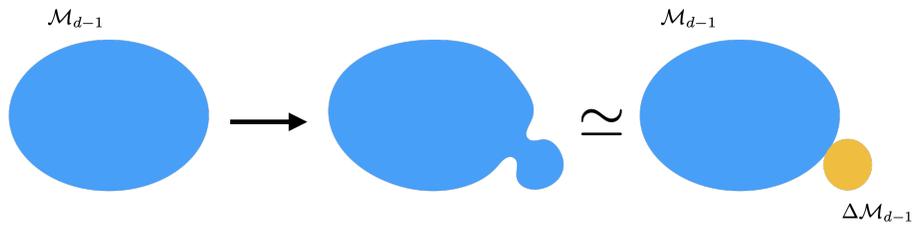


Figure 2.1: \mathcal{M}_{d-1} のトポロジカルな変形

この時カレントの保存則から次が成り立つ。

$$\exp\left(i\alpha_g \int_{\Delta \mathcal{M}_{d-1}} j^{[d-1]}\right) = \exp\left(i\alpha_g \int_{\Omega_{\Delta \mathcal{M}_{d-1}}} dj^{[d-1]}\right) = 1 \quad (2.5)$$

ただし、 $\Omega_{\Delta \mathcal{M}_{d-1}}$ は $\Delta \mathcal{M}_{d-1}$ を境界を持つような d 次元多様体である。以上により (2.4) が成立する。

以上をまとめると通常の対称性に対する生成子 $U(\mathcal{M}_{d-1}, \alpha_g)$ は、次の性質を持つ演算子であると言える。

- 余次元1の多様体 ($(d-1)$ 次元の多様体) \mathcal{M}_{d-1} 上で定義される

- 群の構造を持つ
- トポロジカル演算子

この中で保存則に由来するのは生成子がトポロジカル演算子であるという性質である。この観点から、現代的には以上の性質のうち「大域的対称性の生成子はトポロジカル演算子である」という点を尊重する。すなわち通常の対称性を特徴づける性質のうち、トポロジカルな演算子であること以外を緩めることで対称性の一般化を考える。

まず「余次元1の多様体 \mathcal{M}_{d-1} 上で定義される」という性質を緩めて、「様々な余次元の多様体で定義されるトポロジカル演算子」への拡張を考えることができる。このような対称性は高次形式対称性と呼ばれている。高次形式対称性の詳しい議論は以下で行う。

一方で「群の構造を持つ」という性質を緩めることもできる。群は、ある数学的対象における自己同型の集合で、結合則、単位元の存在、逆元の存在を満たすものをいう。よって「群の構造をもつ」性質を緩めるとは、これらの群を特徴づける性質を緩めるような拡張であるということができる。特に近年は群を逆元を持たないような代数構造（モノイド）に緩めた対称性が提案されている。このような逆元を持たないような対称性を非可逆対称性あるいは圏論的対称性と呼ぶ [2–9]。

2.2 高次形式対称性

上述の通り通常の対称性を「様々な余次元の多様体で定義されるトポロジカル演算子」へ拡張したものを高次形式対称性という。一般に p 形式対称性とはその生成子が $(d-p-1)$ 形式多様体 \mathcal{M}_{d-p-1} で定義されるような対称性である。連続対称性の場合、生成子は $(d-p-1)$ 形式の保存カレント $j^{[d-p-1]}$ を用いて以下のように書くことができる。

$$U^{[p]}(\mathcal{M}_{d-p-1}, \alpha_g) = e^{i\alpha_g \int_{\mathcal{M}_{d-p-1}} j^{[d-1]}} \quad (2.6)$$

ただし、保存カレントは次の保存則を満たす。

$$dj^{[d-p-1]} = 0 \quad (2.7)$$

p 形式対称性の荷電物体は空間的に p 次元の広がりを持つ。例えば1形式対称性の生成子は1次元的に広がった物体の上で定義される線演算子に作用し、その電荷を測る。後で具体的に

見るように中心対称性は1形式対称性の具体例であるが、これはウィルソンループに作用する。通常対称性の生成子は局所的な演算子に作用するので、この文脈で0形式対称性と呼ばれる。

p 形式対称性もまた通常対称性と同様に群の構造を持っている。すなわち生成子の第二引数である変換パラメーターは今の場合も群の要素に値を取り、以下が成立する。

$$U^{[p]}(\mathcal{M}_{d-p-1}, \alpha_g) U^{[p]}(\mathcal{M}_{d-p-1}, \alpha_{g'}) = U^{[p]}(\mathcal{M}_{d-p-1}, \alpha_{g \cdot g'}) \quad (2.8)$$

一般に $p > 0$ の時には p 形式対称性に対しては、その群構造は可換群になる。上述の通り p 形式対称性の変換を生成する演算子 $U^{[p]}(\mathcal{M}_{d-p-1}, \alpha_g)$ はトポロジカルである。また p 形式対称性は $(d-p-1)$ 次元の多様体 \mathcal{M}_{d-p-1} 上に定義されているので、これに垂直な $(p+1)$ 次元方向に動かすことができる。それによりいつでも生成子の作用する順番を変えることができるため必ず可換群になる。一方 $p = 0$ の時は \mathcal{M}_{d-1} 上に定義されており、これに垂直な1次元方向に動かして生成子が作用する順番を変更しようとしても生成子は必ず交差する。そのために可換群であるとは限らない。

本論文では高次群構造を調べる際にチャーン・ヴェイユ対称性と呼ばれるタイプの高次形式対称性を用いるので、ここでその定義を述べる。チャーン・ヴェイユ対称性 [57] は、ビアンキ恒等式によってその保存則が保障されるような対称性である。例えば光子 a の場の強さ da や、そのウェッジ積で表される $da \wedge da$ は、さらに微分演算子を作用させると微分演算子の冪零性から自明に0になり、保存カレントになっている。このようにチャーン・ヴェイユ対称性は自明に保存則が成り立つような対称性であるが、本論文では高次群構造の分析でチャーン・ヴェイユ対称性が非常に重要な役割を持つ。

2.2.1 背景ゲージ場

理論の大域的対称性を調べるための良い方法の一つが背景ゲージ場を導入することである。本論文では一貫して⁴背景ゲージ場を用いて系の対称性の構造を調べる。実際後で見るようにゲージ場の変換則は系の高次群構造を反映するため本論文においては背景ゲージ場を用いた議論を行うと見通しが良い。

保存カレントが存在している時は、保存カレントとそれに対応する背景ゲージ場の結合項を加えることで背景ゲージ場を導入することができる。例として p 形式対称性に対する背景

⁴Appendix Cでのみ背景ゲージ場を用いない別の等価な方法を用いた議論を紹介する。

ゲージ場を導入する場合を考える。対応する保存カレントは $(d-p-1)$ 形式の場である。これに $(p+1)$ 形式の背景ゲージ場 X_{p+1} を最小結合させた以下の項を作用に加えることで背景ゲージ場を加えることができる。

$$\int_{\mathcal{M}_d} j^{[p]} \wedge X_{p+1} \quad (2.9)$$

通常は背景ゲージ場の変換則は $X_{p+1} \rightarrow X_{p+1} + d\Lambda_p$ で与えられる。この変換の下では最小結合項はカレントの保存則 $dj^{[d-p-1]} = 0$ からゲージ不変である。

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_d} j^{[p]} \wedge X_{p+1} &\rightarrow \int_{\mathcal{M}_d} j^{[p]} \wedge X_{p+1} + (-1)^{d-p} \int_{\mathcal{M}_d} dj^{[p]} \wedge \Lambda_p \\ &= \int_{\mathcal{M}_d} j^{[p]} \wedge X_{p+1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

量子論で p 形式対称性の生成子 $U^{[p]}(\mathcal{M}_{d-p-1}, \alpha)$ を挿入することは、対応する背景ゲージ場にデルタ関数的な配位を与えることに他ならない。具体的には $X_{p+1} = \alpha\delta(\mathcal{M}_{d-p-1})$ とすれば良い。量子論では作用を指数関数の肩に乗せたものを経路積分するので、背景ゲージ場を導入した理論には次の項 $\exp\left(i \int_{\mathcal{M}_d} j^{[p]} \wedge X_{p+1}\right)$ が含まれる。ここで $X_{p+1} = \alpha\delta(\mathcal{M}_{d-p-1})$ とすると、

$$\begin{aligned} \exp\left(i \int_{\mathcal{M}_d} j^{[p]} \wedge X_{p+1}\right) &= \exp\left(i\alpha \int_{\mathcal{M}_{d-p-1}} j^{[p]}\right) \\ &= U^{[p]}(\mathcal{M}_{d-p-1}, \alpha) \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし、一般に D 次元時空中の余次元 p の多様体 \mathcal{D}_{D-p} を引数にするデルタ関数 δ_p は次のように定義される。 $\int_{\mathcal{M}_D} J^{(D-p)} \wedge \delta_p(\mathcal{D}_{D-p}) \equiv \int_{\mathcal{D}_{D-p}} J^{(D-p)}$ 。またストークスの定理を用いると $\delta_p(\mathcal{D}_{D-p}) = (-1)^{D-p-1} d\delta_{p-1}(\Omega_{\mathcal{D}_{D-p}})$ が成り立つ。ただし $\partial\Omega_{\mathcal{D}_{D-p}} = \mathcal{D}_{D-p}$ である。本論文では今後もデルタ関数の関して以上の表記を用いる。ここで用いた多様体を引数に持つデルタ関数の定義などは Appendix A.1.2 に示した。本論文では後で対称性の生成子の相関関数などを計算するが、以上で議論したようにゲージ場に具体的にデルタ関数的な配位を与えることでそれらの計算を行う。

2.2.2 4次元マクスウェル理論

4次元のマクスウェル理論を例にして高次形式対称性を具体的に見ていく。

$$S_{\text{Maxwell}} = - \int_{\mathcal{M}_4} \frac{1}{2e^2} da \wedge \star da \quad (2.12)$$

この例では θ 項、 $\frac{\theta}{8\pi^2} da \wedge da$ は簡単のため考えない。また以下では $U(1)$ ゲージ結合定数 e は 1 とする。

この理論には 2 つの 1 形式対称性が存在している。それぞれ保存カレントは次のように表される。

$$j_{\text{EoM}}^{[1]} = \star da \quad (2.13)$$

$$j_{\text{CW}}^{[1]} = \frac{1}{2\pi} da \quad (2.14)$$

前者はその保存則が運動方程式 $d \star da = 0$ により保障されている。すなわち光子場 a のシフト $a \rightarrow a + \Lambda_1^E$ に対する対称性である。この論文においては混同を避けるために、このような運動方程式に保障されている対称性を運動方程式由来の対称性と呼ぶことにする。つまりこの光子場 a のシフト対称性は以下では運動方程式由来の 1 形式対称性と呼ぶ。一方、後者は保存則がビアンキ恒等式 $dda = 0$ によって保障されておりチャーン・ヴェイユ対称性である。

ここで、これらの対称性に対する背景ゲージ場を導入することを考える。まず運動方程式由来の対称性に対する背景ゲージ場 B_2^E を導入について考える。これは $a \rightarrow a + \Lambda_1^E$ に伴い $B_2^E \rightarrow B_2^E + d\Lambda_1^E$ と変換する場である。しかし背景ゲージ場を導入する時には、上で議論したように (2.12) にカレントと背景ゲージ場の最小結合項を加えるだけではゲージ不変性は保たれないことに注意する。運動項のゲージ不変性を保つためにはいわゆるシーガル項も併せて加える必要がある。具体的には、(2.12) で次の置き換え $da \rightarrow da - B_2^E$ を行うことでゲージ不変に背景ゲージ場を導入することができる。

またチャーン・ヴェイユ対称性についての背景ゲージ場 B_2^M も同時に導入する。この場合はカレントと背景ゲージ場の最小結合項を加えることで背景ゲージ場を導入することができる。ただし、上で述べたようにチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場を導入する時には $da \rightarrow da - B_2^E$ の置き換えをおこなっているので、チャーン・ヴェイユ対称性の保存カレント $j_{\text{CW}}^{[1]}$ もこの置き換えにより $a \rightarrow a + \Lambda_1^E$ の下でゲージ不変にしておく必要がある。

結果的に運動方程式由来の対称性およびチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場を導入した作用は以下ようになる。

$$S'_{\text{Maxwell}} = - \int_{\mathcal{M}_4} \left[\frac{1}{2} (da - B_2^E) \wedge \star (da - B_2^E) + \frac{1}{2\pi} (da - B_2^E) \wedge B_2^M \right] \quad (2.15)$$

(2.15) の作用を指数関数の肩に乗せて経路積分を行い次の分配関数を得る。

$$Z[B_2^E, B_2^M] = \int \mathcal{D}a e^{iS'_{\text{Maxwell}}} \quad (2.16)$$

これらの対称性の物理的意味を述べる。2次元多様体 \mathcal{S}_2 上で定義される運動方程式由来の1形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ を考える。保存電荷は $\int_{\mathcal{S}_2} \star da$ である。これを電場と磁場を用いて書き直すと次のようになっている。

$$\int_{\mathcal{S}_2} \star da = \int E_x dydz + (\text{cyclic}) + \int B_i dt dx^i \quad (2.17)$$

である。(cyclic) と書いたのは $\int E_x dydz$ について x, y, z をサイクリックに添字を入れ替えた項である。ここから分かるように空間的に置かれた \mathcal{S}_2 に対しては、保存電荷は \mathcal{S}_2 を貫く電場を積分したものである。この場合は $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ を作用させることは、物理的には \mathcal{S}_2 を貫く電場を印加することに相当している。一方で時間方向に伸びた \mathcal{S}_2 に対しては保存電荷は \mathcal{S}_2 のうち空間方向に沿った磁場を積分したものである。この場合は $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ を作用させることは、物理的には \mathcal{S}_2 の空間方向に沿った磁場を印加することに相当している。

$U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ の荷電物体はウィルソンループ $W(\mathcal{L}) = \exp(iq \int_{\mathcal{L}} a)$ である。ただし q は対応する1形式対称性の電荷である。ウィルソンループはそのサポート \mathcal{L} が空間的に広がっていた場合、瞬間的な電流、あるいはそれを生成するような \mathcal{L} を貫く瞬間的な磁場とみなすことができる。一方で \mathcal{L} 時間的にも広がっていた時はウィルソンループは点電荷の生成・消滅を表していると解釈することができる。この場合は各時間一定面で電場が点電荷の間に生じているとみなすことができる。

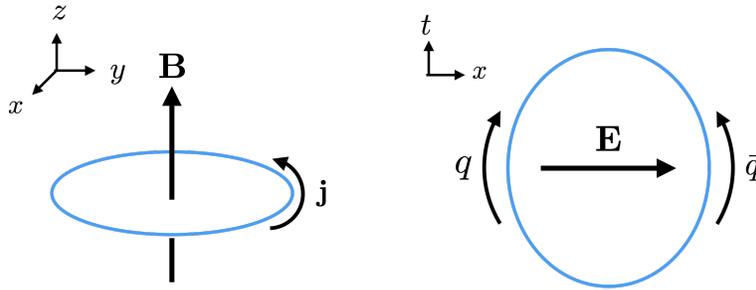


Figure 2.2: ウィルソンループ $W(\mathcal{L})$

$U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ は $W(\mathcal{L})$ との間非自明な絡み目を持つ時に1形式対称性変換を生成し、ウィルソンループに電荷に比例した位相因子が生じる。例えば Figure 2.3 の左側のような配位を考える。これは空間的に配置されたウィルソンループ $W(\mathcal{L})$ と時間的に配置された1形式対称性生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ が絡み目を成しているような配位のある時間一定面を図示したものである。

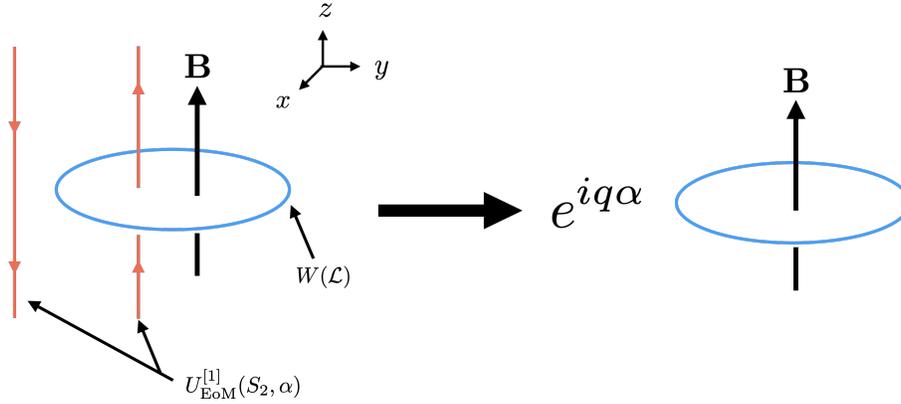


Figure 2.3: 1形式対称性変換

Figure 2.3 の右側の配位は、左側の配位から 1 形式対称性生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ をトポロジカルに変形して潰したものである。 \mathcal{L} と \mathcal{S}_2 が絡み目を形成していたので、この変形の際に必ず両者が交差する。この時に位相因子 $e^{iq\alpha}$ が生じることを表している。

この位相因子の物理的な解釈は次の通りである。上で議論したように時間的に配置された $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ は \mathcal{S}_2 の空間方向に沿った磁場を与えるのでこの配位はウィルソンループを貫くように z 方向に大きさ α の磁場を印加していることに他ならない。空間的に配置されたウィルソンループはループを貫く磁場を測るので、上述の位相因子 $e^{iq\alpha}$ は $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ によって印加された磁場による寄与である。以上の議論をまとめると、 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ とウィルソンループ $W(\mathcal{L})$ が絡み目を持つように配置することによってウィルソンループに対して 1 形式変換

$$W(\mathcal{L}) \rightarrow e^{iq\alpha} W(\mathcal{L}) \quad (2.18)$$

を生成することができた。これは場の立場からは光子 a に次の変換

$$a \rightarrow a + \Lambda_1 \quad (2.19)$$

ただし $\int_{\mathcal{L}} \Lambda_1 = \alpha$ 、を行ったことに他ならない。

次に、以上で議論した運動方程式由来の 1 形式対称性がウィルソンループに作用して変換を生成する事を、具体的な計算により確認する。本論文では特に対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{S}_2, \alpha)$ と $W(\mathcal{L})$ を背景ゲージ場の具体的な配位によって表現し、これらのゲージ変換を用いて計算を行う。ウィルソンループは B_2^M に特定の配位を与えることで表すことができる。具体的には、 $\exp(iq \int_{\mathcal{L}} a) = \exp(iq \int_{\Omega_{\mathcal{L}}} da) = \exp\left(2\pi iq \int_{\mathcal{M}_4} j_{\text{CW}}^{[1]} \wedge \delta_2(\Omega_{\mathcal{L}})\right)$ である。ただし q は電荷である。よってチャーン・ヴェイユ 1 形式対称性に対する背景ゲージ場に $B_2^M = 2\pi q \delta_2(\Omega_{\mathcal{L}})$

というゲージ場の配位を与えることは、ウィルソンループを挿入することに他ならない。すなわち、ウィルソンループの真空期待値を分配関数を用いて以下のように定義する。

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle \equiv Z[B_2^E = 0, B_2^M = 2\pi q\delta_2(\Omega_{\mathcal{L}})] \quad (2.20)$$

また、前述の通り運動方程式由来の1形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(S_2, \alpha)$ は $B_2^E = \alpha\delta_2(S_2)$ という配位を与えることで挿入することができる。よって対応する外場を印加することで次の相関関数を定義する。

$$\langle U_{\text{EoM}}^{[1]}(S_2, \alpha)W(\mathcal{L}) \rangle \equiv Z[B_2^E = \alpha\delta_2(S_2), B_2^M = 2\pi q\delta_2(\Omega_{\mathcal{L}})] \quad (2.21)$$

である。(2.21)と(2.20)は B_2^E を $\alpha\delta_2(S_2) \rightarrow 0$ というようにゲージ変換することで結びつく。このゲージ変換の際トーフト量子異常が生じることに注意する。トーフト量子異常は作用うち背景ゲージ場のみで書かれる部分をマッピングトーラス \mathcal{T}_5 上で積分することで評価できる。マッピングトーラスはFigure 2.4のように \mathcal{M}_4 に τ 軸を追加してゲージ変換を補間した5次元多様体である。ただし \mathcal{T}_5 上の背景ゲージ場 B_2^E, B_2^M は $\tau = 0$ でゲージ変換前の配位 $B_2^E = \alpha\delta_2(S_2), B_2^M = 2\pi q\delta_2(\Omega_L)$ であり、 $\tau = 1$ でゲージ変換後の配位 $B_2^E = 0, B_2^M = 2\pi q\delta_2(\Omega_{\mathcal{L}})$ と一致するように定義される。すなわち、

$$B_2^E = (1 - \tau)\alpha\delta_2(S_2), B_2^M = 2\pi q\delta_2(\Omega_{\mathcal{L}}) \quad (2.22)$$

のように定義される。

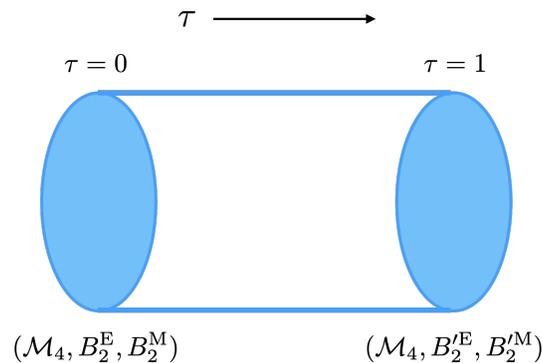


Figure 2.4: Mapping Torus \mathcal{T}_5

トーフト量子異常は(2.15)のうち外場のみで書かれる項 $\frac{1}{2\pi}B_2^E \wedge B_2^M$ を \mathcal{T}_5 上の場に格上

げし、 \mathcal{T}_5 上で積分することで評価することができる。

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_5} \frac{1}{2\pi} \mathcal{B}_2^E \wedge d\mathcal{B}_2^M &= \alpha q \int_{\mathcal{M}_4} \delta_2(S_2) \wedge \delta_2(\Omega_{\mathcal{L}}) \\ &= \alpha q \text{Link}(S_2, \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ただし $\text{Link}(*, *)$ は2つの多様体を引数としてとり、それらの絡み目数を返す関数である。以上より (2.21) と (2.20) の間に成り立つ次の関係を得る。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]}(S_2, \alpha) W(\mathcal{L}) \right\rangle = e^{\alpha q \text{Link}(S_2, \mathcal{L})} \langle W(\mathcal{L}) \rangle \quad (2.24)$$

これは確かに、運動方程式由来の1形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(S_2, \alpha)$ がウィルソンループ $W(\mathcal{L})$ に非自明に作用して、1形式対称性変換を生成していると解釈することができる。生じる位相因子は S_2, \mathcal{L} の絡み目数に比例しており、生成子をウィルソンループに絡まるように配置することで対応する対称性の変換を生成することができる。

次に、もう一方の大域的対称性であるチャーン・ヴェイユ1形式対称性の荷電物体はトーフトライン $T(\mathcal{L})$ である。トーフトラインは空間の一点に局在したモノポールが掃く世界線である。ウィルソンループの場合と同様にトーフトラインも外場に特定の配位を与えることで表すことができる。実際、運動方程式由来の1形式対称性に対する背景ゲージ場 B_2^E に対して $\oint_{S^2} B_{2,\text{defect}}^E = 2\pi q$ となるような配位によって実現できる。ただし S^2 はモノポールを囲むように空間的に配置された2次元球面である。例えば空間の原点にモノポールが局在している状況を考えると具体的には $B_{2,\text{defect}}^E = \frac{q}{2} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ のような配位を与えることでトーフトラインを表すことができる。この場合 $e^{i \int_{\mathcal{M}_4} j_{\text{EoM}}^{[1]} \wedge B_2^E} = e^{i \int B_r dt dr}$ であり、確かにトーフトラインを表している。ただし、 (r, ϑ, φ) は球座標、 B_r は r 方向の磁場である。よって先の場合と同様にトーフトラインの真空期待値を分配関数を用いて以下のように定義する。

$$\langle T(\mathcal{L}) \rangle \equiv Z[B_2^E = B_{2,\text{defect}}^E, B_2^M = 0] \quad (2.25)$$

一方、チャーン・ヴェイユ1形式対称性の生成子 $U_{\text{CW}}^{[1]}(S_2, \alpha)$ は $B_2^M = \alpha \delta_2(S_2)$ という配位を与えることで挿入することができる。よって対応する外場を印加することで次の相関関数を定義する。

$$\left\langle U_{\text{CW}}^{[1]}(S_2, \alpha) T(\mathcal{L}) \right\rangle \equiv Z[B_2^E = B_{2,\text{defect}}^E, B_2^M = \alpha \delta_2(S_2)] \quad (2.26)$$

である。今回も (2.26) をゲージ変換によって (2.25) に変形すると、トーフト量子異常が生じる。トーフト量子異常を評価すると次を得る。

$$\left\langle U_{\text{CW}}^{[1]}(S_2, \alpha) T(\mathcal{L}) \right\rangle = e^{\alpha q \text{Link}(S_2, \mathcal{L})} \langle T(\mathcal{L}) \rangle \quad (2.27)$$

これは確かにトーフトラインがチャーン・ヴェイユ1形式対称性の荷電物体になっていることを意味している。

以上のように対称性生成子とその荷電物体との間の関係はトーフト量子異常から読み取ることができる。本論文では他の模型の分析を行う際にも上と同様の方法を用いる。

2.3 高次群

この節では本論文の主題である高次群構造を議論する。特に次章以降の解析で重要となる背景ゲージ場に対するグリーン・シュワルツ機構と、オペレーター値不定性を導入する。

理論に複数の異なる階数の高次形式対称性が存在している時、これらの対称性が互いに独立ではなく互いに作用してこれらの対称性が混ざることがある。ここで対称性が混ざるとは、異なる階数の高次形式対称性の間の写像が存在するということである。例えば4次元のアクシオン電気力の高次群構造である3群には、パイファー・リフティングという写像が存在しており、これは二つの1形式対称性を2形式対称性に移すような写像である。対称性生成子の言葉では、ある1形式対称性生成子に別の1形式対称性生成子が作用して、2形式対称性の生成子が作り出されるといった構造である。このような階数の異なる高次形式対称性が混ざり合うような代数構造を高次群と呼ぶ。特に n 個の異なる階数の高次形式対称性が非自明に混ざるといような対称性を n 群対称性と呼ぶ。

数学的な立場からは高次群 [29, 32, 64–66] は群の高次圏 [67] への拡張である。高次群の圏論的な構成などについて物理学者向けに書かれた文献に [68] がある。本論文の主題であるアクシオン電気力学は4次元の時は3群の構造を持つことが知られているが、[52, 53] はアクシオン電気力学における高次群構造を2接合加群⁵を用いた数学的な立場からの取り扱いも議論されている。本論文では高次群構造に関して数学的な記述は行わず、むしろ場の理論における性質にのみ注目する。

ここからは高次群構造の諸性質をまとめる。以下の議論は3章および4章で扱うアクシオン電気力学における議論を念頭に置いているが、ここでの目的は高次群構造の性質を説明することなので詳細な議論には立ち入らない。アクシオン電気力学についてのより詳しい議論

⁵2-crossed module. 3つの群 (G, H, L) からなる代数構造。これらの群に加えて、2つの写像 $\partial_1 : L \rightarrow H, \partial_2 : H \rightarrow G$ 及び、 H, L に対する G 同変な作用、 $G \triangleright H \rightarrow H, G \triangleright L \rightarrow L$ 、パイファー・リフティング $\{H, H\} \rightarrow L$ によって構成される。2接合加群は接合加群 [69, 70] の拡張である。

は次章以降で行う。

理論が高次群構造を持つ時、大域的対称性に対する背景ゲージ場のゲージ変換則がグリーン・シュワルツ機構 [58]⁶ によって変形を受けることが知られている。例えばある4次元の理論に1形式対称性と2形式対称性が存在している状況を考え、対応する保存カレントをそれぞれ $j^{[1]}, j^{[2]}$ と表す。またこれらの大域的対称性に対して背景ゲージ場を導入する。対応する背景ゲージ場を B_2, C_3 とすると、作用には以下の最小結合項が導入される。

$$S_{\min} = \int d^4x [B_2 \wedge j^{[1]} + C_3 \wedge j^{[2]}] \quad (2.28)$$

これらの1形式対称性と2形式対称性が混ざって高次群構造を持つ状況では、ゲージ場の変換則は例えば次のようになる。

$$B_2 \rightarrow B_2 + d\Lambda_1 \quad (2.29)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + d\Lambda_2 - \frac{N}{4\pi}\Lambda_1 \wedge (B_2 + d\Lambda_1) - \frac{N}{4\pi}\Lambda_1 \wedge B_2 \quad (2.30)$$

B_2 に関しては通常のゲージ変換則であるが、 C_3 はグリーン・シュワルツ機構によって変形されている。つまり B_2 が非自明であれば、 B_2 のゲージ変換に伴って C_3 も同時に変換される。

ゲージ場の変換則がグリーン・シュワルツ機構によって変形されている時、対称性生成子の相関関数の間には次のような非自明な関係が生じる。ここでも背景ゲージ場に具体的な配位を与えることで相関関数を得る。(2.28) から、 $B_2 = \frac{2\pi m}{N}\delta_2(\mathcal{S}_1) + \frac{2\pi n}{N}\delta_2(\mathcal{S}_2)$ かつ $C_3 = 0$ という配位は $\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{S}_1, \frac{2\pi m}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{S}_2, \frac{2\pi n}{N} \right) \right\rangle$ に対応している。ここでゲージ変換 $B_2 \rightarrow B'_2 = \frac{2\pi n}{N}\delta_2(\mathcal{S}_2)$ を考えると、により C_3 は $0 \rightarrow -\frac{2\pi mn}{N}\delta_1(\Omega_{\mathcal{S}_1}) \wedge \delta_2(\mathcal{S}_2)$ のように変化する。ゲージ変換後の配位は $\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[2]} \left(\mathcal{W}_1 \cap \Omega_{\mathcal{W}_2}, -\frac{2\pi m_1 m_2}{N} \right) \right\rangle$ となる。ゲージ変換の前後でトーフフト量子異常が生じなければ⁷ 以下が成り立つ。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{S}_1, \frac{2\pi m}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{S}_2, \frac{2\pi n}{N} \right) \right\rangle = \left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{S}_2, \frac{2\pi m}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[2]} \left(\Omega_{\mathcal{S}_1} \cap \mathcal{S}_2, -\frac{2\pi mn}{N} \right) \right\rangle \quad (2.31)$$

この式は、左辺の一つ目の1形式対称性生成子がもう一方の生成子に作用して、右辺で2形式対称性の生成子を作り出したと解釈することができる。これは1形式対称の演算が1形式

⁶元々 [58] で導入されたグリーン・シュワルツ機構は力学的なゲージ場に対して適用されていたが、高次群構造を見る時には大域的対称性に対する背景ゲージ場に対してグリーン・シュワルツ機構が適用されていることに注意する。

⁷一般にはゲージ変換の前後ではトーフフト量子異常が生じる可能性がある。今念頭に置いているアクシオン電気力学の場合はトーフフト量子異常が生じない。

対称性のみで閉じておらず、2形式対称性という階数の異なる対称性と混合していることを意味し、確かに高次群構造になっている。実際これは4次元アクシオン電気力学で成り立つ関係であり、数学的には前述した3群構造におけるパイファー・リフティング、物理的には量子異常ホール効果に相当している。

次に高次群構造がある時の保存カレント性質を見る。ゲージ変換(2.29)、(2.3)の下で(2.28)は以下ようになる。ただしここでは変換パラメーターの1次の項だけに注目する。

$$S_{\min} \rightarrow S_{\min} + \int d^4x \Lambda_1 \wedge \left(dj^{[1]} - \frac{N}{4\pi} B_2 \wedge j^{[2]} \right) + \int d^4x \Lambda_2 \wedge dj^{[2]} \quad (2.32)$$

ここで、任意の変換パラメータ Λ_1, Λ_2 に対して S_{\min} がゲージ不変になる条件は以下である。

$$dj^{[1]} = \frac{N}{2\pi} B_2 \wedge j^{[2]} \quad (2.33)$$

$$dj^{[2]} = 0 \quad (2.34)$$

(2.34)は2形式対称性のカレントが保存していることを表している。一方で(2.33)は B_2 が非自明である時、1形式対称性のカレントが破れていることを示している。これは一見すると量子異常の存在を表しているように見えるが、カレントの破れが背景ゲージ場 B_2 に依存しているという点で量子異常とは区別される⁸。

場の理論における高次群構造をもう一つの別の立場から見る。今度は各対称性のカレントが(2.33)、(2.34)を満たしているが、ゲージ変換則はグリーン・シュワルツ機構による変形を受けておらず通常のものである状況を考える。つまり、

$$B_2 \rightarrow B_2 + d\Lambda_1 \quad (2.35)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + d\Lambda_2 \quad (2.36)$$

であるとする。この時 S_{\min} は次のように変換する。ただし(2.33)、(2.34)を用いた。

$$S_{\min} \rightarrow S_{\min} + \int d^4x \frac{N}{4\pi} j^{[2]} \wedge \Lambda_1 \wedge B_2 \quad (2.37)$$

この場合には上のようにゲージ不変性が失われる。実際には経路積分を用いて理論を量子化する際は S_{\min} を指数関数の肩に乗せるので、「通常の」ゲージ変換によって生じた項 $\frac{N}{4\pi} j^{[2]} \wedge \Lambda_1 \wedge B_2$ が $2\pi\mathbb{Z}$ に値をとっていれば不定性が存在するわけではない。後に議論するようにアクシオン

⁸例えば ABJ 量子異常 [71, 72] は軸性対称性が量子効果によって破れる現象であり、 $dj_A = \frac{1}{8\pi^2} da \wedge da$ のように力学的な場だけで表される。

電気力学の場合には $2\pi\mathbb{Z}$ に量子化されておらず理論の不定性になっている。不定性を与える項が演算子を含まず外場だけで書かれている時にはその項はトフーフト量子異常である。しかし $\frac{N}{4\pi}j^{[2]} \wedge \Lambda_1 \wedge B_2$ は $j^{[2]}$ という演算子を含んでいることに注意する。このような不定性はトフーフト量子異常と区別して、オペレーター値不定性⁹ [31, 53] と呼ばれる。

以上で議論したように高次群構造にはいくつかの見方がある。ゲージ変換の下で不定性が生じないようにすると、ゲージ変換則はグリーン・シュワルツ機構による変形をうける。一方、ゲージ変換則を通常のものにしておくとゲージ変換の下でオペレーター不定性が生じる。

本論文では次章以降、アキシオン電気力学の $2n$ 次元への一般化を行い、より具体的な解析を通して高次群構造を調べる。そこでの議論ではここで導入したしたオペレーター値不定性とグリーン・シュワルツ機構が重要な役割を持つ。

⁹英語文献では Operator-valued ambiguity あるいは Operator-valued anomaly と表現される。

Chapter 3

$2n$ 次元アクシオン電気力学における高次群構造

この章では $2n$ 次元アクシオン電気力学における高次群構造を調べる。ここでの解析は 4 次元のアクシオン電気力学の解析を行なった先行研究 [52, 53] の高次元への拡張になっている。ここでは一般の $2n$ の時も 4 次元の時と同様にオペレーター値不定性をチャーン・ヴェイユ対称性のゲージ化により取り除くことで高次群の構造が見られることを示す。その際、高次元への拡張によって新しく現れたチャーン・ヴェイユ対称性も全て相殺の過程に関わることを見る。

3.1 $2n$ 次元アクシオン電気力学

$2n$ 次元アクシオン電気力学は次の作用で与えられる。

$$S = - \int_{\mathcal{M}_{2n}} \left[\frac{v^2}{2} |d\phi|^2 + \frac{1}{2e^2} |da|^2 - \frac{N}{(2\pi)^n n!} \phi (da)^n \right]. \quad (3.1)$$

ただし ϕ はアクシオンであり、 $\phi \sim \phi + 2\pi$ の周期性を満たす場である。 $a = a_\mu dx^\mu$ は $U(1)$ ゲージ場すなわち光子を表している。 a はディラック量子化条件 $\int_{S_2} da = 2\pi\mathbb{Z}$ を満たす。ただし S_2 は 2 次元の閉多様体である。アクシオンと光子の結合項の定数 N は整数である。また、 $|\mathcal{X}|^2 = \mathcal{X} \wedge \star \mathcal{X}$ である。ただし \star は Hodge 作用素である。 \mathcal{M}_{2n} は理論が定義される $2n$ 次元の多様体であり、本稿ではメトリックは次を用いる。 $(-, +, \dots, +)$ 。この作用は [73] で導入された理論の任意の偶数次元への一般化であるということができる。

またこの模型の出自は4次元の時と同様に Peccei-Quinn 機構 [74–77] を用いて理解することができる。次の $2n$ 次元理論を考える。

$$S = \int_{\mathcal{M}_{2n}} dx^{2n} \left[\frac{1}{2e^2} |da|^2 + i\bar{\psi}_{\pm}^j \mathcal{D}\psi_{\pm}^j + \frac{1}{2} |d\varphi|^2 - V(\varphi) + \lambda\bar{\varphi}\psi_+^j\psi_-^j + \lambda\varphi\bar{\psi}_-^j\bar{\psi}_+^j \right] \quad (3.2)$$

ただし、

$$V(\varphi) = m^2 (|\varphi|^2 - v^2)^2 \quad (3.3)$$

これは $U(1)$ ゲージ場と N 個の Weyl フェルミオンからなる作用である。ただし j がフレーバーの添字で1から N までの整数に値をとるものとし、 j に関して和をとっている。また ψ_+ はゲージ対称性の下で基本表現、 ψ_- は半基本表現であるとする。 λ は湯川結合定数である。 φ は複素スカラー場であり、ゲージ対称性の下では中性であるとする。この理論には Peccei-Quinn 対称性 $U(1)_{\text{PQ}}$ が存在している。ただし ψ_{\pm} は $U(1)_{\text{PQ}}$ に関して $+1$ の電荷、 φ は $+2$ の電荷を持っている。

ポテンシャル (3.3) により $U(1)_{\text{PQ}}$ は自発的に破れる。 $\varphi = ve^{i\phi}$ で理論を展開すると、

$$S = \int_{\mathcal{M}_{2n}} dx^{2n} \left[-\frac{1}{2e^2} |da|^2 - i\bar{\psi}_{\pm}^j \mathcal{D}\psi_{\pm}^j - \frac{v^2}{2} |d\phi|^2 + \lambda ve^{-i\phi}\psi_{\pm}^j\psi_{\pm}^j + \lambda ve^{i\phi}\bar{\psi}_{\pm}^j\bar{\psi}_{\pm}^j \right] \quad (3.4)$$

ここで $\lambda ve^{-i\phi}\psi_{\pm}^j\psi_{\pm}^j$ のうち ϕ 依存性を ψ_{\pm} の $U(1)$ 変換 $\psi_{\pm} \rightarrow e^{i\phi/2}\psi_{\pm}$ によって消去する。この時、経路積分の測度の変換によって量子異常が生じる [78, 79] ことに注意する。すなわち、

$$\mathcal{D}\bar{\psi}^j \mathcal{D}\psi^j \rightarrow \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iN\phi \cdot \text{ind} \mathcal{D}} \quad (3.5)$$

Atiyah-Singer の指数定理から、

$$\text{ind} \mathcal{D} = \int_{\mathcal{M}_{2n}} \frac{1}{(2\pi)^n n!} F^n \quad (3.6)$$

である。フェルミオンの質量 $m_{\psi} = \lambda v$ よりも十分低エネルギーでの有効理論は次で記述される。

$$S = - \int_{\mathcal{M}_{2n}} \left[\frac{v^2}{2} |d\phi|^2 + \frac{1}{2e^2} |da|^2 - \frac{N}{(2\pi)^n n!} \phi(da)^n \right] \quad (3.7)$$

これはまさに今考えている $2n$ 次元アクシオン電気力学の作用 (3.1) である。以下では質量次元 $(n-1)$ のパラメーター v 、および $U(1)$ ゲージ理論の結合定数 e は1として扱う。

3.2 対称性

ここでは上の理論 (3.1) の大域的対称性を見る。この理論は複数の高次形式形式対称性 [1] を有しており、これらはその保存則の起源に応じて2つに分類することができる。一つはカレントの保存則が運動方程式によって保証される対称性であり、本論文では明らかな場合を除いてこれを運動方程式由来の対称性と明示的に書く。もう一方の対称性は2.2節で導入したチャーン・ヴェイユ対称性である。つまりカレントの保存則がビアンキ恒等式に由来する対称性である。

まず運動方程式由来の対称性について議論する。この理論には ϕ, a それぞれの変分によって得られる2つの運動方程式が存在しており、実際それぞれが0形式対称性、1形式対称性のカレント保存則を導く。0形式対称性 $\mathbb{Z}_N^{[0]}$ はアクションのシフトに対する対称性であり、アクションの運動方程式に由来する。そのカレントは以下の形

$$j_{\text{EoM}}^{[0]} = -\star d\phi - \frac{N}{(2\pi)^n n!} a(da)^{n-1}. \quad (3.8)$$

を持つ。このカレントを $(2n-1)$ 次元の多様体 \mathcal{D}_{2n-1} 上で積分し指数関数の肩に乗せることでこの対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[0]}$ を得る。

$$U_{\text{EoM}}^{[0]}(\mathcal{D}_{2n-1}, \frac{2\pi m}{N}) = e^{\frac{2i\pi m}{N} \int_{\mathcal{D}_{2n-1}} j_{\text{EoM}}^{[0]}} \quad (3.9)$$

ただし、 $m \in \mathbb{Z}$ 。以下でもこの例と同じように対称性生成子の第一引数はその生成子が定義される多様体、第二引数はそれが生成する変換の大きさを表す。同様に、1形式対称性 $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ は光子の運動方程式に由来する。そのカレントは以下の形

$$j_{\text{EoM}}^{[1]} = \star da - \frac{N}{(2\pi)^n (n-1)!} \phi(da)^{n-1}. \quad (3.10)$$

を持つ。このカレントを $(2n-2)$ 次元の多様体 \mathcal{D}_{2n-2} 上で積分し指数関数の肩に乗せることでこの対称性の生成子 U_{aE} を得る。

$$U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{D}_{2n-2}, \frac{2\pi m}{N}) = e^{\frac{2i\pi m}{N} \int_{\mathcal{D}_{2n-2}} j_{\text{EoM}}^{[1]}}. \quad (3.11)$$

チャーン・ヴェイユ対称性は ϕ, a のビアンキ恒等式に由来する対称性である。実際この理論には $2n$ 個のチャーン・ヴェイユ対称性が存在し、それらは (-1) 形式, 0 形式, \dots , $(2n-2)$ 形式 $U(1)$ 対称性である。これらの対称性のカレントは、 $d\phi, da$ のウェッジ積で書かれる。よっ

てこれらのカレントに微分作用素 d を作用すると 0 になり、確かに保存カレントになっている。整数 r ($0 \leq r \leq n-1$) に対して、 $(2r)$ 形式対称性はカレントは次の形をもつ。

$$j_{\text{CW}}^{[2r]} = \frac{1}{(2\pi)^{n-r}(n-r-1)!} d\phi (da)^{n-r-1} \quad (3.12)$$

このカレントを $(2n-2r-1)$ 次元の多様体 $\mathcal{D}_{2n-2r-1}$ 上で積分して得られる電荷を指数関数の肩に乗せることで対称性の生成子 $U_{\text{CW}}^{[2r]}$ を得る。

$$U_{\text{CW}}^{[2r]}(\mathcal{D}_{2n-2r-1}, \gamma) = e^{i\gamma \oint_{\mathcal{D}_{2n-2r-1}} j_{\text{CW}}^{[2r]}} \quad (3.13)$$

ただし、 $\gamma \in \mathbb{R}$ 。一方で $(2r-1)$ 形式対称性はカレントは次の形で表される。

$$j_{\text{CW}}^{[2r-1]} = \frac{1}{(2\pi)^{n-r}(n-r)!} (da)^{n-r}. \quad (3.14)$$

このカレントを $(2n-2r)$ 次元の多様体 \mathcal{D}_{2n-2r} 上で積分して得られる電荷を指数関数の肩に乗せることで対称性の生成子 $U_{\text{CW}}^{[2r-1]}$ を得る。

$$U_{\text{CW}}^{[2r-1]}(\mathcal{D}_{2n-2r}, \gamma) = e^{i\gamma \oint_{\mathcal{D}_{2n-2r}} j_{\text{CW}}^{[2r-1]}} \quad (3.15)$$

(3.12),(3.14)における各カレントの係数は、これらの電荷が $2\pi\mathbb{Z}$ に量子化されるように選んだ。

3.3 背景ゲージ場の導入

ここでは以上で議論した対称性に対する背景ゲージ場を [53] と同様の方法で導入する。特に前章で導入した対称性のう運動方程式に由来する対称性である、 $\mathbb{Z}_N^{[0]}, \mathbb{Z}_N^{[1]}$ のゲージ化を行うと、[53] の議論で指摘されているように、オペレーター値不定性が生じる。本稿で議論する $2n$ 次元のアクシオン電気力学では、オペレーター値不定性を消去するためには、1形式, \dots , $(2n-2)$ 形式チャーン・ヴェイユ対称性を同時にゲージ化する必要があることを示す。このチャーン・ヴェイユ対称性のゲージ化で導入される各対称性に対する背景ゲージ場はグリーン・シュワルツ機構 [58] によって変更を受けることを見る。

まず運動方程式由来の 1 形式対称性 $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ をゲージ化する。光子 a に対する以下の変換

$$a \rightarrow a + \Lambda_1 \quad (3.16)$$

に対して以下のように変換する背景ゲージ場 $B_2 (= \frac{1}{N} dB_1)$

$$B_2 \rightarrow B_2 + d\Lambda_1, \quad B_1 \rightarrow B_1 + N\Lambda_1 \quad (3.17)$$

を導入する。ただし Λ_1 は $\int d\Lambda_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ と規格化されているものとする。作用 (3.1) で $da \rightarrow da - B_2$ の置き換えを行うことでこの変換の下で理論を不変にすることができる。このゲージ化された理論では、トポロジカル項に含まれる外場の非線形な項により $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ の下で不変にならない。この問題を見るために、ゲージ化された理論のトポロジカル項を以下のようにより元の理論より 1次元高い $(2n+1)$ 次元多様体 $\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}$ で定義する。ただし $\partial\Omega_{\mathcal{M}_{2n}} = \mathcal{M}_{2n}$ とする。

$$\frac{N}{(2\pi)^n n!} \int_{\mathcal{M}_{2n}} \phi (da - B_2)^n = \frac{N}{(2\pi)^n n!} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} d\phi (da - B_2)^n \quad (3.18)$$

この時 $\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}$ を導入する際にその取り方によって不定性がある。この不定性を見るために、 $\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}$ で定義された理論と別の多様体 $\Omega'_{\mathcal{M}_{2n}}$ で定義された理論を貼り合わせて、 $(2n+1)$ 次元の閉多様体 $\mathcal{Z}_{2n+1} = \Omega_{\mathcal{M}_{2n}} \sqcup \overline{\Omega'_{\mathcal{M}_{2n}}}$ で定義された理論を考える。理論が $\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}$ の取り方によって不定性をもたないならば \mathcal{Z}_{2n+1} で積分すると 1 になるが、それ以外の場合は理論が不定性を持つことを表す。実際、(3.18) に含まれる以下の項は不定性を持つ。

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{r+1} N}{(2\pi)^n (n-r-1)! (r+1)!} d\phi \wedge (da)^{n-r-1} \wedge (B_2)^{r+1}. \quad (3.19)$$

例えば上の (3.19) に含まれる $\frac{N}{(2\pi)^n n!} d\phi (B_2)^n$ を具体的に見る。この項を \mathcal{Z}_{2n+1} で積分すると、

$$\frac{N}{(2\pi)^n n!} \int_{\mathcal{Z}_{2n+1}} d\phi (B_2)^n = \frac{1}{(2\pi)^n N^{n-1} n!} \int_{\mathcal{Z}_{2n+1}} d\phi (dB_1)^n \in \frac{2\pi\mathbb{Z}}{N^{n-1}} \quad (3.20)$$

となり不定性を持つことが分かる。これらの不定性を持つ項は力学的な場に依存している。これはまさに 2.3 節で議論したオペレーター値不定性である。そこで議論したように有効作用のゲージ不変性を保つためにオペレーター値不定性を消去するとグリーン・シュワルツ機構によって外場の変換則が変形される。

以下では実際にオペレーター値不定性を消去する手続きを議論する。これらのオペレーター値不定性は適切な相殺項を導入することで消去することができる。以下で実際に相殺項を決定する。オペレーター値不定性 (3.19) を見ると、 $d\phi \wedge (da)^{n-r-1}$ ($\forall r \in 1, \dots, n-1$) を含むことが分かる。これは $(2r)$ 形式チャーン・ヴェイユ対称性 (3.12) を用いて相殺することができる。ただし、いま $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ をゲージ化しているので (3.12) をそのまま使うことはできないことに注意する。ここでも $da \rightarrow da - B_2$ の置き換えをおこなったゲージ不変なカレントを用いるべきである。このことを明記するために、以下では $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ がゲージ化された下での $(2r)$ 形式チャーン・ヴェイユ対称性のカレントを $j_{\text{CW,gauged}}^{[2r]}$ と書く。[53] で議論される 4次元の時

には $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ のゲージ化に伴い現れるオペレーター値不定性の相殺の際、ここでの議論のようにゲージ不変なカレントを導入する必要はなかったが、これは4次元の時に現れる不定性が $d\phi$ に比例するものしか現れなかったからである。一般の $2n$ 次元では不定性に da も含むため導入する相殺項のゲージ不変性の議論が必要になることに注意する。

ここでこれらの $(n-1)$ 個のチャーン・ヴェイユ対称性をゲージ化し、対応する背景ゲージ場 X_{2r+1} を導入する。また未知の $(2r+2)$ 形式場である α_{2r+2} を用いて、 $(2r)$ 形式 チャーン・ヴェイユ対称性の場の強さ $Y_{2r+2} = dX_{2r+1} + \alpha_{2r+2}$ を導入する。上で導入された、 $j_{\text{CW,gauged}}^{[2r]}$ と Y_{2r+2} を用いて次の相殺項 ΔS_{2r} を導入する。

$$\sum_{r=1}^{n-1} \Delta S_{2r} \equiv - \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\Omega, \mathcal{M}_{2n}} j_{\text{CW,gauged}}^{[2r]} \wedge Y_{2r+2} \quad (3.21)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} d\phi (da)^k \sum_{r=1}^{n-k-1} \frac{(-1)^{n-k-r}}{(2\pi)^{n-r} k! (n-k-r-1)!} (B_2)^{n-r-k-1} \wedge Y_{2r+2} \quad (3.22)$$

これらの相殺項を (3.18) に加えて、オペレーター値不定性 (3.19) を消去するようにして Y_{2r+2} に含まれる α_{2r+2} を決定する。実際、トポロジカル項 (3.18) と相殺項 (3.22) の和は次の形になる。

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-k-r}}{(2\pi)^{n-r} k! (n-k)!} d\phi (da)^k \left\{ (B_2)^{n-k} + \sum_{r=1}^{n-k-1} \frac{(-1)^r (2\pi)^r (n-k)!}{(n-k-r-1)! N} (B_2)^{n-k-r-1} \wedge Y_{2r+2} \right\}. \quad (3.23)$$

この (3.23) から α_{2r+2} を決定する。具体的には外場についての非線形な項を相殺するように α_{2r+2} を選ばば良い。ここで中括弧の中に含まれる r に関する和の範囲を見ると、これは k に依存している。実際、ある k に対する中括弧の中には $n-k-1$ 個の未知の場 α_{2r+2} が含まれている。そのためまずは $k = n-2$ の未知の場が一つ、すなわち α_4 だけ含まれている場合を考え、まず α_4 を決定する。この場合は $\alpha_4 = \frac{N}{4\pi} (B_2)^2$ と計算することができ、 $Y_4 = dX_3 + \frac{N}{4\pi} (B_2)^2$ となる。

次に $k = n-3$ の場合を考える。この時は中括弧の中に α_4, α_6 が含まれるが、上の議論で既に α_4 は決定されているために未知の場は α_6 だけである。よって、上の議論と同様に外場に関しての非線形な項を相殺するようにして α_6 を決定することができる。以下も同様の議論を繰り返すことで、帰納的に $\alpha_8, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{2n}$ の表式を得ることができ、全ての未知の場を決定できる。これらの具体形は後の章で $n=3$ の場合を例に議論する。

以上によりオペレーター値不定性を相殺した形で $2n$ 次元のアクション電気力学の運動方

程式由来の 1 形式対称性 $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ をゲージ化した理論を得た。

$$S' = - \int_{\mathcal{M}_{2n}} \left(\frac{1}{2} |d\phi|^2 + \frac{1}{2} |da - B_2|^2 \right) + \frac{N}{(2\pi)^n n!} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_6}} d\phi \wedge (da - B_2)^n - \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_6}} j_{CW}^{[2r]} \wedge Y_{2r+2}. \quad (3.24)$$

次に、ここからさらに運動方程式由来の 0 形式対称性 $\mathbb{Z}_N^{[0]}$ をゲージ化する。アキソン ϕ に対する以下の変換

$$\phi \rightarrow \phi + \Lambda_0 \quad (3.25)$$

に対して以下のように変換する背景ゲージ場 $A_1 (= \frac{1}{N} dA_0)$

$$A_1 \rightarrow A_1 + d\Lambda_0, \quad A_0 \rightarrow A_0 + N\Lambda_0 \quad (3.26)$$

を導入する。ただし Λ_0 は $\int d\Lambda_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ と規格化されているものとする。(3.23) で $d\phi \rightarrow d\phi - A_1$ の置き換えを行うことで、理論を $\mathbb{Z}_N^{[0]}$ ゲージ変換に対して不変にすることができる。以上のゲージ化を行ったことで、新しくオペレーター値不定性が生じる。今回は、トポロジカル項からだけではなく上で導入した相殺項からも不定性が生じることに注意する。 $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ と $\mathbb{Z}_N^{[0]}$ をゲージ化した理論におけるトポロジカル項と相殺項を $\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}$ で定義する以下のようなになる。

$$\frac{N}{(2\pi)^n n!} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} (d\phi - A_1) \wedge (da - B_2)^n - \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} \frac{1}{(2\pi)^{n-r} (n-r-1)!} (d\phi - A_1) \wedge (da - B_2)^{n-r} \wedge Y_{2r+2}. \quad (3.27)$$

ここから生じるオペレーター値不定性は、

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} N}{(2\pi)^{n-r} k! (n-k)!} (da)^k \wedge A_1 \wedge (B_2)^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-2} (da)^k \sum_{r=1}^{n-k-1} \frac{(-1)^{n-k-r}}{(2\pi)^{n-r} k! (n-k-r-1)!} A_1 \wedge (B_2)^{n-k-r-1} \wedge Y_{2r+2}. \quad (3.28)$$

である。ここで、(3.27) は (3.28) 以外にも不定性のある項を持っていることに注意する。実際外場だけで書かれる不定な項が存在している ((3.28) の $k=0$ の場合に相当) が、これはトーフト量子異常でありオペレーター値不定性ではないので相殺する必要はない。

このオペレーター値不定性も上での議論と同様に適切な相殺項を挿入することで消去することができる。実際今回は $(2r-1)$ 形式 チャーン・ヴェイユ対称性 (3.14) を用いて相殺す

ることができる。また今回も $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ をゲージ化しているので $da \rightarrow da - B_2$ の置き換えをおこなったゲージ不変なカレントを用いる。これを明記するために、以下では $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ がゲージ化された下での $(2r-1)$ 形式 チャーン・ヴェイユ対称性のカレントを $j_{\text{CW,gauged}}^{[2r-1]}$ と書く。ここでこれらの $(n-1)$ 個のチャーン・ヴェイユ対称性をゲージ化し、それぞれに対応する背景ゲージ場 X_{2r} を導入する。また未知の $(2r+1)$ 形式場である α_{2r+1} を用いて、 $(2r-1)$ 形式 チャーン・ヴェイユ対称性の場の強さ $Y_{2r+1} = dX_{2r} + \alpha_{2r+1}$ を導入する。上で導入された、 $j_{\text{CW,gauged}}^{[2r-1]}$ と Y_{2r+1} を用いて次の相殺項 ΔS_{2r-1} を導入する。

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n-1} \Delta S_{2r-1} &\equiv \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} j_{\text{CW,gauged}}^{[2r-1]} \wedge Y_{2r+1} \\ &\supset \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} \sum_{k=1}^{n-1} (da)^k \sum_{r=1}^{n-k} \frac{(-1)^{n-r-k}}{(2\pi)^{n-r} k! (n-r-k)!} (B_2)^{n-r-k} \wedge Y_{2r+1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

ただし (3.29) にはオペレーター値不定性 (3.28) の相殺に関係する項のみを書いた。実際、 $\sum_{r=1}^{n-1} \Delta S_{2r-1}$ にはこれ以外にも $\sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r}}{(2\pi)^{n-r} (n-r)!} (B_2)^{n-r} \wedge Y_{2r+1}$ が含まれているがこれらの項はオペレーター値不定性の相殺には関係しない項である。

(3.29) の相殺項を (3.27) に加えて、オペレーター値不定性 (3.28) を消去するようにして Y_{2r+1} に含まれる α_{2r+1} を決定する。具体的には (3.29) と (3.27) の和は次の形になる。

$$\begin{aligned} &(da)^{n-1} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} Y_3 + \frac{N}{(2\pi)^n (n-1)!} A_1 \wedge B_2 \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2} (da)^k \left\{ \sum_{r=1}^{n-k} \frac{(-1)^{n-k-r}}{(2\pi)^{n-r} k! (n-k-r)!} (B_2)^{n-k-r} \wedge Y_{2r+1} \right. \\ &\left. - \sum_{r=1}^{n-k-1} \frac{(-1)^{n-k-r}}{(2\pi)^{n-r} k! (n-k-r-1)!} A_1 \wedge (B_2)^{n-k-r-1} \wedge Y_{2r+2} - \frac{(-1)^{n-k} N}{(2\pi)^n k! (n-k)!} A_1 \wedge (B_2)^{n-k} \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

まず、(3.30) の 1 行目の中括弧の中には 1 つの未知の場 α_3 が含まれる。この中括弧の中で外場についての非線形な項を相殺するように α_3 を決定する。実際にこの時 $\alpha_3 = -\frac{N}{2\pi} A_1 \wedge B_2$ と決定することができ、 $Y_3 = dX_2 - \frac{N}{2\pi} A_1 \wedge B_2$ となる。次に、(3.30) の 2、3 行目の中括弧を見る。 $k = n-2$ の場合には中括弧の中に $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ が含まれる。しかし α_3 は直上の議論で既に決定されており、 α_4 は前述の $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ の背景ゲージ化の議論で決定されている。つまりここでも未知の場は α_5 の 1 つだけであり、上と同様に中括弧内で外場の非線形項を消去するようにして形を決めることができる。以下も同様の議論を繰り返すことで、帰納的に $\alpha_7, \alpha_9, \dots, \alpha_{2n-1}$

を順番に求めることができ、全ての未知の場を決定できる。これらの具体形もまた後の章で $n = 3$ の場合を例に議論する。

以上の議論から、 $\mathbb{Z}_N^{[0]}, \mathbb{Z}_N^{[1]}$ のゲージ化に対して、ゲージ不変かつオペレーター値不定性のない作用は次の形をもつ。

$$S'' = - \int_{\mathcal{M}_{2n}} \left(\frac{1}{2} |d\phi - A_1|^2 + \frac{1}{2} |da - B_2|^2 \right) + \frac{N}{(2\pi)^n n!} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} (d\phi - A_1) \wedge (da - B_2)^n + \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} \Delta S_{2r} + \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} \Delta S_{2r-1} \quad (3.31)$$

相殺項に含まれる場の強さ $Y_{2r+1} = dX_{2r} + \alpha_{2r+1}$, $Y_{2r+2} = dX_{2r+1} + \alpha_{2r+2}$ に関して、 $\alpha_{2r+1}, \alpha_{2r+2}$ は外場のみで書かれており、これらもまたゲージ変換の下で非自明な変換をする。そのため dX_{2r}, dX_{2r+1} のゲージ変換則は、それぞれの場の強さ Y_{2r+1}, Y_{2r+2} をゲージ不変にするようにグリーン・シュワルツ機構 [58] によって決められる。このような変換則は理論に高次群の構造があることを示唆している [30]。具体的なゲージ変換則および高次群に関する議論は次の節で $n = 3$ の場合を例として議論する。

(3.31) を整理すると以下の式を得る。

$$S'' = \int_{\mathcal{M}_{2n}} \left(-\frac{1}{2} |d\phi|^2 - \frac{1}{2} |da|^2 + \frac{N}{8\pi^2} \phi(da)^2 + j_{\phi E} \wedge A_1 + j_{aE} \wedge B_2 + \sum_{r=1}^{n-1} j_{\text{CW}}^{[2r]} \wedge X_{2r+1} + \sum_{r=1}^{n-1} j_{\text{CW}}^{[2r-1]} \wedge X_{2r} \right) + \frac{(-1)^{n+1} N}{(2\pi)^n n!} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} A_1 \wedge (B_2)^n - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r}}{(2\pi)^{n-r} (n-r-1)!} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} A_1 \wedge (B_2)^{n-r-1} \wedge Y_{2r+2} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r}}{(2\pi)^{n-r} (n-r)!} \int_{\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}} (B_2)^{n-r} \wedge Y_{2r+1}. \quad (3.32)$$

これまでの議論から明らかだが、(3.32) では確かにオペレーター値不定性が存在していないことが確認できる。この作用は元の作用 (3.1) と各対称性のカレントとゲージ場のミニマル結合項、そして外場のみで書かれる項からなる。実際 (3.32) の 2,3 行目は外場のみで書かれている。これらの外場のみからなる項は $\Omega_{\mathcal{M}_{2n}}$ の取り方によって不定性があるが、外場のみからなるためこの不定性が存在しても問題ない。これらは \mathcal{Z}_{2n+1} 上で積分することでトーフト量子異常を与える。

Chapter 4

6次元系の解析

ここでは上で議論した $2n$ 次元のアクシオン電気力学において $n = 3$ 、すなわち 6次元の場合を具体的に調べる。これは [52, 53] で議論されている $n = 2$ の次に単純な場合である。まず各対称性に対する背景ゲージ場に対する場の強さやゲージ変換則を書き下す。それらのゲージ変換則を利用して高次群構造を反映する相関関数間の関係式を網羅的に計算する。4次元の時に存在したアクシオンドメインウォールに対するウィッテン効果や異常ホール効果が6次元ではどのように拡張されるのかといった高次群構造の物理的な解釈についても議論する。また4次元の時には見られなかった、高次元に特有であると考えられる高次群構造について議論を行う。

(3.1) に対応する作用は、

$$S_{6d} = - \int_{\mathcal{M}_6} \left(\frac{1}{2} |d\phi|^2 + \frac{1}{2} |da|^2 - \frac{N}{48\pi^3} \phi (da)^3 \right) \quad (4.1)$$

である。この作用に対して ϕ, a のそれぞれに関して変分をとることで以下の運動方程式を得る。

$$\partial^2 \phi = - \frac{N}{384\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \quad (4.2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{N}{64\pi^2} \epsilon^{\nu\rho\sigma\tau\alpha\beta} (\partial_\rho \phi) F_{\sigma\tau} F_{\alpha\beta} \quad (4.3)$$

4次元のアクシオン電気力学ではアクシオンドメインウォールに関してのウィッテン効果や異常ホール効果が見られた [52, 53] が、これらの運動方程式からこれらの現象の6次元版を見ることが出来る。

まず運動方程式 (4.3) に関して、 $\nu = 0$ の場合で場の時間変化がない状況を考えると、次の式 $\partial_i F^{i0} = \frac{N}{64\pi^2} \epsilon^{0ijklm} (\partial_i \phi) F_{jk} F_{lm}$ が得られる。ただしローマ字は空間成分を表す。これはアキシオンドメインウォールに対するウィッテン効果の6次元版である。実際左辺は電場の湧き出しを表している。一方、右辺の $\partial_i \phi$ はアキシオンドメインウォールによって非自明な寄与を与え、さらに jk -平面を貫く磁場、 lm -平面を貫く磁場をかけることで右辺全体が非自明になる。これは磁場がドメインウォールを貫くと電荷が生じることを表している。

また、運動方程式 (4.3) の $\nu = m$ の場合 $\partial_n F^{nm} = -\frac{N}{64\pi^2} \epsilon^{0ijklm} (\partial_i \phi) E_j F_{kl}$ はアキシオン電気力学におけるアンペール=マクスウェルの法則であり、異常ホール効果の6次元版と解釈することができる。具体的には、アキシオンの渦上の配位によって $\partial_i \phi$ が非自明になり、そこに電場と磁場をかけることで電流が誘導されるという式である。

このように運動方程式の立場からアキシオンドメインウォールに関してのウィッテン効果や異常ホール効果といった物理現象を見ることができ、以下では [52, 53] と同様にこれらの現象を対称性の観点から議論する。またこれらの現象以外にも高次元の場合に初めて現れる現象を見る。

ここで前節で議論した一般の $2n$ 次元における対称性と、それに対応する背景ゲージ場の変換則や場の強さなどを $n = 3$ の場合に明示的に示す。この理論の大域的対称性は、運動方程式由来の対称性として0形式対称性 $\mathbb{Z}_N^{[0]}$ と1形式対称性 $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ の2つが存在し、一方でチャー・ヴェイユ対称性としては1形式、 \dots , 4形式対称性の4つが存在する。これらの生成子、群、カレント、対応するゲージ場を以下にまとめる。ただし、ここでは3.3節で導入された X_2, X_3, X_4, X_5 はそれぞれ $B_2^{\text{CW}}, C_3, D_4, E_5$ と書いている。

生成子	群	保存カレント	ゲージ場
$U_{\text{EoM}}^{[0]}$	\mathbb{Z}_N	$j_{\text{EoM}}^{[0]} = -\star d\phi - \frac{N}{48\pi^3} a \wedge da \wedge da$	A_1
$U_{\text{EoM}}^{[1]}$	\mathbb{Z}_N	$j_{\text{EoM}}^{[1]} = \star da - \frac{N}{16\pi^3} \phi \wedge da \wedge da$	B_2
$U_{\text{CW}}^{[1]}$	$U(1)$	$j_{\text{CW}}^{[1]} = \frac{1}{8\pi^2} da \wedge da$	B_2^{CW}
$U_{\text{CW}}^{[2]}$	$U(1)$	$j_{\text{CW}}^{[2]} = \frac{1}{4\pi^2} d\phi \wedge da$	C_3
$U_{\text{CW}}^{[3]}$	$U(1)$	$j_{\text{CW}}^{[3]} = \frac{1}{2\pi} da$	D_4
$U_{\text{CW}}^{[4]}$	$U(1)$	$j_{\text{CW}}^{[4]} = \frac{1}{2\pi} d\phi$	E_5

また、各場の強さは以下の形をしている。ただし、 Y_3, Y_4, Y_5, Y_6 を G_3, H_4, I_5, J_6 と書いて

いる。

$$G_3 = dB_2^{\text{CW}} - \frac{N}{2\pi} A_1 \wedge B_2, \quad (4.4)$$

$$H_4 = dC_3 + \frac{N}{4\pi} B_2 \wedge B_2, \quad (4.5)$$

$$I_5 = dD_4 - \frac{1}{2\pi} A_1 \wedge dC_3 + \frac{1}{2\pi} B_2 \wedge dB_2^{\text{CW}} - \frac{N}{4\pi^2} A_1 \wedge B_2 \wedge B_2, \quad (4.6)$$

$$J_6 = dE_5 + \frac{1}{2\pi} B_2 \wedge dC_3 + \frac{N}{12\pi^2} B_2 \wedge B_2 \wedge B_2, \quad (4.7)$$

これらは前章でも議論した通りグリーン・シュワルツ機構により修正を受けた場の強さであるので、チャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場 $B_2^{\text{CW}}, C_3, D_4, E_5$ の変換則は G_3, H_4, I_5, J_6 のゲージ不変性が保たれるように決められる。よって、以下のような変換則を持つ。

$$B_2^{\text{CW}} \rightarrow B_2^{\text{CW}} + d\Lambda_1^{\text{CW}} - \frac{N}{2\pi} (A_1 + d\Lambda_0) \wedge \Lambda_1 + \frac{N}{2\pi} B_2 \wedge \Lambda_0, \quad (4.8)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + d\Lambda_2 - \frac{N}{4\pi} (B_2 + d\Lambda_1) \wedge \Lambda_1 - \frac{N}{4\pi} B_2 \wedge \Lambda_1, \quad (4.9)$$

$$D_4 \rightarrow D_4 + d\Lambda_3 - \frac{1}{2\pi} d\Lambda_0 \wedge C_3 - \frac{1}{2\pi} d\Lambda_1 \wedge B_2^{\text{CW}} - \frac{N}{4\pi^2} \Lambda_0 \wedge B_2 \wedge d\Lambda_1 + \frac{N}{8\pi^2} (A_1 + d\Lambda_0) \wedge \Lambda_1 \wedge d\Lambda_1, \quad (4.10)$$

$$E_5 \rightarrow E_5 + d\Lambda_4 - \frac{N}{8\pi^2} B_2 \wedge (B_2 + d\Lambda_1) \wedge \Lambda_1 - \frac{N}{12\pi^2} d\Lambda_1 \wedge d\Lambda_1 \wedge \Lambda_1 - \frac{1}{2\pi} d\Lambda_1 \wedge C_3 + \frac{N}{8\pi^2} (B_2 + d\Lambda_1)^2 \wedge \Lambda_1, \quad (4.11)$$

一般の $2n$ 次元の場合の計算で見たように、全ての運動方程式由来の対称性をゲージ化し、かつ適当な相殺項を導入することで全てのオペレータ値不定性を消去した式 (3.32) は、元の作用 (B.1)、最小相互作用項、外場のみからなる項からなる。6次元の場合にこれを経路積分することで分配関数は以下の式で表すことができる。

$$Z[A_1, B_2, B_2^{\text{CW}}, C_3, D_4, E_5] = \int \mathcal{D}[\phi, a] e^{iS_{6d} + iS_{\text{min}} + iS_{\text{bkg}}} \quad (4.12)$$

ただし、

$$S_{\text{min}} = \int_{\mathcal{M}_6} \left(j_{\text{EoM}}^{[0]} \wedge A_1 + j_{\text{EoM}}^{[1]} \wedge B_2 + j_{\text{CW}}^{[1]} \wedge B_2^{\text{CW}} + j_{\text{CW}}^{[2]} \wedge C_3 + j_{\text{CW}}^{[3]} \wedge D_4 + j_{\text{CW}}^{[4]} \wedge E_5 \right), \quad (4.13)$$

$$S_{\text{bkg}} = \int_{\Omega_{\mathcal{M}_6}} \frac{N}{16\pi^3} A_1 \wedge (B_2)^3 - \frac{1}{8\pi^2} (B_2)^2 \wedge dB_2^{\text{CW}} + \frac{1}{4\pi^2} A_1 \wedge B_2 \wedge dC_3 - \frac{1}{2\pi} B_2 \wedge dD_4 + \frac{1}{2\pi} A_1 \wedge dE_5. \quad (4.14)$$

ここで一点補足する。前章の議論で見たようにオペレーター値不定性をチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場の導入により相殺することが高次群構造を見る上のポイントであった。その際オペレーター値不定性は運動方程式由来の2つの対称性に対する外場 A_1, B_2 を非線形に含む項であったが、この非線形性は元の作用ではアクションと光子の相互作用項に由来していた。よって運動方程式由来の1形式対称性に対する背景ゲージ場を導入しないような状況、すなわち上の式において B_2 を0にゲージ変換するような場合を考えると、一見オペレーター値不定性は現れないように思える。しかし(4.6)を見ると、 $I_5 = dD_4 - \frac{1}{2\pi} A_1 \wedge dC_3$ となっており、 I_5 のみ依然として高次群構造を示唆している。

まずこの理由を説明する。 C_3 に対応するカレントは $j_{CW}^{[2]} = \frac{1}{4\pi^2} d\phi \wedge da$ であった。よって0形式対称性を背景ゲージ化した状態でこの2形式対称性に対する背景ゲージ場を導入すると、 $\frac{1}{4\pi^2} da \wedge A_1 \wedge C_3 \in \frac{2\pi\mathbb{Z}}{N}$ というオペレーター値不定性が生じる。このオペレーター値不定性を消去するように I_5 は上述のように決まり、高次群構造を持つ。

この結果は、複合的な演算子で書かれるチャーン・ヴェイユ対称性が存在しており、運動方程式由来の対称性の群構造が \mathbb{Z}_N のように分数的になっていれば、系の詳細に依らずに高次群構造を持ち得ることを示唆している。ただし、前章での議論のようにこれらのチャーン・ヴェイユ対称性がオペレーター値不定性を相殺するために必然的に背景ゲージ化されるというわけではないことに注意する。

4.1 荷電物体

上で議論した各対称性の生成子に対応する荷電物体を導入する。荷電物体は適当に外場の配位を選ぶことで表現することができる。以下では実際に対称性のとそれに対応する荷電物体の相関関数を計算することで対称性の生成子が作用して非自明な位相を与えることを確認する。これらの計算は対応する外場の配位を分配関数(4.12)に与え、適当なゲージ変換を行うことで実行する。

4.1.1 運動方程式由来の対称性

まず運動方程式由来の対称性に対する荷電物体を議論する。運動方程式由来の0形式対称性はアクションのシフト $\phi \rightarrow \phi + \Lambda_0$ の下での対称性である。この対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[0]}$ に対する荷電物体は、 $I(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q) = e^{iq\phi(\mathcal{P}_{\text{defect}})}$ である。ただし $\mathcal{P}_{\text{defect}}$ はこの荷電物体が定義さ

れる点、 $q \in \mathbb{Z}$ は電荷である。以下でもこの例と同様に荷電物体のオペレーターの第一引数にはその荷電物体が定義される空間、第二引数にはその電荷を取るものとする。ここで $e^{iq\phi(\mathcal{P}_{\text{defect}})} = e^{2\pi iq \int j_{\text{CW}}^{[4]} \wedge \delta_5(\Omega_{\mathcal{P}_{\text{defect}}})}$ であることに注意すると、この荷電物体は、 $E_5 = 2\pi q \delta_5(\Omega_{\mathcal{P}})$ の外場の配位で表すことができる。

ここで実際に、5次元の多様体 \mathcal{V} で定義される0形式称性 $U_{\text{EoM}}^{[0]}$ が $I(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q)$ に非自明に作用することを確認する。そのために0形式変換の生成子を作用させる前の相関関数 $\langle U_{\text{EoM}}^{[0]}(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N}) I(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q) \rangle$ と、生成子を作用させた後の相関関数 $\langle I(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q) \rangle$ の間に成立する関係を調べる。具体的には2.2.2節で行った議論と同様にこれらの相関関数を背景ゲージ場の配位によって表し、それらの配位をゲージ変換によって繋げることで相関関数の間に成立する関係を調べる。

まず次の配位 $A_1 = \frac{2\pi n}{N} \delta_1(\mathcal{V}), E_5 = 2\pi q \delta_5(\Omega_{\mathcal{P}})$ を分配関数 (4.12) に与えることで次の相関関数が定義される。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) I(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q) \right\rangle \equiv Z \left[\frac{2\pi n}{N} \delta_1(\mathcal{V}), 0, 0, 0, 0, 2\pi q \delta_5(\Omega_{\mathcal{P}_{\text{defect}}}) \right]. \quad (4.15)$$

一方で A_1 をゲージ変換で消去した次の配位 $A_1 = 0, E_5 = 2\pi q \delta_5(\Omega_{\mathcal{P}})$ を与えることで次の荷電物体 $I(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q)$ の真空期待値を定義する。

$$\langle I(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q) \rangle \equiv Z[0, 0, 0, 0, 0, 2\pi q \delta_5(\Omega_{\mathcal{P}_{\text{defect}}})] \quad (4.16)$$

ここで上で定義した (4.15) と (4.16) はゲージ変換で結びついているが、このゲージ変換の下で生じるトーフト量子異常を評価する。一般にはゲージ変換をするとグリーン・シュワルツ機構によって (4.8) から (4.11) の変換も非自明になる可能性があるが、今の場合はこれらのゲージ変換は自明であり他のゲージ場が印加されることはない。よって (4.14) から以下のようなトーフト量子異常が生じるのでこれを評価する。

$$Z[A'_1, 0, 0, 0, 0, E'_5] = \exp \left(\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{T}_7} \mathcal{A}_1 \wedge d\mathcal{E}_5 \right) Z[A_1, 0, 0, 0, 0, E_5]. \quad (4.17)$$

ただし、 \mathcal{T}_7 はゲージ変換の前後の配位を補間する7次元的なマッピングトーラス、 $\mathcal{A}_1, \mathcal{E}_5$ は \mathcal{T}_7 上のゲージ場である。具体的には第7方向 τ に関して $\tau = 0$ の断面ではゲージ変換前の理論が定義され、 $\tau = 1$ の断面ではゲージ変換後の理論が定義されるような配位を考えた上で $\tau = 0$ と $\tau = 1$ を同一視することでマッピングトーラスを定義する。今回は次のゲージ変換 $A_1 \rightarrow A'_1 = 0, E_5 \rightarrow E'_5$ を考えるので、これらを補完するように定義された \mathcal{T}_7 上のゲージ

場は

$$\mathcal{A}_1 = (1 - \tau)A_1, \mathcal{E}_5 = E_5 \quad (4.18)$$

と表される。ただし A_1 は \mathcal{P} を囲むような5次元多様体 \mathcal{V}_5 に局在する配位であり、 $A_1 = \frac{2\pi n}{N} \delta(\mathcal{V}_5)$ と表される。以上より、トーフト量子異常は以下のように計算される。

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{T}_\tau} \mathcal{A}_1 \wedge d\mathcal{E}_5 = e^{\frac{2\pi i q n}{N} \text{Link}(\mathcal{V}_5, \mathcal{P}_{\text{defect}})} \quad (4.19)$$

すなわち、(4.15) と (4.16) には以下の関係が成立する。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) |(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q) \right\rangle = e^{\frac{2\pi i q n}{N} \text{Link}(\mathcal{V}_5, \mathcal{P}_{\text{defect}})} \langle |(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q) \rangle \quad (4.20)$$

このように0形式対称性 $U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right)$ を $|(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q)$ に作用させると非自明な位相因子が現れることから確かに $|(\mathcal{P}_{\text{defect}}, q)$ が $U_{\text{EoM}}^{[0]}$ の荷電物体になっていることが確認できる。この時この位相因子はトーフト量子異常に由来している。

以下の議論でも同様に対称性生成子を作用させる前後の相関関数をそれぞれに対応するゲージ場の配位を与えることで表し、それらをゲージ変換で関係付けることで対称性の生成子とその荷電物体の間に成立する関係を得ることができる。この際対称性の生成子はその荷電物体に作用して測る電荷はトーフト量子異常によって与えられる。

運動方程式由来の1形式対称性は光子のシフト $a \rightarrow a + \Lambda_1$ の下での対称性である。この対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}$ に対する荷電物体はウィルソンループ $W(\mathcal{L}_{\text{defect}}, q) = e^{iq \int_{\mathcal{L}_{\text{defect}}} a}$ である。 $\mathcal{L}_{\text{defect}}$ はウィルソンループが定義される1次元多様体である。ウィルソンループもまた上の議論と同様に、対応する背景ゲージ場の配位を与えることで表現することができる。実際、 $e^{iq \int_{\mathcal{L}_{\text{defect}}} a} = e^{2\pi i q \int j_{\text{CW}}^{[3]} \wedge \delta_4(\Omega_{\mathcal{L}_{\text{defect}}})}$ であるので、 $D_4 = 2\pi q \delta_4(\Omega_{\mathcal{L}_{\text{defect}}})$ とすることはウィルソンループを挿入することに他ならない。

ここで次の配位 $B_2 = \frac{2\pi m}{N} \delta_1(\mathcal{W}), D_4 = 2\pi q \delta_4(\Omega_{\mathcal{L}_{\text{defect}}})$ に対する分配関数と、ここからゲージ変換 $B_2 \rightarrow 0$ によって得られる配位に対する分配関数をそれぞれ計算する。この場合もゲージ変換によって (4.14) の $-\frac{1}{2\pi} B_2 \wedge dD_4$ からトーフト量子異常が生じる。これを評価することで以下の関係式を得る。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) W(\mathcal{L}_{\text{defect}}, q) \right\rangle = e^{\frac{2\pi i q m}{N} \text{Link}(\mathcal{W}, \mathcal{L}_{\text{defect}})} \langle W(\mathcal{L}_{\text{defect}}, q) \rangle \quad (4.21)$$

この関係から確かにウィルソンループ $W(\mathcal{L}_{\text{defect}}, q)$ が運動方程式由来の1形式対称性の荷電物体になっていることが確認できる。

4.1.2 チャーン・ヴェイユ対称性

次にチャーン・ヴェイユ対称性に対しての荷電物体を導入する。これらの荷電物体はアクシオン渦やモノポール、またそれらを組み合わせた配位を与えることで実現できる。

まず、1次元多様体 \mathcal{L} 上で定義される4形式対称性の生成子 $U_{\text{CW}}^{[4]}(\mathcal{L}, \alpha)$ に対する荷電物体を導入する。この対称性は4次元的な広がりを持つ物体に作用し、またカレントに $d\phi$ を含む。本稿ではこの荷電物体をアクシオン3-ブレンと呼ぶ。このアクシオン3-ブレンは、背景ゲージ場 A_1 に対して次を満たす配位 $A_{1,\text{defect}}$ を具体的に与えることで定義することができる。

$$\oint_{S^1} A_{1,\text{defect}} = 2\pi q, \quad (4.22)$$

この式は $A_{1,\text{defect}}$ が、アクシオン3-ブレンが定義される4次元多様体 $\mathcal{W}_{\text{defect}}$ の周りに渦上の配位を取っていることを表している。

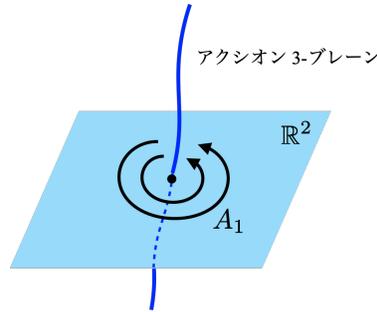


Figure 4.1: $U_{\text{CW}}^{[4]}$ の荷電物体

つまり、 $\mathcal{W}_{\text{defect}}$ を囲むように $A_{1,\text{defect}}$ を周回積分すると非自明な位相を与えるような配位である。

以下では、 $\mathcal{W}_{\text{defect}}$ 上で定義され、電荷 q を持つアクシオン3-ブレンを $V(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q)$ と書くことにする。この $A_{1,\text{defect}}$ を用いて、 $U_{\text{CW}}^{[4]}(\mathcal{L}, \alpha)$ と $V(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q)$ の相関関数を評価する。 $A = A_{1,\text{defect}}, E_5 = \alpha\delta_5(\mathcal{L})$ でその他のゲージ場が0である配位を考えると(4.12)は次のように表される。

$$Z[A_{1,\text{defect}}, 0, 0, 0, 0, \alpha\delta_5(\mathcal{L})] = e^{-i\alpha q \text{Link}(\mathcal{W}_{\text{defect}}, \mathcal{L})} \langle U_{\text{CW}}^{[4]}(\mathcal{L}, \alpha) V(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q) \rangle. \quad (4.23)$$

ここでゲージ変換 $E_5 \rightarrow E_5 + d\Lambda_4 = 0$ を考える。この変換の下で分配関数は以下のようになる。

$$Z[A_{1,\text{vor}}, 0, 0, 0, 0, E_5 = 0] = \langle V(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q) \rangle. \quad (4.24)$$

ゲージ変換の前後で生じるトーフト量子異常を評価することで以下の関係が得られる。

$$\langle U_{CW}^{[4]}(\mathcal{L}, \alpha) \mathcal{V}(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q) \rangle = e^{i\alpha q \text{Link}(\mathcal{W}_{\text{defect}}, \mathcal{L})} \langle \mathcal{V}(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q) \rangle. \quad (4.25)$$

この式はアキシオン3-ブレーン $\mathcal{V}(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q)$ に4形式対称性 $U_{CW}^{[4]}(\mathcal{L}, \alpha)$ を作用させると、これらが非自明に巻きついていれば位相を出すことを表している。これは確かに、以上の議論で定義した $\mathcal{V}(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q)$ が $U_{CW}^{[4]}(\mathcal{L}, \alpha)$ の荷電物体になっていることを表している。

次に2次元多様体 \mathcal{S} 上で定義される3形式対称性の生成子 $U_{CW}^{[3]}(\mathcal{S}, \beta)$ に対する荷電物体を導入する。この対称性は3次元的な広がりを持つ物体に作用し、またカレントに da を含む。本稿ではこの荷電物体をトーフト面と呼ぶことにする。トーフト面は、背景ゲージ場 B_2 に対して次を満たす配位 $B_{2,\text{defect}}$ を具体的に与えることで定義することができる。

$$\oint_{\mathbb{S}^2} B_{2,\text{defect}} = 2\pi q, \quad (4.26)$$

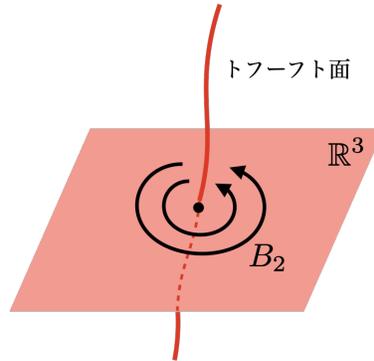


Figure 4.2: $U_{CW}^{[3]}$ の荷電物体

以下では3次元的な広がりをもつ $\mathcal{C}_{\text{defect}}$ 上に定義され、電荷 q を持つトーフト面を $\mathcal{T}(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q)$ と表す。実際次の配位 $B_2 = B_{2,\text{defect}}, D_4 = \beta\delta_4(\mathcal{S})$ を分配関数に与えることで、 $Z[0, B_{2,\text{defect}}, 0, 0, D_4 = \beta\delta_4(\mathcal{S}), 0] = e^{-i\beta q \text{Link}(\mathcal{C}_{\text{defect}}, \mathcal{S})} \langle U_{CW}^{[3]}(\mathcal{S}, \beta) \mathcal{T}(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q) \rangle$ を得る。さらにゲージ変換によって $D_4 \rightarrow 0$ とする。この時ゲージ変換の前後で生じるトーフト量子異常を評価することで以下の関係が得られる。

$$\langle U_{CW}^{[3]}(\mathcal{S}, \beta) \mathcal{T}(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q) \rangle = e^{i\beta q \text{Link}(\mathcal{C}_{\text{defect}}, \mathcal{S})} \langle \mathcal{T}(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q) \rangle. \quad (4.27)$$

これは確かに $\mathcal{T}(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q_M)$ がチャーン・ヴェイユ3形式対称性の荷電物体になっていることを表している。

次に3次元多様体 \mathcal{C} 上で定義される2形式対称性の生成子 $U_{\text{CW}}^{[2]}(\mathcal{C}, \gamma)$ に対する荷電物体を導入する。この対称性は2次元的な広がりを持つ物体に作用し、またカレントに $d\phi da$ を含む複合的なオペレーターである。この荷電物体はFigure 4.3のように、上で導入したトーフフト面をアキシオン3-ブレーンに巻きつけた配位によって実現できる。この配位ではアキシオン3-ブレーンが定義される $\mathcal{W}_{\text{defect}}$ とトーフフト面が定義される $\mathcal{C}_{\text{defect}}$ は、ある2つの方向に共通して伸びているとする。まずこのような配位の具体例を以下で示す。

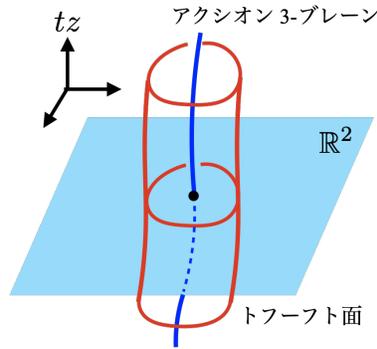


Figure 4.3: $U_{\text{CW}}^{[2]}$ の荷電物体

次の表にアキシオン3-ブレーンが定義される $\mathcal{W}_{\text{defect}}$ と、トーフフト面が定義される $\mathcal{C}_{\text{defect}}$ の配位を示す。ただし○はその方向に多様体が伸びていることを意味する。また (r, ϑ) は極座標であり、Figure 4.3における青い平面上の位置を指定する。このような配位の下ではトーフフト面とアキシオン3-ブレーンは yz 方向に共通に伸びている。

	t	x	y	z	r	ϑ
$V(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q_\phi)$	○	○	○	○		
$T(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q_a)$	○			○		○

ここで、ゲージ場の表式を表の配位から具体的に考える。たとえば、アキシオン3-ブレーンでは、 $r\vartheta$ 面に電荷が局在していると見ることができ、

$$A_{1,\text{defect}} = q_\phi d\vartheta \quad (4.28)$$

である。一方で、トーフフト面も同様に、例えばモノポールが tx 面に局在し、かつ $r = \epsilon$ のような一定の半径の円周上にも局在するような配位である。この時、ガウスの定理から

$dB_2 = 2\pi q_a \delta(x)\delta(y)\delta(r - \epsilon) dx dy dr$ である。これを積分することで

$$B_{2,\text{defect}} = 2\pi q_a \delta(x)\delta(y)\theta(r - \epsilon) dx dy \quad (4.29)$$

を得る。以上から、 $A_{1,\text{defect}} \wedge B_{2,\text{defect}} = 2\pi q_\phi q_a \delta(x)\delta(y)\theta(r - \epsilon) dx dy d\vartheta$ が成り立つ。これを積分し、 $q_\phi q_a = q, \epsilon \rightarrow 0$ とすると

$$\int A_{1,\text{defect}} \wedge B_{2,\text{defect}} = 4\pi^2 q \quad (4.30)$$

である。

結局上の例では $U_{\text{CW}}^{[2]}(\mathcal{L}, \gamma)$ の荷電物体は yz 平面上に定義され、より一般には2次元面 $\mathcal{S}_{\text{defect}}$ に定義される。この荷電物体を $\text{TV}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, q)$ と書く。実際、背景ゲージ場に関する配位 $A_1 = A_{1,\text{defect}}, B_2 = B_{2,\text{defect}}, C_3 = \gamma \delta_3(\mathcal{L})$ と、これをゲージ変換によって $C_3 \rightarrow 0$ とした配位の両方で (4.12) を計算する。この時ゲージ変換の前後で生じるトーフト量子異常を評価することで以下の関係が得られる。

$$\left\langle U_{\text{CW}}^{[2]}(\mathcal{L}, \gamma) \text{TV}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, q) \right\rangle = e^{i\gamma q \text{Link}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, \mathcal{L})} \langle \text{TV}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, q) \rangle \quad (4.31)$$

ここから確かに、 $\text{TV}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, q)$ が $U_{\text{CW}}^{[2]}$ の荷電物体になっていることが分かる。

最後に4次元多様体 \mathcal{W} 上で定義されるチャーン・ヴェイユ1形式対称性の生成子 $U_{\text{CW}}^{[1]}(\mathcal{W}, \xi)$ に対する荷電物体を導入する。この対称性は1次元的な広がりを持つ物体 $\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}$ に作用し、またカレントに $dada$ を含む複合的なオペレーターである。この時荷電物体は上の議論と同様にして、 B_2 にモノポールの面状の配位を導入することで2つのトーフト面を導入し、一つのトーフト面にもう一方のトーフト面を囲んだ配位を考えることで実現する。

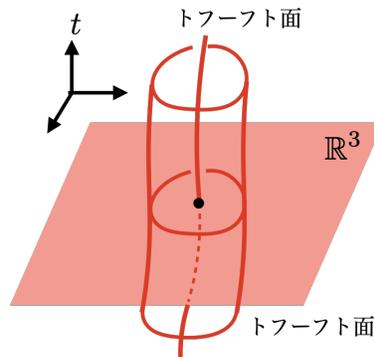


Figure 4.4: $U_{\text{CW}}^{[1]}$ 荷電物体

このような配位の具体例を以下の表に示す。2つのトーフト面がそれぞれ $\mathcal{C}_{\text{defect}}, \mathcal{C}'_{\text{defect}}$ で定義されているとする。 (r, ϑ, φ) は球座標であり、Figure 4.4における赤い平面上の位置を指定する。この配位の下ではこれらのトーフト面は y 方向に共通に伸びている。

	t	x	y	r	ϑ	φ
$\mathbb{T}(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q)$	○	○	○			
$\mathbb{T}(\mathcal{C}'_{\text{defect}}, q')$	○				○	○

この配位に対応するゲージ場の表式は次のようになる。

$$B_{2,\text{defect}} = \frac{q}{2} \sin \vartheta d\vartheta d\phi + 2\pi q' \delta(x) \delta(y) \theta(r - \epsilon) dx dy \quad (4.32)$$

第一項は $\mathcal{C}_{\text{defect}}$ に対応しており、Figure 4.4の \mathbb{R}^3 の原点に局在するモノポールを表し、第二項はモノポールが tx 面に局在し、かつ $r = \epsilon$ のような一定の半径の円周上にも局在するような配位である。以上から、 $B_{2,\text{defect}} \wedge B_{2,\text{defect}} = 2\pi q q' \sin \vartheta \delta(x) \delta(y) \theta(r - \epsilon) dx dy d\vartheta d\phi$ が成り立つ。これを積分し、 $q q' = q, \epsilon \rightarrow 0$ とすると

$$\int B_{2,\text{defect}} \wedge B_{2,\text{defect}} = 8\pi^2 q \quad (4.33)$$

である。実際、背景ゲージ場に関する配位 $B_2 = B_{2,\text{defect}}, B_2^{\text{CW}} = \xi \delta_2(\mathcal{W})$ と、これをゲージ変換によって $B_2^{\text{CW}} \rightarrow 0$ とした配位の両方で (4.12) を計算する。この時ゲージ変換の前後で生じるトーフト量子異常を評価することで以下の関係が得られる。

$$\left\langle U_{\text{CW}}^{[1]}(\mathcal{W}, \xi) \text{TT}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, q) \right\rangle = e^{i\xi q \text{Link}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, \mathcal{W})} \langle \text{TT}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, q) \rangle \quad (4.34)$$

ここから確かに、 $\text{TT}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, q)$ が $U_{\text{CW}}^{[1]}$ の荷電物体になっていることが分かる。

4.2 対称性生成子の相関関数

ここまでの議論で、6次元のアクシオン電気力学のゲージ化によってチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場に対して場の強さを得た。この後実際に見ていくように、これらの強さは対称性の生成子の相関関数間に成り立つ非自明な関係を示唆する。

ここでは実際にそれぞれの場の強さが示唆する非自明な相関関数間の関係を各対称性に対する背景ゲージ場変換則を用いて具体的に計算することで明らかにする。

[52, 53]でも議論されているように、対称性の生成子の相関関数の間に成り立つ関係は理論の大域的対称性の間の高次群的な構造を示唆している。このことから、場の強さ自体が高次群的な構造の反映であるということもできる。

4.2.1 運動方程式由来の対称性生成子2つの相関関数

まず初めに (4.4) を見ると、この式の右辺第2項 $-\frac{N}{2\pi}A_1 \wedge B_2$ により適当な A_1, B_2 に対して G_3 が非自明になることがあると分かる。このことは、0形式対称性と運動方程式由来の1形式対称性がチャーン・ヴェイユ1形式対称性と関係づくことを示唆している。

そこで5次元多様体 \mathcal{V} で定義される運動方程式由来の0形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[0]}(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N})$ と4次元多様体 \mathcal{W} で定義される運動方程式由来の1形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N})$ の相関関数 $\langle U_{\text{EoM}}^{[0]}(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N}) U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N}) \rangle$ を計算する。相関関数を各対称性に対する背景ゲージ場を用いて表すために、 $A_1 = \frac{2\pi n}{N}\delta_1(\mathcal{V})$ 、 $B_2 = \frac{2\pi m}{N}\delta_2(\mathcal{W})$ とおく。それ以外の背景ゲージ場の値は0とする。このような配位の下では S_{bkg} は非自明な寄与を与えないので、分配関数 (4.12) は以下のように計算できる。

$$Z \left[\frac{2\pi n}{N}\delta_1(\mathcal{V}), \frac{2\pi m}{N}\delta_2(\mathcal{W}), 0, 0, 0, 0 \right] = \left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) \right\rangle \quad (4.35)$$

ここで B_2 について以下のゲージ変換を考える。

$$B_2 \rightarrow B_2 + d\Lambda_1 = 0 \quad (4.36)$$

具体的には $\Lambda_1 = \frac{2\pi m}{N}\delta_1(\Omega_{\mathcal{W}})$ である。ただしこの時、この変換に伴い、(4.8) により

$$B_2^{\text{CW}} \rightarrow B_2^{\text{CW}} - \frac{N}{2\pi}A_1 \wedge \Lambda_1 = -\frac{2\pi mn}{N}\delta_1(\mathcal{V}) \wedge \delta_1(\Omega_{\mathcal{W}}). \quad (4.37)$$

を得る。その結果以下が成立する。

$$Z \left[\frac{2\pi n}{N}\delta_1(\mathcal{V}), \frac{2\pi m}{N}\delta_2(\mathcal{W}), 0, 0, 0, 0 \right] = Z \left[\frac{2\pi n}{N}\delta_1(\mathcal{V}), 0, -\frac{2\pi mn}{N}\delta_1(\mathcal{V}) \wedge \delta_1(\Omega_{\mathcal{W}}), 0, 0, 0 \right], \quad (4.38)$$

すなわち、

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) \right\rangle = \left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[1]} \left(\mathcal{V} \cup \Omega_{\mathcal{W}}, -\frac{2\pi mn}{N} \right) \right\rangle. \quad (4.39)$$

確かに G_3 から示唆されたように 0 形式対称性および運動方程式由来の 1 形式対称性とチャーン・ヴェイユ 1 形式対称性と間の非自明な関係を得ることができた。この相関関数の関係は [52, 53] で議論されたアクシオンドメインウォールに対するウィッテン効果を表す関係式と類似している。しかし (4.39) に現れるチャーン・ヴェイユ 1 形式対称性のカレントは 2 つの光子場を含む複合的なオペレーターであり、4 次元の時とは物理的に異なっている。

この関係式の物理的意味を見るために両辺に (4.34) の $\text{TT}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, q)$ を挿入するとこれは右辺の $U_{\text{CW}}^{[1]}$ の荷電物体になっているので次が成り立つ。この相関関数の物理的な意味は、アクシオンドメインウォールに対するウィッテン効果の 6 次元への拡張と解釈することができる。

$$\begin{aligned} & \left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) \text{TT}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, q) \right\rangle \\ &= e^{-i \frac{2\pi m n q}{N} \text{Link}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, \mathcal{W} \cap \Omega_{\mathcal{V}})} \left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) \text{TT}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, q) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.40)$$

この関係式を成り立たせるような各対称性の生成子および荷電物体の配位は例えば下の表で表すことができる。ここで、4.1.2 節で議論したように、 $\text{TT}(\mathcal{L}_{\text{defect}}^{\text{CW}}, q)$ は 2 つのトーフト面について Figure 4.4 のような配位を考えることで実現できることから、 $\mathcal{C}_{\text{defect}1}, \mathcal{C}_{\text{defect}2}$ で定義されるトーフト面を用いて表している。

	t	x	y	r	ϑ	φ
$\text{T}(\mathcal{C}_{\text{defect}1}, q_1)$	○	○	○			
$\text{T}(\mathcal{C}_{\text{defect}2}, q_2)$	○				S^2	
$U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right)$	○	○	○		S^2	
$U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right)$		○	○		S^2	

この配位は具体的には以下のように図示される。この図は $t = 0$ の断面であり、 x, y 軸に直交する方向が r, ϑ, φ で張られる 3 次元面を表している。表の S^2 はこの 3 次元面上の 2 次元球面である。

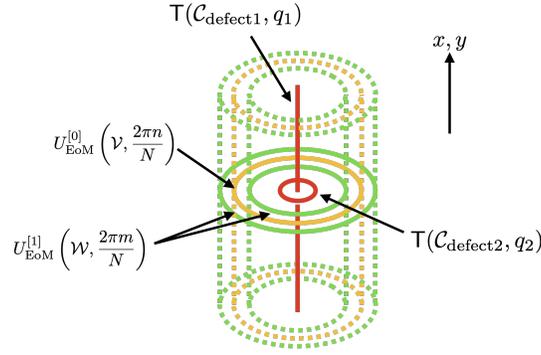


Figure 4.5: 6次元におけるウィッテン効果

この図のような配位を考えると (4.40) は以下のように解釈できる。 $\mathcal{C}_{\text{defect1}}, \mathcal{C}_{\text{defect2}}$ 上にモノポールが存在しているために磁場が発生するが、この磁場がドメインウォールを貫通すると、アクシオンドメインウォールに対するウィッテン効果によりドメインウォール上に電荷が誘導される。この誘導された電荷から生じる電場をドメインウォール $U_{\text{EoM}}^{[0]}(\nu, \frac{2\pi n}{N})$ を囲む 1 形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\omega, \frac{2\pi m}{N})$ によって測る。これが (4.40) の左辺の意味することである。その結果、ドメインウォール上に生じた電荷により (4.40) の右辺の非自明な位相因子が生じた。この意味で (4.40) は 6次元におけるアクシオンドメインウォールに対するウィッテン効果を表している。以上で見たように、(4.39) は 4次元の時と物理的意味が異なる一方で、代数的には 4次元の時と同様の構造を含んでいることを示唆している。実際 $U_{\text{EoM}}^{[0]}$ が $U_{\text{EoM}}^{[1]}$ に作用して $U_{\text{CW}}^{[1]}$ が生じるという代数的な関係は 4次元の時と等しい。

同様にして H_4 の第 2 項を参考にして、 $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ で定義される 2つの運動方程式由来の 1 形式対称性の生成子の相関関数 $\langle U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N}) U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N}) \rangle$ を計算する。ここで $B_2 = \frac{2\pi m_1}{N} \delta_2(\mathcal{W}_1) + \frac{2\pi m_2}{N} \delta_2(\mathcal{W}_2)$ という外場の配位を分配関数に与えると $\langle U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N}) U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N}) \rangle$ を得ることができるが、ここで次のゲージ変換 $B_2 \rightarrow 0$ を行うことで次の関係式を得る。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N} \right) \right\rangle = \left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[2]} \left(\mathcal{W}_1 \cap \Omega_{\mathcal{W}_2}, -\frac{2\pi m_1 m_2}{N} \right) \right\rangle \quad (4.41)$$

これは、4次元の場合の異常ホール効果に類似した式であるが、この場合も $U_{\text{CW}}^{[2]}$ のカレントは ϕ, a からなる複合的なオペレーターであり物理的にな解釈は異なる。具体的にはこの関係

式の両辺に $\text{TV}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, q)$ を挿入すると次が成立する。

$$\begin{aligned} & \left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N} \right) \text{TV}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, q) \right\rangle \\ &= e^{-i \frac{2\pi m_1 m_2 q}{N} \text{Link}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, \mathcal{W}_1 \cap \Omega \mathcal{W}_2)} \left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N} \right) \text{TV}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, q) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.42)$$

これは異常ホール効果の6次元版と解釈することができる。この関係式を成り立たせるような各対称性の生成子および荷電物体の配位は例えば以下の表のようになる。ここで先の例と同様に $\text{TV}(\mathcal{S}_{\text{defect}}, q)$ はアクシオン3-ブレーンとトーフト面について Figure 4.3 のような配位を考えることで実現できることから、 $\mathcal{W}_{\text{defect}}, \mathcal{C}_{\text{defect}}$ で定義されるアクシオン3-ブレーンとトーフト面を用いて表している。

	t	x	y	z	r	ϑ
$V(\mathcal{W}_{\text{defect}}, q_\phi)$	○	○	○	○		
$T(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q_a)$	○			○		S^1
$U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N} \right)$		○	○			T^2
$U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N} \right)$	○	○	○			S^1

この配位は具体的には以下のように図示される。この図は $t = x = y = 0$ の断面であり、 z 軸に直交する方向が r, ϑ で張られる2次元面を表している。表の S^1 はこの2次元面上の円である。また \mathcal{W}_1 は $zr\vartheta$ -空間ではトーラス T^2 をなしており、かつ x, y 方向にも伸びている。 \mathcal{W}_2 は $zr\vartheta$ -空間では S_1 成している一方、 z 方向には局在している。以下の Figure 4.6 のように \mathcal{W}_2 は \mathcal{W}_1 のトーラス部分の内部に存在する部分とトーラスの外に存在する部分からなる。

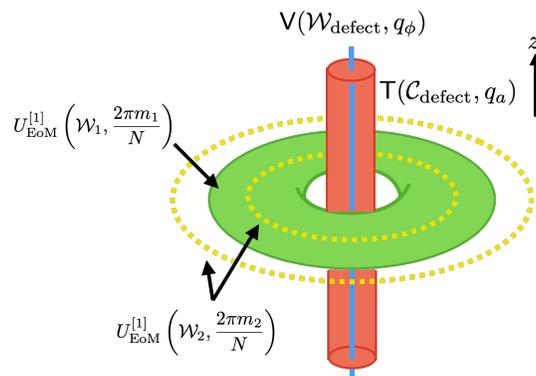


Figure 4.6: 6次元における異常ホール効果

この図のような配位を考えると (4.42) は以下のように解釈できる。 W_{defect} の周りでアクシオンは渦状の配位を取り、 C_{defect} 上にはモノポールが存在しており磁場が発生する。さらに1形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(W_1, \frac{2\pi m}{N})$ によって W_1 の表面には W_1 を貫くように方向に電場が印加される。この章の冒頭で指摘したように6次元アクシオン電気力学におけるマクスウェル・アンペールの法則から、アクシオン渦にそれぞれ直交する磁場と電場をかけると、さらにそれらに直交した方向に電流が生じる、すなわち6次元における異常ホール効果が起こる。結果的に今の場合は W_1 のトーラス部分の小円方向に沿ってに電流が誘導される。この電流をもう一方の1形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(W_2, \frac{2\pi m}{N})$ によって測るとというのが、(4.42) の左辺の意味することである。この時、 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(W_2, \frac{2\pi m}{N})$ がトーラスの内部と外部の磁場の差を測るので、トーラス表面に誘導される電流のみを測っている。その結果、誘導された電流により (4.42) の右辺の非自明な位相因子が生じた。この意味で (4.42) は6次元の異常ホール効果を表している。以上で見たように、(4.39) は4次元の時と物理的意味が異なる一方で、代数的には4次元の時と同様の構造を含んでいることを示唆している。実際 $U_{\text{EoM}}^{[0]}$ が $U_{\text{EoM}}^{[1]}$ に作用して $U_{\text{CW}}^{[1]}$ が生じるという代数的な関係は4次元の時と等しい。このように物理的な意味が4次元の時と異なっている一方でこの関係式は4次元の時におけるパイファー・リフティングと同じ構造を表している。

上の二つの計算例から、6次元の時にも4次元の場合と物理的な意味は違うが代数としては同じ構造を含んでいることが分かる。つまり、6次元のアクシオン電気力学における大域的対称性がなす代数構造にはその部分構造として3群を含む。

4.2.2 その他の2つの生成子の相関関数

ここでは対称性の生成子の2点関数間の関係のうち、4次元の時には存在しない高次元に特有のものを見る。具体的には運動方程式由来の対称性とチャーン・ヴェイユ対称性の間の非自明な関係を見る。

I_5, J_6 には、運動方程式由来の対称性に対する背景ゲージ場とチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場の結合項が含まれている。これまでの議論と同様にしてこれらの項が相関関数間の非自明な関係を示唆している。 G_3, H_4 にはこのような結合項は含まれておらず、ここで述べるのは高次元で特有の性質である。

I_5 の第2項は0形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[0]}(\nu, \frac{2\pi n}{N})$ と2形式対称性の生成子 $U_{\text{CW}}^{[2]}(C, \alpha)$ の間の非自明な関係を示唆する。

実際、外場に対して次の配位 $A_1 = \frac{2\pi n}{N} \delta_1(\mathcal{V}), C_3 = \alpha \delta_3(\mathcal{C})$ と、ここからゲージ変換 $A_1 \rightarrow 0$ を行った配位のそれぞれに対して分配関数 (4.12) を計算することで以下の関係式を得る。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[2]} (\mathcal{C}, \alpha) \right\rangle = \left\langle U_{\text{CW}}^{[2]} (\mathcal{C}, \alpha) U_{\text{CW}}^{[3]} \left(\mathcal{V} \cap \mathcal{C}, \frac{\alpha n}{N} \right) \right\rangle. \quad (4.43)$$

$\mathcal{V} \cap \mathcal{C}$ は \mathcal{V} と \mathcal{C} の共通部分を表している。上の関係式の両辺に $U_{\text{CW}}^{[3]}$ の荷電物体 $T(\mathcal{C}_{\text{defect}}, q)$ を insert することを考えると、左辺では一見非自明な位相は現れないように見えるが、右辺には $U_{\text{CW}}^{[3]}$ が存在するためこの荷電物体に作用し、非自明な位相因子が現れる。よってこの結果は、運動方程式由来の 0 形式対称性 $U_{\text{EoM}}^{[0]}$ がチャーン・ヴェイユ 2 形式対称性に作用すると、3 形式対称性として振る舞うことが分かる。

同様に、 I_5 の第 3 項から運動方程式由来の 1 形式対称性とチャーン・ヴェイユ 1 形式対称性のペアがチャーン・ヴェイユ 3 形式対称性と関係づくことが示唆される。実際、次の配位 $B_2 = \frac{2\pi m}{N} \delta_1(\mathcal{W}), B_2^{\text{CW}} = \beta \delta_1(\mathcal{W}^{\text{CW}})$ と、ここからゲージ変換 $B_2 \rightarrow 0$ の下での配位の両者に対して分配関数を計算することで以下の関係式を得る。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[1]} (\mathcal{W}^{\text{CW}}, \beta) \right\rangle = \left\langle U_{\text{CW}}^{[1]} (\mathcal{W}^{\text{CW}}, \beta) U_{\text{CW}}^{[3]} \left(\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\text{CW}}, \frac{\beta m}{N} \right) \right\rangle. \quad (4.44)$$

これは、運動方程式の 1 形式対称性がチャーン・ヴェイユ 1 形式対称性に作用してチャーン・ヴェイユ 3 形式対称性として振る舞うことを表している。

J_6 の第 2 項から運動方程式由来の 1 形式対称性とチャーン・ヴェイユ 2 形式対称性のペアがチャーン・ヴェイユ 4 形式対称性と関係づくことが示唆される。実際、次の配位 $B_2 = \frac{2\pi m}{N} \delta_1(\mathcal{W}), C_3 = \gamma \delta_2(\mathcal{C})$ と、ここからゲージ変換 $B_2 \rightarrow 0$ の下での配位の両者に対して分配関数を計算することで以下の関係式を得る。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[2]} (\mathcal{C}, \gamma) \right\rangle = \left\langle U_{\text{CW}}^{[2]} (\mathcal{C}, \gamma) U_{\text{CW}}^{[4]} \left(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}, \frac{\gamma n}{N} \right) \right\rangle. \quad (4.45)$$

これは、運動方程式由来の 1 形式対称性がチャーン・ヴェイユ 2 形式対称性に作用してチャーン・ヴェイユ 4 形式対称性として振る舞うことを表している。

4.2.3 3つの生成子の相関関数

ここでは生成子の 3 点関数を含む関係式を見る。実際これらの関係は I_5 の第 4 項、 J_6 の第 3 項が示唆する。3 点関数を含む非自明な関係式は 4 次元の時には存在せず、この性質もまた高次元の特徴といえる。

I_5 の第 4 項が 0 形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[0]}(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N})$ と 2 つの運動方程式由来の 1 形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N}), U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N})$ の相関関数に関する非自明な関係を示唆する。実際、次の外場の配位 $A_1 = \frac{2\pi n}{N}\delta_1(\mathcal{V}), B_2 = \frac{2\pi m_1}{N}\delta_2(\mathcal{W}_1) + \frac{2\pi m_2}{N}\delta_2(\mathcal{W}_2)$ と、これらに対してゲージ変換 $A_1 \rightarrow 0, B_2 \rightarrow 0$ を行った配位のそれぞれに対し、分配関数 (4.12) を計算することで以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]}(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N}) U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N}) U_{\text{EoM}}^{[1]}(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N}) \right\rangle \\ &= \left\langle U_{\text{CW}}^{[1]}(\mathcal{V} \cap \Omega_{\mathcal{W}_1}, \frac{2\pi n m_1}{N}) U_{\text{CW}}^{[1]}(\mathcal{V} \cap \Omega_{\mathcal{W}_2}, -\frac{2\pi n m_2}{N}) U_{\text{CW}}^{[2]}(\mathcal{W}_1 \cap \Omega_{\mathcal{W}_2}, -\frac{2\pi m_1 m_2}{N}) \right. \\ & \quad \left. U_{\text{CW}}^{[3]}(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \cap \Omega_{\mathcal{V}}, -\frac{4\pi n m_1 m_2}{N^2}) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.46)$$

同様に J_6 の第 3 項が 3 つの運動方程式由来の 1 形式対称性の生成子の相関関数に対して成立する非自明な関係を示唆する。実際、次の外場の配位 $B_2 = \frac{2\pi m_1}{N}\delta_2(\mathcal{W}_1) + \frac{2\pi m_2}{N}\delta_2(\mathcal{W}_2) + \frac{2\pi m_3}{N}\delta_2(\mathcal{W}_3)$ と、これらに対してゲージ変換 $B_2 \rightarrow 0$ を行った配位のそれぞれに対し、分配関数 (4.12) を計算することで以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\langle U_{aE}^{[1]}(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N}) U_{aE}^{[1]}(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N}) U_{aE}^{[1]}(\mathcal{W}_3, \frac{2\pi m_3}{N}) \right\rangle \\ &= \left\langle U_{\phi a M}^{[2]}(\mathcal{W}_1 \cap \Omega_{\mathcal{W}_2}, -\frac{2\pi m_1 m_2}{N}) U_{\phi a M}^{[2]}(\mathcal{W}_2 \cap \Omega_{\mathcal{W}_3}, -\frac{2\pi m_2 m_3}{N}) \right. \\ & \quad \left. U_{\phi a M}^{[2]}(\mathcal{W}_3 \cap \Omega_{\mathcal{W}_1}, -\frac{2\pi m_3 m_1}{N}) U_{\phi M}^{[4]}(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \cap \Omega_{\mathcal{W}_3}, -\frac{4\pi m_1 m_2 m_3}{N^2}) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.47)$$

これまでの議論と同様に、対称性の生成子の相関関数の関係が大域的対称性の代数的な構造を表すので 3 点関数を含む相関関数間の非自明な関係は、この代数構造に非自明な 3 項演算を含むことを示唆する。

Chapter 5

結論および展望

本論文では $2n$ 次元アクシオン電気力学における高次群構造の解析を行なった。これは [52, 53] で詳しく調べられた 4 次元の場合の $2n$ 次元へ一般化である。具体的には $2n$ 次元に一般化されたアクシオン電気力学に関して、運動方程式由来の対称性のゲージ化に伴って生じるオペレーター値不定性を取り除く方法を議論した。これにより $2n$ 次元では $(2n - 2)$ 個のチャーン・ヴェイユ対称性を同時にゲージ化することで、オペレーター値不定性を取り除くことができることを明らかにした。

本論文では各チャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場について、場の強さを系統的に決定する方法を明らかにした。それにより、これらの背景ゲージ場の変換則はグリーン・シュワルツ機構によって修正されることを示した。この論文では特に $n = 3$ の場合の計算を詳しく行い、4 つのチャーン・ヴェイユ対称性のそれぞれのゲージ場の変換則及び場の強さの具体的な表式を与えた。さらにこれらの背景ゲージ場の変換則を用いて対称性生成子の相関関数の間に生じる非自明な関係を網羅的に与えた。その結果、4 次元の時には現れなかった運動方程式由来の対称性のチャーン・ヴェイユ対称性への作用や、3 つの運動方程式由来の対称性生成子の相関関数を含む関係など、6 次元以上に特有だと考えられる関係を見つけた。特に後者はこの理論の大域的対称性が成す代数構造に非自明な 3 項演算が含まれることを示唆している。本文では直接見なかったが、一般の $2n$ 次元の場合には n 項演算を含むと予想される。

また 6 次元の場合のゲージ変換則や相関関数の計算から、その代数構造には 4 次元の時の代数構造である 3 群を内包することが分かる。一般の場合にも (3.23) や (3.30) から明らかのように、 $(2n + 2)$ 次元の場合のゲージ不変な場の強さは $2n$ 次元の場合のそれを全て含む。こ

のことから一般に $(2n + 2)$ 次元の理論は $2n$ 次元の代数構造を内包することが分かる。

本論文では上述のようにゲージ変換則や相関関数の関係の分析から、代数の包含関係や非自明な多項演算の存在という一般の $2n$ 次元における代数構造に関して重要な手がかりを得た。特に 6 次元の時は、具体的な計算により 0 形式対称性から 4 形式対称性までの 5 つの階数の異なる対称性が閉じた代数構造をなしていることを確認した。これはこの理論が 5 群の構造を持っていることを示唆している。また一般の場合でも同様に $(2n - 1)$ 個の階数の異なる対称性が閉じた構造をなし、 $(2n - 1)$ 群の構造を持つことを示唆している。本論文ではこれ以上具体的に代数構造の特定については議論しなかった。

ここでこの論文で得られた結果を総括する。序論で述べた通りこの論文の主な目標はアクション電気力学を通して場の理論の高次群構造を調べること、特に高次群構造を持つ場の理論の性質や構成法を系統的に調べることであった。この目標は概ね達成されたと言える。本稿ではアクション電気力学が高次群構造を構成するための良い模型になっているという当初の期待通り、 $2n$ 次元アクション電気力学に対しては $(2n - 1)$ 群を示唆する高次群構造が系統的に構成できることを明らかにした。またこの論文で高次元への拡張を行なった動機は、高次元では理論に存在するチャーン・ヴェイユ対称性の数が増えるために、より複雑な高次群構造が現れると予想されるからであった。実際、高次元では運動方程式に由来する対称性に対する背景ゲージ場を導入すると、高次元で新たに現れるチャーン・ヴェイユ対称性についても同時に背景ゲージ場を導入することではじめて対称性の代数が閉じることを明らかにした。チャーン・ヴェイユ対称性はカレントの保存則がビアンキ恒等式に由来するという意味で自明に成立する対称性であり、通常はあまり議論されない。しかしこの論文で見たように理論の高次群構造を議論する際にはチャーン・ヴェイユ対称性が重要な役割をもつことが分かった。

この論文では 4 次元での先行研究と同様に高次群構造を分析する際には以下の手続きを行った。

1. 運動方程式由来の対称性に対する背景ゲージ場を導入する。
2. 上の操作で生じたオペレーター値不定性を相殺するように対応するチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場を導入する。
3. ゲージ不変性からチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場の変換則はグリーン・シュワルツ機構によって修正される。

4. 上で得たゲージ変換則を用いて生成子の相関関数の間に成立する関係式を導く。

つまり本論文は4次元のアクシオン電気力学に対して提案された以上の手続きを、 $2n$ 次元のアクシオン電気力学に対して拡張したとすることができる。またこの手続き自体はアクシオン電気力学以外の系でも同様に適用することができると予想される。特に本論文でも見たように、オペレーター値不定性はチャーン・ヴェイユ対称性の保存カレントで書くことができる、というのが相殺項を導入する際のポイントであった。この観点から、背景ゲージ場の導入に伴ってオペレーター値不定性が生じるような場合には上の手続きを用いて高次群構造を調べることが可能であると考えられる。実際、オペレーター値不定性とグリーン・シュワルツ機構が高次群構造を反映することに関しては一般的な立場から [30, 31] などでも議論されている。この論文では特にチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場を導入することでオペレーター値不定性を消去できる、という点を具体的な模型を通して確認したことになる。また一般に高次元ではより多くの場を含むオペレーター値不定性が存在し得るが、その一方でチャーン・ヴェイユ対称性も多く存在する。そのため上の手続きに従うと一般には高次元になる程大きい高次群構造を持つことが示唆される。これも今回具体的な $2n$ 次元のアクシオン電気力学の解析を用いて確認することができた。

ここまでこの論文ではアクシオン電気力学における高次群構造を解析してきた。最後に $2n$ 次元アクシオン電気力学の高次群構造およびその周辺に関して今後の展望をまとめる。この論文では議論しなかった課題がいくつか残っている。また本論文で得られた結果を用いてさらに理論を拡張することで場の理論の高次群構造をさらに調べることが可能であると考えられる。以下ではそれらの中から今後の研究の方針を二つ述べることにする。

一つの方向性は今回得られた高次群の構造を数学的に厳密な立場から理解するというものである。4次元の時には2接合加群を用いた3群の記述を行い、この代数を構成する演算と物理的な解釈が対応づけられていた [52, 53]。これまでも述べた通りこの論文では高次元での高次群構造の数学的に厳密な取り扱いはしなかったが、この場合でも4次元の時と同様に数学的な操作と物理的な解釈には対応があると考えられる。しかし、一般により多くの群が混ざり合うような高次群になるとその構成は複雑になっていくため、そもそも任意の高次群を数学的に厳密な立場から構成すること自体困難な問題であると考えられる。よって $2n$ 次元アクシオン電気力学における高次群構造の数学的に厳密な取り扱いを考えることはそれ自体が興味深い問題である。また数学的に厳密な記述を得られたとすれば、例えば高次群の分類理論などの数学的な分析から対応する場の理論について情報を得る [80] など、より深い解析

につながる可能性がある。そのため今回得られた高次群の構造を数学的に厳密な立場から理解するという課題は重要であると考えられる。

この論文では場の理論の解析を通して $2n$ 次元アキソン電気力学における高次群構造に関していくつかの情報を得た。例えば、3章での議論から明らかなように、一般に $2n$ 次元のアキソン電気力学における高次群構造は $(2n - 2)$ 次元のアキソン電気力学の高次群構造を内部構造として持つ。実際 (4.4) から (4.7) をみると、 G_3, H_4 は4次元の時と同じ形をしているが、この事実は6次元での高次群構造は4次元の高次群構造である3群を内部構造として持っていることを反映している。また上でも述べた通り6次元では3項演算を示唆する関係が得られた。一般には $2n$ 次元アキソン電気力学では n 項演算を含むと考えられる。このような物理の分析から得た結果はこれらの高次群構造を数学的に特定するためのヒントになると考えられる。

当初の期待では4次元アキソン電気力学は2接合加群で記述されたり有質量の場合では3接合加群で記述されるという背景から、一般の場合も同様の構造で記述できると考えていた。特に4次元アキソン電気力学は3つの階数の異なる高次形式対称性が混ざり合い2接合加群の構造を持っていたので、 $(2n - 1)$ 個の階数の異なる高次形式対称性を持つ $2n$ 次元の場合は $(2n - 2)$ 接合加群の構造を持つことを期待していた。本論文で得られた結果は少なくとも単純に n 接合加群で記述できるわけではないことを示唆している。今回の解析で得られた $2n$ 次元のアキソン電気力学は n 項演算を含むという示唆から、多項演算を含まない接合加群とその高次の拡張だけでは理論の高次群構造を記述することはできないと考えることができる¹⁰。以上のように今回の高次元への拡張によって高次群を記述する一般の代数構造に関して重要な示唆を得られたので、より一般の代数構造を調べることが今後の課題となる。

もう一つ別の拡張の方向として、さらに力学的な場を導入することにより他の場の理論の高次群構造を調べるというものが考えられる。3章で議論したように、 $2n$ 次元のアキソン電気力学で運動方程由来の対称性に対する背景ゲージ場を導入する際には $(2n - 2)$ 個のチャーレン・ヴェイク対称性に対する背景ゲージ場も導入する必要があった。このため背景ゲージ化を行なった $2n$ 次元のアキソン電気力学には1形式、 \dots 、 $(2n - 1)$ 形式の背景ゲージ場が

¹⁰4 接合加群以上の高次の接合加群は物理の文脈では筆者の知る限り議論されておらず、数学の文脈でも構成法についての議論などはなされていない [81, 82] もの、具体的にその構造を書き下しているものは (少なくとも物理に利用できる形で書かれているものは) 見かけない。そのため $2n$ 次元の時の代数が $(2n - 2)$ 接合加群であるかどうかを厳密に判断するのはそもそも難しい問題である。しかし、ここで述べたように接合加群とその拡張は多項演算を含まないという点から少なくとも $(2n - 2)$ 接合加群で記述されるわけではないと判断できる。

存在する。そこで、これらの背景ゲージ場を力学的な場に格上げするという拡張が考えられる。このような力学的な場への格上げを行うと (3.32) の 2、3 行目のような背景ゲージ場のみで書かれていた項から新たにオペレーター値不定性が現れることが予想できる。またそれと同時に新しい力学的な場の導入によってナイーブには新しいチャーン・ヴェイユ対称性が生じることも予想される。そこで本論文で見てきたのようにオペレーター値不定性をチャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場を導入することで相殺する方法によって、より拡大された高次群構造が現れることが予想される。

この時興味のある理論に応じて、適当に力学的な場を導入することで様々な場の理論の高次群構造を調べることができると考えられる。例えば 6 次元では自己双対な 2 形式場が存在する [83]。このような自己双対な 2 形式場は 6 次元の $\mathcal{N} = (1, 0)$ の超共形場の理論のテンソル多重項に含まれることが知られており、この理論では自己双対な 2 形式場が $da \wedge da$ と結合することが知られている [27, 84]。一方で 4 章で議論したように 6 次元のアクシオン電気力学には、 $da \wedge da \wedge B_2^{CW}$ の形の項が含まれる。よってチャーン・ヴェイユ 1 形式対称性に対する背景ゲージ場 B_2^{CW} を力学的な自己双対場に格上げすることで、6 次元の $\mathcal{N} = (2, 0)$ 超共形場の理論と同じ形の結合項を得ることができる。このようにアクシオン電気力学の拡張を通してより大きな高次群構造を調べることができると共に、他の興味ある理論の高次群構造について間接的に手がかりを得ることができる考えられる。

このように $2n$ 次元のアクシオン電気力学はそれ自体も高次群構造を調べる上で興味深い一方で、その他にも様々な拡張が考えられる。 $2n$ 次元のアクシオン電気力学を起点として、場の理論の高次群構造についてさらなる探究が可能であると考えられる。これらは将来の課題として残しておく。

謝辞

本論文を書くにあたり指導教員である酒井忠勝先生には大変お世話になりました。酒井先生からは日々の議論を通して多くのことを学ばせていただくとともに、先生の指導のおかげで自由に自分の興味を追求することができました。心より感謝申し上げます。

本論文の主要な解析に関する共同研究者である高エネルギー加速器研究機構の横倉諒氏には、議論を通して数多の有意義な指摘をしていただくとともに多くのことを学ばせていただいたこと、心より感謝申し上げます。また、E研の中村希京氏との議論は本論文を書くにあたり大変有意義でした。

Witwatersrand 大学の平野真司氏およびE研の重森正樹氏と共同研究を通して多くのことを学ばせていただきました。徳山工業高等専門学校 of 佐藤勇貴氏、E研の杉本宗太郎氏をはじめとするまだ上で述べていないE研のフォーマルグループの方々との議論の時間も大変有意義でした。特にストリングジャーナルクラブを通して得た知見は大いに役立ちました。またE研のスタッフの方々および先輩、後輩との議論は大変有意義なものでした。その他にも多くの方々と議論をさせていただきました。皆様に感謝申し上げます。

最後に家族、特に両親に対して心より感謝を申し上げます。

Appendix A

数学的補遺

A.1 諸公式

本論文で用いたいくつかの数学的事実をまとめておく。

A.1.1 微分形式

本論文で行った計算の多くの部分では以下の微分形式の公式を用いている。特に符号に注意する。

$$\alpha \wedge \star \beta = \beta \wedge \star \alpha \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha_p \wedge \star \beta_p = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta^{\mu_1 \dots \mu_p} dV \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha_p \wedge \beta_q = (-1)^{pq} \beta_q \wedge \alpha_p \quad (\text{A.3})$$

$$d(\alpha_p \wedge \beta_q) = (d\alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge d\beta_q \quad (\text{A.4})$$

表面項を無視すれば以下が成り立つ。

$$(d\alpha_p) \wedge \beta_q = (-1)^{p+1} \alpha_p \wedge d\beta_q \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 デルタ関数

本論文では多様体を引数に取るようなデルタ関数を用いている。これは以下のように定義される。

$$\int_{M^D} J^{(D-p)} \wedge \delta_p(\mathcal{V}_{D-p}) \equiv \int_{\mathcal{V}_{D-p}} J^{(D-p)}. \quad (\text{A.6})$$

このデルタ関数には以下のストークスの定理が成立する。

$$\delta_p(\mathcal{V}_{D-p}) = (-1)^{D-p-1} d\delta_{p-1}(\Omega_{\mathcal{V}_{D-p}}) \quad (\text{A.7})$$

これは以下の計算により確かめられる。

$$\int_{\mathcal{V}_{D-p}} J^{(D-p)} = \int_{\Omega_{\mathcal{V}_{D-p}}} dJ^{(D-p)} \quad (\text{A.8})$$

$$= \int_{M^D} dJ^{(D-p)} \wedge \delta_{p-1}(\Omega_{\mathcal{V}_{D-p}}) \quad (\text{A.9})$$

$$= (-1)^{D-p-1} \int_{M^D} J^{(D-p)} \wedge d\delta_{p-1}(\Omega_{\mathcal{V}_{D-p}}) \quad (\text{A.10})$$

A.1.3 二重和の取り扱い

ここでは本稿で用いた二重和に関する関係式をまとめる。

Case 1 $k = n - p - r - 1$ を用いると、二重和を次のように書き換えることができる。

$$\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-r-1} (\dots) = \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{r=1}^{n-k-1} (\dots) \quad (\text{A.11})$$

以下に例として、 $n = 5$ の場合の r, p, k の関係を示した。ただし、表の r, p が交差するところに対応する k の値が示されている。

Table A.1: Example: $n = 5$

$r \backslash p$	0	1	2	3
1	3	2	1	0
2	2	1	0	×
3	1	0	×	×
4	0	×	×	×

Case 2 $k = n - p - r$ を用いると、二重和を次のように書き換えることができる。

$$\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-r} (\dots) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-k} (\dots) + \sum_{r=1}^{n-1} (\dots) |_{k=0} \quad (\text{A.12})$$

以下に例として、 $n = 5$ の場合の r, p, k の関係を示した。ただし、表の r, p が交差するところに対応する k の値が示されている。

Table A.2: Example: $n = 5$

$r \backslash p$	0	1	2	3	4
1	4	3	2	1	0
2	3	2	1	0	×
3	2	1	0	×	×
4	1	0	×	×	×

A.2 2接合加群

[52, 53] では4次元のアクション電気力学の高次群構造が2接合加群によって記述されることが明らかにされた。ここでは2接合加群の定義と諸性質をまとめる。

2接合加群は、3つの群 G, H, L とそれらの間の群準同型写像 ∂_1, ∂_2 、および二つの演算 $\triangleright, \{, \}$ からなる構造である。ただしそれぞれは以下のように定義される。

\triangleright は G の G, H, L に対する作用である。つまり、 G の元を G, H, L の自己同型にうつす写像である。例えば $G \triangleright H$ は

$$G \triangleright H : G \rightarrow \text{Aut}(H) \quad (\text{A.13})$$

を表す。これは $g \in G$ で特徴づけられる H の自己同型写像 $\alpha_g : H \rightarrow H$ が存在しているといえることができる。なお、 $G \triangleright G$ は、 $g, g' \in G$ に対して

$$g \triangleright g' = gg'g^{-1} \quad (\text{A.14})$$

で定義される。

∂_1, ∂_2 は以下のように定義される。

$$\partial_1 : H \rightarrow G, \quad \partial_2 : L \rightarrow H \quad (\text{A.15})$$

ただしこれらの写像は群準同型写像なので、 $h_{1,2} \in H, l_{1,2} \in L$ に対して次が成立する。

$$\partial_1(h_1 \circ h_2) = \partial_1(h_1) \circ \partial_1(h_2) \quad (\text{A.16})$$

$$\partial_2(l_1 \circ l_2) = \partial_2(l_1) \circ \partial_2(l_2) \quad (\text{A.17})$$

加えて ∂_1, ∂_2 は次を満たす。

$$\partial_1 \circ \partial_2 l = 1_G \quad (\text{A.18})$$

ただし、 1_G は G の単位元である。またこれらは G 同変な写像である。つまり $g \in G, h \in H, l \in L$ に対して以下が成立する。

$$g \triangleright (\partial_1 h) = \partial_1(g \triangleright h), \quad g \triangleright (\partial_2 l) = \partial_2(g \triangleright l) \quad (\text{A.19})$$

$\{, \}$ はパイファー・リフティングと呼ばれる。これは H のペアを L にうつす写像である。つまり、

$$\{h_1, h_2\} \in L \quad (\text{A.20})$$

である。パイファー・リフティングは次を満たす。

$$\partial_2\{h_1, h_2\} = h_1 \circ h_2 \circ h_1^{-1} \cdot (\partial_1 h_1) \triangleright h_2^{-1} \quad (\text{A.21})$$

$$g \triangleright \{h_1, h_2\} = \{g \triangleright h_1, g \triangleright h_2\} \quad (\text{A.22})$$

$$\{\partial_2 l_1, \partial_2 l_2\} = l_1 \circ l_2 \circ l_1^{-1} \circ l_2^{-1} \quad (\text{A.23})$$

$$\{h_1 \circ h_2, h_3\} = \{h_1, h_2 \circ h_3 \circ h_2^{-1}\} \circ (\partial_1 h_1) \triangleright \{h_2, h_3\} \quad (\text{A.24})$$

$$\{h_1, h_2 \circ h_3\} = \{h_1, h_2\} \circ \{h_1, h_3\} \circ \{\partial_2\{h_1, h_3\}\}^{-1}, (\partial_1 h_1) \triangleright h_2 \quad (\text{A.25})$$

$$\{\partial_2 l, h\} \circ \{h, \partial_2 l\} = l \circ (\partial_1 h) \triangleright l^{-1} \quad (\text{A.26})$$

Appendix B

4次元アクシオン電気力学の高次群構造

ここでアクシオン電気力学の高次群構造に関して4次元の場合の結果をまとめる。これは [52,53] で調べられており、2 接合加群の構造を持つことが示された。以下では4次元アクシオン電気力学における2接合加群の構造を議論する。

4次元アクシオン電気力学の作用は、

$$S_{4d} = - \int_{\mathcal{M}_4} \left(\frac{1}{2} |d\phi|^2 + \frac{1}{2} |da|^2 - \frac{N}{8\pi^2} \phi (da)^2 \right) \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。この理論で高次群構造をなす大域的対称性は以下のようにまとめられる。

生成子	群	保存カレント	ゲージ場
$U_{\text{EoM}}^{[0]}$	$\mathbb{Z}_N^{[0]}$	$j_{\text{EoM}}^{[0]} = - \star d\phi - \frac{N}{8\pi^2} a \wedge da$	A_1
$U_{\text{EoM}}^{[1]}$	$\mathbb{Z}_N^{[1]}$	$j_{\text{EoM}}^{[1]} = \star da - \frac{N}{4\pi^2} \phi \wedge da$	B_2
$U_{\text{CW}}^{[1]}$	$U(1)^{[1]}$	$j_{\text{CW}}^{[1]} = \frac{1}{2\pi} da$	B_2^{CW}
$U_{\text{CW}}^{[2]}$	$U(1)^{[2]}$	$j_{\text{CW}}^{[2]} = \frac{1}{2\pi} d\phi$	C_3

この時チャーン・ヴェイユ対称性に対する背景ゲージ場の強さは以下の形をしている。

$$G_3 = dB_2^{\text{CW}} - \frac{N}{2\pi} A_1 \wedge B_2, \quad (\text{B.2})$$

$$H_4 = dC_3 + \frac{N}{4\pi} B_2 \wedge B_2. \quad (\text{B.3})$$

この結果は本論文の3.3章の解析における $n = 2$ の場合と一致している。またこれは、[53] の結果を再現している。加えて本論文で強調してきたように6次元の時の結果(4.6)、(4.7)と一致している。

4章の解析と同様に G_3 と H_4 の形から高次群構造を読み取ることができる。実際、と同様の計算を行うことで以下の相関関数間の関係を得る。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\nu, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) \right\rangle = \left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\nu, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[1]} \left(\nu \cup \Omega_{\mathcal{W}}, -\frac{2\pi mn}{N} \right) \right\rangle \quad (\text{B.4})$$

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_2, \frac{2\pi m_2}{N} \right) \right\rangle = \left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}_1, \frac{2\pi m_1}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[2]} \left(\mathcal{W}_1 \cap \Omega_{\mathcal{W}_2}, -\frac{2\pi m_1 m_2}{N} \right) \right\rangle \quad (\text{B.5})$$

まず (B.4) から、0形式対称性の生成子が1形式対称性の生成子に作用して、別の1形式対称性の生成子が生成されたことが読み取れる。また (B.5) から、2つの1形式対称性生成子が2形式対称性に写像されている、すなわちパイファー・リフティングの構造を反映している。以上から $G = \mathbb{Z}_N^{[0]}$, $H = \mathbb{Z}_N^{[1]} \times U(1)^{[1]}$, $L = U(1)^{[2]}$ として、次の関係を読み取ることができる。

まず、 $e^{i\frac{2\pi n}{N}} \in G$, $(e^{i\frac{2\pi m}{N}}, 1) \in H$ に対して、

$$e^{i\frac{2\pi n}{N}} \triangleright (e^{i\frac{2\pi m}{N}}, 1) = (e^{i\frac{2\pi m}{N}}, e^{-i\frac{2\pi nm}{N}}) \in H \quad (\text{B.6})$$

が成り立つ。また、 $(e^{i\frac{2\pi m_1}{N}}, 1), (e^{i\frac{2\pi m_2}{N}}, 1) \in H$ に対して、

$$\left\{ (e^{i\frac{2\pi m_1}{N}}, 1), (e^{i\frac{2\pi m_2}{N}}, 1) \right\} = e^{-i\frac{2\pi m_1 m_2}{N}} \in L \quad (\text{B.7})$$

上の二つ以外は自明になる。各群が可換群であることと、 ∂_1, ∂_2 が自明であることを利用すると (A.21)~(A.26) が成立することを確かめることができる。

以上のように4次元のアクシオン電気力学は2接合加群の構造を持つ。

Appendix C

相関関数に関する恒等式の別の導出

4.2 節では相関関数間の関係をゲージ変換則を用いた計算で導いた。ここでは別の方法での計算を与える。これは [52] で提案された計算の $2n$ 次元アキソン電気力学への適用である。 $2n$ 次元の作用 (3.1) を引数を明示的に表して $S[\phi, a]$ と書くと、以下の関係式が成り立つ。

$$S[\phi, a] + \int_{\mathcal{M}_{2n}} dj_{\text{EoM}}^{[0]} \wedge \Phi_0 = S[\phi - \Phi_0, a] + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_{2n}} d\Phi_0 \wedge \star d\Phi_0 \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} S[\phi, a] + \int_{\mathcal{M}_{2n}} dj_{\text{EoM}}^{[1]} \wedge \Pi_1 &= S[\phi, a + \Pi_1] + \frac{N}{(2\pi)^n} \sum_{r=2}^n \frac{1}{(n-r)!r!} d\phi (da)^{n-r} \wedge (d\Pi_1)^{r-1} \wedge \Pi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_{2n}} d\Pi_1 \wedge \star d\Pi_1, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ここでは例として、6次元理論における0形式対称性の生成子 $U_{\text{EoM}}^{[0]}(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N})$ と運動方程式由来の1形式対称性の生成子 $U_{\text{CW}}^{[1]}(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N})$ の相関関数を、上の恒等式を $n=3$ として用いることで評価する。まず定義から $U_{\text{EoM}}^{[0]}(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N}) = \exp(\frac{2\pi}{N} \int_{\mathcal{V}} j_{\text{EoM}}^{[0]})$ であるが、デルタ関数を用いて書き換えると $\exp(\frac{2\pi}{N} \int_{\mathcal{M}_6} dj_{\text{EoM}}^{[0]} \wedge \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}))$ と書ける。ここで (C.1) を用いるとこの相関関数は以下のように書くことができる。

$$\left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) \right\rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\phi, a] e^{iS[\phi - \frac{2\pi n}{N} \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}}), a] + \frac{2\pi im}{N} \int_{\mathcal{W}} j_{\text{EoM}}^{[1]}} \quad (\text{C.3})$$

いま、 $\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{2\pi n}{N} \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}})$ のように場の再定義を行う。これにより以下が成立する。

$$\begin{aligned} \left\langle U_{\text{EoM}}^{[0]} \left(\mathcal{V}, \frac{2\pi n}{N} \right) U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) \right\rangle &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\phi', a] e^{iS[\phi', a] + \frac{2\pi im}{N} \int_{\mathcal{W}} j_{\text{EoM}}^{[1]} - \frac{im}{4\pi N} \int_{\mathcal{W}} da \wedge da \delta_0(\Omega_{\mathcal{V}})} \\ &= \left\langle U_{\text{EoM}}^{[1]} \left(\mathcal{W}, \frac{2\pi m}{N} \right) U_{\text{CW}}^{[1]} \left(\mathcal{W} \cap \Omega_{\mathcal{V}}, -\frac{2\pi nm}{N} \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

このように上記の方法で (4.39) と同じ結論を得た。他の相関関数間の関係もこの方法で同様に計算することができる。

Bibliography

- [1] Davide Gaiotto, Anton Kapustin, Nathan Seiberg, and Brian Willett. Generalized Global Symmetries. *JHEP*, 02:172, 2015. [arXiv:1412.5148](#), [doi:10.1007/JHEP02\(2015\)172](#).
- [2] Mendel Nguyen, Yuya Tanizaki, and Mithat Ünsal. Semi-Abelian gauge theories, non-invertible symmetries, and string tensions beyond N -ality. *JHEP*, 03:238, 2021. [arXiv:2101.02227](#), [doi:10.1007/JHEP03\(2021\)238](#).
- [3] Mendel Nguyen, Yuya Tanizaki, and Mithat Ünsal. Noninvertible 1-form symmetry and Casimir scaling in 2D Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, 104(6):065003, 2021. [arXiv:2104.01824](#), [doi:10.1103/PhysRevD.104.065003](#).
- [4] Ben Heidenreich, Jacob McNamara, Miguel Montero, Matthew Reece, Tom Rudelius, and Irene Valenzuela. Non-invertible global symmetries and completeness of the spectrum. *JHEP*, 09:203, 2021. [arXiv:2104.07036](#), [doi:10.1007/JHEP09\(2021\)203](#).
- [5] Lakshya Bhardwaj, Lea E. Bottini, Sakura Schafer-Nameki, and Apoorv Tiwari. Non-Invertible Higher-Categorical Symmetries. 4 2022. [arXiv:2204.06564](#).
- [6] Clay Cordova and Kantaro Ohmori. Non-Invertible Chiral Symmetry and Exponential Hierarchies. 5 2022. [arXiv:2205.06243](#).
- [7] Justin Kaidi, Gabi Zafrir, and Yunqin Zheng. Non-invertible symmetries of $\mathcal{N} = 4$ SYM and twisted compactification. *JHEP*, 08:053, 2022. [arXiv:2205.01104](#), [doi:10.1007/JHEP08\(2022\)053](#).

- [8] Yichul Choi, Clay Cordova, Po-Shen Hsin, Ho Tat Lam, and Shu-Heng Shao. Non-invertible duality defects in 3+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, 105(12):125016, 2022. [arXiv:2111.01139](#), [doi:10.1103/PhysRevD.105.125016](#).
- [9] Masataka Koide, Yuta Nagoya, and Satoshi Yamaguchi. Non-invertible topological defects in 4-dimensional \mathbb{Z}_2 pure lattice gauge theory. *PTEP*, 2022(1):013B03, 2022. [arXiv:2109.05992](#), [doi:10.1093/ptep/ptab145](#).
- [10] Nathan Seiberg and Shu-Heng Shao. Exotic Symmetries, Duality, and Fractons in 2+1-Dimensional Quantum Field Theory. *SciPost Phys.*, 10(2):027, 2021. [arXiv:2003.10466](#), [doi:10.21468/SciPostPhys.10.2.027](#).
- [11] Nathan Seiberg and Shu-Heng Shao. Exotic \mathbb{Z}_N symmetries, duality, and fractons in 3+1-dimensional quantum field theory. *SciPost Phys.*, 10(1):003, 2021. [arXiv:2004.06115](#), [doi:10.21468/SciPostPhys.10.1.003](#).
- [12] Nathan Seiberg and Shu-Heng Shao. Exotic $U(1)$ Symmetries, Duality, and Fractons in 3+1-Dimensional Quantum Field Theory. *SciPost Phys.*, 9(4):046, 2020. [arXiv:2004.00015](#), [doi:10.21468/SciPostPhys.9.4.046](#).
- [13] Yizhi You, Trithap Devakul, F. J. Burnell, and S. L. Sondhi. Subsystem symmetry protected topological order. *Phys. Rev. B*, 98(3):035112, 2018. [arXiv:1803.02369](#), [doi:10.1103/PhysRevB.98.035112](#).
- [14] Fiona J. Burnell, Trithap Devakul, Pranay Gorantla, Ho Tat Lam, and Shu-Heng Shao. Anomaly inflow for subsystem symmetries. *Phys. Rev. B*, 106(8):085113, 2022. [arXiv:2110.09529](#), [doi:10.1103/PhysRevB.106.085113](#).
- [15] Anton Kapustin and Ryan Thorngren. Higher symmetry and gapped phases of gauge theories. 9 2013. [arXiv:1309.4721](#).
- [16] Anton Kapustin and Nathan Seiberg. Coupling a QFT to a TQFT and Duality. *JHEP*, 04:001, 2014. [arXiv:1401.0740](#), [doi:10.1007/JHEP04\(2014\)001](#).
- [17] Tom Banks and Nathan Seiberg. Symmetries and Strings in Field Theory and Gravity. *Phys. Rev. D*, 83:084019, 2011. [arXiv:1011.5120](#), [doi:10.1103/PhysRevD.83.084019](#).

- [18] Gerard 't Hooft. Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking. *NATO Sci. Ser. B*, 59:135–157, 1980. doi:10.1007/978-1-4684-7571-5_9.
- [19] Davide Gaiotto, Anton Kapustin, Zohar Komargodski, and Nathan Seiberg. Theta, Time Reversal, and Temperature. *JHEP*, 05:091, 2017. arXiv:1703.00501, doi:10.1007/JHEP05(2017)091.
- [20] Mohamed M. Anber and Erich Poppitz. Deconfinement on axion domain walls. *JHEP*, 03:124, 2020. arXiv:2001.03631, doi:10.1007/JHEP03(2020)124.
- [21] Davide Gaiotto, Zohar Komargodski, and Nathan Seiberg. Time-reversal breaking in QCD_4 , walls, and dualities in $2 + 1$ dimensions. *JHEP*, 01:110, 2018. arXiv:1708.06806, doi:10.1007/JHEP01(2018)110.
- [22] Kazuya Yonekura. Anomaly matching in QCD thermal phase transition. *JHEP*, 05:062, 2019. arXiv:1901.08188, doi:10.1007/JHEP05(2019)062.
- [23] Zohar Komargodski, Adar Sharon, Ryan Thorngren, and Xinan Zhou. Comments on Abelian Higgs Models and Persistent Order. *SciPost Phys.*, 6(1):003, 2019. arXiv:1705.04786, doi:10.21468/SciPostPhys.6.1.003.
- [24] Daniel Harlow and Hiroshi Ooguri. Symmetries in quantum field theory and quantum gravity. *Commun. Math. Phys.*, 383(3):1669–1804, 2021. arXiv:1810.05338, doi:10.1007/s00220-021-04040-y.
- [25] Yoshimasa Hidaka, Muneto Nitta, and Ryo Yokokura. Emergent discrete 3-form symmetry and domain walls. *Phys. Lett. B*, 803:135290, 2020. arXiv:1912.02782, doi:10.1016/j.physletb.2020.135290.
- [26] Yoshimasa Hidaka, Yuji Hirono, Muneto Nitta, Yuya Tanizaki, and Ryo Yokokura. Topological order in the color-flavor locked phase of a $(3+1)$ -dimensional $U(N)$ gauge-Higgs system. *Phys. Rev. D*, 100(12):125016, 2019. arXiv:1903.06389, doi:10.1103/PhysRevD.100.125016.

- [27] Fabio Apruzzi, Markus Dierigl, and Ling Lin. The fate of discrete 1-form symmetries in 6d. *SciPost Phys.*, 12(2):047, 2022. arXiv:2008.09117, doi:10.21468/SciPostPhys.12.2.047.
- [28] Maissam Barkeshli, Parsa Bonderson, Meng Cheng, and Zhenghan Wang. Symmetry Fractionalization, Defects, and Gauging of Topological Phases. *Phys. Rev. B*, 100(11):115147, 2019. arXiv:1410.4540, doi:10.1103/PhysRevB.100.115147.
- [29] Eric Sharpe. Notes on generalized global symmetries in QFT. *Fortsch. Phys.*, 63:659–682, 2015. arXiv:1508.04770, doi:10.1002/prop.201500048.
- [30] Clay Córdova, Thomas T. Dumitrescu, and Kenneth Intriligator. Exploring 2-Group Global Symmetries. *JHEP*, 02:184, 2019. arXiv:1802.04790, doi:10.1007/JHEP02(2019)184.
- [31] Francesco Benini, Clay Córdova, and Po-Shen Hsin. On 2-Group Global Symmetries and their Anomalies. *JHEP*, 03:118, 2019. arXiv:1803.09336, doi:10.1007/JHEP03(2019)118.
- [32] John C. Baez and Aaron D. Lauda. Higher-dimensional algebra v: 2-groups. *Theory and Applications of Categories*, 12:423–491, 2004. URL: <https://arxiv.org/pdf/math/0307200.pdf>, arXiv:math/0307200.
- [33] Yuya Tanizaki and Mithat Ünsal. Modified instanton sum in QCD and higher-groups. *JHEP*, 03:123, 2020. arXiv:1912.01033, doi:10.1007/JHEP03(2020)123.
- [34] Lakshya Bhardwaj. 2-Group symmetries in class S. *SciPost Phys.*, 12(5):152, 2022. arXiv:2107.06816, doi:10.21468/SciPostPhys.12.5.152.
- [35] Michele Del Zotto and Kantaro Ohmori. 2-Group Symmetries of 6D Little String Theories and T-Duality. *Annales Henri Poincaré*, 22(7):2451–2474, 2021. arXiv:2009.03489, doi:10.1007/s00023-021-01018-3.
- [36] Clay Cordova, Thomas T. Dumitrescu, and Kenneth Intriligator. 2-Group Global Symmetries and Anomalies in Six-Dimensional Quantum Field Theories. *JHEP*, 04:252, 2021. arXiv:2009.00138, doi:10.1007/JHEP04(2021)252.

- [37] Mirjam Cvetič, Jonathan J. Heckman, Max Hübner, and Ethan Torres. 0-form, 1-form, and 2-group symmetries via cutting and gluing of orbifolds. *Phys. Rev. D*, 106(10):106003, 2022. [arXiv:2203.10102](#), [doi:10.1103/PhysRevD.106.106003](#).
- [38] Fabio Apruzzi, Sakura Schafer-Nameki, Lakshya Bhardwaj, and Jihwan Oh. The Global Form of Flavor Symmetries and 2-Group Symmetries in 5d SCFTs. *SciPost Phys.*, 13(2):024, 2022. [arXiv:2105.08724](#), [doi:10.21468/SciPostPhys.13.2.024](#).
- [39] Michele Del Zotto, Iñaki García Etxebarria, and Sakura Schafer-Nameki. 2-Group Symmetries and M-Theory. *SciPost Phys.*, 13:105, 2022. [arXiv:2203.10097](#), [doi:10.21468/SciPostPhys.13.5.105](#).
- [40] Yuya Tanizaki, Tatsuhiro Misumi, and Norisuke Sakai. Circle compactification and 't Hooft anomaly. *JHEP*, 12:056, 2017. [arXiv:1710.08923](#), [doi:10.1007/JHEP12\(2017\)056](#).
- [41] Yuya Tanizaki, Yuta Kikuchi, Tatsuhiro Misumi, and Norisuke Sakai. Anomaly matching for the phase diagram of massless \mathbb{Z}_N -QCD. *Phys. Rev. D*, 97(5):054012, 2018. [arXiv:1711.10487](#), [doi:10.1103/PhysRevD.97.054012](#).
- [42] Yuji Hirono and Yuya Tanizaki. Quark-Hadron Continuity beyond the Ginzburg-Landau Paradigm. *Phys. Rev. Lett.*, 122(21):212001, 2019. [arXiv:1811.10608](#), [doi:10.1103/PhysRevLett.122.212001](#).
- [43] Yuji Hirono and Yuya Tanizaki. Effective gauge theories of superfluidity with topological order. *JHEP*, 07:062, 2019. [arXiv:1904.08570](#), [doi:10.1007/JHEP07\(2019\)062](#).
- [44] Tatsuhiro Misumi, Yuya Tanizaki, and Mithat Ünsal. Fractional θ angle, 't Hooft anomaly, and quantum instantons in charge- q multi-flavor Schwinger model. *JHEP*, 07:018, 2019. [arXiv:1905.05781](#), [doi:10.1007/JHEP07\(2019\)018](#).
- [45] Mohamed M. Anber and Erich Poppitz. Generalized 't Hooft anomalies on non-spin manifolds. *JHEP*, 04:097, 2020. [arXiv:2002.02037](#), [doi:10.1007/JHEP04\(2020\)097](#).

- [46] Yoshimasa Hidaka, Yuji Hirono, and Ryo Yokokura. Counting Nambu-Goldstone Modes of Higher-Form Global Symmetries. *Phys. Rev. Lett.*, 126(7):071601, 2021. [arXiv:2007.15901](#), [doi:10.1103/PhysRevLett.126.071601](#).
- [47] Naoki Yamamoto and Ryo Yokokura. Topological mass generation in gapless systems. *Phys. Rev. D*, 104(2):025010, 2021. [arXiv:2009.07621](#), [doi:10.1103/PhysRevD.104.025010](#).
- [48] Takuya Furusawa and Masaru Hongo. Global anomaly matching in the higher-dimensional $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ model. *Phys. Rev. B*, 101(15):155113, 2020. [arXiv:2001.07373](#), [doi:10.1103/PhysRevB.101.155113](#).
- [49] Naoki Yamamoto and Ryo Yokokura. Unstable Nambu-Goldstone modes. *Phys. Rev. D*, 106(10):105004, 2022. [arXiv:2203.02727](#), [doi:10.1103/PhysRevD.106.105004](#).
- [50] Yuji Tachikawa. On gauging finite subgroups. *SciPost Phys.*, 8(1):015, 2020. [arXiv:1712.09542](#), [doi:10.21468/SciPostPhys.8.1.015](#).
- [51] Maissam Barkeshli, Yu-An Chen, Po-Shen Hsin, and Ryohei Kobayashi. Higher-group symmetry in finite gauge theory and stabilizer codes. 11 2022. [arXiv:2211.11764](#).
- [52] Yoshimasa Hidaka, Muneto Nitta, and Ryo Yokokura. Higher-form symmetries and 3-group in axion electrodynamics. *Phys. Lett. B*, 808:135672, 2020. [arXiv:2006.12532](#), [doi:10.1016/j.physletb.2020.135672](#).
- [53] Yoshimasa Hidaka, Muneto Nitta, and Ryo Yokokura. Global 3-group symmetry and 't Hooft anomalies in axion electrodynamics. *JHEP*, 01:173, 2021. [arXiv:2009.14368](#), [doi:10.1007/JHEP01\(2021\)173](#).
- [54] Daniel Conduché. Modules croisés généralisés de longueur 2. *J. Pure Appl. Alg.*, 34(2):155–178, 1984. [doi:10.1016/0022-4049\(84\)90034-3](#).
- [55] Edward Witten. Dyons of Charge $e\theta/2\pi$. *Phys. Lett. B*, 86:283–287, 1979. [doi:10.1016/0370-2693\(79\)90838-4](#).

- [56] Yoshimasa Hidaka, Muneto Nitta, and Ryo Yokokura. Global 4-group symmetry and 't Hooft anomalies in topological axion electrodynamics. 8 2021. [arXiv:2108.12564](#).
- [57] Ben Heidenreich, Jacob McNamara, Miguel Montero, Matthew Reece, Tom Rudelius, and Irene Valenzuela. Chern-Weil global symmetries and how quantum gravity avoids them. *JHEP*, 11:053, 2021. [arXiv:2012.00009](#), [doi:10.1007/JHEP11\(2021\)053](#).
- [58] Michael B. Green and John H. Schwarz. Anomaly Cancellation in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory. *Phys. Lett. B*, 149:117–122, 1984. [doi:10.1016/0370-2693\(84\)91565-X](#).
- [59] P. Sikivie. On the Interaction of Magnetic Monopoles With Axionic Domain Walls. *Phys. Lett. B*, 137:353–356, 1984. [doi:10.1016/0370-2693\(84\)91731-3](#).
- [60] Xiao-Liang Qi, Taylor Hughes, and Shou-Cheng Zhang. Topological Field Theory of Time-Reversal Invariant Insulators. *Phys. Rev. B*, 78:195424, 2008. [arXiv:0802.3537](#), [doi:10.1103/PhysRevB.78.195424](#).
- [61] Jeffrey C. Y. Teo and C. L. Kane. Topological Defects and Gapless Modes in Insulators and Superconductors. *Phys. Rev. B*, 82:115120, 2010. [arXiv:1006.0690](#), [doi:10.1103/PhysRevB.82.115120](#).
- [62] Zhong Wang and Shou-Cheng Zhang. Chiral anomaly, charge density waves, and axion strings from Weyl semimetals. *Phys. Rev. B*, 87(16):161107, 2013. [arXiv:1207.5234](#), [doi:10.1103/PhysRevB.87.161107](#).
- [63] Tatsuki Nakajima, Tadakatsu Sakai, and Ryo Yokokura. Higher-group structure in $2n$ -dimensional axion-electrodynamics. 11 2022. [arXiv:2211.13861](#).
- [64] Thomas Nikolaus, Urs Schreiber, and Danny Stevenson. Principal ∞ -bundles: general theory. *Journal of Homotopy and Related Structures*, 10(4):749–801, jun 2014. URL: <https://doi.org/10.1007/s40062-014-0083-6>, [doi:10.1007/s40062-014-0083-6](#).

- [65] Thomas Nikolaus, Urs Schreiber, and Danny Stevenson. Principal ∞ -bundles: presentations. *Journal of Homotopy and Related Structures*, 10(3):565–622, mar 2014. URL: <https://doi.org/10.1007%2Fs40062-014-0077-4>, doi:10.1007/s40062-014-0077-4.
- [66] John Baez, Aristide Baratin, Laurent Freidel, and Derek Wise. Infinite-dimensional representations of 2-groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 219(1032):0–0, 2012. URL: <https://doi.org/10.1090%2Fs0065-9266-2012-00652-6>, doi:10.1090/s0065-9266-2012-00652-6.
- [67] John C. Baez. An introduction to n-categories. In Eugenio Moggi and Giuseppe Rosolini, editors, *Category Theory and Computer Science*, pages 1–33, Berlin, Heidelberg, 1997. Springer Berlin Heidelberg.
- [68] John C. Baez and John Huerta. An Invitation to Higher Gauge Theory. *Gen. Rel. Grav.*, 43:2335–2392, 2011. arXiv:1003.4485, doi:10.1007/s10714-010-1070-9.
- [69] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. I. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55(3.P1):213 – 245, 1949. URL: <https://doi.org/>, doi:bams/1183513543.
- [70] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55(5):453 – 496, 1949. URL: <https://doi.org/>, doi:bams/1183513797.
- [71] Stephen L. Adler and William A. Bardeen. Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation. *Phys. Rev.*, 182:1517–1536, 1969. doi:10.1103/PhysRev.182.1517.
- [72] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ model. *Nuovo Cim. A*, 60:47–61, 1969. doi:10.1007/BF02823296.
- [73] Frank Wilczek. Two applications of axion electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1799–1802, May 1987. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1799>, doi:10.1103/PhysRevLett.58.1799.

- [74] R. D. Peccei and Helen R. Quinn. Constraints Imposed by CP Conservation in the Presence of Instantons. *Phys. Rev. D*, 16:1791–1797, 1977. doi:10.1103/PhysRevD.16.1791.
- [75] R. D. Peccei and Helen R. Quinn. CP Conservation in the Presence of Instantons. *Phys. Rev. Lett.*, 38:1440–1443, 1977. doi:10.1103/PhysRevLett.38.1440.
- [76] Jihn E. Kim. Weak Interaction Singlet and Strong CP Invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 43:103, 1979. doi:10.1103/PhysRevLett.43.103.
- [77] Mikhail A. Shifman, A. I. Vainshtein, and Valentin I. Zakharov. Can Confinement Ensure Natural CP Invariance of Strong Interactions? *Nucl. Phys. B*, 166:493–506, 1980. doi:10.1016/0550-3213(80)90209-6.
- [78] Kazuo Fujikawa. Path Integral Measure for Gauge Invariant Fermion Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 42:1195–1198, 1979. doi:10.1103/PhysRevLett.42.1195.
- [79] Kazuo Fujikawa. Path Integral for Gauge Theories with Fermions. *Phys. Rev. D*, 21:2848, 1980. [Erratum: *Phys.Rev.D* 22, 1499 (1980)]. doi:10.1103/PhysRevD.21.2848.
- [80] Fabio Apruzzi, Lakshya Bhardwaj, Dewi S. W. Gould, and Sakura Schafer-Nameki. 2-Group symmetries and their classification in 6d. *SciPost Phys.*, 12(3):098, 2022. arXiv:2110.14647, doi:10.21468/SciPostPhys.12.3.098.
- [81] A. Mutlu, T. Porter, and Transmitted R. Brown. Applications of peiffer pairings in the moore complex of a simplicial group. In *Theory and Applications of Categories*, pages 148–173, 1998.
- [82] Zekeriya Arvasi, tufan sait Kuzpinari, and Enver Uslu. Three-crossed modules. *Homology, Homotopy and Applications*, 11, 01 2009. doi:10.4310/HHA.2009.v11.n2.a8.
- [83] Edward Witten. Five-brane effective action in M theory. *J. Geom. Phys.*, 22:103–133, 1997. arXiv:hep-th/9610234, doi:10.1016/S0393-0440(97)80160-X.
- [84] Jonathan J. Heckman and Tom Rudelius. Top Down Approach to 6D SCFTs. *J. Phys. A*, 52(9):093001, 2019. arXiv:1805.06467, doi:10.1088/1751-8121/aafc81.