

軟粒子の存在を考慮した摂動的場の量子論における散乱問題の 定式化と赤外三角関係

古郡 秀雄 (Hideo Furugori)

名古屋大学 理学研究科 (QG 研)

概要

場の量子論は素粒子標準模型に代表されるように大きな成功を収めているが、重力の説明には成功していない。そのため量子重力理論の構築が現代物理学の大きな課題となっている。この困難は、理論的には繰り込みや非物理的自由度の問題などから生じ、実験観測的には量子効果が顕となるスケールを実現し難いために生じる。このような未だ見ぬスケールの物理法則を探る手掛かりとして、散乱の過程を記述する散乱行列のユニタリ性などの性質が注目されている。ところが、光子や重力子などの無質量粒子を含んだ理論では赤外発散の問題によって散乱行列の存在すら明らかではなかった。本研究では赤外発散を取り除くためのドレス状態形式を再考し、散乱行列の定式化を行う。通常の散乱理論では散乱を摂動的に自由粒子状態間の遷移として扱うが、ドレス状態形式では、無質量粒子の相互作用を取り入れた漸近状態間の遷移として扱う。本研究では時刻 $t = T$ と時刻 $t = -T$ の時間一定面 Σ_{\pm} を用意し、 Σ_{-} 上の対応する状態から Σ_{+} 上の対応する状態への遷移を考える。このとき、面上の対応する漸近状態は理論の相互作用から導出するべきものである。この散乱理論を量子電磁気学に適用することで、「散乱行列には発散がなく、Hilbert 空間に仮定を与えることでユニタリ性も示されること」、「遷移確率に対してこれまでに知られた結果を含む、さらに広い予言を与えること」が示される。また、赤外三角関係として赤外発散との関連が指摘されている漸近対称性・メモリー効果を散乱理論の枠組みの中で明示する。さらに Σ_{\pm} の導入によって一見破られる Lorentz 対称性が、漸近対称性によって回復する機構を明らかにする。また、この機構を使って有質量実スカラー場の散乱に軟重力子を加えた理論を構築する。この理論では高エネルギーの重力子は存在しないため、繰り込みや非物理的自由度の困難を取り除くことができる。これは量子線形 Einstein 重力理論の低エネルギー有効理論にあたる。この理論の解析から、遷移確率の予言に関して普通の設定では重力子は影響を与えないことがわかる。一方で非自明なメモリー効果を予言するため、原理的には軟重力子を検証することが可能である。また漸近対称性の議論から、軟重力子は異なる慣性観測者をそれぞれ異なる Hilbert 空間の超選択区間に分割することが明らかとなった。このことは重力の量子的側面を議論する上での基礎となり得る著しい性質である。本研究では平坦時空におけるユニタリ性を議論する足場を作ることができた。このことはブラックホールの情報損失問題を考える一歩を踏み出すための一助となるだろう。

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の目的と背景	1
1.2	本研究の結果	2
1.3	本論文の構成	4
第 2 章	赤外三角関係	5
2.1	軟粒子定理	5
2.2	漸近対称性	11
2.3	メモリー効果	16
2.4	赤外三角関係へ	18
第 3 章	前相対論的な量子散乱理論	20
3.1	量子力学の枠組み	20
3.2	自由粒子の理論	30
3.3	状態の分類	33
3.4	散乱理論：散乱行列と漸近完全性条件	39
3.5	長距離相互作用による散乱理論-Dollard 形式	45
第 4 章	特殊相対論的な量子散乱理論	49
4.1	特殊相対論的な場の量子論の枠組み	49
4.2	場の量子論における散乱問題	50
4.3	Kulish-Faddeev のドレス状態形式	51
第 5 章	提案する量子散乱問題の定式化	58
5.1	提案するドレス状態形式	58
5.2	量子力学における Coulomb 散乱問題	63
5.3	量子電磁気学における散乱問題	63
5.4	軟重力子の理論と散乱問題	72
第 6 章	結論と議論	81
付録 A	コヒーレント状態	85
A.1	コヒーレント状態の諸性質	85
付録 B	添字の計算を簡便化する諸定義	87
B.1	添字の対称化と反対称化	87

付録 C	Einstein 方程式のゲージ不変分解	89
C.1	ベクトルとテンソルの規約分解	89
C.2	線形摂動計量とその分解	90
C.3	ゲージ不変ポテンシャルによる Einstein 方程式	91
付録 D	球面調和関数と STF 分解	93
D.1	球面調和関数	93
D.2	対称無トレース (STF) 積	93
付録 E	Minkowski 時空の場とゲージ場	96
E.1	表現 l の場の係数関数	96
E.2	質量をもつ実スカラー場	97
E.3	質量をもつ Dirac スピノル場	97
E.4	無質量ヘリシティ 1 ゲージ場	98
E.5	無質量ヘリシティ 2 ゲージ場	99
付録 F	Heisenberg 場の運動方程式	101
F.1	相互作用描像と Heisenberg 描像	101
付録 G	弱重力場についての摂動論の計算	103
G.1	準備	103
G.2	逆計量	104
G.3	行列式	104
G.4	Christoffel 記号	105
G.5	Riemann 曲率・Ricci 曲率・Ricci スカラー	106
G.6	平坦時空周りでの摂動展開	110
参考文献		112

第 1 章

序論

1.1 研究の目的と背景

本研究の目的は、特殊相対論的な場の量子論の枠組みの中で、軟光子や軟重力子の果たす役割を明らかにすることだ。特に、赤外三角関係の物理を統一的に理解する視点を提示したい。赤外三角関係とは、

1. 場の量子論の散乱行列についての**軟粒子定理**-Soft theorem
2. より広いクラスの対称性である**漸近対称性**-Asymptotic symmetry
3. 検証可能な現象として期待される**メモリー効果**-Memory effect

という一見異なる 3 つが、それぞれある意味で等価と見做せるような関係を持つという主張である。この関係は A. Strominger らによる 4 次元電磁気理論の漸近対称性の発見を契機として提唱された [1, 2]。それ以降、4 次元漸近平坦時空での重力理論 [3, 4]、 $SU(n)$ 理論 [5, 6]、超対称性を持つ理論 [7–9]、高次元での理論 [10, 11]、漸近 de Sitter(dS) 時空での重力理論 [12, 13]、弦理論 [14, 15]、などなど、赤外三角関係が発見・示唆されてきた領域は多岐にわたる¹。

漸近対称性には無限の自由度があり、それゆえ対応する電荷が無限個存在すると考えられている。この漸近対称性と場の量子論の散乱問題で現れる軟粒子定理の結びつきは、散乱の過程を記述する散乱行列の赤外発散問題に新たな視点を提示した。すなわち、漸近対称性の保存則として赤外発散が理解できる。

散乱行列の存在や性質は、量子重力などのまだ見ぬスケールの物理法則を探る糸口として重要視されている。特にそのユニタリ性という性質は、量子力学の確率解釈の基礎となるため、現在の量子力学の枠組みが有効な範囲では根本的な原理として扱われる。そして量子重力理論を探る思考実験の場としてよく用いられる舞台が、ブラックホール時空である。場の古典論である一般相対性理論の枠組みでは、ブラックホールは定義からそれを構成するいかなる物体も外部に放出されることがない。しかし量子論を組み合わせることで、まるで黒体放射のように粒子を放出して蒸発していくことが示唆されている [17]。熱的な放射によってブラックホールが消滅してしまうなら、ブラックホールの形成からその消滅の過程の時間発展はユニタリでありえるだろうか？ このような問い：ブラックホールの情報損失問題 (の形態の 1 つ) に対して解答の道筋が示せるかということが、量子論と重力理論を内包する理論の性質や妥当性を検討する際の試金石となる。

漸近対称性の持つ無限個の電荷がブラックホールの地平面と無限遠に存在し、それが量子論では軟粒子として情報を運び、時間発展のユニタリ性が守られるのではないか。このような発想から、赤外三角関係は上記の情報損失問題を考える際に重要な役割を担うのではないかと期待され、調べられてきた [18, 19]。

しかし平坦時空において、散乱行列のユニタリ性から軟粒子定理は導けるが、その逆は成り立たない。実際、標準的な散乱問題の定式化では軟粒子定理を用いたとしても、散乱行列が赤外発散によって定義できずに

¹A. Strominger のノート [16] とその参考文献にはここには挙げていない多くの研究が載っている。とはいえ 2017 年以降の多くの進展が含まれていないので、その点には注意が必要である。

存在すらしないという重要な問題がある。つまり軟粒子定理は発展のユニタリ性を救うには不十分であり、実は平坦時空での場の量子論の時間発展がユニタリであるかどうかすら、確かめられてはいなかったのである。

とはいえ、赤外発散のない散乱行列を定義する試みは古くから行われており、中でもドレス状態形式と呼ばれる方法が有名かつ有力である。これは軟粒子の相互作用が遠方でも無視できないという事実を考慮し、軟粒子のまわりついたドレス状態と呼ばれる状態を用いて散乱を記述するものだ。様々な仮定や考察の下で、多種多様なドレス状態形式が提案されてきた [20–38]。しかし本研究を開始した当時、提案されてきたドレス状態形式には、

- ゲージ対称性や Lorentz 対称性と両立することが明らかでない。
- ドレス状態を構成する際の仮定が理論に無視できない関数自由度を与え、予言能力を損なう。
- 前提とする仮定が物理的・数学的に妥当なものかどうか。

などの解決すべき問題が少なからず残されている状況であった²。

1.2 本研究の結果

上記の状況を踏まえて、重力の量子論的な性質を探る端緒として予言能力を持ち、かつ、ユニタリ性を示せるような散乱問題の定式化を目指した。具体的な方針として、一般相対性理論において漸近対称性が初期値問題を定義する際に現れることに着目し、散乱問題を、時刻 $t = -T$ の時間一定超曲面 Σ_- 上に定義される状態から、時刻 $t = +T$ の時間一定超曲面 Σ_+ 上に定義される状態への遷移を記述する初期値問題として定める。これは本来当然のことだが、無限をとる極限操作に飲み込まれ、従来の定式化では隠れてしまっていた。この散乱理論では、最後に $T \rightarrow \infty$ の極限について議論する。また予言能力を担保するために、 Σ_{\pm} や赤外/紫外切断などの時空の量と、理論のハミルトニアン以外のものは導入せずに発展が記述できるように設定する。この定式化においては、散乱の記述に用いる Σ_{\pm} での漸近状態が、理論の相互作用を用いて導出すべきものとなる。

こうして定式化した散乱問題を、実験的にも理論的にもよく知られた量子電磁気学に適用したものが、副論文 [37] である。提案する散乱理論でも量子電磁気学の漸近状態は、軟光子の相互作用を取り入れたドレス状態となる。この意味でドレス状態形式を用いた散乱問題の定式化とも言える。この研究で行ったことは以下の通りである。

- (I-A) 得られたドレス状態を用いて遷移確率を計算することで、この散乱理論がこれまでによく知られていた結果を再現しながら、さらに広い状況にも適用可能であることを示した。
- (I-B) 量子電磁気理論の状態や、漸近状態の属する Hilbert 空間についての議論を行い、散乱行列がその Hilbert 空間でユニタリであることを示した。
- (I-C) 散乱行列のゲージ対称性を調べることで、場の量子論における漸近対称性の在り方の一面を明らかにした。
- (I-D) メモリー効果が提案する散乱理論の枠組みの中に組み込まれていることを示し、簡単な例によって、原理的には検証可能な理論予測が得られることの示唆を与えた。

これらの結果から、提案する散乱理論は「軟粒子定理を超えて散乱行列をユニタリに定義するドレス状態」、場の量子論における漸近対称性およびメモリー効果」を内包するという意味で、赤外三角関係に対して統一的

²同時期に Hannesdottir-Schwartz による散乱問題の定式化が提案されていた [39]。彼らの散乱理論は Lorentz 対称性が明白で、かつ予言能力を持ち、私の見解では問題がなく良い定式化だと思うが、しばらく認知していなかった。定式化の骨子たる点は量子力学の散乱理論である Dollard の方法を忠実に場の量子論に持ち込もうという点であり、その心は我々の散乱問題の定式化と同じである。ただし、この定式化では赤外三角関係に対する示唆が明らかではない。

な視座を与えるものと言えよう。本研究で行った散乱問題の定式化の妥当性は、この観点からも支持される。

この散乱理論では、時空に Σ_{\pm} の超曲面を導入することで一見 Lorentz 対称性を破っているように思える。ところが、こうした場の段階での Lorentz 対称性の破れは、ドレス状態に備わる漸近対称性によって状態の段階で回復することが明らかとなった。この事実は軟重力子の理論の可能性を開く。

また本論文では、S. Weinberg の議論 [40] に基づいて軟重力子の理論の構築を行い、具体的に質量を持つ実スカラー粒子と軟重力子が存在する際の散乱について調べた。漸近状態はやはり軟重力子の相互作用を取り入れたドレス状態となる [41]。この研究で行ったことは以下の通りである。

- (II-A) 得られたドレス状態を用いて遷移確率を計算することで、軟重力子 1 個の観測ができない限りは、散乱結果の予言に軟重力子が寄与しないことを示した。
- (II-B) メモリー効果の議論を行い、これに対しては軟重力子が非自明な予言を与えることを明らかにした。
- (II-C) 軟重力子のドレス状態に備わる漸近対称性が Lorentz 対称性を回復する機構を確認した。
- (II-D) 軟重力子の与える赤外発散によって、ある慣性観測者にとっての状態は、別の慣性観測者にとっての状態と直交することを示した。

(II-A) と (II-B) は軟重力子の存在を検証する際の方針を与えるものと言えよう。メモリー効果を現実的な設定で定量的に評価し、検証可能な予言を与えることを目指した研究を今後行う予定である。散乱した粒子を検出せずメモリー効果だけを測定することを考えたときに、散乱の情報をどれだけ引き抜けるのかという問題も興味深い。また、漸近状態を導出する際に、準主要項まで相互作用を取り入れる枠組みでの散乱理論を考えることも面白いだろう。準主要項が遷移確率やメモリー効果に対する予言に与える影響を詳細に解析することは有意義だと考えている。

(II-C) は逆に言えば、質量を持った粒子のみを理論に取り入れるとき、 $T \rightarrow \infty$ の極限だけが Lorentz 対称性を満たすことを意味する。 $T \rightarrow \infty$ の極限だけが Lorentz 対称性を満たすということは、これまでに試みられてきた散乱問題の定式化の上では自明な障害であり、本研究で構築した Σ_{\pm} を導入する散乱理論がこれまで提案されなかった大きな理由の 1 つであろう。一方、提案する散乱理論では軟重力子の存在を理論に要請することで、時刻 $t = -T$ から $t = T$ への時間発展が Lorentz 対称性を尊重した理論の下で記述できる。量子電磁気学では光子がこの役割を担ったために軟重力子を導入せずとも散乱理論が設定できたが、ここでさらに軟重力子を理論に加えた場合の赤外三角関係を解析することも非常に興味深い問題である。

(II-D) は Hilbert 空間が軟重力子によって、各慣性系毎に対応する超選択区間に分割されることを意味する。実験・観測技術の向上により、重力の量子的側面を検証する提案が為されている [42–44]。これらの提案には位置の重ね合わせ状態が重要な役割を担うことが多いが、軟重力子が超選択則を与えるという本研究で明らかとなった著しい性質は、このような研究にも考慮すべき基礎を与えることになるだろう。異なる超選択区間に属する状態は純粋状態として重ね合わせることができないのである。ドレス状態を考慮した状態の重ね合わせに関する示唆に富んだ研究として、平井・杉下による研究 [45] がある。ドレス状態に対して可能な重ね合わせ状態を与えて解析を行うことで、重力の本質的に量子論的な側面に迫れるかもしれない。このような方向の非常に興味深い研究も今後に残されている。

軟粒子の引き起こす赤外発散が、Lorentz 対称性の自発的な破れを表すのではないかという議論がある [26, 28, 46]。しかし本論文で提案した散乱理論の枠組みの視点に立つと、事情は全く異なるように見えてくる。すなわち、軟粒子の引き起こす赤外発散は超選択則を与える漸近対称性の存在を示しており、軟粒子はそれを通じて Lorentz 対称性を自発的に回復させる役割を果たす。軟重力子はそのために理論に要請される不可欠な要素として現れる。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は次のようである。第 2 章では赤外三角関係の 3 つの頂点である軟粒子定理・漸近対称性・メモリー効果についてそれぞれ説明したのち、それらの結びつきを概観する。

第 3 章では量子論における散乱問題について説明する。そのために、まずは量子力学の枠組みについての復習を行う。その後自由粒子の理論を調べることで、自由粒子理論からの摂動論的に理解される散乱理論への準備とする。漸近状態や入射/放射状態などの定義を与え、幾つかの散乱行列の表し方を見る。ここでは赤外発散の問題の萌芽が量子力学の長距離相互作用による散乱に現れていることを確認し、その取り扱いについて説明する。

第 4 章では場の量子論での散乱問題について幾つかの注意を行った後、量子電磁気学の散乱問題の赤外発散に対処する Kulish-Faddeev のドレス状態形式について説明する。Kulish-Faddeev のドレス状態形式についてのいくつかの問題を提起し、我々の提案する散乱理論への橋渡しとする。

第 5 章ではドレス状態形式に基づいて、本論文の主題である場の量子論の散乱問題の定式化を行う。定式化を行った後、量子力学の散乱問題に適用し、その妥当性を確認する。その後場の量子論の散乱問題の例として、量子電磁気学 (QED) と軟重力子を含む線形 Einstein 重力の解析を行う。

第 6 章は結論と議論で結びとする。

第 2 章

赤外三角関係

この章では本研究の動機となった赤外三角関係について紹介する。赤外三角関係とは、

1. 場の量子論の散乱行列についての**軟粒子定理**-Soft theorem
2. より広いクラスの対称性である**漸近対称性**-Asymptotic symmetry
3. 検証可能な現象として期待される**メモリー効果**-Memory effect

がそれぞれある意味で等価と見做せるような関係を持つという主張である。序論でいくつかの例を挙げたように、赤外三角関係が発見・示唆されてきた領域は多岐にわたる。

また、軟粒子定理には取り入れる軟粒子の寄与の次数に応じた階層があるが、それぞれの次数に対応する漸近対称性・メモリー効果も理論的に発見されてきている [47–49]。さらに、物理的に妥当な仮定の下で存在しないことが示されていた高次元での漸近平坦重力の漸近対称性に対して、その仮定に対する抜け道が赤外三角関係を動機として発見されるなど、様々な事実が赤外三角関係の存在を補強する状況証拠として積み上げられてきている [50–53]。

以下では、これら三角形の頂点とその結びつきについて概観する。

2.1 軟粒子定理

軟粒子定理は場の量子論の散乱行列についての定理であり、散乱行列の赤外発散-InfraRed(IR) divergence の問題と密接に関係している。赤外発散問題は低エネルギー極限の無質量粒子が引き起こす発散によって、散乱行列が定義できない問題を指す。これに対して高エネルギー極限の粒子が起こす発散は紫外発散-UltraViolet(UV) divergence と呼ばれる。繰り込み可能な理論なら繰り込みの処方によって紫外発散は取り除けるし、有効理論と考えてエネルギー領域を制限することで紫外の効果に対応することもできる。赤外発散は紫外発散に対してそのような手続きを踏んでもなお残ってしまう発散であり、理論が有効な範囲では存在してはならないものである。

ここでは電子や陽電子といったスピノル荷電粒子と光子の相互作用を記述するスピノル量子電磁気学-spinor Quantum Electrodynamics(QED) を例に挙げて、赤外発散と軟粒子定理について見てみよう。Yang-Mills 理論のような非可換ゲージ理論では共線発散-collinear divergence があり、別の注意が必要である。共線発散も含めた赤外の構造を探るのに便利な有効理論として、軟共線有効理論-Soft Collinear Effective Theory(SCET) があるが、本論文では立ち入らない [54, 55]。

2.1.1 散乱問題への簡単な準備

ここでは散乱問題に関する話を読むために最小限必要な事項を振り返る。散乱問題についての丁寧な議論は 3 章と 4 章で与える。

運動量や電荷など、粒子や系を特徴付ける量をまとめて α などで表す。 α で特徴付けられる自由粒子たちが入射していずれ散乱し、 β で特徴付けられる自由粒子たちとして検出されると見做せる状況を考える。このようなことが起きる確率は量子力学によれば、初めに用意した状況に対応する状態 $|\Phi_\alpha\rangle$ を時間発展させ、その状態と最後の状況に対応する状態 $|\Phi_\beta\rangle$ との内積を取ることで考えることができる。この量を散乱行列と呼び、

$$S_{\beta\alpha} := \langle \Phi_\beta, \mathcal{S}\Phi_\alpha \rangle \quad (2.1.1)$$

と表す。特に、何も起きない状況、つまり $\beta = \alpha$ である状況を除いたものは遷移振幅とも呼ばれる。区別する場合遷移振幅は $M_{\beta\alpha}$ と書く。遷移振幅の絶対値 2 乗がこの散乱による状態 $\alpha \rightarrow \beta$ の遷移確率を与える。時間発展を司る演算子 \mathcal{S} は散乱演算子と呼ばれ、

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V^I(\tau) \right], \quad V^I(t) = \int d^3x \mathcal{V}^I(x) \quad (2.1.2)$$

で表される。これは粒子が時々刻々と相互作用を受けて発展していく様子を表しており、Feynmann 図と呼ばれる以下の図のように表現できる。

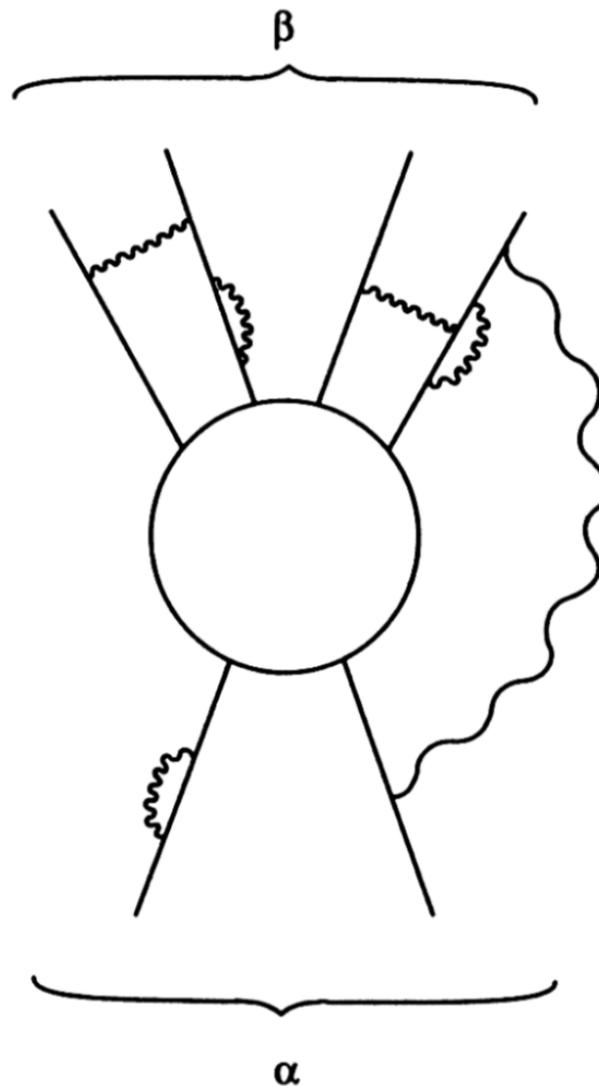


図 2.1 $\alpha \rightarrow \beta$ の遷移を表す Feynmann 図の例 ([56] より)

図 2.1 を見ると、相互作用の様子は粒子が相互作用する点に当たる頂点間を線で繋ぐことで表せることがわかる。散乱行列の計算は Feynman の規則というもの知られていて、相互作用から決まる頂点関数を図の頂点に当てはめ、伝搬する場によって決まる伝搬関数を頂点間を繋ぐ線に当てはめることで実行可能だ。

相互作用する回数が増えると頂点間を繋ぐ線がループを作るようになる。このような図の寄与を、ループがない図：ツリーレベル図に対するループ補正と呼ぶ。ループ補正は量子補正とも呼ばれる。この補正の寄与は 0 から無限大を積分区間とした広義積分で表される。この積分はループを作る粒子：仮想粒子のエネルギー積分と解釈され、その下限から現れる発散を赤外発散と呼び、上限から現れる発散を紫外発散と呼ぶ。

広義積分が収束しない問題、つまり、散乱行列が定義できない問題は場の量子論の発散問題と呼ばれ、黎明期には場の量子論の抱える大きな欠陥として認識されていた。発散の問題は多くの混乱を生んだが、結果として物理学の理解を深める結果となった。

紫外発散の問題は質量や結合定数などの定数や、場を再定義する繰り込みの手法によって取り除ける場合があることがわかった。これは相互作用の存在下では、質量や結合定数などの定数が自由な理論で考えていたものと最早同じではあり得ないということの意味している。このようにして紫外発散が取り除ける理論を繰り込み可能な理論といい、そうでないものを繰り込み不能な理論という。さらに紫外発散は繰り込み群と有効理論の概念にも繋がった。理論にはそれが有効である距離やエネルギーのスケールが存在し、その理論で見えないような小スケールの自由度を「積分」して自由度から取り除くことで興味ある状況を記述するのである。このように、あるスケールに限ったときには現象をよく説明する理論を有効理論という。この考え方によって、繰り込み不能な理論が有効理論としての役割を担う可能性が顧みられることになった。小スケールは波長として短く、時間にして短い部分に当たるため、これらは紫外発散に対処する手続きである。

紫外発散の問題に関する重要な知見はまず、Bloch と Nordsieck によって与えられた [57]。彼らは電子が光子の放出に伴って運動量を変化させる過程を考え、その確率が有限となるには無限個の光子の放出が伴うことに気付いた。反対に、有限個の光子放出のみを伴う過程の起きる確率は 0 となってしまう。無限個の光子の放出を伴う遷移確率の赤外有限性の証明は Yennie たちによって洗練され [58]、その後 Weinberg が軟粒子定理を用いて有限の遷移確率を与えた [59]。以下、Weinberg の教科書 [56] に沿ってこの議論を見ていこう。線形重力理論においても事情は本質的には変わらない [59, 60]。

2.1.2 QED における赤外発散問題

相互作用表示での QED の相互作用は

$$\mathcal{V}^I(x) = -a_\mu(x)j^\mu(x), \quad j^\mu(x) = iq\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (2.1.3)$$

で与えられる。 a_μ はスピン 1 のゲージ場である光子を表し、 j^μ は電荷 q を持つスピノル粒子が作る電流である。この相互作用により、荷電粒子同士が光子を介して引かれあったり反発しあったりして影響し合う様子が記述できる。電流 j^μ は

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (2.1.4)$$

という関係を満たす。これは電荷保存則を局所的に表したものである。

ある適当な自由荷電粒子状態間の遷移 $\alpha \rightarrow \beta$ の遷移振幅を $M_{\beta\alpha}$ とする。この遷移振幅の光子によるループ補正のうち、 $\omega \equiv |\vec{k}| < \Lambda$ の積分領域からの寄与を考える。 Λ は考えたい過程で現れるどんなエネルギースケールよりも小さいエネルギーとしよう。例えば QED では、 Λ は電子の質量 m よりも小さい。ここでは Λ より小さいエネルギーを持つ光子を軟光子と呼ぶことにする。 $\omega > \Lambda$ の光子はこれと対比して硬い光子と呼ぶこともある。また、赤外切断を λ とする。

外線の荷電粒子の指定を適当な自然数を用いて行う。 m 番目の粒子の外線と n 番目の粒子の外線を軟光子で繋ぐことで現れる補正を J_{mn} とし、これを考えたい。電荷 q を持つ 4 元運動量 p の荷電粒子が流入し、同じ電荷を持つ 4 元運動量 p' の荷電粒子と 4 元運動量 k の光子を放出する際の頂点関数は運動量空間で、

$$\Gamma^\mu(p', k; p) = -iq(2\pi)^4\gamma^\mu\delta^4(p' + k - p) \quad (2.1.5)$$

と与えられる。また、荷電粒子の伝搬関数は運動量空間で

$$-i\Delta_{\alpha\beta}(p) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{(-i\gamma_\mu p^\mu + m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (2.1.6)$$

と与えられる。光子の実質的な伝搬関数が運動量空間で

$$-i\Delta_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon}. \quad (2.1.7)$$

となるように理論を考えよう。軟光子のループ補正 J_{mn} の $\omega \lesssim \Lambda$ についての主要な寄与はこれら Feynmann の規則から

$$J_{mn} = \frac{-i}{(2\pi)^4} q_m q_n \eta_m \eta_n (p_m \cdot p_n) \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \int_{\lambda \leq \omega \leq \Lambda} \frac{d^3 k}{[k^2 - i\varepsilon][p_n \cdot k - i\eta_n \varepsilon][-p_m \cdot k - i\eta_m \varepsilon]} + o(\Lambda) \quad (2.1.8)$$

となる。ここで p_m, q_m は m 番目の荷電粒子の 4 元運動量と電荷であり、 η_m は m 番目の粒子が終状態の粒子を指定するものであれば +1 を、始状態の粒子を指定するものであれば -1 を返す符号因子である。

k^0 積分を実行するために被積分関数の極を調べる。極は

$$k^0 = \left\{ \omega - i\varepsilon, -\omega + i\varepsilon, \vec{v}_n \cdot \vec{k} - i\eta_n \varepsilon, \vec{v}_m \cdot \vec{k} + i\eta_m \varepsilon \right\}, v_n^\mu := \frac{p_n^\mu}{E_n}, E_n = p_n^0 = \sqrt{m_n^2 + |\vec{p}_n|^2} \quad (2.1.9)$$

の 4 つ存在するから、留数の定理を用いて k^0 積分が実行できる。 m と n が終状態と始状態を結ぶ際の補正は $k^0 = \omega - i\varepsilon$ または $k^0 = -\omega + i\varepsilon$ の極を拾って、どちらも

$$J_{mn} = -\frac{q_m q_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} \frac{(p_m \cdot p_n)}{(p_m \cdot k)(p_n \cdot k)} \quad (2.1.10)$$

となる。 m と n が共に終状態の荷電粒子、または始状態の荷電粒子を指定する場合には上記の極に加えてもう一方の極を拾って、

$$J_{mn} = \frac{q_m q_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} \frac{(p_m \cdot p_n)}{(p_m \cdot k)(p_n \cdot k)} + \frac{q_m q_n}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{(p_n \cdot p_m)}{[\omega^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_m - i\varepsilon)^2][-q_n(\vec{k} \cdot \vec{v}_m + i\varepsilon) + \vec{k} \cdot \vec{p}_n - i\varepsilon]} \quad (2.1.11)$$

が得られる。計算の実行は式 (2.1.8) の時点で n の粒子の静止系へ移るのが便利だ。つまり、

$$p_m^\mu = \gamma_{mn} m_m (1, \vec{\beta}_{mn}), p_n^\mu = (m_n, \vec{0}) \\ \beta_{mn}^2 \equiv |\vec{\beta}_{mn}|^2 = 1 - \frac{m_m^2 m_n^2}{(p_m \cdot p_n)^2}, \gamma_{mn} := 1/\sqrt{1 - |\vec{\beta}_{mn}|^2}$$

となる系へブーストする。その後に軟光子を定義してその寄与を考えると、

$$\int \frac{d^3 k}{2\omega} \frac{(p_m \cdot p_n)}{(p_m \cdot k)(p_n \cdot k)} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{2\omega^3} \frac{1}{1 - \vec{\beta}_{mn} \cdot \hat{k}} = \frac{\pi}{\beta_{mn}} \log \frac{1 + \beta_{mn}}{1 - \beta_{mn}} \log \frac{\Lambda}{\lambda} \quad (2.1.12)$$

および

$$i \operatorname{Im}[J_{mn}] \rightarrow -\frac{q_m q_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\omega^2 (\vec{k} \cdot \vec{\beta}_{mn})} = i \frac{q_m q_n}{4\pi \beta_{mn}} \log \frac{\Lambda}{\lambda} \quad (2.1.13)$$

となるから、その結果

$$J_{mn} = \frac{\eta_m \eta_n q_m q_n}{8\pi^2 \beta_{mn}} \log \frac{1 + \beta_{mn}}{1 - \beta_{mn}} \log \frac{\Lambda}{\lambda} + i (1 + \eta_m \eta_n) \frac{q_m q_n}{8\pi \beta_{mn}} \log \frac{\Lambda}{\lambda} \quad (2.1.14)$$

が得られる。

さて、 J_{mn} がわかったので、遷移振幅への軟光子のループ補正を全次数で考えることができる。N 個の軟光子で外線を繋ぐとき、N!個の置換の区別と両端の区別がつかないことを考慮すれば、軟光子補正を行なった遷移振幅 $M_{\beta\alpha}^\lambda$ が

$$M_{\beta\alpha}^\lambda = M_{\beta\alpha} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N N!} \left[\sum_{mn} J_{mn} \right]^N = M_{\beta\alpha} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{mn} J_{mn} \right] \quad (2.1.15)$$

と得られる。赤外切断を取り除く極限 $\lambda \rightarrow 0$ で遷移振幅の位相が発散する事実は、散乱行列が定義されないことを意味する。その一方で遷移率は遷移振幅の絶対値の 2 乗を用いるため、発散する位相に悩まされない。遷移率 $\Gamma_{\beta\alpha}$ は軟光子補正により次の $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ となる。

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{A_{\beta\alpha}} \Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda, \quad (2.1.16)$$

$$A_{\beta\alpha} := -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{mn} \frac{q_m q_n \eta_m \eta_n}{\beta_{mn}} \log \frac{1 + \beta_{mn}}{1 - \beta_{mn}}. \quad (2.1.17)$$

ここで、 $\omega \leq \Lambda$ の光子の寄与を含まない遷移率を $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda$ とした。この指数 $A_{\beta\alpha}$ は常に正である。したがって軟光子補正を取り入れた遷移率は赤外切断を取り除く極限 $\lambda \rightarrow 0$ で定義できるが、その結果は常に 0 になってしまう。これは、QED においては荷電粒子の散乱過程はどんなものでも決して起きることがないという予言であり、明らかな理論の破綻を示している。

2.1.3 軟粒子定理と遷移確率

低エネルギー光子のループ補正が遷移振幅を定義できなくし、遷移率を 0 にしてしまう赤外発散の問題を見た。この問題に対処するための標準的な方法が、Bloch-Nordsieck の方法と呼ばれるものである¹。検出機には検出可能なエネルギーの限界があるため、ある遷移過程と、その過程にさらに検出できないほど小さいエネルギーしか持たない光子群の放出を加えた過程は区別できない。そこでこのような区別できない過程を全て考慮して、実験で検証可能な物理的遷移率を計算するべきであるという発想である。

$\alpha \rightarrow \beta$ の過程から、さらに非常に小さい運動量とヘリシティ (k^μ, h) を持つ軟光子が 1 つ放出される過程 $\alpha \rightarrow \beta + \gamma_s$ を考える。軟光子定理によると遷移振幅は

$$M_{\beta+\gamma_s \alpha} = F_{\beta\alpha}(k, h) M_{\beta\alpha} + \mathcal{O}(\omega^0), \quad F_{\beta\alpha}(k, h) = \sum_{n \in \alpha, \beta} \frac{q_n \eta_n p_n^\mu}{p_n \cdot k - i\eta_n \epsilon} \frac{\epsilon_\mu(k, h)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \quad (2.1.18)$$

で与えられる。遷移振幅の Lorentz 対称性はこれが $\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + \lambda k_\mu$ の変換で不変でなければならないから、

$$\Delta F_{\beta\alpha} \propto \sum_n q_n \eta_n = 0 \quad (2.1.19)$$

を要請する。これは電荷保存則に他ならない。この事実は散乱行列が Lorentz 対称性を満たすという制限から、低エネルギーのスピン 1 ゲージ粒子の相互作用が保存電流との結合に限られることを意味する [60]。これを狭義の軟光子定理という場合もある。また、N 個の軟光子を放出する場合にも遷移振幅は

$$M_{\beta+N\gamma_s \alpha} = M_{\beta\alpha} \prod_{r=1}^N F_{\beta\alpha}(k_r, h_r) \quad (2.1.20)$$

で与えられる。

¹包括的な方法-inclusive method と呼ばれる。観測される散乱断面積に寄与する位相空間の領域を全て足し上げる方法のことを一般に包括的な方法と呼ぶ。したがって非可換ゲージ理論の赤外有限性の議論で扱われる木下・Lee-Nauenberg の定理も包括的な方法に含まれる [61–63]。

この軟光子定理から、1 光子を検出できる最小のエネルギーを Λ_D とし、始状態と終状態のエネルギー差を感知できる最小のエネルギーを Λ_E としたときの遷移率が計算できる。Bloch-Nordsieck の方法によれば、物理的な遷移率を得るためには $\omega_n \in (\lambda, \Lambda)$ のエネルギーを持つ光子群が、 $\sum_n \omega_n < \Lambda_E$ を満たす限り無数に放出される場合を考える必要がある。このときの微分遷移率は

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_N) = \prod_{r=1}^N \frac{d^3 k_r}{(2\pi)^3 2\omega_r} \sum_{nm} \frac{q_m q_n \eta_n \eta_m (p_n \cdot p_m)}{(p_n \cdot k_r)(p_m \cdot k_r)} \quad (2.1.21)$$

となる。これを積分して物理的遷移率を求めると、

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\alpha}^{\text{BN}}(\Lambda_D, \Lambda_E) &= \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A_{\beta\alpha}^N}{N!} \int_{\lambda < \omega_r < \Lambda_D} \frac{d\omega_r}{\omega_r} \Theta(\Lambda_E - \sum_{r=1}^N \omega_r) \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{\Lambda_D}{\Lambda_E}; A_{\beta\alpha}\right) \left(\frac{\Lambda_D}{\lambda}\right)^{A_{\beta\alpha}} \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$\mathcal{F}(x; A) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin u}{u} \exp\left[A \int_0^x \frac{d\omega}{\omega} (e^{i\omega u} - 1)\right] = 1 - \frac{A^2 \Theta(x - 1/2)}{2} \int_{1-x}^x \frac{d\omega}{\omega} \log\left(\frac{x}{1-\omega}\right) + \dots \quad (2.1.23)$$

が得られる。式 (2.1.16) からこれは赤外切断 λ の依存性を持たない。 $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \propto \Lambda^{A_{\beta\alpha}}$ であり、勝手に入れた Λ に依存しないことも注意しておく。

このように、軟光子の放出過程を全て足し上げることで有限の物理的遷移率が得られる。こうした赤外発散の対処法を Bloch-Nordsieck 形式と呼ぶ。この方法では散乱振幅の段階での赤外発散には単に目を瞑ることでやり過ごしていることに注意が必要である。

2.1.4 軟重力子の赤外効果

これまでは軟光子の効果、つまり無質量スピン 1 のゲージ粒子の低エネルギー部分のみならず影響を見てきた。無質量スピン 2 のゲージ粒子に対しても、それが与える赤外部分の効果についての議論は同様に行える。このとき、時空の添字の足が増えた影響を考慮して、

$$\left\{ \epsilon_\mu(\vec{k}, h), q\hat{p}(\vec{p}), \frac{p^\mu}{E_p} \right\} \longrightarrow \left\{ \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}, h), \frac{\kappa E_p}{2} \hat{N}(\vec{p}), \frac{p^\mu p^\nu}{E_p^2} \right\}, \hat{N}(\vec{p}) := b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}) \quad (2.1.24)$$

の対応を与えればよい。

軟重力子が外線のスカラー粒子を繋ぐときにかかる補正は上記の対応によって、

$$K_{mn} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \eta_m \eta_n \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \int_{\lambda \leq \omega \leq \Lambda} \frac{d^3 k p_m^\mu p_m^\nu (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) p_n^\rho p_n^\sigma}{2[k^2 - i\varepsilon][p_n \cdot k - i\eta_n \varepsilon][-p_m \cdot k - i\eta_m \varepsilon]} + o(\Lambda) \quad (2.1.25)$$

となる。留数定理から

$$K_{mn} = \kappa^2 \frac{\eta_m \eta_n m_m m_n (1 + \beta_{mn}^2)}{64\pi^2 \beta_{mn} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} \log \frac{1 + \beta_{mn}}{1 - \beta_{mn}} \log \frac{\Lambda}{\lambda} + i\kappa^2 (1 + \eta_m \eta_n) \frac{m_m m_n (1 + \beta_{mn}^2)}{64\pi \beta_{mn} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} \log \frac{\Lambda}{\lambda} \quad (2.1.26)$$

が得られる。したがって軟光子補正における $A_{\beta\alpha}$ は軟重力子の場合

$$B_{\beta\alpha} := \frac{\kappa^2}{64\pi} \sum_{n,m} \eta_m \eta_n m_m m_n \frac{1 + \beta_{mn}^2}{\beta_{mn} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} \log \left(\frac{1 + \beta_{mn}}{1 - \beta_{mn}} \right) = \sum_{mn} K_{mn} \quad (2.1.27)$$

となる。

また、 $\alpha \rightarrow \beta$ の過程から、さらに非常に小さい運動量とヘリシティ (k^μ, h) を持つ軟重力子が 1 つ放出される過程 $\alpha \rightarrow \beta + h_s$ を繋ぐ軟重力子定理は

$$M_{\beta+h_s\alpha} = G_{\beta\alpha}(k, h)M_{\beta\alpha} + \mathcal{O}(\omega^0), \quad G_{\beta\alpha}(k, h) = \sum_{n \in \alpha, \beta} \frac{\sqrt{8\pi} G p_n^\mu p_n^\nu \eta_n}{p_n \cdot k - i\eta_n \varepsilon} \frac{\epsilon_{\mu\nu}(k, h)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \quad (2.1.28)$$

となる。

2.2 漸近対称性

場の漸近的な振る舞いとゲージ条件をともに保つような非自明な変換が存在するとき、その変換を漸近対称性変換という。一般相対論における 4 次元漸近平坦時空には Bondi-van der Burg-Metzner-Sachs(BMS) 対称性と呼ばれる漸近対称性が備わっている [64–66]。この節では BMS 対称性について、主に Madler-Winicour のノート [67] と Compere-Fiorucci のノート [68, 69] および Wald の教科書 [70] から掻い摘んで紹介する。より丁寧な解説としては Penrose-Rindler の教科書 [71] を参考にするとよいだろう。

2.2.1 Minkowski 時空とその Penrose 図

漸近的な振る舞いを議論するには、考えたい時空領域を全て有限領域に押し込めて、境界の分類を行うのが便利だ。因果構造を保ったままに時空を有限領域に埋め込んだ図を Penrose 図と呼ぶ [72]。まずは漸近対称性の説明のために Minkowski 時空を例に Penrose 図の説明をして、無限遠の分類を与えよう。

Minkowski 時空の計量は、球座標で

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.2.1)$$

と表せる。ここで先進時間 v および遅延時間 u を

$$\begin{cases} v := t + r \\ u := t - r \end{cases} \quad (2.2.2)$$

と定めれば、

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2 \quad (2.2.3)$$

となる。 (v, u) はそれぞれ内向きの光線と外向きの光線に沿った座標である。ここで

$$\begin{cases} \tan V := v \\ \tan U := u \end{cases} \quad (2.2.4)$$

とすると

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} [-dUdV + \frac{1}{4} \sin^2(V - U) d\Omega^2] \quad (2.2.5)$$

の座標系に移る。 V, U はそれぞれ、 $V \in (-\pi/2, \pi/2)$ 、 $U \in (-\pi/2, \pi/2)$ の開区間を動く。ここで、

$$\begin{cases} T := \tan V + \tan U \\ R := \tan V - \tan U \end{cases} \quad (2.2.6)$$

を定めれば、

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{T-R}{2} \cos^2 \frac{T+R}{2}} [-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2] \quad (2.2.7)$$

の座標系に移る。共形因子 $\Omega^2 = 4 \cos^2 \frac{T-R}{2} \cos^2 \frac{T+R}{2}$ による Weyl 変換

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab} \quad (2.2.8)$$

を施した架空計量²

$$d\tilde{s}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2 \tag{2.2.9}$$

は座標の動く範囲を除けば、Einstein の静的宇宙に等しい。座標 (T, R) のとる範囲は

$$-\pi < T + R \equiv V < \pi, \quad -\pi < T - R \equiv U < \pi, \quad R \geq 0 \tag{2.2.10}$$

となるから、Minkowski 時空から Einstein の静的宇宙の有限領域への共形埋め込みが与えられる。これを表したのが図 2.2 である。

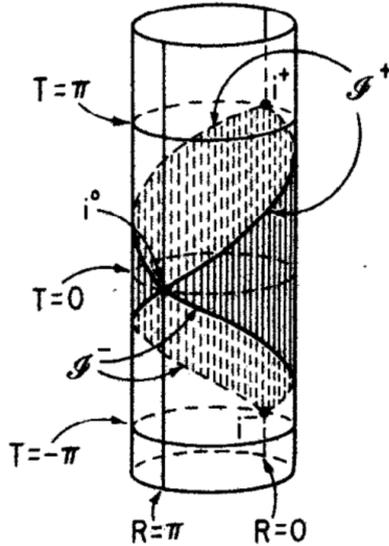


図 2.2 Minkowski 時空の共形埋め込み図 ([70] より)

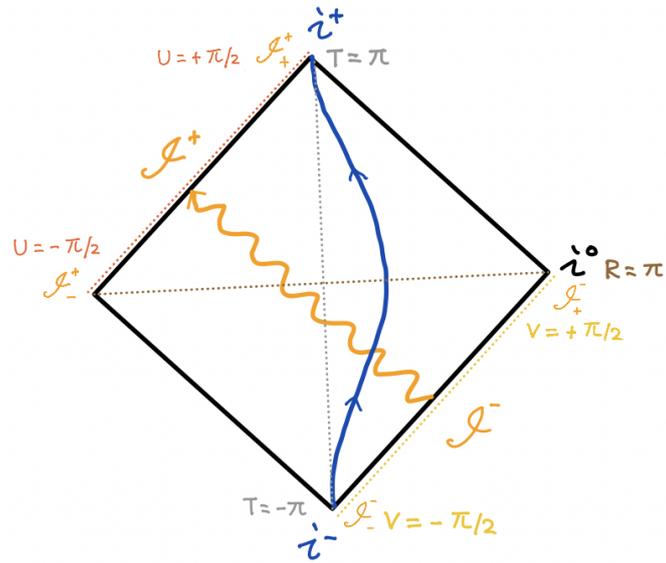


図 2.3 Minkowski 時空の Penrose 図

この共形埋め込みは開領域への埋め込みだが、境界を付与して閉領域にできる。こうして作る有界閉領域の時空図を Penrose 図、または共形図式と呼ぶ。付与する境界の分類によって Minkowski 時空の共形無限遠を次のように定義する。

- (1) i^- : 過去時間的無限遠-past timelike infinity $R = 0, T = -\pi$
- (2) \mathcal{I}^- : 過去ヌル無限遠-past null infinity $0 < R < \pi, T = -\pi + R$
- (3) i^0 : 空間無限遠-spatial infinity $R = \pi, T = 0$
- (4) \mathcal{I}^+ : 未来ヌル無限遠-future null infinity $0 < R < \pi, T = \pi - R$
- (5) i^+ : 未来時間的無限遠-future timelike infinity $R = 0, T = \pi$

測地線を延ばしていくことで、時間的測地線は i^- から始まって i^+ に終わり、ヌル測地線は \mathcal{I}^- から始まって \mathcal{I}^+ に終わるものとするができる。これがそれぞれの名前の由来である。また、 (U, V) の座標で見るときには \mathcal{I}^\pm の端点 $(U, V) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ をそれぞれ $\mathcal{I}_-, \mathcal{I}_+, \mathcal{I}_-, \mathcal{I}_+$ と表す。

埋め込み図は描くのが難しい場合もあるので、代わりに図 2.3 のような 2 次元の Penrose 図を使うことが多い。この図は少し特殊で、図中のある点と、それに対して i^- と i^+ を繋ぐ直線に線対称な点が表す球面は対蹠的な関係-antipodal relation で結びついている。これは元々の式 (2.2) が円筒を包み込むように i^0 で接続されている様子を反映している。このことに注意すれば、図 2.3 の右半分 (または左半分) のみで時空の因果構造が十分に議論できる。

²英語では unphysical metric という。

2.2.2 Bondi 座標における 4 次元漸近平坦時空

ここでは BMS 対称性を考える準備として、漸近平坦時空を考える。漸近平坦時空では、ブラックホールなどの非自明な因果構造を考えなければ、先ほどの Minkowski 時空の Penrose 図を用いて共形無限遠が記述できる。

時空には遅延 Bondi 座標と呼ばれる座標系 $x^\mu = (u, r, x^A)$ が張れる。 u は外向きの光線に沿った遅延時間座標で、 x^A は光線に沿って変化しないトポロジカルに \mathbb{S}^2 と同じ曲面の点を指定する角度座標である。この定義から、

$$0 = (\nabla_a u)g^{ab}(\nabla_b u) =: k_a g^{ab} k_b \Rightarrow g^{uu} = 0 \quad (2.2.11)$$

$$0 = k^a \nabla_a x^A = g^{ab}(\nabla_b u)(\nabla_a x^A) \Rightarrow g^{uA} = 0 \quad (2.2.12)$$

という逆計量の条件が得られる。また、 r は面積半径にあたる動径座標で、 $q_{AB}(x^C)$ を \mathbb{S}^2 の計量として

$$\det g_{AB} = r^4 \det q_{AB} \quad (2.2.13)$$

という関係を満たす³。また、計量と逆計量の関係 $\delta_\nu^\mu = g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} + g^{\mu r} g_{r\nu} + g^{\mu A} g_{A\nu}$ から

$$g_{rr} = 0, \quad g_{rA} = 0 \quad (2.2.14)$$

という条件を得る。ここで h_{AB} を

$$h_{AB} = r^{-2} g_{AB}, \quad \det h_{AB} = \det q_{AB} \quad (2.2.15)$$

を満たすものとして導入すると、 h_{AB} の自由度は 2 である。式 (2.2.11)、(2.2.12)、(2.2.14)、および (2.2.15) の下では、時空の計量は 6 つの関数 $\{V, \beta, h_{AB}, U^A\}$ を使って

$$ds^2 = -Ve^{2\beta} du^2 - 2e^{2\beta} dudr + r^2 h_{AB} (dx^A - U^A du) (dx^B - U^B du) \quad (2.2.16)$$

と表せる。これは Bondi ゲージとも呼ばれる。

一般相対性理論における BMS 対称性では、ある面上にどのような初期条件を与えれば Einstein 方程式によって発展が完全に追えるかという、初期値問題の解析が重要である。そこで、 \mathcal{I}^+ 近傍での u に関する漸近平坦時空の発展を考えよう。

\mathcal{I}_-^+ にどのような時空の自由度の初期値の組を与えれば Einstein 方程式からそれらの u に関する発展を \mathcal{I}_+^+ まで追えるだろうか。境界条件として、 \mathcal{I}_\pm^+ で時空が Einstein 方程式の真空解である場合を議論する。このような境界条件の下で非自明な発展が記述できる時空が存在することは、Christodoulou-Klainerman(CK) によって厳密に示された [73]。その解析によると初期値問題が良設定となるためには、Bondi ゲージの関数の組 $\{V, \beta, h_{AB}, U^A\}$ は \mathcal{I}^+ 近傍、つまり $u = u_0$ を固定して r を無限に近づける際に

$$h_{AB}(u_0, r, x^C) = q_{AB}(x^C) + C_{AB}(u_0, x^C)r^{-1} + d_{AB}(u_0, x^C)r^{-2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (2.2.17)$$

$$V(u_0, r, x^C) = 1 - 2m_{\text{Bondi}}(u_0, x^C)r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (2.2.18)$$

$$\beta(u_0, r, x^C) = -\frac{1}{32r^2} C_{AB}(u_0, x^C) C^{AB}(u_0, x^C) + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (2.2.19)$$

$$U^A(u_0, r, x^C) = -\frac{1}{2r^2} \bar{\partial}_B C^{AB}(u_0, x^C) + \left(2L^A(u_0, x^C) + \frac{1}{3} C^{AB} \bar{\partial}^D C_{BD} \right) r^{-3} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (2.2.20)$$

と振る舞わなければならない。ここで、 \mathbb{S}^2 上の共変微分を $\bar{\partial}_A$ とした。 C_{AB} は対称無トレースのテンソルで、重力波要素-gravitational wave aspect と呼ばれる。重力波要素は \mathcal{I}^+ 近傍の球面の歪みを表し、まさに重力

³光度距離-luminosity distance と呼ばれることもあるが、宇宙論の文脈の光度距離を連想してしまうので避ける。

波の自由度を担う。 m_{Bondi} は Bondi 質量要素-Bondi mass aspect と呼ばれ、その球面積分は Bondi 質量

$$M_{\text{Bondi}}(u) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_\infty^2} q_{AB} dx^A dx^B m_{\text{Bondi}}(u, x^C) \quad (2.2.21)$$

を定める。また、 L^A は角運動量要素-angular momentum aspect と呼ばれるものである。Bondi テンソル-Bondi News を

$$N_{AB} := \frac{1}{2} \partial_u C_{AB} \quad (2.2.22)$$

と定めると、 \mathcal{I}_\pm^+ で時空が真空解という境界条件の整合性条件として Bondi テンソルが、

$$N_{AB} \stackrel{u \rightarrow \infty}{\cong} \mathcal{O}(|u|^{-\alpha}), \alpha > 1 \quad (2.2.23)$$

と振る舞うことが要請される。この条件式 (2.2.23) は CK 条件と呼ばれる。

CK 条件を満たすとき、 L^A の発展を記述する Einstein 方程式は \mathcal{I}_\pm^+ で

$$\partial^B [\partial_B \partial^C C_{AC} - \partial_A \partial^C C_{BC}] \Big|_{\mathcal{I}_\pm^+} = 0 \quad (2.2.24)$$

となる。 \mathbb{S}^2 上の対称無トレーステンソルは \mathbb{S}^2 上のスカラー C と擬スカラー Ψ を用いて

$$C_{AB} = -2\partial_A \partial_B C + q_{AB} \partial^C \partial_C C + \varepsilon_{C(A} \partial_{B)} \partial^C \Psi \quad (2.2.25)$$

と一般に規約分解できる。式 (2.2.24) に代入すると擬スカラーの項が消えることがわかるので、 C_{AB} の自由度は \mathcal{I}_\pm^+ では $C(u = -\infty, x^A)$ が担うことがわかる。

一方、 m_{Bondi} の発展を記述する Einstein 方程式は \mathcal{I}_\pm^+ 近傍で

$$\partial_u m_{\text{Bondi}} = \partial_A \partial_B N^{AB} - N_{AB} N^{AB} - 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T_{uu}) \quad (2.2.26)$$

となる。したがって Bondi 質量について

$$\frac{dM_{\text{Bondi}}}{du} = - \int_{\mathbb{S}_\infty^2} q_{AB} dx^A dx^B \left[\frac{N_{AB} N^{AB}}{4\pi} + T_{uu}^{(2)} \right] \quad (2.2.27)$$

が得られる。1 項目は正定値であり、2 項目もヌルエネルギー条件を破る物質が \mathcal{I}_\pm^+ 近傍にない限りは正定値なので、式 (2.2.27) は Bondi 質量が u についての単調減少関数であることを意味すると言って差し支えない。特に \mathcal{I}_\pm^+ では

$$\frac{dM_{\text{Bondi}}}{du} \Big|_{\mathcal{I}_\pm^+} = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathcal{I}_\pm^+} q_{AB} dx^A dx^B N_{AB} N^{AB} \quad (2.2.28)$$

となる。式 (2.2.28) は Bondi の質量損失公式-mass loss formula と呼ばれる。また、CK 条件 (2.2.23) の下では $M_{\text{Bondi}}|_{\mathcal{I}_\pm^+} = M_{\text{ADM}}$ となる。ここで、 M_{ADM} は Arnowitt-Deser-Misner(ADM) 質量である [74]。

質量損失公式からもわかる通り、発展を記述するためには興味ある u の全域で Bondi テンソルを知らなければならない。 $N_{AB}(u, x^A)$ が与えられれば、 \mathcal{I}_\pm^+ での初期値の組

$$\{C(u = -\infty, x^A), m_{\text{Bondi}}(u = -\infty, x^A), L_A(u = -\infty, x^A)\} \quad (2.2.29)$$

の発展が \mathcal{I}_\pm^+ まで記述できる。つまり、 \mathcal{I}_\pm^+ における r^{-1} について主要な放射自由度は

$$\left\{ C(u =, x^A)|_{\mathcal{I}_\pm^+}, m_{\text{Bondi}}(u =, x^A)|_{\mathcal{I}_\pm^+}, L_A(u =, x^A)|_{\mathcal{I}_\pm^+}, N_{AB}(u, x^A) \right\} \quad (2.2.30)$$

で完全に記述できる。準主要項も取り入れたい場合は、その解析に必要な分の初期値を用意すればよい。

遅延座標の代わりに先進座標を用いた先進 Bondi 座標 $x^\nu = (v, r, \bar{x}^A)$ でも同様の議論が成り立つ。

$r \rightarrow \infty$ を先にとると Minkowski 時空と区別がつかないため、 \mathcal{I}_\pm^+ 近傍では全て Minkowski 時空と思ってよいと考えてもおかしくないが、このように、漸近平坦時空には \mathcal{I}_\pm^+ 近傍で Minkowski 時空とは区別される非自明な構造が備わっている。

2.2.3 BMS 漸近対称性

6つの関数を使って式(2.2.16)のように時空の計量を表すゲージ条件と、漸近平坦であるための漸近条件式(2.2.17) (2.2.20)を満たす変換を考える。つまり、漸近 Killing 方程式

$$\text{Bondi ゲージ条件: } \mathcal{L}_\xi g_{rr} = 0, \mathcal{L}_\xi g_{rA} = 0, \mathcal{L}_\xi [\partial_r (\det[g_{AB}r^{-2}])] = 0, \quad (2.2.31)$$

$$\text{漸近平坦条件: } \mathcal{L}_\xi g_{uu} = \mathcal{O}(r^{-1}), \mathcal{L}_\xi g_{ur} = \mathcal{O}(r^{-2}), \mathcal{L}_\xi g_{uA} = \mathcal{O}(r^0), \mathcal{L}_\xi g_{AB} = \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (2.2.32)$$

を満たす漸近 Killing ベクトルを考えよう。答えとして、次の BMS 対称性変換が得られる。

$$\begin{aligned} \xi[\alpha, \eta] = & \left[\alpha(x^A) + \frac{u}{2} \bar{\partial}_A \eta^A(x^A) \right] \partial_u \\ & + \left[\eta^A(x^A) - r^{-1} \bar{\partial}^A \alpha(x^A) \right] \partial_A \\ & + \left[-\frac{u+r}{2} \bar{\partial}_A \eta^A(x^A) + \frac{1}{2} \bar{\partial}_A \bar{\partial}^A \alpha(x^A) \right] \partial_r + o(r^{-1}). \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

ここで、 $\alpha(x^A)$ は球面上の適当な関数であり、 $\eta^A(x^A)$ は

$$\bar{\partial}_A \eta_B + \bar{\partial}_B \eta_A = q_{AB} \bar{\partial}_C \eta^C \quad (2.2.34)$$

を満たす S^2 上の共形 killing ベクトルである。BMS 対称性変換のうち、 $\eta = 0$ としたもの：

$$\xi_\alpha := \xi[\alpha, 0] = \alpha \partial_u - r^{-1} \bar{\partial}^A \alpha \partial_A + \frac{1}{2} \bar{\partial}_A \bar{\partial}^A \alpha \partial_r + o(r^{-1}) \quad (2.2.35)$$

は特に超並進変換-supertranslation と呼ばれる。 α を球面調和関数の $\ell = 0, 1$ のものにとると、 $\{Y_{0,0}, Y_{1,0}, Y_{1,1} + Y_{1,-1}, Y_{1,1} - Y_{1,-1}\}$ はそれぞれ、 u 方向、 x^3 方向、 x^1 方向、 x^2 方向への並進変換となる。超並進変換はこのように並進変換を含む、無限自由度を持った変換となっている⁴。また、BMS 対称性変換のうち $\alpha = 0$ としたもの：

$$\xi_\eta := \xi[0, \eta] = \frac{u}{2} \bar{\partial}_A \eta^A \partial_u + \eta^A \partial_A - \frac{u+r}{2} \bar{\partial}_A \eta^A \partial_r + o(r^{-1}) \quad (2.2.36)$$

は超回転変換-superrotation と呼ばれる。2次元共形場の理論でよく知られているように、 S^2 を Riemann 球面 \mathbb{CP}^1 で表すと共形 Killing ベクトルは2点を除いて正則または反正則な関数

$$\begin{cases} \eta^z : z \mapsto \eta(z), \partial_{\bar{z}} \eta(z) = 0 \\ \eta^{\bar{z}} : \bar{z} \mapsto \bar{\eta}(\bar{z}), \partial_z \eta(\bar{z}) = 0 \end{cases} \quad (2.2.37)$$

を解にもつ [75]。無限小変換は Laurent 展開によって

$$\eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{n+1} \quad (2.2.38)$$

と得られる。この変換の生成子 $l_n := -z^{n+1} \partial_z$, $n \in \mathbb{Z}$ は Witt 代数

$$[l_n, l_m] = (n-m) l_{n+m} \quad (2.2.39)$$

を為す。このうち \mathbb{CP}^1 全域で定義されるものは $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$ で張られる代数であり、このときの超回転変換(2.2.36)は Lorentz 変換となる。超回転変換はこのように Lorentz 変換を含む、無限自由度を持った変換となっている⁵。

⁴並進部分を抜いて $\alpha(x^A) = \sum_{\ell > 2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell m} Y_{\ell m}(x^A)$ で表せる ξ_α を超並進と呼ぶ場合もある。

⁵超並進と同様に Lorentz 部分を抜いて $\{l_n\}_{|n| > 2}$ の線型結合でかける ξ_η を超回転と呼ぶ場合もある。

以上から、BMS 対称性変換は Poincaré 対称性を含む無限自由度を持った対称性であることがわかった。4次元並進変換を \mathfrak{t}_4 として Poincaré 代数の半直積構造を $\mathfrak{so}(1,3) \times \mathfrak{t}_4$ で表す。超並進変換を \mathfrak{st}_4 とし、超回転変換を $\mathfrak{mitt} \oplus \overline{\mathfrak{mitt}}$ とすると、

$$\mathfrak{bms}_4 = \mathfrak{so}(1,3) \times \mathfrak{st}_4 \quad (2.2.40)$$

$$\mathfrak{ebms}_4 = [\mathfrak{mitt} \oplus \overline{\mathfrak{mitt}}] \times \mathfrak{st}_4 \quad (2.2.41)$$

をそれぞれ 4次元 BMS 代数、拡張された 4次元 BMS 代数として区別することもある⁶。

漸近対称性変換は、極限操作を実行すると区別がつかなくなる量同士を結ぶ変換と言える。前小節で見たように、一般相対性理論では $r \rightarrow \infty$ の極限を先にとると Minkowski 時空と区別がつかなくなるような自由度を持った時空の発展を追うことができる。このような時空の自由度を取り入れた解析を行う場合には、漸近対称性は理論を不変にする変換というよりも、むしろ非自明な配位への変化を記述するものとしての意味を持つ。次節で説明するメモリー効果は、まさにこのことを強調する現象である。

2.2.4 広い意味での漸近対称性について

BMS 漸近対称性は、Einstein 方程式によって発展が追えるような自由度の中に、 $r \rightarrow \infty$ の極限操作を先に実行すると見えないものがあるという事実と密接に関わっている。このような自由度同士を繋ぐ変換が漸近対称性変換と言えるが、より制限を緩く、発展方程式を柵に上げて漸近対称性を議論することもできる。このような意味での漸近対称性は標語的に

$$\text{漸近対称性} = \text{物理的に許される限りのゲージ変換/自明なゲージ変換} \quad (2.2.43)$$

と説明される。記号“/”は商集合の気持ちを表している。物理的に許される、という言葉には曖昧さが多分にあってしばしば議論を紛糾させるが、この曖昧さが議論を先に進めることも多い。

対称性変換の電荷が発散するような場合は通常は非物理的であると考えられるが、一步踏み込んで正則化可能ならば物理的に許されるはずだという考えもある。この定義ではどのようなゲージ固定を選ぶのが適切な状況か、また、対数的な減衰は物理的かななどの考えによって漸近対称性が異なることになるが、理論を特定せずに議論できるという強みがある。多くの文献でこの意味で漸近対称性が扱われているので注意が必要である。

2.3 メモリー効果

メモリー効果は漸近対称性の議論で現れる自由度に物理的な意味をもたらすものである。メモリー効果の代表的なものは、一般相対論の文脈で知られる重力メモリー効果だろう。重力波は試験粒子間の距離の変化として記述される。距離の変化は振動して波形を描くが、重力波が通過して充分時間が経った後に残る距離の変化がある。重力波がこの永続的な距離の変位をもたらす効果を、重力メモリー効果と呼ぶ。これは Favata の論文で次のように象徴的に表されている [76]。

⁶さらに、一般化された BMS 対称性

$$\mathfrak{gbms}_4 = \text{diff}(S^2) \times \mathfrak{st}_4 \quad (2.2.42)$$

も考案されている [47]。ここで、 $\text{diff}(S^2)$ は S^2 上の滑らかな微分同相写像全体の為す代数である。

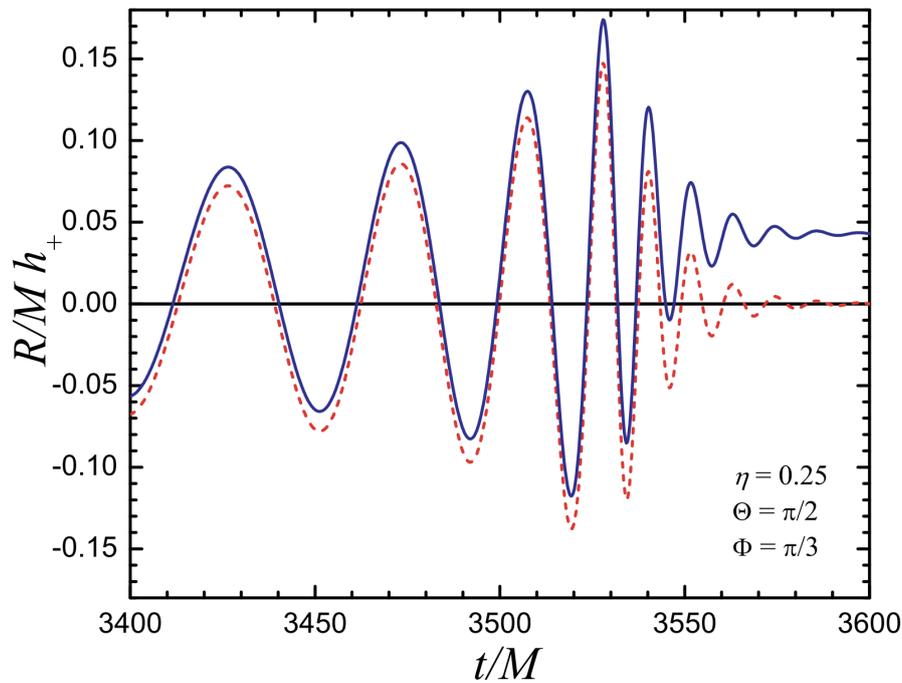


図 2.4 メモリー効果の有無による波形の違いを表す図 ([76] より)

図 2.4 の赤い波形はメモリー効果を含まない重力波の波形を表し、青い波形はメモリー効果を含めた重力波の波形を表す。

重力メモリー効果の存在は Zel'dovich-Polnarev によって最初に指摘された [77]。これは質量を持った自由粒子の運動によって引き起こされるメモリー効果を線形 Einstein 重力の範囲で解析したものだ。その後自由ヌル粒子の運動が引き起こすヌルメモリー効果や、重力の非線形効果が引き起こす Christodoulou 効果などが理論的に発見されていった [78, 79]。ブラックホール連星からの重力波が引き起こすメモリー効果の振幅は、典型的には振動部分の振幅の 5% 程度しかないため、2019 年までに LIGO/Virgo で観測された重力波のデータからはメモリー効果の検出はできていないようである [80–83]。しかし KAGRA や LIGO-India などが観測に加わることで重力波検出のネットワークが広がっていくこと、LISA や DECIGO などの次世代重力波検出器による観測が予定されていることなどから、そう遠くない将来にメモリー効果が検出されることが期待される [84–87]。

自由粒子の運動をメモリー効果の源とするモデルでは、その非斉次波動方程式の解に Heaviside の階段関数を係数に持つ要素が存在することが本質的であり、重力以外の理論での対応物も発見された [88–92]。また、永続的な距離の変位をもたらす効果とは異なるメモリー効果：スピンメモリー効果の存在も指摘され、議論されている [93, 94]。スピンメモリー効果に対して元々のメモリー効果は変位メモリー効果とも呼ばれる。

次に重力の変位メモリー効果を、前節で説明したような \mathcal{I}^+ 近傍の時空の u に関する発展を通じた簡単なモデルを用意して議論する。

2.3.1 重力メモリー効果

重力波検出器を 2 つの時間的測地線で表し、重力の変位メモリー効果の簡単なモデル化を行う。測地線偏差が重力波を記述する。 $u \in [u_0, u_1]$ の期間に検出器は重力波や光線などの放射を経験し、 $u < u_0$ では完全な Minkowski 時空と仮定する。この状況は Christodoulou-Klainerman 条件 (2.2.23) を満たす。検出器はその源から十分に離れており、理想的に \mathcal{I}^+ 近傍を通るとしよう。つまり、その 4 元速度は $v^\mu v_\mu = -1 + \mathcal{O}(r^{-2})$ を満たし、主要な成分はほとんど ∂_u 方向に持つとする。これを模式的に表したのが次の図 2.5 である。

2つの測地線の間の変位ベクトルを s^μ として、単純化のため $s^r = 0$ と設定する。測地線偏差方程式は

$$q_{AB}\partial_u^2 s^B = \frac{1}{r}\partial_u N_{AB}s^B \quad (2.3.1)$$

となる。 $\Delta u = u_1 - u_0 \ll r$ とすると、放射を受けて変位ベクトルは

$$q_{AB}\Delta s^B = \frac{1}{2r}\Delta C_{AB}s^B + o(r^{-1}) \quad (2.3.2)$$

という変化を受ける。このように、漸近対称性で現れた $r \rightarrow \infty$ の極限で見えなくなる自由度の変化は、観測にかかり得る物理的な量なのである。

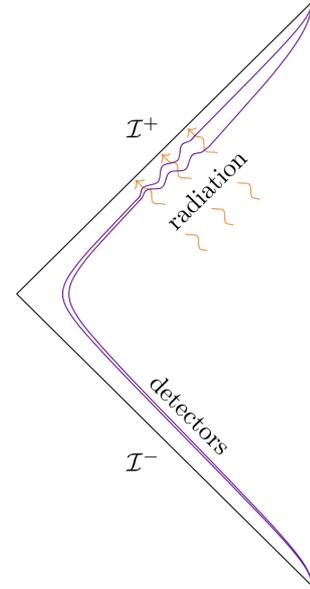


図 2.5 重力メモリー効果を受ける状況の模式図 ([16] より)

2.4 赤外三角関係へ

これまでに赤外三角関係の各頂点について説明してきた。この節ではこれらの点を繋ぐ関係を見ていこう。

2.4.1 BMS 対称性と重力メモリー効果

超並進変換で C_{AB} は

$$\mathcal{L}_{\xi_\alpha} C_{AB} = \alpha\partial_u C_{AB} - 2\partial_A\partial_B\alpha + q_{AB}\partial^C\partial_C\alpha \quad (2.4.1)$$

の変換を受ける。したがって変位メモリー効果は放射の情報を持った関数 α の超並進変換として説明できる。

2.4.2 重力メモリー効果と軟重力子定理

線形 Einstein 理論で質量を持った自由粒子が引き起こすメモリー効果は

$$\Delta h_{\mu\nu}(\vec{k}) = \left[\frac{\sqrt{\pi G}}{4\pi r} \sum_{n \in \alpha, \beta} \eta_n \frac{p_n^\mu p_n^\nu}{k \cdot p_n} \right]^{\text{TT}} \quad (2.4.2)$$

で与えられる。式 (2.1.28) の軟重力子定理と見比べると、これは軟重力子の放出によってかかる因子 $G_{\beta\alpha}(k, h)$ から偏極の部分を取り除いたものと同じだ。

2.4.3 BMS 対称性と軟重力子定理

漸近平坦時空で重力子の散乱を記述するためには、 \mathcal{I}^- に用意した状態から \mathcal{I}^- の状態への遷移を記述する散乱演算子を考えたくなる。このときの様子は式 (2.3) の波線のように表されるだろう。式 (2.3) の説明で触れたように、右半分の各点が表す球面と左半分の各点が表す球面は対蹠的な関係で結びつく。このように時空図を表したのは、 \mathcal{I}^- での場 $\Psi^a(v, x^A)$ と \mathcal{I}^+ での場 $\Psi^a(u, x^A)$ の間の接続条件が対蹠点関係

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Psi^a(v, \theta, \phi) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \Psi^a(u, \pi - \theta, \pi + \phi) \quad (2.4.3)$$

で与えられるべきであるという Strominger の議論を反映している [95]。

CK 条件を満たす状況で、対蹠点関係を満たす勝手な α について

$$Q_{\alpha}^{-} := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{I}^{-}} q_{AB} dx^A dx^B m_{\text{Bondi}} \alpha, \quad Q_{\alpha}^{+} := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{I}^{+}} q_{AB} dx^A dx^B m_{\text{Bondi}} \alpha \quad (2.4.4)$$

を定めると、Bondi 質量要素も対蹠点関係を満たすべきだから、

$$Q_{\alpha}^{-} = Q_{\alpha}^{+} \quad (2.4.5)$$

が成り立つ。この保存量を漸近対称性電荷-asymptotic charge、または大電荷-large charge と呼ぶ。議論を線形 Einstein 重力の範囲に限って Gauss の法則を使い、CK 条件を考慮すると、

$$Q_{\alpha}^{+} = \int du q_{AB} dx^A dx^B \alpha T_{uu}^{(2)} - \frac{1}{4\pi} \int du q_{AB} dx^A dx^B \alpha \bar{\partial}^A \bar{\partial}^B N_{AB} =: Q_{\alpha}^{\text{hard}} + Q_{\alpha}^{\text{soft}} \quad (2.4.6)$$

に分かれる。1 項目は物質のエネルギー運動量の情報を持った電荷であり、硬電荷-hard charge と呼ばれる。2 項目は重力子の情報を持った電荷であり、軟電荷-soft charge と呼ばれる。

量子論を考えると、 \mathcal{I}^{-} に用意する状態 $|\alpha : \text{in}\rangle$ と \mathcal{I}^{+} に用意する状態 $|\beta : \text{out}\rangle$ を結びつける散乱演算子 S の存在を仮定する。このとき大電荷保存則は、

$$\langle \beta : \text{out} | [Q_{\alpha}^{+} S - S Q_{\alpha}^{-}] | \alpha : \text{in} \rangle = 0 \quad (2.4.7)$$

と表せる。電荷が状態に与える作用を考えると、軟電荷は $\alpha \rightarrow \beta$ の過程に軟重力子を加える作用を与え、硬電荷は軟重力子の放出によってかかる因子を与える作用を与えることがわかる。

このように、軟重力子定理は大電荷保存則として理解されるのである。

第 3 章

前相対論的な量子散乱理論

本論の主題の 1 つは量子論における散乱問題の定式化である。ここでいう量子論とは、前相対論的、すなわち Newton 的世界観における量子論と、特殊相対論的な世界観における量子論の両方を含意する。前者を量子力学、後者を場の量子論と呼ぶことにしよう¹。特殊相対性理論が Newton 力学を内包するような枠組みであるように、場の量子論も量子力学を内包するような枠組みである。我々人類に親しみのある Newton 的世界観に基づく理論の理解を深めることは、有効理論としてその理論を含むような理論の理解にも結びつく。

この章では量子力学において散乱問題がどのように定式化されているのかについての理解を目指す。特に場の量子論における散乱行列の赤外発散の萌芽が、量子力学の段階で既に現れていることを確認し、それが数学的にどのように解決されているのかを見ていこう。

この章の散乱問題に関連する数学的な記述は Amrein の書籍 [96] を大いに参考にしている。証明を省いた箇所はこれを参考にしてほしい。その他には Reed-Simon の書籍 [97] および Strocchi の書籍 [98] の影響も受けている。また、量子力学については名古屋大学での講義のほかに、書籍 [99–101] などの影響を受けているかもしれない。

3.1 量子力学の枠組み

散乱問題について触れる前に、ここで前提となる量子力学の枠組みについて確認する。本論では以下に記す 5 つの仮設を公理として取り扱う。この節ではこれらの公理について説明する。

3.1.1 舞台の設定

1 つ目の公理は舞台設定を与えるものだ。

公理その 1

任意の孤立系に対してある Hilbert 空間 \mathcal{H} が存在して、その孤立系に対応する \mathcal{H} の元：状態-state が存在する。

公理 1 は「量子力学を展開する舞台が Hilbert 空間であり、Hilbert 空間の元である状態を知ることができれば、興味ある孤立系の情報を知ることができる。」という宣言である。次の小節で説明するように、ノルムが 1 の状態を特別に物理的状態や系の状態などと呼ぶこともある。

¹勿論、特殊相対論とは異なる世界観に立脚する場の量子論も多く存在する。本論ではそれらについては特別な場合を除いて議論しないので、量子力学の枠組みの中に特殊相対性を取り入れて成功している理論を単に場の量子論と呼ぶ。

Hilbert 空間

では、Hilbert 空間とはなんだったろうか。量子力学の状態が属する Hilbert 空間は、複素内積空間であって、その内積が誘導する距離関数によって完備となるものをいう。以下この意味を簡単に述べる。

ブラケット記法として状態をケット： $|\Psi\rangle$ などで表し、それと $|\Phi\rangle$ との内積をブラ： $\langle\Phi|$ を用いて $\langle\Phi|\Psi\rangle$ で表すことも多い。しかし複素内積空間や演算子の説明をするためには、状態を Ψ, Φ などとして内積を $\langle\Psi, \Phi\rangle$ で表す方が明示的だ。ブラケット記法については次の小節で触れるとしよう。Hilbert 空間に備わる内積 \langle, \rangle は

$$\langle, \rangle : (\Psi, \Phi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \langle\Psi, \Phi\rangle \in \mathbb{C} \quad (3.1.1)$$

と対応づける写像である。内積空間は線形空間で、任意の $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ に対して $\Psi, \Phi \in \mathcal{H} \Rightarrow \xi\Psi + \eta\Phi \in \mathcal{H}$ が成り立つ。状態が加法で閉じていることは、異なる状態を足し上げたものもまた状態として存在し得ることを意味している。このように異なる状態の重ね合わせを許すことは、古典力学とは異なる量子力学の 1 つの特徴と言える²。これは量子力学の重ね合わせの原理とも呼ばれる。

さて、複素内積空間は複素線型空間のうち、その上に上記の内積という演算があって、それが次の 3 条件を満たすものをいう。

- (1) $\langle\Psi, \Phi\rangle = \overline{\langle\Phi, \Psi\rangle}$
- (2) $\langle\Psi, \xi_1\Phi_1 + \xi_2\Phi_2\rangle = \xi_1\langle\Psi, \Phi_1\rangle + \xi_2\langle\Psi, \Phi_2\rangle$, $\langle\eta_1\Psi_1 + \eta_2\Psi_2, \Phi\rangle = \eta_1\langle\Psi_1, \Phi\rangle + \eta_2\langle\Psi_2, \Phi\rangle$ (3.1.2)
- (3) $\langle\Psi, \Psi\rangle \geq 0$ 等号成立は $\Psi = 0$ のときのみ。

ここで、 \bar{c} は $c \in \mathbb{C}$ の複素共役を表す。内積によって誘導される距離関数 d は状態のノルム $\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi, \Psi\rangle}$ を用いて

$$d : (\Psi, \Phi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto d(\Psi, \Phi) := \|\Psi - \Phi\| \in \mathbb{R}_+ \quad (3.1.3)$$

で与えられる。距離関数の定義である 3 条件: 対称律・正定値性・三角不等式は内積の定義から明らかである。ここでは内積によってノルムを定義したが、次のように内積をノルムで表すこともできる。

$$\langle\Psi, \Phi\rangle = \frac{1}{4} \left[\|\Psi + \Phi\|^2 - \|\Psi - \Phi\|^2 - i \left(\|\Psi + i\Phi\|^2 - \|\Psi - i\Phi\|^2 \right) \right]. \quad (3.1.4)$$

これは中線定理に関連し、偏極恒等式と呼ばれる。

Hilbert 空間の完備性は古典物理学で実数を導入するような、数学的な議論を単純化するための仮定である。完備性を仮定するとき、 \mathcal{H} の任意の元 Ψ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\Psi - \Psi_N\| = 0, \quad \Psi_N = \sum_{n=1}^N c_n e_n, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.1.5)$$

となる \mathcal{H} 上の点列 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する³。

²古典確率混合は重ね合わせと言わない。

³場の量子論を念頭に入れてもう少し厳密な説明も行う。選択公理を仮定すれば Hilbert 空間の次元が無限であっても、任意の $\Psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\Psi = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle e_\alpha, \Psi \rangle e_\alpha, \quad \langle e_\beta, e_\alpha \rangle = \delta_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{A} \quad (3.1.6)$$

を満たす正規直交基底 $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ が存在する。ここで \mathcal{A} は非可算集合を許す。Hilbert 空間の完備性を仮定すると、 \mathcal{A} の部分集合

$$\mathcal{B}_\Psi := \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \langle e_\alpha, \Psi \rangle \neq 0\} \quad (3.1.7)$$

が高々可算集合と言える。そこで $\{e_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}_\Psi}$ のラベルを取り替えて $\{e_n^\Psi\}_{n \in \mathbb{N}} \equiv \{e_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}_\Psi}$ とすれば

$$\Psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n^\Psi, \Psi \rangle e_n^\Psi \quad (3.1.8)$$

といつでも表せる。状態を高々可算無限個の基底で展開した形で表現できることは喜ばしいことであるが、ある状態 Ψ を表すために用いた可算無限個の基底を用いて必ずしも別の状態 Φ が表せるとは限らないことに注意が必要だ。実際、このことに起因した多様な問題が場の量子論では現れる。この事情は曲がった時空における場の量子論などではなおさら注意すべきところだ。

3.1.2 観測量と測定確率

2 つ目の公理は孤立系に対して説明すべき対象を定めるものである。

公理その 2

孤立系において測定可能な対象に対応して \mathcal{H} 上の自己共役演算子：観測量-observable が存在する。観測量 A は以下のように射影演算子 Π_α を用いてスペクトル分解可能だ。

$$A = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha \Pi_\alpha. \quad (3.1.9)$$

このとき、1 回の測定で得られる値は観測量の実固有値 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ のいずれかである。また、状態 Ψ に対応する孤立系に対して無数に測定を行うことで得られる測定結果の確率分布 $\text{Pr}(\alpha)$ は次で与えられる。

$$\text{Pr}(\alpha) = \frac{\langle \Psi, \Pi_\alpha \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (3.1.10)$$

公理 2 は「Hilbert 空間上の観測量が、興味ある孤立系を特徴付ける測定可能な量の定義を与える。」として Hilbert 空間に意味付けを与えると同時に、「量子力学が予測・説明を与えるのは多数回の測定で得られる結果の確率分布である。」という問題設定を与える。公理 2 の測定は射影測定と呼ばれるものである⁴。この問題設定からある状態と、その状態に複素数のスカラー積演算を施した状態は確率分布に対して全く同じ予言を与えることがわかる。対応付けをより細表すを与えたい場合、こうした状態を同一視を考えたい。すなわち、 \mathcal{H} の元に対して同値関係 \sim_r を

$$\Psi \sim_r \Phi \stackrel{\text{def}}{\equiv} \exists \alpha \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \Phi = \alpha \Psi \quad (3.1.11)$$

で定める。その同値類

$$[\Psi]_{\sim_r} := \{\Phi \in \mathcal{H} \mid \Phi \sim_r \Psi\} \quad (3.1.12)$$

の全体からなる商集合

$$\mathcal{R} := \mathcal{H} / \sim_r \quad (3.1.13)$$

を定める。この商集合 \mathcal{R} を射線-ray と呼ぶ。こうして公理 1 と公理 2 を考えるとこれらは、「興味ある孤立系について知ることは、その系に対して何らかの測定を行う際の測定結果の確率分布について知ることと同義であり、量子力学においてそれは、対応する観測量と射線の元を与えることによって表現される。」と言い換えることができる。

同値類から代表元を取る方法は自由なので、完全代表系を Hilbert 空間のうちノルムが 1 の状態に制限した部分集合 $\hat{\mathcal{H}}$ から選ぶことができる。そこで対応 $\Upsilon : (\alpha, \Psi) \in \mathbb{C} \times [\Psi]_{\sim_r} \mapsto \alpha / |\alpha| \Psi \in [\Psi]_{\sim_r}$ を考えれば、初めから $\hat{\mathcal{H}}$ を孤立系に対応する状態の属する空間としてよいとわかる。この流儀では射線を作る同値関係は

$$\Psi \sim \Phi \stackrel{\text{def}}{\equiv} \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \Phi = e^{i\theta} \Psi \quad (3.1.14)$$

で定める。この流儀が便利な場合も多いので、ノルムが 1 の状態を物理的状态や系の状態と呼ぶことがある。本稿でも以後この流儀を採用する⁵。すなわち公理 1 を次のように捉え直す。

⁴より一般の射影を公理として与えることもできるが、後述する公理 4 と公理 5 を使えば一方の測定から他方の測定が構成できる。公理 4 までは孤立系の純粋状態に対しての枠組みを与えるので、射影測定を採用している。

⁵対称性変換と測定操作に対して、それぞれを良定義にすることの手間・心理的抵抗の大きさに若干のトレードオフがあるように思う。本稿では測定理論について詳しくは触れない一方、対称性変換については比較的詳しく説明するため、こちらを採用する。

公理その 1'

任意の孤立系に対して Hilbert 空間 \mathcal{H} が存在する。元のノルムは 1 に規格化されており、位相の異なる元に同一視 $\sim_{\hat{r}}$ を入れて定めた射線 $\mathcal{R} = \mathcal{H}/\sim_{\hat{r}}$ の元：物理的状态が、対応する孤立系を完全に記述する。

また、しばしば $\mathcal{R}, \mathcal{H}, \hat{\mathcal{H}}$ の区別をしないので、適宜適切かつ好みの定義で読んでもらえればよい。

ブラケット記法

小節 (3.1.1) で触れたブラケット記法についてもここで簡単に説明しておこう。

Hilbert 空間 \mathcal{H} の双対 \mathcal{H}^* を、全ての有界線型汎函数すなわち、 $\varphi: \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$

$$\text{線形性 } \Psi, \Phi \in \mathcal{H}, \alpha \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\Psi + \alpha\Phi) = \varphi(\Psi) + \alpha\varphi(\Phi), \quad (3.1.15)$$

$$\text{有界性 } \forall \Psi \in \mathcal{H}, \exists M \geq 0, \text{ s.t. } |\varphi(\Psi)| \leq M\|\Psi\| \quad (3.1.16)$$

を満たす写像全体からなる空間とする。 \mathcal{H}^* もまた複素線型空間である。

一般に、有界線形演算子 $\omega: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ のノルムは

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{\text{op}} &= \inf \{ M \in \mathbb{R}_+ \mid \|\omega(f)\|_{\mathcal{K}} \leq M\|f\|_{\mathcal{H}}, \forall f \in \mathcal{H} \} \\ &= \sup_{0 \neq f \in \mathcal{H}} \frac{\|\omega(f)\|_{\mathcal{K}}}{\|f\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{g \in \mathcal{H}, \|g\|_{\mathcal{H}}=1} \|\omega(g)\|_{\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

で定められる。このような ω からなる空間を $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ で表すこともある。また、 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ のときは単に $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表す。 \mathcal{H} の双対 \mathcal{H}^* の元は $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ のものと考えてよいから、 \mathcal{H}^* には有界線形演算子のノルム

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^*} \equiv \|\varphi\|_{\text{op}} := \sup_{0 \neq \Psi \in \mathcal{H}} \frac{|\varphi(\Psi)|}{\|\Psi\|} \quad (3.1.18)$$

が備わっている。

\mathcal{H} の勝手な元 ϕ を取り出して \mathcal{H}^* の元 φ_{ϕ} を、

$$\varphi_{\phi}: \psi \in \mathcal{H} \mapsto \varphi_{\phi}(\psi) := \langle \phi, \psi \rangle \in \mathbb{C} \quad (3.1.19)$$

と定める。これは線形関数でかつ

$$\|\varphi_{\phi}\|_{\mathcal{H}^*} \leq \sup_{0 \neq \psi \in \mathcal{H}} \frac{\|\phi\| \|\psi\|}{\|\psi\|} = \|\phi\| \quad (3.1.20)$$

が成り立つ。等号成立は $\psi = \phi$ のときで結局

$$\|\varphi_{\phi}\|_{\mathcal{H}^*} = \|\phi\| \quad (3.1.21)$$

が成り立つ。この対応を使って \mathcal{H} と \mathcal{H}^* の同一視が可能である。実際次の定理が成り立つ。

Riesz の表現定理

Hilbert 空間 \mathcal{H} と \mathcal{H} 上のある有界線型汎函数 φ を考える。次の性質を満たす $\phi \in \mathcal{H}$ が唯一存在する。

$$\forall \psi \in \mathcal{H}, \varphi(\psi) = \langle \phi, \psi \rangle, \quad \|\varphi\|_{\mathcal{H}^*} = \|\phi\|_{\mathcal{H}} \equiv \|\phi\|. \quad (3.1.22)$$

Riesz の表現定理の φ を使って、

$$\star: \phi \in \mathcal{H} \mapsto \star\phi \in \mathcal{H}^* \quad (3.1.23)$$

を定めることができる。 $(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}$ のためには、内積の反線形性に注意して、

$$\star: \phi_1 + \alpha\phi_2 \mapsto \star\phi_1 + \bar{\alpha}\star\phi_2 \quad (3.1.24)$$

と定めればよい。このとき、 $\star \circ \star = \text{id}$ となる。ここまでで、 \mathcal{H} と \mathcal{H}^* の同一視の与え方をみた。次に演算子についても考えてみよう⁶。

式(3.1.17)から、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は和と演算の積で閉じていることがわかる。したがって、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は \mathbb{C} 上の線型空間である。また、 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、その随伴 A^\dagger を

$$\langle A^\dagger \phi, \psi \rangle = \langle \phi, A \psi \rangle, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H} \quad (3.1.25)$$

を満たすものとして定める。このとき、 A^\dagger は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の元として一意に定まることが知られている[†]。したがって、式(3.1.25)を使って

$$\star : A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto A^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (3.1.26)$$

を定めることができる。式(3.1.25)から $\star \circ \star = \text{id}$ および、

$$\star : AB \mapsto B^\dagger A^\dagger \quad (3.1.27)$$

が成り立つ⁷。状態の同一視の対応の \star と合わせることで、有界線形演算子の同一視も可能だ。ブラケット記法はこれらの同一視を同時に行ったものである。つまり、

$$|\Psi\rangle \equiv \Psi \in \mathcal{H}, \quad \star \Psi \equiv \langle \Psi| \equiv (|\Psi\rangle)^\dagger \in \mathcal{H}^* \quad (3.1.28)$$

と状態を書き直し、 $\alpha \in \mathbb{C}$ 、 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、

$$(\alpha A |\Psi\rangle)^\dagger \equiv \langle \Psi| \bar{\alpha} A^\dagger = \bar{c} \langle \Psi| A^\dagger, \quad (\langle \Psi| \bar{\alpha} A^\dagger)^\dagger \equiv \alpha A |\Psi\rangle \quad (3.1.29)$$

による同一視を約束するのがブラケット記法である。

この記法の利点の1つとして、Hilbert空間上の演算子をこのケットとブラを用いて表せるということがある⁸。例えば観測量 $A = \sum_\alpha a_\alpha \Pi_\alpha$ に対して、測定すれば必ず a_α を得るような状態を $|\alpha\rangle$ と表す。このとき $\{|\alpha\rangle\}_\alpha$ は正規直交基底を為し、観測量はこれを用いて

$$A = \sum_\alpha a_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (3.1.30)$$

で表せる。つまり、固有値 a_α の固有空間への射影演算子が $|\alpha\rangle$ と $\langle\alpha| = (|\alpha\rangle)^\dagger$ の2つ組-dyadで $\Pi_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ で表せる。このとき、系の状態は $|\Psi\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\alpha\rangle$ 、 $\sum_\alpha |c_\alpha|^2 = 1$ と位相の違いを除いて一意であり、観測量の値 a_α を測定する確率は

$$\text{Pr}(a_\alpha) = \langle \Psi | \Pi_\alpha | \Psi \rangle = \langle \Psi | |\alpha\rangle\langle\alpha| | \Psi \rangle = \sum_{\beta, \gamma} \bar{c}_\beta c_\gamma \langle \beta | \alpha \rangle \langle \alpha | \gamma \rangle = \sum_{\beta, \gamma} \bar{c}_\beta c_\gamma \delta_{\beta\alpha} \delta_{\alpha\gamma} = |c_\alpha|^2 \quad (3.1.31)$$

として得られる。このように観測量を表すと、状態の位相の変換 $|\alpha\rangle \rightarrow e^{i\theta} |\alpha\rangle$ 、 $\langle\alpha| \rightarrow \langle\alpha| e^{-i\theta}$ で観測量が不変であることが明白なので、射線の代表元の取り方に依存せずに観測量が表せることが明白になる。つまり、観測量 $A = \sum_\alpha a_\alpha \Pi_\alpha$ のスペクトル分解によってHilbert空間の固有空間が

$$\mathcal{H}(A) = \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha(A), \quad \mathcal{H}_\alpha(A) = \{|\alpha\rangle \in \mathcal{H} \mid A|\alpha\rangle = a_\alpha |\alpha\rangle\} \quad (3.1.32)$$

⁶非有界演算子などの議論は長くなるため本論中には残さない。基本的には全て良定義であるように頑張っ取り直すことを考える。

⁷ $\star \circ \star : A \mapsto (A^\dagger)^\dagger = A$ の演算を備えた代数を \star 代数と呼ぶ。普通は \star 代数で表す。読みはstarなので困らないだろう。なお、 $\|A^\dagger\|_{\text{op}} = \|A\|_{\text{op}}$ が成り立つ。完備ノルムを備えた代数をBanach代数というが、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ はそのような代数になっている。 \star 代数と合わせてこれを B^* 代数と呼ぶ。これに加えて $\|A^\dagger A\| = \|A\|^2$ が成り立つ。このような代数は C^* 代数と呼ばれる。

⁸量子力学を特殊相対性と両立させようと試みるとき、演算子をこのように考えると重大な問題が発生する。このことが演算子を場で構成する場の量子論に向かわせるのだが、それは場の量子論の枠組みを説明するところで触れるとしよう。

というように直和分解されるとき、射線もまた

$$\mathcal{R}(A) = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{R}_{\alpha}(A), \mathcal{R}_{\alpha}(A) = \{|\alpha\rangle \in \mathcal{R} \mid A|\alpha\rangle = a_{\alpha}|\alpha\rangle\} \quad (3.1.33)$$

というように直和分解されることは明らかだ。この意味で観測量は射線上の自己共役演算子ともいえる。以降は都合に応じてブラケット記法も適宜用いる。

3.1.3 射影測定直後の状態

3つ目の公理は射影測定後の状態に関するものだ。公理2とまとめて射影測定の公理とされることもある。

公理その3

興味ある孤立系に対応する物理的状態 $|\Psi\rangle \in \mathcal{R}$ を射影測定した直後の状態 $|\Psi'\rangle$ は、次で与えられる。

$$|\Psi'\rangle = \frac{\Pi_{\alpha}|\Psi\rangle}{\sqrt{\text{Pr}(\alpha)}} \quad (3.1.34)$$

式(3.1.31)で用いた展開によれば

$$|\Psi'\rangle = \frac{c_{\alpha}}{|c_{\alpha}|} |\alpha\rangle = e^{i\text{Arg}(c_{\alpha})} |\alpha\rangle \in \mathcal{R}_{\alpha} \quad (3.1.35)$$

とわかる。つまり、射影測定を行って結果を確認すれば、その直後の系の物理的状態は測定結果に対応する物理的状態に確定する。これは状態の収縮-contraction などと呼ばれるが、測定結果を知った場合の測定値の事後確率分布が測定値を与えるものに確定することと同じである。このように公理3は、「物理的状態は測定を行った後でも、確率分布を与えるものとして解釈できる。」ということを保証する。

3.1.4 状態の時間発展

4つ目の公理は興味ある孤立系が変化していく状況の記述を可能にするものである。

公理その4

孤立系の対応する状態の時間発展は次のようにユニタリ演算子 $U(t', t)$ を用いて記述される。

$$|\psi(t')\rangle = U(t', t) |\psi(t)\rangle. \quad (3.1.36)$$

また、連続時間を扱うものとして、この公理を次のように改定してもよい。

閉じた物理系の状態の時間発展は次の Schrödinger 方程式で与えられる。

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H |\psi(t)\rangle. \quad (3.1.37)$$

このとき、 H はハミルトニアンと呼ばれる観測量であり、その固有値をエネルギーと呼ぶ。

ユニタリ演算子 $U(t', t)$ は時間発展演算子と呼ばれる。ユニタリ演算子は状態のノルムを変えない変換を与える。公理1'を踏まえるとこれは、閉じた物理系の時間発展は射線を射線に移すということを意味する。このように公理4は、「閉じた物理系の状態はいつでも、確率を与えるものとして解釈できる。」ということを保証する。ハミルトニアンを用いた時間発展を採用する場合、式(3.1.36)のユニタリ演算子は

$$U(t', t) = \exp[-i(t' - t)H] \quad (3.1.38)$$

で与えられる。連続時間の場合にはこちらを先に与えて公理としてもよい。重要な注意として、ハミルトニアンと同時に時間がここで定義されていることを意識したい。つまり、時間発展演算子による状態の変化を以て

して時間を定めている。ここが特殊相対性理論や、一般相対性理論を考慮した上で量子力学を見つめ直す際に極めて重要なところである。Newton の絶対時空間の世界では、時間は宇宙全体に適用される径数としてもよかったが、相対論の世界では時間は観測者毎に異なる概念である。公理 4 によって量子力学には、「時間を t として認識する観測者を定めたとき、その観測者は興味ある物理系に対応する状態の時間発展をどのように観るだろうか？」という問題を考えるための枠組みが備わる。

これまで公理を孤立系に限定して説明してきた。そのためハミルトニアンは時間依存しない。しかし現実的には、注目する系に対して外部から操作を加えることで、時間依存するハミルトニアンを考えることもできる。このように外部の存在を考慮するためには、5 つ目の公理を枠組みに加える必要がある。その場合にも外部系を含めた全体系は孤立系と見做せることを仮定する。孤立系を注目系と外部系に分けて考える場合に、外部系を無視して注目系の時間発展のみに着目すると、その時間発展演算子は一般にはユニタリでなくなる。このような場合でも、時間発展方程式を微分系で与える演算子をハミルトニアンと呼ぶことにしよう。するとこのハミルトニアンはエルミート演算子にすらならない。このような系を量子開放系と呼ぶ。

一方、注目する系のみを考えているのに、その系のハミルトニアンが時間依存して、かつ各時刻で自己共役演算子である状況を考えるのが有用な場合もある。これは実験室で注目系に対してゆっくり変化を加えていくような場合や、注目系が外部系に与える影響が無視できるような場合などがある。このように近似的に外部系への反作用が無視できて、外部系の影響を取り入れながらも注目系だけで議論が閉じるような系を閉鎖系ないし、実験系と呼ぶ。

ハミルトニアンが時間依存する形でかける場合には Schrödinger 方程式 (3.1.37) の解は

$$U(t', t) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_t^{t'} d\tau H(\tau) \right] \quad (3.1.39)$$

となる。ここで、 \mathcal{T} は時間順序積

$$\mathcal{T}(A_1(t_1) A_2(t_2) \cdots A_n(t_n)) := \sum_{i_k \in \mathfrak{S}_n} \chi(t_{i_1} > t_{i_2} > \cdots > t_{i_n}) A_{i_1}(t_{i_1}) A_{i_2}(t_{i_2}) \cdots A_{i_n}(t_{i_n}) \quad (3.1.40)$$

である。 $\chi(t_{i_1} > t_{i_2} > \cdots > t_{i_n})$ はある命題を P として、

$$\chi(P) = \begin{cases} 1 & : \text{命題 } P \text{ が真} \\ 0 & : \text{命題 } P \text{ が偽} \end{cases} \quad (3.1.41)$$

とする特性関数である。つまり、時間順序積は演算子を時間の引数について過去のものから順に右から左へ並べる規則を表す。

本論文で扱う系は注目系のみで議論が閉じる孤立系、または時間依存しない外場の影響を取り入れた閉鎖系と見做せる系であり、ハミルトニアンは時間依存しない。以上の公理 1-4 で、このような系を扱うための量子力学の枠組みは出揃った。

3 つの描像

さて、これまで状態が時間と共に変化するものとして公理を表した。しかし量子力学が観測量の測定値の確率分布を与えるものだという観点に立つと、状態が時間変化するのではなく、観測の方が時間変化すると考えて理論を構築してもよいとわかる。これらは単にもの見方：描像の違いであって、どちらも同じ量子力学の枠組みを与えると考え⁹。前者のような、状態が時間発展して観測量は時間発展しないという見方を Schrödinger 描像という。後者のように、観測量が時間発展して状態は時間発展しないという見方を

⁹同様に公理 1 と公理 1' のどちらを採用しても同じ量子力学と考える。また本稿では扱わないが、密度演算子による定式化も同じ量子力学を与える。密度演算子による議論は開放系を考える場合や、系に対して完全な記述ができない場合を考える際に便利である。

Heisenberg 描像という。このような等価な結果を与えるものの見方があるときには、便利なものの見方を選べばよい。ここでは上記の2つの描像と、相互作用描像という代表的な描像について説明しておく。

まず状態が時間発展する描像である Schrödinger 描像から始める。時刻 t での観測量 A の期待値 $\langle A \rangle_t$ は時刻 t での系の状態を $\psi(t) \in \mathcal{R}$ とするとき、

$$\langle A \rangle_t = \sum_{\alpha} \alpha \text{Pr}_t(\alpha) \equiv \langle \psi(t), \sum_{\alpha} \alpha \Pi_{\alpha} \psi(t) \rangle = \langle \psi(t), A\psi(t) \rangle \quad (3.1.42)$$

で与えられる。時刻 $t' > t$ での期待値は、公理 4 から

$$\langle A \rangle_{t'} = \langle \psi(t'), A\psi(t') \rangle = \langle U(t', t)\psi(t), AU(t', t)\psi(t) \rangle = \langle \psi(t), U^{\dagger}(t', t)AU(t', t)\psi(t) \rangle \quad (3.1.43)$$

となる。このように書き直すとあたかも、状態は時間不変なものであり、演算子が

$$A(t') = U^{\dagger}(t', t)A(t)U(t', t) \quad (3.1.44)$$

のように時間発展しているように見える。このような見方を Heisenberg 描像と呼ぶ。どの描像でものを考えるかを明記するために、Schrödinger 描像の演算子及び状態を

$$A^S, \psi_S(t) \equiv |\psi(t)\rangle_S \quad (3.1.45)$$

のように添字 S をつけて表し、Heisenberg の場合は同様に、

$$A^H(t), \Psi_H \equiv |\Psi\rangle_H \quad (3.1.46)$$

のように添字 H をつけて表すこともある¹⁰。時間発展の捉え方で描像が変わるので、当然だが時間発展を考える前の、ある基準の時刻ではこれらの区別は存在しない。上記の例では時刻 t が基準の時刻である。すなわち、

$$A^S = A^H(t), \psi_S(t) = \Psi_H, |\psi(t)\rangle_S = |\Psi\rangle_H \quad (3.1.47)$$

である。また、期待値は描像で変わらないから、Heisenberg 描像での期待値も式 (3.1.42) と等しく、

$$\langle A^H(\tau) \rangle_H = \langle \Psi_H, A^H(\tau)\Psi_H \rangle = \langle A \rangle_{\tau} \quad (3.1.48)$$

である。今後時刻 t における A の期待値は描像を明示せず単に $\langle A(t) \rangle$ で表す。

基準の時刻を $t = 0$ と取り直してまとめると Schrödinger 方程式 (3.1.37) は、

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle_S}{dt} = H |\psi(t)\rangle_S \iff |\psi(t)\rangle_S = \exp[-iHt] |\psi(0)\rangle_S =: U(t) |\psi(0)\rangle_S \quad (3.1.49)$$

となる。基準の時刻で描像に違いがないことから、各描像での状態には次の対応がある。

$$|\psi(t)\rangle_S = U(t) |\Psi\rangle_H. \quad (3.1.50)$$

Heisenberg 描像での時間発展は基準の時刻を $t = 0$ と取り直してまとめると、

$$A^H(t) = U^{\dagger}(t)A^H(0)U(t) = U^{\dagger}(t)A^S U(t) \iff i \frac{dA^H(t)}{dt} = [A^H(t), H] \quad (3.1.51)$$

となる。ここで、

$$[A, B] := AB - BA \quad (3.1.52)$$

として交換子 $[,]$ を定義した。この微分方程式は Heisenberg 方程式と呼ばれる。 H 、それに応じて $U(t)$ は、Schrödinger 描像でも Heisenberg 描像でも等しいため、H や S の添字は使わない。これは閉鎖系でのハミルトニアン $H(t)$ を用いるときでも同様である。

¹⁰慣習的に Schrödinger 描像では ψ などの小文字を使い、Heisenberg 描像では Ψ などの大文字を使う場合が多い。

最後に、相互作用描像について紹介する。これはある非摂動的によくわかっている状態が、摂動的な相互作用を受けて変化していく様子を見るという描像である。ここでハミルトニアンを仮に

$$H = H_0^H(t) + V^H(t) \quad (3.1.53)$$

のように分解する。ここで、 H_0 は非摂動的によくわかっているハミルトニアンと同型のものとし、 V はそこからのずれを与える相互作用としたい。そこで H_0 を非摂動ハミルトニアン、 V を相互作用ハミルトニアン、または単に相互作用と呼ぶ。非摂動ハミルトニアンによる時間発展演算子として $U_0(t)$ を

$$U_0(t) := \exp[-itH_0^S] \quad (3.1.54)$$

と定める。このとき、添字 I をつけて表される相互作用描像は、Schrödinger 描像や Heisenberg 描像と次のような関係を持つように定義される。

$$|\Psi(t)\rangle_I := \Omega(t) |\Psi\rangle_H, \quad \Omega(t) := U_0^\dagger(t)U(t), \quad (3.1.55)$$

$$A^I(t) := U_0^\dagger(t)A^S(0)U_0(t) = \Omega(t)A^H(t)\Omega^\dagger(t). \quad (3.1.56)$$

ここで新しく定義した時間発展演算子 $U_0(t), \Omega(t)$ の時間微分を取るとそれぞれ、

$$i\partial_t U_0(t) = H_0^S U_0(t) = U_0(t)H_0^I(t), \quad (3.1.57)$$

$$i\partial_t \Omega(t) = V^I(t)\Omega(t) \quad (3.1.58)$$

が得られる。これを使えば式 (3.1.56) から、相互作用描像の演算子が H_0^I による Heisenberg 方程式

$$i\partial_t A^I(t) = [A^I(t), H_0^I(t)] \quad (3.1.59)$$

の解となることがわかる。したがって、相互作用描像での演算子は非摂動ハミルトニアンに従う理論での演算子のように見做せる。また、時間発展演算子 $\Omega(t)$ は式 (3.1.58) から形式的に

$$\Omega(t) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_0^t d\tau V^I(\tau) \right] \quad (3.1.60)$$

で与えられることがわかる。このように相互作用描像での状態の時間発展は、相互作用ハミルトニアンが担うと考えてよい。また、あまり使わないが、

$$U_0(t) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_0^t d\tau H_0^I(\tau) \right] \quad (3.1.61)$$

と書けることも式 (3.1.57) からわかる。

非摂動的によくわかっているものはそう多くない。ソリトンなどを考えることもできるが、人間の感覚によく馴染みがあるのは、粒子という描像だろう。そこで非摂動ハミルトニアンとして、自由粒子ハミルトニアンを考えることが多い。本論の言葉遣いとして、**非摂動ハミルトニアンとして自由粒子ハミルトニアンを考えたときの相互作用描像を粒子描像と呼ぶ。**

相互作用描像とはすなわち、非摂動部分 (H_0) が、摂動的な相互作用 V によってどのように振る舞うかを見る現象の捉え方のことであった。従ってこの描像は本質的に摂動的な見方であり、この描像では非摂動的な部分の理解が不可欠である。

3.1.5 複合系：部分と全体

最後に複合系に関する公理を与える。公理 4 で触れたように実験は、「外部から注目する系に対して操作を与え、注目する系の振る舞いがどのように変わるかを見る。」というものだ。またこの「見る」という行為も、測定器を注目系の外部から相互作用させて、その測定器の持つ何かしらの物理量を観測することで為される。

このように、厳密な意味で物理学の理論を実験によって検証しようとする際には、外部の存在を考慮することは欠かせない視点である¹¹。公理 5 はこのような視点を量子力学の枠組みに取り入れるものである。

公理その 5

複数の物理系からなる複合物理系の Hilbert 空間は、各物理系の Hilbert 空間のテンソル積である。つまり n 個の物理系があって、それぞれの Hilbert 空間を $\mathcal{H}_i, i = 1, 2, \dots, n$ とすると、複合系の Hilbert 空間 \mathcal{H} は、次のように表される。

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i. \quad (3.1.62)$$

したがって、 \mathcal{H}_i の正規直交基底を $\{e_{(i)}^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ とすると次が成り立つ。

$$\forall \Psi \in \mathcal{H}, \exists C_{m_1 \dots m_n} \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad \Psi = C_{m_1 \dots m_n} e_{(1)}^{m_1} \cdots e_{(n)}^{m_n}. \quad (3.1.63)$$

また、各物理系の状態が $\Psi_{(i)} = c_m^{(i)} e_{(i)}^m \in \mathcal{H}_i$ で書ける場合には全系の複合状態はそれらの直和でかける^a。つまり、上記の定数 $C_{m_1 \dots m_n}$ はこのとき次のように表せる。

$$C_{m_1 \dots m_n} = c_{m_1}^{(1)} c_{m_2}^{(2)} \cdots c_{m_n}^{(n)}. \quad (3.1.64)$$

^a直和は直積と言ってもよい。

この公理から複合物理系の Hilbert 空間も線型空間として定義できる。すなわち、公理 5 は**複合物理系に対しても重ね合わせの原理が成立する**ことを保証する。公理 5 によって全体系は孤立系とみなせて、これまでの公理をそのまま仮定できる。式 (3.1.64) のように状態が各物理系の状態の直和で表されるとき、その状態を可分状態-separable state と呼ぶ。一方、このように表せない状態を量子もつれ状態-entangled state と呼ぶ。

系の Hilbert 空間の次元が高くなれば、複合系に対しては量子もつれ状態の自由度が可分状態と比較して遙かに大きくなる。もつれ状態は量子力学の特徴の 1 つであり、豊かな構造を持つが、本稿では立ち入らない。

3.1.6 簡単なまとめ

ここまでで量子力学の公理が出揃った。量子力学では測定される物理量が観測量と呼ばれる Hilbert 空間上の自己共役演算子として定義され、系は状態と呼ばれる Hilbert 空間の元で表される。これら観測量と系に対応する状態から、測定結果の確率分布が得られるというのが量子力学という理論の枠組みだ。状態は測定や、適当に操作を加えるなどの時間発展を経ても確率分布を与えるものであり続ける。必ずしも系の全てを測定できる状況を作ることはできないかもしれないが、可能な測定の組を与えればその測定で測定可能な系の部分と、そうでない部分の複合系に全体の系が分割される。この分解は測定系の Hilbert 空間と、その直交補空間への分解であり、全体系の状態が住む Hilbert 空間はこれらの Hilbert 空間のテンソル積空間と考えてよい。

以下では特別に注意する場合を除いて知りたい系が複合系であるとは考えない。知りたい系についての測定がいつでも可能であるとまずは仮定して話を進める。このような考え方の破綻は、予言能力が破綻することで自然が教えてくれる。

¹¹これは本来は量子系に限らず古典系にも当てはまることだが、古典系では測定による作用・反作用が無視しやすいこと、理想的な測定という概念が受け入れられやすいことなどから、量子系と比較すると理学的な方面では気にしないことも多い。しかし工学の制御理論などではよく取り扱われているし、近頃は Maxwell の悪魔などの情報理論的な文脈で、理学的方面での注目が高まっている。量子系でも、測定系を無視できる理想的な状況として近似できると仮定して、注目系を孤立系と見做すことも多い。

3.2 自由粒子の理論

注目する系の状態の時間発展に興味を持つことは多々ある。しかし一般のハミルトニアンに対して時間発展を時々刻々と追っていくのは非常に難しく、ほとんど不可能な場合が多い。しかし幸運にも、粒子という描像が微視的な世界を覗く際にも通用すると期待できる状況は確かにある。その代表的な例が衝突実験の結果を予測・説明する散乱問題である。

古典的な散乱問題では、標的に粒子を衝突させ、その応答を調べて標的の性質を調べる。衝突するとはすなわち、互いに相互作用をするということである。相互作用が十分に局所的なものであれば、量子力学でもこの描像は同様であると期待できる。このような粒子の描像が有効な場面では、粒子の時間発展として注目系の状態を摂動論的に取り扱うことが可能だ。

この節では、散乱問題の概要を掴む準備として、自由粒子の性質について調べる。特に自由粒子の波動関数や、それに作用する演算子の漸近的振る舞いを理解することが、散乱問題を定式化する上で重要となる。

3.2.1 量子力学における粒子の模型

ここからの議論はあまり次元に依らないものなので、空間次元を D として考える。粒子は位置測定と運動量測定が可能で、それぞれの観測量は位置演算子

$$\vec{Q} = \int d^D x \vec{x} |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|, \quad \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \delta^D(\vec{x} - \vec{y}), \quad \mathbf{Q}^i |\vec{x}\rangle = x^i |\vec{x}\rangle \quad (3.2.1)$$

と運動量演算子

$$\vec{P} = \int d^D p \vec{p} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|, \quad \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle = \delta^D(\vec{p} - \vec{q}), \quad \mathbf{P}_i |\vec{p}\rangle = p_i |\vec{p}\rangle \quad (3.2.2)$$

で与えられるような対象である。位置固有状態と運動量固有状態は直交せず、

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{x}] \quad (3.2.3)$$

となる。このとき、交換関係

$$[\mathbf{Q}^i, \mathbf{P}_j] = i\delta_j^i, \quad [\mathbf{Q}^i, \mathbf{Q}^j] = 0 = [\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j] \quad (3.2.4)$$

を満たす。

位置測定、または運動量測定によって状態を表すことを決めると、Hilbert 空間に D 次元 Euclid 空間上の L^2 関数空間という肉付けが与えられる¹²。すなわち、Hilbert 空間 \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R}^D) := \left\{ f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_2 := \left[\int |f(\vec{x})|^2 d^D x \right]^{1/2} < \infty \right\} \quad (3.2.5)$$

で表せる。 $\|f\|_2$ は L^2 ノルムと呼ばれるものであるが、これを使う場合は単に $\|f\|$ とかく。このとき、内積は式 (3.1.4) から、

$$\langle f, g \rangle = \int d^D x f(\vec{x}) \overline{g(\vec{x})} \quad (3.2.6)$$

で与えられる。位置空間で測定しようが運動量空間で測定しようが数学的には変わらないが、物理的にはこれらは全く異なる対象である。そこで、位置空間上の L^2 関数空間としての Hilbert 空間を $L^2(\mathbb{R}^D)$ で表し、運動量空間上の L^2 関数空間としての Hilbert 空間を $\widetilde{L}^2(\mathbb{R}^D)$ と書いて区別する。このように Hilbert 空間に表

¹²2 乗可積分関数とも呼ばれる。

現を与えたとき、その元を波動関数と呼ぶ。特に、 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^D)$ を単に波動関数と呼ぶことも多い。ここでは波動関数の空間表示、運動量表示などと名付けておこう。このとき、式 (3.2.4) は $f \in L^2(\mathbb{R}^D)$ に対して

$$[\mathbf{Q}^i f](\vec{x}) = x^i f(\vec{x}) \quad (3.2.7)$$

$$[\mathbf{P}_i f](\vec{x}) = -i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) \quad (3.2.8)$$

を意味する。

式 (3.2.7) のように

$$[Af](x) = a(x)f(x) \quad (3.2.9)$$

を与える演算子 A を関数 $a(x)$ の乗算演算子-multiplication operator と呼ぶ。演算子 A と関数 a を記法の上で区別しないことも多い。例えば、 $A(\mathbf{Q}) \equiv A(x)$ などと濫用する場合がある。

また、 $f \in L^2(\mathbb{R}^D)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F} : f \in L^2(\mathbb{R}^D) \mapsto \mathcal{F}f =: \tilde{f} \in \widetilde{L}^2(\mathbb{R}^D)$ は

$$[\mathcal{F}f](\vec{p}) \equiv \tilde{f}(\vec{p}) := (2\pi)^{-D/2} \int d^D x p f(x) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (3.2.10)$$

によって定められる¹³。このとき、

$$[\mathbf{P}_i \tilde{f}](\vec{p}) = p_i \tilde{f}(\vec{p}) \quad (3.2.11)$$

が成り立つ。このように Fourier 変換は微分演算子を乗算演算子に変換する。

波動関数の導入について物理でよく用いられる記法についても確認しよう。その都度便利な方を用いる。状態を位置演算子の基底を用いて

$$\int d^D x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| \cdot |\psi\rangle_S = \int d^D x \psi(\vec{x}) |\vec{x}\rangle \quad (3.2.12)$$

と表す。すなわち、波動関数の空間表示を

$$\psi(\vec{x}) = \langle x|\psi\rangle_S \quad (3.2.13)$$

とする。位置演算子は乗算演算子

$$\mathbf{Q}^i : \psi(\vec{x}) \mapsto x^i \psi(\vec{x}) \quad (3.2.14)$$

として振る舞う。式 (3.2.4) は、運動量演算子が微分演算子

$$\mathbf{P}_i : \psi(\vec{x}) \mapsto -i \frac{\partial}{\partial x^i} \psi(\vec{x}) \quad (3.2.15)$$

として振る舞うことを意味する。

空間波動関数の Fourier 変換は

$$\tilde{\psi}(\vec{p}) := \int \frac{d^D x}{(2\pi)^{D/2}} \psi(\vec{x}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \langle p|\psi\rangle_S \quad (3.2.16)$$

の関係で結ばれる。つまり、状態を運動量基底で表す際の係数が波動関数の運動量空間表示を与える¹⁴。

¹³Fourier 変換自体は $f \in L^1$ に対して定義できる。

¹⁴当然運動量空間では位置演算子が微分演算子となる。微分の引数を強調する際には $\frac{\partial}{\partial_i}$ や $\vec{\nabla}_p$ などと略記する。

3.2.2 1 粒子状態の動力学

波動関数を空間表示した際の時間発展の漸近的振る舞いについて調べよう。自由粒子のハミルトニアンは

$$H_0 = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \quad (3.2.17)$$

と表せるから、波動関数の時間発展は Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) \quad (3.2.18)$$

に従う。この解は

$$\left[i \partial_t + \frac{1}{2m} \vec{\nabla}_x^2 \right] K_F(\vec{x}, \vec{y}; t) = 0 \quad (3.2.19)$$

$$K_F(\vec{x}, \vec{y}; 0) = \delta^D(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.2.20)$$

を満たす Feynman 核と呼ばれる関数を用いて形式的に

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d^D y K_F(\vec{x}, \vec{y}; t) \psi(\vec{y}) \quad (3.2.21)$$

と表せる。ここで、時刻 $t = 0$ での波動関数の空間表示を $\psi(\vec{x})$ とした。Feynman 核は積分表示で

$$K_F(\vec{x}, \vec{y}; t) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \exp \left[-i \frac{\vec{p}^2}{2m} t + i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \right] \quad (3.2.22)$$

と表せる。Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (3.2.23)$$

から Feynman 核は

$$\left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{D/2} \exp \left[i \frac{m |\vec{x} - \vec{y}|^2}{2t} \right] \quad (3.2.24)$$

で具体的に与えられることもわかる¹⁵。以上の事実から、自由粒子状態の波動関数は

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= \int d^D y \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \exp \left[-i \frac{\vec{p}^2}{2m} t + i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \right] \psi(\vec{y}) \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D/2}} \exp \left[-it \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{p} \cdot \frac{\vec{x}}{t} \right) \right] \tilde{\psi}(\vec{p}), \quad \tilde{\psi}(\vec{p}) := \int \frac{d^D y}{(2\pi)^{D/2}} \psi(\vec{y}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{y}} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

で与えられる。位相因子の時間の係数をエネルギー関数

$$\mathcal{E}(\vec{p}; \vec{x}) := \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{p} \cdot \frac{\vec{x}}{t} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{m\vec{x}}{t} \right)^2 - \frac{\vec{x}^2}{2mt^2} \quad (3.2.26)$$

とすると、

$$\vec{p}_0 := m \frac{\vec{x}}{t} =: m \vec{v}_0 \quad (3.2.27)$$

のときエネルギー関数は最小となる。

$$\vec{q} := \vec{p} + \vec{p}_0 \quad (3.2.28)$$

¹⁵正確には Fresnel 積分を使って α が純虚数でも式 (3.2.23) が正当化される。また、 $\alpha = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ のとき Gauss 積分が式 (3.2.23) で表せる条件は $a > 0$ である。

を定めて $\vec{q} = \vec{0}$ 周りで展開すると、

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{i\frac{m\vec{v}^2}{2}t} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^{D/2}} e^{-i\frac{\vec{q}^2}{2m}t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n \tilde{\psi}}{dp^{i_1} dp^{i_2} \dots dp^{i_{2n}}} \right) \Big|_{\vec{p}=\vec{p}_0} q^{i_1} q^{i_2} \dots q^{i_{2n}} \quad (3.2.29)$$

が得られる。ここで奇関数は落とした。

$$I_{2n}(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-\alpha x^2} = -\frac{\partial^n I_{2(n-1)}(\alpha)}{\partial \alpha^n} \quad (3.2.30)$$

及び式 (3.2.23) から、

$$I_{2n}(\alpha) = \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (3.2.31)$$

がわかるので、

$$\tilde{\psi}_{i_1 i_2 \dots i_{2n}}(\vec{p}_0) := \left(\frac{d^n \tilde{\psi}}{dp^{i_1} dp^{i_2} \dots dp^{i_{2n}}} \right) \Big|_{\vec{p}=\vec{p}_0} \quad (3.2.32)$$

とにおいて $\vec{u} = \sqrt{\frac{|t|}{2m}} \vec{q}$ の変数変換を行えば、

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{i\frac{m\vec{v}^2}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2m}{|t|} \right)^{D/2+n} \tilde{\psi}_{i_1 i_2 \dots i_{2n}}(\vec{p}_0) \int \frac{d^D u}{(2\pi)^{D/2}} u^{i_1} u^{i_2} \dots u^{i_{2n}} e^{-i\vec{u}^2} \quad (3.2.33)$$

が得られる。漸近的な振る舞いを調べるために、 $|t|$ が大きいところを見ると、

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{i\frac{m\vec{v}^2}{2}t} \left(\frac{m}{i|t|} \right)^{D/2} \tilde{\psi}(\vec{p}_0) [1 + \mathcal{O}(1/|t|)] \quad (3.2.34)$$

と評価できる。したがって時刻 $t = 0$ で粒子的、つまりある位置に局在しているような波動関数に対応する状態は、 $|t|$ が大きい領域で、運動量 $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0 = \frac{m}{t}\vec{x}$ を持つ平面波がその位置から十分に遠いところに存在するような状態として見做せる。その運動量と位置の関係は t の符号で決まっており、充分遠い過去では遠くから入射してくる平面波のように振る舞い、充分遠い未来では遠くへ放射する平面波とのように振る舞う。

多自由粒子状態

相互作用しない自由粒子が N 個あるような状態は単に直和状態で表せる。これは系のハミルトニアンが

$$H = \sum_{n=1}^N H_n, \quad H_n := \frac{1}{2m_n} \vec{P}_n^2 \quad (3.2.35)$$

と単に和で表せることによる。つまり、 N 粒子状態は n 番目の粒子の Hilbert 空間を \mathcal{H}_n として、

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &\equiv |\psi_1 \psi_2 \dots \psi_N(t)\rangle = |\psi_1(t)\rangle |\psi_2(t)\rangle \dots |\psi_N(t)\rangle \\ \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) &= \psi_1(\vec{x}_1, t) \psi_2(\vec{x}_2, t) \dots \psi_N(\vec{x}_N, t) \\ \psi_n(\vec{x}_n, t) &\in L^2(\mathbb{R}^D, \mathcal{H}_n), \quad \psi_n(\vec{x}_n, t) = \langle x_n | \psi_n(t) \rangle_S, \quad |\psi_n(t)\rangle_S \in \mathcal{H}_n \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

と表せる。

3.3 状態の分類

前節で、時刻 $t = 0$ である空間領域に局在するような状態は、 t が十分に大きい遠い過去/未来ではそれぞれその位置から充分遠くの入射/放射する平面波と見做せることを見た。粒子たちの相互作用が充分局所的なものであれば、充分遠い過去/未来ではその相互作用が無視できて、式 (3.2.36) のような多粒子自由状態と見做せるだろう。粒子描像で散乱の状況は、充分遠くの過去 $t = t_-$ で標的に向かっていく N 個の粒子に対応

する、運動量 $\{\vec{p}_n\}$ を持った平面波を入射し、時刻 $t = 0$ 付近で相互作用を受けて散乱し、充分遠くの未来 $t = t_+$ で放射している N' 個の粒子に対応する運動量 $\{\vec{p}_{n'}\}$ を持った平面波を検出するように見える。

この節では理論の Hilbert 空間の中からこのような散乱の描像に適った状態を特定することを目指す。そのために必要な状態や状況の分類を次の小節で行う。

3.3.1 ハミルトニアン固有空間

自己共役演算子であるハミルトニアン H の固有空間は

$$\text{dom}H \equiv \mathcal{H}(H) = \mathcal{H}_p(H) \oplus \mathcal{H}_c(H) \quad (3.3.1)$$

と直和分解される。ここで、 \mathcal{H}_p は点スペクトル部分と呼ばれ、離散固有値を持つ状態の属する Hilbert 空間である。つまりこの空間においてハミルトニアンは

$$H \upharpoonright_{\mathcal{H}_p(H)} := H_p = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \Pi_n, \quad E_n \in \mathbb{R} \quad (3.3.2)$$

とスペクトル分解される。また、 \mathcal{H}_c は連続スペクトル部分と呼ばれ、連続固有値を持つ状態の属する Hilbert 空間である。連続スペクトル部分はさらに

$$\mathcal{H}_c(H) = \mathcal{H}_{ac}(H) \oplus \mathcal{H}_{sc}(H), \quad (3.3.3)$$

と直和分解できる。 \mathcal{H}_{ac} は絶対連続スペクトル部分であり、この空間においてハミルトニアンは

$$H \upharpoonright_{\mathcal{H}_{ac}(H)} := H_{ac} = \int_{\mathcal{A}} d\alpha E_\alpha \Pi_\alpha, \quad E_\alpha \in \mathbb{R} \quad (3.3.4)$$

とスペクトル分解される。つまり、エネルギー密度が定義可能となる状態の属する Hilbert 空間といえる。このスペクトル分解を

$$H_{ac} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha \Pi_\alpha \quad (3.3.5)$$

と表す場合もある。 $\mathcal{H}_{sc}(H)$ は特異連続スペクトル部分と呼ばれ、固有値が連続だが、エネルギー密度が定義できない状態の属する Hilbert 空間である¹⁶。 $\mathcal{H}_{sc}(H) = \emptyset$ を仮定すれば、上記の記法を用いてハミルトニアンは $H = \sum_{\alpha} E_\alpha \Pi_\alpha$ とスペクトル分解できる。公理2に書いた式(3.1.9)は厳密にはこの記法に基づいている。物理で扱う標準的な状況では $\mathcal{H}_{sc} = \emptyset$ であるため、通常 $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{ac}$ とされる。しかし準結晶を記述する模型などで現れることもあり、全く非物理的というわけではないことに注意 [102]。この小節では分類のために必要な場合は脚注に表記する。

2つほど例を見てみよう。自由粒子ハミルトニアン(3.2.17)は連続スペクトル部分だけを持ち、

$$H_0 = \int_0^\infty dE E \Pi_E \quad (3.3.7)$$

とスペクトル分解できる。

もう1つの例として、Coulomb 相互作用を持つハミルトニアン

$$H^C := H_0(\vec{P}) + V_C(\vec{Q}), \quad V_C(\vec{Q}) := C|\vec{Q}|^{-1} \quad (3.3.8)$$

¹⁶固有関数の属する空間

$$\mathcal{N}_{sc} := \{f \in \mathcal{H} \mid H \upharpoonright_{\mathcal{H}_{sc}(H)} := H_{sc} f \neq 0\} \quad (3.3.6)$$

がヌル集合、すなわち、測度 μ が $\mu(\mathcal{N}_{sc}) = 0$ となって、かつ、スペクトルが連続であるようなものである。例えば、Cantor 関数(悪魔の階段関数)を思い浮かべるとよい。

の場合を見てみる。これは標的が充分大きく、外場として Coulomb 相互作用 $V_C(\vec{Q})$ を与えるものと見做せる状況に対応する。このような相互作用はポテンシャルとも呼ばれる。このハミルトニアンは

$$H^C = \begin{cases} \int_0^\infty dE E \Pi_E =: H_{ac}^C & C > 0 \\ H_{ac}^C + H_p^C, H_p^C := - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{mC^2}{2n^2} \Pi_n & C < 0 \end{cases} \quad (3.3.9)$$

と分解できる。

3.3.2 散乱状態と束縛状態

充分遠くの過去に標的から離れた位置から入射したのち、標的との相互作用を経て、充分遠い未来では標的から離れた位置で放射していると見做せる状況が、衝突実験で検証可能な状況であろう。実験結果と理論を照らし合わせるためには、理論側では入射される粒子のことはもちろん、標的のことも充分よく知っている必要があるだろう¹⁷。このため標的の周りにすでに物質が束縛されている状況は分離したい。また、検出機まで到達しないような状況も実験結果に反映されないから分離するべきだろう。ここではそのような束縛状態と、衝突実験の結果に反映されるような散乱状態を定義し、区別することを試みる。

特性関数を使って半径 R の球状領域への局所化関数

$$[\chi_R(\vec{Q})f](\vec{x}) := \chi(|\vec{x}| \leq R)f(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & |\vec{x}| \leq R \\ 0 & |\vec{x}| > R \end{cases} \quad (3.3.10)$$

を定義する¹⁸。ハミルトニアン H の系で衝突実験の結果を説明する状態の属する Hilbert 空間は、

$$\mathcal{M}_\infty^\pm(H) := \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| [\chi_R(\vec{Q})U(t)f](\vec{x}) \right\| = 0, \forall R \in \mathbb{R}_+ \right\} \quad (3.3.11)$$

と考えてよいだろう。つまり、充分遠い未来/過去では有限領域の外にいと見做せるような状態を散乱に寄与する状態であると考え。この Hilbert 空間 $\mathcal{M}_\infty^\pm(H)$ を未来/過去の散乱空間と名付ける。また、 $\mathcal{M}_\infty^-(H)$ の元を入射状態-in state と呼び、 $\mathcal{M}_\infty^+(H)$ の元を放射状態-out state と呼ぶ。このように定義すると、自由粒子系の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0 := \text{dom}H_0$ は $\mathcal{H}_0 = \mathcal{M}_\infty^-(H_0) = \mathcal{M}_\infty^+(H_0)$ となることが知られている。これは前節で調べた自由粒子状態の振る舞いと対応している。

次に、束縛状態の属する Hilbert 空間として

$$\mathcal{M}_0^\pm := \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}_\pm} \left\| [(I - \chi_R(\vec{Q}))U(t)f](\vec{x}) \right\| = 0 \right\} \quad (3.3.12)$$

を定める。 \mathcal{M}_0^+ は $t \geq 0$ のいずれかの時刻において有限領域から抜け出せなくなるような状態が属する Hilbert 空間であり、 \mathcal{M}_0^- は $t \leq 0$ のいずれかの時刻において有限領域に束縛されていたような状態が属する Hilbert 空間である。 \mathcal{M}_0^\pm を未来/過去の束縛空間と名付ける。また、

$$\mathcal{M}_0(H) := \mathcal{M}_0^+(H) \cap \mathcal{M}_0^-(H), \mathcal{M}_\infty(H) := \mathcal{M}_\infty^+(H) \cap \mathcal{M}_\infty^-(H) \quad (3.3.13)$$

を定義しておく。

これらの空間には次の関係がある。

¹⁷その理論が有効な範囲でそれぞれの対象を分離できることが理論の前提ということ。

¹⁸球にしたのは簡略化のためであり、必要に応じて形状を与えたり原点を変更するように一般化してもよい。標的が外場として相互作用を与えるポテンシャル問題を考える場合には、標的が原点にいてこの局所化関数を使えば充分だ。

直交関係

散乱空間と束縛空間は Hilbert 空間 \mathcal{H} の部分空間でそれぞれ直交関係にある。つまり、

$$\mathcal{M}_0^+(H) \perp \mathcal{M}_\infty^+(H), \mathcal{M}_0^-(H) \perp \mathcal{M}_\infty^-(H), \mathcal{M}_0(H) \perp \mathcal{M}_\infty^\pm(H). \quad (3.3.14)$$

また、これらの空間はハミルトニアン H の点スペクトル部分や連続スペクトル部分と次の関係を満たす。

$$\mathcal{H}_p(H) \subseteq \mathcal{M}_0(H), \mathcal{M}_\infty^\pm(H) \subseteq \mathcal{H}_{ac}(H). \quad (3.3.15)$$

これらの空間のはみ出ている部分は実はどちらも吸収状態と呼ばれる状態が属する空間

$$\mathcal{M}_{\text{abs}}^\pm(H) := \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| \left[(I - \chi_R(\vec{Q})) U(t)f \right] (\vec{x}) \right\| = 0, \forall R \in \mathbb{R}_+ \right\} \quad (3.3.16)$$

が担う。すなわち、

$$\mathcal{M}_0^\pm(H) = \mathcal{H}_p(H) \oplus \mathcal{M}_{\text{abs}}^\pm(H), \quad \mathcal{H}_c(H) = \mathcal{M}_\infty^\pm(H) \oplus \mathcal{M}_{\text{abs}}^\pm(H) \quad (3.3.17)$$

が成り立つ。吸収状態は、たとえば相互作用が原点で非常に特異的な振る舞いをする場合に、波動関数が時間と共に原点付近に限りなく近く局在していくような状態である。このとき運動量の期待値を考えると、その大きさは時間と共に大きくなって発散する。吸収状態が現れるような状況は、物理的には何らかの仮定が破綻する、有効理論の限界と考えるべきだろう。これを非物理的な状態として除外すれば、次の関係を満たす。

散乱空間・束縛空間とハミルトニアンの固有空間の関係

$$\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}_p(H), \quad \mathcal{M}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_{ac}(H) \quad (3.3.18)$$

$\mathcal{M}_{\text{abs}}^\pm = \emptyset$ は理論の前提として課すことにして、式 (3.3.18) が成り立つことを認めよう¹⁹。

以上の事実から、このように Hilbert 空間を分類すると、散乱問題は入射状態 $\Psi^- \in \mathcal{M}_\infty^-(H)$ から放射状態 $\Psi^+ \in \mathcal{M}_\infty^+(H)$ という状態遷移を扱う問題として定式化できる²⁰。

3.3.3 漸近自由粒子状態

次に、ハミルトニアン H を持つ系の状態が漸近的に自由粒子と見做せるということの定式化を試みる。この仮定は粒子描像で散乱問題が扱えるという期待の根拠となるものであるから、この仮定を定式化することでその是非を問うことが可能となる。

ハミルトニアン H を持つ系の状態が漸近的に自由粒子と見做せるということを、ここでは $t \rightarrow \pm\infty$ の極限で、状態がノルムの下で自由粒子状態に収束することだと考えてみる。

漸近自由粒子状態の定義

系の状態 $\Psi_H \in \mathcal{H}$ の漸近状態が自由粒子状態 $\Phi_H \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{M}_\infty(H_0)$ であるとは、

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|\Psi_I(t) - \Phi_H\| = 0 \quad (3.3.21)$$

が成り立つことをいう。このとき系の状態は漸近的に自由粒子状態と見做せる。

¹⁹実際、 $\mathcal{M}_{\text{abs}}^\pm \neq \emptyset$ の例は人工的なまでに特異的な相互作用の例しか知らない [103]。

²⁰より厳密には、 $\mathcal{H}_{sc}(H) \neq \emptyset$ の場合

$$\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm := \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} dt \|\chi_R(\vec{Q}) U(t)f\| = 0, \forall R \in \mathbb{R}_+ \right\} \quad (3.3.19)$$

を定めて、式 (3.3.14)、および式 (3.3.17) の \mathcal{M}_∞^\pm は $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm$ に変更する必要がある。 $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm$ と \mathcal{M}_∞^\pm は

$$\mathcal{M}_\infty^\pm(H) \subseteq \bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H), \mathcal{M}_\infty^-(H) \subseteq \bar{\mathcal{M}}_\infty^-(H) \quad (3.3.20)$$

の関係がある。また、式 (3.3.18) および式 (3.3.15) はそれぞれ、 $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) \subseteq \mathcal{H}_c(H)$, $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_c(H)$ に変更される。

この命題は時間発展演算子の等長性から以下の命題とも同値である。

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|\Psi_S(t) - \Phi_S(t)\| = 0, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|\Psi_H - \Omega^\dagger(t)\Phi_H\| = 0. \quad (3.3.22)$$

このように状態のノルムの下で収束することを強収束するといひ、

$$\Psi_H = s\text{-}\lim_{|t| \rightarrow \infty} \Omega^\dagger(t)\Phi_H, \quad \Phi_H = s\text{-}\lim_{|t| \rightarrow \infty} \Omega(t)\Psi_H \quad (3.3.23)$$

などと表す。 $s\text{-}\lim$ の記号を強極限と呼ぶ。そこで、漸近自由粒子状態の属する空間として

$$\mathcal{H}_\infty^\pm := \left\{ s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega^\dagger(t)\Phi \mid \Phi \in \mathcal{M}_\infty(H_0) \right\} \quad (3.3.24)$$

を定めよう。 \mathcal{H}_∞^\pm を未来/過去漸近自由粒子空間と名付け、 \mathcal{H}_∞^\pm の元を未来/過去漸近粒子状態と名付ける^{21,22}。

$\Phi^\pm \in \mathcal{H}_\infty^\pm$ は定義されていれば一意である。これを示そう。 $\Phi_n^\pm \in \mathcal{H}_\infty^\pm, n = 1, 2$ とすると、

$$\begin{aligned} \|\Phi_1^\pm - \Phi_2^\pm\| &= \|\Phi_1^\pm - \Omega^\dagger(t)\Phi - (\Phi_2^\pm - \Omega^\dagger(t)\Phi)\| \\ &\leq \|\Phi_1^\pm - \Omega^\dagger(t)\Phi\| + \|\Phi_2^\pm - \Omega^\dagger(t)\Phi\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

が従う。ノルムの正定値性と Heisenberg 表示での状態が時間依存しないことからこれは

$$\|\Phi_1^\pm - \Phi_2^\pm\| = 0$$

を意味する。□

この議論から、 $\mathcal{H}_\infty^\pm \neq \emptyset$ のとき、つまり $\Phi \in \mathcal{M}_\infty(H_0)$ に対して $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega^\dagger(t)\Phi$ が存在するなら

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| \Omega_\pm^\dagger \Phi - \Omega^\dagger(t)\Phi \right\| = 0 \quad (3.3.25)$$

となる Ω_\pm^\dagger が唯一定まることがわかる。このように演算子を作用させた状態がノルムのもとで収束することを演算子が強収束するといひ、

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega^\dagger(t) = \Omega_\pm^\dagger \quad (3.3.26)$$

で表す。演算子 Ω_\pm^\dagger が存在するとき、これを Møller 演算子と呼ぶ²³。 Ω_\pm^\dagger を使えば、未来/過去漸近自由粒子空間は

$$\mathcal{H}_\infty^\pm = \Omega_\pm^\dagger \mathcal{M}_\infty(H_0). \quad (3.3.27)$$

とかける。このとき、 Ω_\pm^\dagger は $\mathcal{M}_\infty(H_0)$ から \mathcal{H}_∞^\pm への単射を与える。

3.3.4 Møller 演算子

ここでは Møller 演算子が存在すると仮定して、その性質を調べる。この小節の内容はやや数学的になる。いくつかの言葉の定義や証明は適宜補遺を参考にしてもらえるとよい。

Møller 演算子は部分等長演算子-partial isometry であり、かつ繋絡演算子-intertwiner であるという非常に重要な性質がある。これらの定義について説明する。

²¹ H_0 を単に非摂動ハミルトニアンと考える場合も含めるように、単に漸近状態とも表す。

²² 入射/放射状態が漸近する自由粒子状態のことを in/out 状態と呼ぶこともあり、本論文では in/out の名前を不採用とした。

²³ 多くの文献では Møller 演算子が Ω_\pm となるように定義するが、本稿ではあくまでもハミルトニアン H を持つ系が舞台であるという信念のもと、このような $\Omega(t)$ の定義を使っている。このことが後で見える我々の提案する散乱問題の定式化に繋がる。

部分等長演算子の定義

$\Pi_{\mathcal{M}}$ を \mathcal{H} のある部分空間 \mathcal{M} への射影演算子とする。 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が

$$A^\dagger A = \Pi_{\mathcal{M}} \quad (3.3.28)$$

を満たすとき、 A を部分等長演算子という。

定義から次の命題が成り立つ。

$$(a) \quad A\Pi_{\mathcal{M}} = A, \quad (3.3.29)$$

$$(b) \quad \langle Af, Ag \rangle = \langle \Pi_{\mathcal{M}}f, \Pi_{\mathcal{M}}g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}, \quad (3.3.30)$$

$$(c) \quad AA^\dagger = \Pi_{\mathcal{N}}, \quad \mathcal{N} := \text{ran}A. \quad (3.3.31)$$

また、部分等長演算子のうち

$$\Pi_{\mathcal{M}} = I_{\text{dom}A} \quad \text{i.e.,} \quad \mathcal{M} = \text{dom}A \quad (3.3.32)$$

となるものを等長演算子という。さらにこの定義から、 $A \upharpoonright_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ のユニタリ演算子であることも言える。 \mathcal{M} を**始集合-initial set** といい、 \mathcal{N} を**終集合-final set** という。ここでいうユニタリ演算子は、定義域と値域が一致しない場合にも有効な次の定義の意味のものである。

ユニタリ演算子の定義 ($\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$)

$A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K} := \text{ran}A$ がユニタリ演算子とは、 A が

$$\|Af\|_{\mathcal{K}} = \|f\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (3.3.33)$$

を満たす等長作用素であり、かつ

$$\text{ran}A = \mathcal{K} \quad (3.3.34)$$

を満たす (i.e., A が全射である) ことをいう。

つまり、Møller 演算子 Ω_{\pm}^\dagger は終集合を $\mathcal{H}_{\infty}^{\pm}$ とする部分等長演算子である²⁴。

次に繫絡演算子という特性について説明しよう。愚直に定義から計算してもいいが、

$$\Omega^\dagger(t+t') = U^{-1}(t+t')U_0(t+t') = U^{-1}(t)\Omega^\dagger(t')U_0(t) \quad (3.3.35)$$

から $t' \rightarrow \pm\infty$ をとって、

$$\Omega_{\pm}^\dagger = U^{-1}(t)\Omega_{\pm}^\dagger U_0(t) \quad (3.3.36)$$

を得る。これは

$$\Omega_{\pm}^\dagger U_0(t) = U(t)\Omega_{\pm}^\dagger \iff \Omega_{\pm}^\dagger H_0 = H\Omega_{\pm}^\dagger \quad (3.3.37)$$

または同等に、

$$\Omega_{\pm} U(t) = U_0(t)\Omega_{\pm} \iff \Omega_{\pm} H = H_0\Omega_{\pm} \quad (3.3.38)$$

を意味する。このようにある演算子に右から作用したものが、また別のある演算子に左から作用したものになるという関係を**繫絡関係-intertwining relation** といい、この作用するものを繫絡演算子と呼ぶ。つまり、**Møller 演算子は理論のハミルトニアンと自由ハミルトニアンを繋ぐ繫絡演算子である**。この関係は $\mathcal{H}(H_0)$ の元を自由ハミルトニアンで十分に時間発展させてから Møller 演算子で $\mathcal{H}_{\infty}^{\pm}$ の元に飛ばした状態と、先に $\mathcal{H}(H_0)$ の元を Møller 演算子で $\mathcal{H}_{\infty}^{\pm}$ の元に飛ばした後に理論のハミルトニアンで十分に時間発展させた状態

²⁴これは始集合 $\mathcal{M} = \emptyset$ つまり、 Ω_{\pm}^\dagger が定義されない場合にも正しい言い方になっている。 $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ならば、前小節で $\mathcal{H}(H_0) = \mathcal{M}_{\infty}(H_0)$ ということを見たから、 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\infty}(H_0)$ の等長演算子と言える。

が等しいことを保証してくれる。これは理論の対称性を考える際に非常に重要な関係となっており、摂動的場の量子論を構成する際の基礎となる。

また、ややこしいが数学的には重要な点として、繋絡演算子は時間発展演算子を繋ぐだけではなく、実は射影演算子も繋ぐという性質がある。すなわち、 $\Pi_\alpha \in \mathcal{H} \equiv \text{dom}H$ および $\Pi_\alpha^0 \in \mathcal{H}_0$ に対して、

$$\Omega_\pm^\dagger \Pi_\alpha^0 = \Pi_\alpha \Omega_\pm^\dagger \quad (3.3.39)$$

または同等に

$$\Omega_\pm \Pi_\alpha = \Pi_\alpha^0 \Omega_\pm \quad (3.3.40)$$

が成り立つ。これを認めると、

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_{\text{ac}}(H_0) \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}_{\text{ac}}(H), \quad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\infty^\pm(H_0) \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_\infty^\pm(H) \quad (3.3.41)$$

も成り立つことがわかる²⁵。この関係から、 Ω_\pm^\dagger は $\mathcal{M}_\infty(H_0)$ から \mathcal{H}_∞^\pm へのユニタリ演算子であることが言えるが、必ずしも散乱空間 \mathcal{M}_∞^\pm へのユニタリ演算子であるとは言えない。

3.4 散乱理論：散乱行列と漸近完全性条件

この節では散乱問題の定式化について考える。系を特徴付ける量の集まりをまとめて α, β, \dots などと表す。例えば自由粒子系であれば、個々の粒子の運動量などの量の集まりをまとめて α などで表す²⁶。

これまでに見たように、散乱問題はある過去散乱空間 $\mathcal{M}_\infty^-(H)$ に属する入射状態から、ある未来散乱空間 $\mathcal{M}_\infty^+(H)$ に属する放射状態への遷移を記述し、遷移確率を予測・説明することを目指すものだ。そこで理想的には $\Psi_\alpha^- \in \mathcal{M}_\infty^-(H) \mapsto \Psi_\beta^+ \in \mathcal{M}_\infty^+(H)$ の遷移振幅

$$\langle \Psi_\beta^+, \Psi_\alpha^- \rangle =: S_{\beta\alpha} \quad (3.4.1)$$

を求めたい。式 (3.4.1) で与えられる量を散乱行列と名付ける。しかし一般に未来/過去散乱空間を特定するのは困難である。そこで、多くの場合次の2つの方針がとられる。

- (I) 演算子代数を用いて議論する代数に基づく散乱問題の定式化
- (II) 漸近状態を仮定して議論する状態に基づく散乱問題の定式化

I: 代数に基づく散乱理論

この方針は大まかに言えば、Hilbert 空間の元としての状態に対して、観測量から複素数 (実数) 値を取り出す対応であるという考えを推し進めるような方針である。つまりハミルトニアン H の系が非摂動ハミルトニアン H_0 の系に漸近するという意味を、状態ベクトルの強収束でなく、演算子の弱収束に取り直そうというものだ。演算子の強収束の定義は式 (3.3.25) で与えた。演算子の弱収束の定義は次のように与えられる。

²⁵ これも $\mathcal{M} = \emptyset$ の場合を含むように意識した書き方となっている。さらにいうと、 H_0 を自由粒子ハミルトニアンでなく、他の非摂動的ハミルトニアンと思っても成り立つように書いている。つまり、後で見る Dollard 形式にも通用する書き方である。 $\mathcal{M} \neq \emptyset$ なら $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty(H_0)$ となり、 $\mathcal{N} = \mathcal{H}_\infty^\pm$ だから

$$\mathcal{H}_\infty^\pm \subseteq \mathcal{M}_\infty^\pm(H) \quad (3.3.42)$$

が成り立つ。また、 H_0 を他の非摂動的ハミルトニアンと思って $\mathcal{H}_{\text{sc}}(H_0)$ を意識する際には、

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_c(H_0) \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}_c(H), \quad \mathcal{M} \subseteq \bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H_0) \Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) \quad (3.3.43)$$

を加えるとよい。

²⁶ 場の量子論では電荷やヘリシティなどの保存量もこれらに入る。より一般には、 H_0 を非摂動ハミルトニアンとして、 H_0 の作用で不変、または共変な量の集まりとする。前節同様に H_0 は基本的には自由粒子ハミルトニアンと考えていいが、その特殊性を使わない形で諸々の事実を記述して一般化が容易なようにしておく。また、ここでも $\mathcal{H}_{\text{sc}} \neq \emptyset$ の場合に注意すべき点は脚注におく。

演算子の弱収束

演算子 A_n が A に弱収束するとは、行列要素の下で極限が一致することを意味する。つまり、

$$\forall f, g \in \mathcal{H}, \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, (A - A_n) f \rangle = 0 \quad (3.4.2)$$

が成り立つことをいう。また、これを弱極限の記号 $w\text{-lim}$ を使って次のように表す。

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A. \quad (3.4.3)$$

散乱問題の設定をこの方針で考えよう。 H を持つ系での観測量の集まりを $\{\mathbf{A}\}$ とする。充分遠くの過去で、ある観測量が

$$A_\alpha = \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \Psi_\alpha(t) | \mathbf{A}(t) | \Psi_\alpha(t) \rangle \quad (3.4.4)$$

で与えられ、充分遠くの過去で対応する観測量が

$$A_\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Psi_\beta(t) | \mathbf{A}(t) | \Psi_\beta(t) \rangle \quad (3.4.5)$$

で与えられるような状況の実現確率を求める問題として散乱問題を考える。この問題を別のハミルトニアン H_0 を持つ系での観測量の集まりを $\{\mathbf{A}_0\}$ を利用して、

$$A_\alpha = \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \Phi_\alpha(t) | \mathbf{A}_0(t) | \Phi_\alpha(t) \rangle \quad (3.4.6)$$

となる状況から

$$A_\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Phi_\beta(t) | \mathbf{A}_0(t) | \Phi_\beta(t) \rangle \quad (3.4.7)$$

となる状況への遷移と見做せる状況を考える。この場合、

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} [\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}_0(t)] = 0 \quad (3.4.8)$$

となる $\{\mathbf{A}_0\}$ を探すことができれば、散乱問題で扱う状態の遷移が記述できることになる。

場の量子論で相互作用を持つ理論を考える際には繰り込みを行うことになるが、繰り込みの処方を行えばもはや $H = H_0 + V$ とした場合の H_0 は自由な理論のものと同じとは見做せなくなってしまう。そのため場の量子論では必然的に代数的な散乱理論を考えることになる²⁷。

II: 状態に基づく散乱理論

I の場合と比べると一般性はないが、より直感的な方法が漸近状態を仮定して散乱を記述する方法だ。この方法は Møller 演算子の存在に立脚している。ここでは $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm} \Omega(t) = \Omega_\pm$ の存在を仮定する。そして散乱問題を、漸近状態 $\Phi_\alpha^- \in \mathcal{H}_\infty^-$ から $\Phi_\beta^+ \in \mathcal{H}_\infty^+$ への遷移として考える。そこで散乱行列 (3.4.1) の代わりに、次の漸近散乱行列を定義し、これを求める。

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}} := \langle \Phi_\beta^+, \Phi_\alpha^- \rangle. \quad (3.4.9)$$

式 (3.3.41) から $\mathcal{H}_\infty^\pm \subseteq \mathcal{M}_\infty^\pm(H)$ の関係があるため一般には散乱行列と漸近散乱行列は異なるが、いくつかの条件の下では一致する。以下ではそのことも含めて漸近散乱行列の性質を説明しよう。多くの場合次の小節で説明する強い漸近完全性関係を課すので、漸近散乱行列と散乱行列は区別されない。

3.4.1 漸近完全性関係

ここで、漸近完全性条件と呼ばれる条件をいくつか紹介する。

$$\text{Møller 演算子 } \Omega_\pm^\dagger \text{ が完全} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_\infty^\pm = \mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \text{ が成り立つ。} \quad (3.4.10)$$

²⁷形式的には次の II の方針を採用しているように扱うことはできる。

式 (3.3.18) から $\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) = \mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H)$ なので、Møller 演算子が完全のとき

$$\mathcal{H}_{\infty}^{\pm} = \mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H) \quad (3.4.11)$$

が成り立つことは重要だ²⁸。

次の条件は弱い漸近完全性条件と呼ばれる条件である。

弱い漸近完全性条件

弱い漸近完全性条件とは、 Ω_{+}^{\dagger} と Ω_{-}^{\dagger} がどちらも完全であることをいう。すなわち、次が成り立つ。

$$\mathcal{H}_{\infty}^{-} = \mathcal{H}_{\text{ac}}(H) = \mathcal{H}_{\infty}^{+}. \quad (3.4.12)$$

弱い漸近完全性条件が成り立つとき、

$$\mathcal{M}_{\infty}^{-}(H) = \mathcal{H}_{\text{ac}}(H) = \mathcal{M}_{\infty}^{+}(H), \quad (3.4.13)$$

$$\forall g \in \mathcal{M}_{\infty}(H), \exists f_{\pm} \in \mathcal{M}_{\infty}(H_0) \text{ s.t. } \text{s-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} [U(t)g - U_0(t)f_{\pm}] = 0 \quad (3.4.14)$$

がそれぞれ成り立つ。これは非常によい性質で、漸近状態が散乱状態であることを保証してくれる。

次の条件は強い漸近完全性条件と呼ばれる条件である。

強い漸近完全性条件

強い漸近完全性条件とは、弱い漸近完全性条件に加えて、 $\mathcal{H}_{\text{sc}}(H) = \emptyset$ であることをいう。すなわち、次が成り立つ。

$$\mathcal{H}_{\infty}^{-} = \mathcal{H}_{\text{p}}^{\dagger}(H) = \mathcal{H}_{\infty}^{+} \quad (= \mathcal{M}_{\infty}(H)). \quad (3.4.15)$$

強い漸近完全性条件があるとき、 \mathcal{H} のうち $\mathcal{H}_{\text{p}}(H)$ 部分を持たない状態は散乱状態となる。弱い漸近完全性から $\mathcal{H}_{\infty}^{\pm} = \mathcal{M}_{\infty}(H)$ も成り立つので、散乱問題では Hilbert 空間を制限して $\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{M}_{\infty}(H_0)$, $\mathcal{H} \equiv \mathcal{M}_{\infty}(H)$ と考えてよい。これらの条件は本来は示すべきものだが、任意の状態の H による時間発展を調べて $\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \subseteq \mathcal{H}_{\infty}$ を示すことが困難なので、散乱の現象に興味があるような多くの場合では単に仮定として課す。

強い漸近完全性条件がどの程度自然なものかを見るために、 $V(\vec{Q})$ のポテンシャル散乱について強い漸近完全性条件を満たすことが証明されている例を 3 つ証明なしで記しておく。

$$V(r) = \begin{cases} \gamma \frac{e^{-\mu r}}{r}, & \gamma \in \mathbb{R}, \mu > 0 \\ \gamma(1+r)^{-\beta}, & \gamma \in \mathbb{R}, \beta > 1 \\ \gamma r^{-\beta} & \gamma \in \mathbb{R}, 1 < \beta < 3/2 \end{cases} \quad (3.4.16)$$

の相互作用による散乱では強い漸近完全性条件が満たされる²⁹。

3.4.2 漸近散乱行列

$\Phi \in \mathcal{H}_0$, $\Phi^{\pm} \in \mathcal{H}_{\infty}^{\pm}$ とする。強い漸近完全性条件 (3.4.15) を仮定するとき、漸近状態 $\Phi^{\pm} \in \mathcal{H}_{\infty}^{\pm}$ は散乱状態と等価なので式 (3.4.9) の漸近散乱行列はまさに求めたい散乱行列 (3.4.1) である。このとき、散乱行列は次の表式と等価である。

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^{\text{as}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle U_0(t)\Phi_{\beta}, U(t)\Phi_{\alpha}^{-} \rangle \quad (3.4.17)$$

$$= \langle \Phi_{\beta}, \Omega_{+}\Omega_{-}^{\dagger}\Phi_{\alpha} \rangle =: \langle \Phi_{\beta}, \mathcal{S}_{\text{D}}\Phi_{\alpha} \rangle \quad (3.4.18)$$

$$= \langle \Phi_{\beta}^{+}, \Omega_{-}^{\dagger}\Omega_{+}\Phi_{\alpha}^{+} \rangle =: \langle \Phi_{\beta}^{+}, \mathcal{S}_{\text{H}}\Phi_{\alpha}^{+} \rangle \quad (3.4.19)$$

²⁸吸収状態を除外しない場合にはさらに分類が増える。

²⁹主張は Reed-Simon の教科書 [97] の Prop 7.3 より従う。

これらの表示をそれぞれ現象論的散乱行列、Dyson の散乱行列、Heisenberg の散乱行列と名付ける³⁰。また、 $\mathcal{S}_D, \mathcal{S}_H$ をそれぞれ、**Dyson の散乱演算子**、**Heisenberg の散乱演算子**と名付ける。これらは多くの文献で単に散乱行列や散乱演算子と呼ばれることが多いので、状況に応じて注意が必要である。次にこれらの性質を見てみよう。

Dyson の散乱演算子

Dyson の散乱演算子

$$\mathcal{S}_D := \Omega_+ \Omega_-^\dagger \quad (3.4.20)$$

について考える。この演算子は $\mathcal{M}_\infty^-(H_0) \rightarrow \mathcal{H}_\infty^-$ の写像と、 $\mathcal{H}_\infty^+ \rightarrow \mathcal{M}_\infty^+(H_0)$ の写像の合成写像なので、これが等長演算子としての性質を満たすには

$$\mathcal{H}_\infty^- \subseteq \mathcal{H}_\infty^+ \quad (3.4.21)$$

という条件が必要である。この条件の下では、 \mathcal{S}_D は $\mathcal{M}_\infty^-(H_0) \rightarrow \mathcal{M}_\infty^+(H_0)$ の写像として定義される。 H_0 が自由ハミルトニアンなら $\mathcal{M}_\infty^\pm(H_0) \equiv \mathcal{H}_0$ なので、弱い漸近完全性条件 $\mathcal{H}_\infty^+ = \mathcal{H}_\infty^-$ の下で \mathcal{S}_D はユニタリ演算子である。

さて、 \mathcal{S}_D はお馴染みの Dyson 級数表示ができる。これを導出しよう。

$$\mathcal{S}(t, t_0) := \Omega^\dagger(t) \Omega(t_0) = U_0^\dagger(t) U(t) U^\dagger(t_0) U_0(t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} \quad (3.4.22)$$

を定義すると、

$$\partial_t \mathcal{S}(t, t_0) = -iV^I(t) \mathcal{S}(t, t_0), \quad V := H - H_0 \quad (3.4.23)$$

となるので、 $\mathcal{S}(t, t_0)$ の形式解が

$$\mathcal{S}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau V^I(\tau) \right] \quad (3.4.24)$$

として得られる。したがって漸近散乱行列は

$$\mathcal{S}_{\beta\alpha}^{\text{as}} = \langle \Phi_\beta, \mathcal{S}_D \Phi_\alpha \rangle = \langle \Phi_\beta, \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V^I(\tau) \right] \Phi_\alpha \rangle \quad (3.4.25)$$

となる。 V の 1 次までの近似を Born 近似という。散乱行列の Born 近似は、

$$\mathcal{S}_{\beta\alpha}^{\text{Born}} := \langle \Phi_\beta, \Phi_\alpha \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V_{\beta\alpha}(\tau), \quad V_{\beta\alpha}(\tau) := \langle \Phi_\beta, V^I(\tau) \Phi_\alpha \rangle \quad (3.4.26)$$

で与えられる。状態に基づく散乱理論では、Dyson の散乱演算子を知ることが主題と言えるだろう。

式 (3.4.25) からわかるように、Dyson の散乱演算子は相互作用描像に基づいており、本質的に摂動論的である。そのため、Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) 公式などの非摂動論的な議論で用いられるのはこの Dyson の散乱演算子ではなく、次の Heisenberg の散乱演算子である。

Heisenberg の散乱演算子

Heisenberg の散乱演算子

$$\mathcal{S}_H := \Omega_-^\dagger \Omega_+ \quad (3.4.27)$$

について考えよう。この演算子は $\mathcal{H}_\infty^+ \rightarrow \mathcal{M}_\infty^+(H_0)$ の写像と $\mathcal{M}_\infty^-(H_0) \rightarrow \mathcal{H}_\infty^-$ の写像の合成写像なので、 $\mathcal{M}_\infty^\pm = \mathcal{H}_0$ では $\mathcal{H}_\infty^+ \subseteq \mathcal{H}_\infty^-$ を仮定せずとも等長演算子として定義される³¹。このとき、 \mathcal{S}_H は $\mathcal{H}_\infty^+ \rightarrow \mathcal{H}_\infty^-$ の写像として定義される。

³⁰強い漸近完全性関係の元ではこれらは全て等価なのでどれを定義としてもよいが、この前提を疑うような場合には注意が必要だ。

³¹しかし弱い漸近完全性条件がないと、 $\mathcal{M}_\infty^\pm \subseteq \mathcal{H}_\infty^\pm$ だから必ずしも $\mathcal{M}_\infty(H) \rightarrow \mathcal{M}_\infty(H)$ のユニタリ演算子とはいえない。

Heisenberg 表示で時間発展するのは演算子であった。これから Heisenberg 描像の演算子の漸近的な振る舞いを調べよう。Schrödinger 描像の演算子 $A_S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のとき、

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \Psi_\beta^\pm(t), A_S \Psi_\alpha^\pm(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \Phi_\beta(t), A_S \Phi_\alpha(t) \rangle \quad (3.4.28)$$

が成り立つ。ここで、 $\langle \Psi_\beta^\pm(t), A_S \Psi_\alpha^\pm(t) \rangle = \langle \Psi_\beta^\pm, A_H(t) \Psi_\alpha^\pm \rangle$ および

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\beta(t), A_S \Phi_\alpha(t) \rangle &= \langle \Phi_\beta, U_0^\dagger(t) A_S U_0(t) \Phi_\alpha \rangle = \langle \Omega_\pm \Omega_\pm^\dagger \Phi_\beta, U_0^\dagger(t) A_S U_0(t) \Omega_\pm \Omega_\pm^\dagger \Phi_\alpha \rangle \\ &= \langle \Psi_\beta^\pm, \Omega_\pm^\dagger U_0^\dagger(t) A_S U_0(t) \Omega_\pm \Psi_\alpha^\pm \rangle \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

が成り立つことに注意する。そこで漸近演算子 $A_\pm(t)$ を

$$A_\pm(t) := \Omega_\pm^\dagger U_0^\dagger(t) A_S U_0(t) \Omega_\pm \quad (3.4.30)$$

と定めよう³²。すると式 (3.4.28) から

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \Psi_\beta^\pm, (A_H(t) - A_\pm(t)) \Psi_\alpha^\pm \rangle = 0 \quad (3.4.31)$$

が示される。つまり漸近演算子は Heisenberg 描像の演算子と次の関係を満たす。

$$\text{w-} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (A_H(t) - A_\pm(t)) = 0. \quad (3.4.32)$$

この関係を満たす演算子の極限を、弱収束の下で意味を持つということを明示する記号 $\stackrel{\text{w}}{=}$ を使って

$$A_\pm \stackrel{\text{w}}{=} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} A_H(t) \equiv A_H(\pm\infty) \quad (3.4.33)$$

と表すと弱い意味で存在するものにも言及できて便利だ。 A_\pm を未来/過去自由漸近演算子と名付けておく³³。漸近演算子の時間発展について繋絡関係 (式 (3.3.37)) を使うと

$$A_\pm(t) = \Omega_\pm^\dagger U_0^\dagger(t) A_S U_0(t) \Omega_\pm = U^\dagger(t) \Omega_\pm^\dagger A_S \Omega_\pm U(t) \quad (3.4.34)$$

が示される。ここで基準時刻 $t = 0$ を考えると次の関係が示される。

$$A_\pm(t) = U^\dagger(t) A_\pm(0) U(t). \quad (3.4.35)$$

これが漸近演算子と Heisenberg 描像の演算子の関係である。この関係は漸近演算子が理論のハミルトニアン H で時間発展する演算子であると教えてくれている。

さて、ここで Heisenberg の散乱行列の役割を考えよう。漸近演算子の定義式 (3.4.30) から

$$A_+(t) = \Omega_+^\dagger \Omega_- \Omega_-^\dagger U_0^\dagger(t) A_S U_0(t) \Omega_- \Omega_-^\dagger \Omega_+ = \Omega_+^\dagger \Omega_- A_-(t) \Omega_-^\dagger \Omega_+ = \mathcal{S}_H A_-(t) \mathcal{S}_H^\dagger \quad (3.4.36)$$

となる。したがって

$$A_+(t) \mathcal{S}_H = \mathcal{S}_H A_-(t) \quad (3.4.37)$$

が成り立つ。つまり、 \mathcal{S}_H は $A_+(t)$ と $A_-(t)$ を繋ぐ繋絡演算子である。この関係が理論の演算子の代わりに漸近演算子を使って議論してもよいことを保証するため、場の量子論では非常に重要である。代数に基づく散乱理論では Heisenberg の散乱演算子を知ることが主題と言えらるだろう。

³²場の量子論では演算子は場で構成されるから、これを漸近場とも呼ぶ。

³³この意味の等号 $\stackrel{\text{w}}{=}$ を単に $=$ で表すことが多いが、慣れるまでは明示して意識したほうが教育的だろう。

3.4.3 漸近自由状態の存在条件

これまでの議論は Møller 演算子が存在するという仮定に基づいたものであった。そこで次に気になるのは、この存在条件である。この小節では Møller 演算子の存在条件をポテンシャル散乱に限って調べてみよう。

式 (3.1.58) から

$$-i \frac{d\Omega^\dagger(t)}{dt} = \Omega^\dagger(t) V^I(t) = U^\dagger(t) V^S U_0(t) \quad (3.4.38)$$

が成り立つ。これを積分して

$$\Omega^\dagger(t) = I + i \int_0^t d\tau U^\dagger(\tau) V^S U_0(\tau) \quad (3.4.39)$$

を得る。自由粒子状態 Φ に作用させると、

$$\Omega^\dagger(t)\Phi = \Phi + i \int_0^t d\tau U^\dagger(\tau) V^S \underbrace{U_0(\tau)\Phi}_{\Phi_S(\tau)} \quad (3.4.40)$$

が得られる。未来/過去漸近自由状態の定義は左辺の強極限なので、Møller 演算子の存在条件は右辺の広義積分が収束する条件 (広義積分可能条件) であるとわかる。

広義積分可能条件は理論の相互作用 V によって異なる。一般論を述べることは難しいので、ここでは逆幂相互作用

$$V^S(\vec{Q}) = C|\vec{Q}|^{-\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (3.4.41)$$

によるポテンシャル散乱を考え、これに対して条件を与える³⁴。

漸近自由粒子状態が存在するための逆幂相互作用の条件

式 (3.4.41) の相互作用を持つ理論において、漸近粒子状態が存在するための条件は $\alpha > 1$ である。

これを示そう。

$$\left\| \int_0^t d\tau U^\dagger(\tau) V^S(\vec{Q}) \Phi_S(\tau) \right\| \leq \int_0^t d\tau \left\| V^S(\vec{Q}) \Phi_S(\tau) \right\|$$

となる。ここで、

$$\left\| V^S(\vec{Q}) \Phi_S(\tau) \right\|^2 \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0,$$

$$\begin{aligned} \left\| V^S(\vec{Q}) \Phi_S(\tau) \right\|^2 &\xrightarrow[\text{式(3.2.34)}]{|\tau| \sim \infty} \int d^D x \frac{|C|^2}{|\vec{x}|^{2\alpha}} \left(\frac{m}{|\tau|} \right)^D \left| \tilde{\Phi}(m\vec{x}/\tau) \right|^2 + o(1/|\tau|) \\ &\stackrel{\text{L}}{=} \left[|C|^2 \int d^D p \left(\frac{m}{|\vec{p}|} \right)^{2\alpha} \left| \tilde{\Phi}(\vec{p}) \right|^2 \right] |\tau|^{-2\alpha} =: C|\tau|^{-2\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つ。最後の行では $\vec{p} = m\vec{x}/\tau$ の変数変換を行った。 $C > 0$ なので、知りたかった広義積分可能条件は、広義積分 $\int_1^\infty d\tau |\tau|^{-\alpha}$ の収束条件に等しい。

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_1^t d\tau |\tau|^{-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \text{広義積分は発散} & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

³⁴ $|t| \rightarrow \infty$ での振る舞いを議論すれば、充分大きい t に対してある数 $C > 0, \alpha > 0$ が存在して、

$$\left\| V^S |\Phi(\tau)\rangle_S \right\| \leq C|t|^{-\alpha} \quad (3.4.42)$$

となるような、もう少し広い理論でも同様に議論できる。この場合の条件も $\alpha > 1$ となる。

という事実から示された³⁵。□

ここまでをまとめると、逆冪相互作用が存在する理論で Møller 演算子が存在するのはその冪 α が $\alpha > 1$ を満たす場合のみである。このような相互作用を短距離相互作用と呼ぶ。強い漸近完全性条件 (3.4.15) が成り立つとき、

$$\Omega_{\pm} \mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H) = \mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H_0) \quad (3.4.44)$$

が成り立つから、散乱空間と漸近自由粒子空間が一致する。

一方、 $0 < \alpha \leq 1$ の相互作用では Møller 演算子が存在しない。このような相互作用を長距離相互作用と呼ぶ。この事情から、Coulomb 相互作用や Newton 相互作用を含む長距離相互作用が存在する理論での散乱問題の定式化の際には、自由粒子状態に立脚した諸定義や方針の何かしらを変更する必要が生じる。

3.5 長距離相互作用による散乱理論-Dollard 形式

前節では短距離相互作用による散乱問題の定式化について概観した。長距離相互作用がある場合の困難は Møller 演算子 (3.3.26) が定義できないことであった。そこで Møller 演算子が部分等長演算子かつ繋絡演算子である、という性質に注目する。この性質を満たす代替りの演算子をうまく定義できれば、その演算子を用いて散乱を記述できるだろう。Dollard はこのような方針で、Coulomb ポテンシャルによる散乱を記述する散乱理論の数学的な定式化を与えた [104]。その後 Dollard の散乱理論は、より一般的な長距離相互作用による散乱に対しても正当化されるように整備が進められてきた。この散乱理論は Dollard 形式などとも呼ばれる³⁶。この節では数学的な厳密性よりも物理的な理解を目指しながら Dollard 形式について見ていく。

3.5.1 Dollard 演算子

Dollard 演算子 Ω_{D}^{\pm} を

$$\Omega_{\text{D}}^{\pm} := \text{s-} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega^{\dagger}(t) e^{-iX_t} = \text{s-} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-i[H_0 t + X_t]} =: \text{s-} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_{\text{D}}^{\dagger}(t) \quad (3.5.1)$$

で定める³⁷。ここで X_t は H_0 と可換な自己共役演算子で、 $H_0 t$ と比べて小さい寄与を与える演算子とする。つまり、 $\|X_t\|/\|H_0 t\| \rightarrow 0$, $|t| \rightarrow \infty$ とする。球対称ポテンシャルによる散乱では X_t は H_0 の関数であり、より一般には運動量演算子 \vec{P} の関数と考えてよい。

Dollard 演算子が存在すれば式 (3.3.24) のように、これを用いて未来/過去漸近自由粒子空間

$$\mathcal{H}_{\infty}^{\pm} = \left\{ \text{s-} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_{\text{D}}^{\dagger}(t) f_{\pm} \mid f_{\pm} \in \mathcal{M}_{\infty}(H_0) \right\} \quad (3.5.2)$$

が定義できる。このとき、代数に基づく散乱理論について考えてみよう。

A を U_0 及び X_t と可換な観測量とする。 $f \in \mathcal{H}_{\infty}^{\pm}$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle U(t)f, AU(t)f \rangle &= \langle e^{iX_t} U_0^{-1}(t) U(t)f, A e^{iX_t} U_0^{-1}(t) U(t)f \rangle \\ &= \langle \Omega_{\text{D}}(t)f, A \Omega_{\text{D}}(t)f \rangle \rightarrow \langle \Omega_{\text{D}}^{\pm} f, A \Omega_{\text{D}}^{\pm} f \rangle, t \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

が成り立つ。定義から $\Omega_{\text{D}}^{\pm} f \in \mathcal{M}_{\infty}(H_0)$ となるから、 A に対応する自由粒子理論の演算子が存在する。

³⁵複雑な相互作用がある理論を考えたければ、より数学的に Cauchy 列の存在を示すのがいいだろう。 $T \neq 0$ として

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon} \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ with } \{m > n_{\epsilon}\} \wedge \{n > n_{\epsilon}\} \Rightarrow \|\Omega^{\dagger}(mT)\Phi - \Omega^{\dagger}(nT)\Phi\| < \epsilon \quad (3.4.43)$$

となる条件を見つければよい。この例ではそれをするまでもない。

³⁶数学的に整備されていった様子は Reed-Simon の教科書 [97] の Notes が詳しい。

³⁷変形 Møller 演算子や、単に Møller 演算子などとも呼ばれる。

X_t が H_0 の関数なら、 X_t と A の可換性は H_0 と A の可換性から常に成り立つ。Dollard 演算子に対して弱い漸近完全性条件 $\mathcal{H}_\infty^\pm = \mathcal{M}_\infty(H)$ を仮定すると、式 (3.5.3) は任意の $f \in \mathcal{M}_\infty(H)$ に対して成り立つ。したがって代数に基づく散乱理論を記述する上で完全と言える。一方 X_t が H_0 の関数でない場合は X_t と可換な、ある限られた観測量に対してのみ成り立つので注意が必要だ。

Dollard 演算子の縮退

H_0 の関数である自己共役演算子の Z を各時刻で X_t に加える自由度があるから、Dollard 演算子を定める X_t は一意に定まらない。さらに一般には、 $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ の族で

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-iZ_t} - e^{-iZ}) = 0 \quad (3.5.4)$$

を満たすものを各時刻の X_t に加える自由度がいつでもある。つまり、 Z を選ぶ自由度に加えて Z_t を選ぶ自由度があり、Dollard 演算子は無限に縮退している。しかしこれは物理的な状態が射線の元であることを考えれば、物理的には一意である³⁸。

3.5.2 Dollard 演算子の構成法

Dollard 演算子を定義するためには、どのような $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を与えればよいだろうか。Møller 演算子を一般化した**波動演算子-wave operator** の存在条件として、Cook の基準というものがある。これにしたがって Dollard 演算子の存在条件を確認しよう。

Cook の基準

波動演算子を

$$\mathcal{U}_\pm(A, B; \Pi_{\mathcal{M}}) := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iAt} e^{-iBt} \Pi_{\mathcal{M}} =: s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} V_t^\dagger W_t \Pi_{\mathcal{M}} \quad (3.5.5)$$

で定める。部分空間 \mathcal{M} の部分集合 \mathcal{D} が以下の 3 つの条件を満たすとき、 $\mathcal{U}(A, B; \Pi_{\mathcal{M}})$ が存在する。

- (1) \mathcal{M} の任意の元が、 \mathcal{D} の元の線型結合からなる点列の極限として表せる。
- (2) 任意の $t \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}$ に対して $W_t f \in \text{dom}(A) \cap \text{dom}(B)$ が成り立つ。
- (3) 任意の $f \in \mathcal{D}$ に対して $\int_1^\infty \|(A - B)W_t f\| dt < \infty$ が成り立つ。

Cook の基準の証明の流れを見ていく。 $f \in \mathcal{D}$ を任意に取る。仮定 (2) は、 $V_t^\dagger W_t$ が任意の t に対して存在し、微分可能であることを保証する。したがって、

$$\frac{d}{dt} (V_t^\dagger W_t) f = \left(\frac{d}{dt} V_t^\dagger\right) W_t f + V_t^\dagger \left(\frac{d}{dt} W_t\right) f = iV_t^\dagger (A - B) W_t f \quad (3.5.6)$$

が成立する。適当な時刻 $t > s > 1$ に対して

$$V_t^\dagger W_t f - V_s^\dagger W_s f = \int_s^t d\tau \frac{d}{d\tau} (V_\tau^\dagger W_\tau) f = i \int_s^t d\tau V_\tau^\dagger (A - B) W_\tau f \quad (3.5.7)$$

となるからそのノルムについて

$$\|V_t^\dagger W_t f - V_s^\dagger W_s f\| \leq \int_s^t d\tau \|(A - B)W_\tau f\| \quad (3.5.8)$$

³⁸Reed-Simon は彼らの教科書 [97] の Notes で、前方散乱の散乱行列の解析性からこうした縮退が解ける可能性を提案している。これは Coulomb 散乱に対しては正しいらしい。本論で提案する散乱理論のドレス状態による QED の解析でもそれらしい結果が得られる。その他のドレス状態形式では、このような自明な無限自由度も含めて漸近対称性としてしまうことがあるが、式 (2.2.43) の精神の通り、自明な部分を取り除いたものを漸近対称性と考えべきだろう。

が成り立つ。仮定 (3) から、 $\left\{V_t^\dagger W_t f\right\}_{t \in [1, \infty)}$ は \mathcal{D} で張られる空間の上での Cauchy 列である。仮定 (2) から、任意の $g \in \mathcal{M}$ に対してこれに収束する Cauchy 列 $\left\{V_t^\dagger W_t f\right\}_{t \in [1, \infty)}$ を作る $f \in \mathcal{D}$ が存在するから、極限 $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iAt} e^{-iBt} \Pi_{\mathcal{M}}$ が存在する。□

波動演算子 $\mathcal{U}_\pm(A, B; \mathcal{M})$ が存在するとき、 $\mathcal{U}_\pm(A, B; \mathcal{M})$ に備わる以下の重要な性質が証明できる。

- (a) $\mathcal{U}_\pm(A, B; \mathcal{M})$ は始集合を \mathcal{M} とする部分等長演算子である。
- (b) $\mathcal{U}_\pm(A, B; \mathcal{M})$ の終集合を \mathcal{N} と定めると、次が成り立つ。

$$\mathcal{U}_\pm^\dagger(A, B; \mathcal{M}) = \mathcal{U}_\pm(B, A; \mathcal{N}). \quad (3.5.9)$$

- (c) $\mathcal{U}_\pm(A, B; \mathcal{M})$ は A と B を繋ぐ繋絡演算子である。

これらの性質は、短距離相互作用の下で Møller 演算子が備える性質そのものである。したがって $\mathcal{U}_\pm^\dagger(A, B; \mathcal{M})$ が存在すれば、これを使って第 3.4 節の議論が再現できる。

Cook の基準を $A = H, B = H_0 + X_t/t$ に適用して、 X_t を決定する条件を考える。 $\Phi \in \mathcal{M}_\infty(H_0)$ に対して

$$\frac{d}{dt} \Omega_D^\dagger(t) \Phi = iU^{-1}(t) \left[H - H_0 - \frac{d}{dt} X_t \right] U_0(t) e^{-iX_t} \Phi = U^{-1}(t) \left[V - \frac{d}{dt} X_t \right] U_0(t) e^{-iX_t} \Phi \quad (3.5.10)$$

が成り立つ。したがって Cook の基準における $A - B$ に対応するものは $V - \frac{d}{dt} X_t$ であり、 W_t に対応するものは $e^{-iH_0 t} e^{-iX_t}$ である。Cook の基準から、関数 $F : t \mapsto \left\| \left(V - \frac{d}{dt} X_t \right) e^{-iH_0 t} e^{-iX_t} \Phi \right\| \in L^1((T, \infty))$ となる $T \in \mathbb{R}_+$ が存在するとき、Dollard 演算子 Ω_D^+ が存在する。ノルムを評価すると、

$$F(t) \leq (2\pi)^{-n/2} \int d^n x \int d^n p \left\| \left(V(x) - \frac{d}{dt} X_t(\vec{p}) \right) \exp \left[-i \left(\frac{p^2}{2m} t - \vec{p} \cdot \vec{x} + X_t(p) \right) \right] \tilde{\phi}(\vec{p}) \right\| \quad (3.5.11)$$

が得られる。鞍点法から、 t が大きいところでは

$$\tilde{x}(\vec{p}, t) := \frac{t}{m} \vec{p} + \vec{\nabla}_p X_t(\vec{p}) \quad (3.5.12)$$

付近の寄与が支配的である。したがって $X_t(\vec{P})$ が非線形微分方程式

$$\frac{d}{dt} X_t(\vec{p}) = V(\tilde{x}(\vec{p}, t)) = V\left(\frac{t}{m} \vec{p} + \vec{\nabla}_p X_t(\vec{p})\right) \quad (3.5.13)$$

を満たす関数の乗算演算子であれば、Dollard 演算子の存在が保証される。

式 (3.5.13) を解くのは難しい場合も多いが、 $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ を要請する必要はない。条件は $F(t) \in L^1([T, \infty))$ なので、相互作用に応じて適切な近似を行って X_t を決定すればよい。³⁹ 例えば、 $V(x) = C|\vec{x}|^{-\alpha}$, $\alpha \in (1/2, 1]$ に対しては非線形項を落として

$$\frac{d}{dt} X_t(\vec{p}) = V\left(\frac{t}{m} \vec{p}\right) \quad (3.5.14)$$

を満たす X_t を選べば Dollard 演算子が定まることが知られている。

Dollard 形式ではこのように、微分方程式 (3.5.13) をまず解析して Dollard 演算子を構成し、これを用いて散乱行列を定義する。短距離相互作用の散乱は $F(t) \in L^1([T, \infty))$ が自明に満たされる例として含まれる。

決定方程式の物理的な意味

最後に X_t の決定方程式 (3.5.13) の物理的な意味を考えよう。変数の区別のため以下では時間微分を偏微分に書き換える。 $W_t := H_0 t + X_t$ とすると

$$\frac{\partial W_t}{\partial t} = V\left(\frac{\partial W_t}{\partial p}\right) + \frac{p^2}{2m} \quad (3.5.15)$$

³⁹ この自由度は Dollard 演算子の縮退について議論した通り。

が得られる。右辺が充分遠くの過去/未来のハミルトニアン H_∞ であることに注意して $W_t = -S_t$ に書き換えると、

$$H_\infty(p, \frac{\partial S_t}{\partial p}) = -\frac{\partial S_t}{\partial t} \quad (3.5.16)$$

が得られる。これは Hamilton-Jacobi 方程式に他ならない。Dollard 形式は、Hamilton-Jacobi 方程式に従う Hamilton 主関数 S_t を用いて Dollard 演算子を

$$\Omega_D^{\pm\ddagger} := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{iS_t} \quad (3.5.17)$$

と定め、散乱を記述する方法であるといえる。言い換えれば、充分遠くの未来/過去でのハミルトニアン

$$H_\infty(t) = \frac{p^2}{2m} + V([\vec{Q}S_t](p)) \quad (3.5.18)$$

を用いて構成した Dollard 演算子

$$\Omega_D^{\pm\ddagger} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} \exp\left[-i \int_T^t d\tau H_\infty(\tau)\right] \quad (3.5.19)$$

によって定める漸近自由粒子状態を用いて散乱を記述する方法である。

第 4 章

特殊相対論的な量子散乱理論

4.1 特殊相対論的な場の量子論の枠組み

この節では、特殊相対性原理と量子力学の枠組みの両立を目指して構築されてきた場の量子論の枠組みについてごく短く紹介する。参考にした書籍は主に [56, Weinberg], [105, Duncan], [98, Strocci] である。[106, 九後], [107, 磯] の影響も受けているかもしれない。

特殊相対性理論では、時空を Minkowski 時空 $\mathbb{M}^{1,3} = (\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ として扱う。特殊相対性原理によると、ある Descartes 座標系を張る基準慣性観測者と、その座標系と Poincaré 変換で結ばれる座標を張る観測者は「同じ現象」を記述する。つまり、これらの観測者は互いの観測した量について比較して、合意を得ることができる。全ての慣性観測者間でこれが可能なように、記述すべき量は Poincaré 変換で不変な量、または共変/反変な量となる。古典的にはこのために、基本的な理論の構成要素として Minkowski 時空におけるスカラー場、スピノル場、ベクトル場、テンソル場が扱われる。これらの言葉はその共変性の分類に基づく。また、不変量の存在を用いてゲージ場を導入することもできる。これらの構成要素から理論を構成し、観測する Poincaré 変換の不変量や共変量を記述するのが古典的な特殊相対性理論である。

量子力学にこの原理を持ち込むことを考える。量子力学の構成要素は状態とそれに作用する演算子である。Poincaré 変換に対する共変量と不変量で状態を特徴付けるために、Poincaré 代数の生成子を考える。1 粒子状態を記述する共変量として、並進変換の演算子としての 4 元運動量が取れる。また、1 状態を分類する不変量として、4 元運動量の 0 成分の符号・質量・内部自由度がとれる。未来に進んでいく実質量を持つ粒子に理論を限り、運動量以外の連続自由度を許さないことにすると 1 粒子状態は、整数または半整数スピンを持つ有質量/無質量粒子の状態に分類される。従って 1 粒子状態は 4 元運動量 p^μ とスピン σ を使って、

$$\Psi = \Psi_{p,\sigma} \quad (4.1.1)$$

とかける。電荷などその他の不変量があれば、状態はさらに分類されることになる。

次に、Minkowski 時空における場の変換則を満たすもので演算子を構成することを考える。非相対論的な量子力学では、演算子はブラとケットの 2 つ組で構成できるのだった。しかしこれは局所性・因果性が組み込まれている特殊相対論の枠組みでは行えない。他粒子状態で作る 2 つ組で相互作用演算子を作ると、極めて非局所的な理論が出来上がってしまうからだ。そこでその代わりに、各状態を真空に生成演算子を施すことで得られる状態とし、相互作用演算子を生成/消滅演算子を使って構成する。この相互作用演算子は共変性を満たすように場を使って構成すればよい。

このように、状態を 4 元運動量・スピン・その他の内部自由度を含む粒子を生成させる演算子を真空に施すことで構成し、演算子を生成/消滅演算子を含む場の演算子で構成するという手続きをとることで特殊相対性原理を量子力学に持ち込んだものが、特殊相対論的な場の量子論である。本論文では他の対称性を扱う場の理論を考えないので、単に場の量子論といった場合にはこれを意味することとする。

4.2 場の量子論における散乱問題

前節で述べた通り、場の量子論は特殊相対性原理を尊重した普通の量子力学である。したがって散乱理論の大枠は変更を受けない。ここでは非摂動ハミルトニアンとして自由粒子ハミルトニアンを採用し、相互作用が自由粒子に対する摂動的と扱えるような、自由粒子描像に基づいた散乱問題を考える。

n で粒子種を表すことにして、自由ハミルトニアンは

$$H_0 := \sum_n \int d^3p E_n(p) a^\dagger(p, \sigma_n, n) a(p, \sigma_n, n) \quad (4.2.1)$$

で定まる。ここで

$$E_n(p) := p^0 = \begin{cases} \sqrt{m_n^2 + |\vec{p}|^2} & , p^2 = -m^2 \\ |\vec{p}| & , p^2 = 0 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

を定めた。無質量粒子に対しては、 $k^2 = 0$, $k^0 =: \omega$ などと区別して表すこともある。自由場の理論はハミルトニアンが式 (4.2.1) で与えられるように組まれる。

ハミルトニアン密度を $(x - y)^2 \geq 0$ の場合に

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)] = 0 \quad (4.2.3)$$

となるように場の演算子 $\{\Psi_\ell(x)\}$ を用いて構成する。これを用いて相互作用演算子を

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\Psi_\ell, \Psi_\ell^\dagger; x) \quad (4.2.4)$$

と定めれば、Poincaré 対称性とエルミート性が担保できる。

次に、粒子描像について考える。演算子は場で構成されるため、Heisenberg 描像での演算子 $\mathcal{O}(\vec{x}, t)$ は粒子描像の演算子と

$$\mathcal{O}(\vec{x}, t) = \Omega^\dagger(t) \mathcal{O}^I(\vec{x}, t) \Omega(t) \quad (4.2.5)$$

で結ばれる¹。量子力学で $H = H_0 + V$ による発展を考えると、 V が短距離相互作用なら遠方では H_0 の理論であるように見做せた。しかし場の量子論では、相互作用の存在下では自己相互作用によって遠方でもその H_0 の理論であるように見做せない。このため粒子描像を用いるためには、自己相互作用を繰り込んで作った \check{H}_0 の理論を用いる必要がある。つまり、場の量子論では相互作用のある理論は強収束の意味では自由場の理論に落ち着かないのである。したがって厳密には代数に基づく散乱理論を考えることになるが、極限で成り立つ等号を弱収束の意味だと了解することで形式的には状態に基づく散乱理論のように定式化することができる。多くの物理の教科書でこの記法が用いられている。

量子力学の例で、時刻 $t = 0$ で位置 $\vec{x} \sim \vec{x}_0$ 付近に局在する自由粒子状態は、 $|t| \rightarrow \infty$ では運動量 $\vec{p} \sim \frac{m}{t} \vec{x}_0$ を持つ平面波となることを見た。したがって波束の幅を無視できる程充分小さいものと考えらることで、Heisenberg 表示では運動量固有状態

$$\vec{P} \Phi_{\vec{p}} = \vec{p} \Phi_{\vec{p}} \quad (4.2.6)$$

を散乱状態と見做せる。つまり、

$$\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{M}_\infty(H_0) \sim \text{Span} \left\{ \Phi_{\vec{p}}, \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \left| \frac{\vec{P}^2}{2m} \Phi_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \Phi_{\vec{p}} \right. \right\} \quad (4.2.7)$$

¹場の量子論の理論構成には Heisenberg 描像を使うのが最も理解しやすいため、Heisenberg 描像を区別する添字は使われないことが多い。

としてよい²。この意味で、Møller 演算子が存在するとき漸近自由粒子状態は

$$H\Psi_{\vec{p}}^{\pm} = H\Omega_{\pm}^{\dagger}\Phi_{\vec{p}} = \Omega_{\pm}H_0(\vec{P})\Phi_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m}\Psi_{\vec{p}}^{\pm} \quad (4.2.8)$$

となり、エネルギー固有状態で張られる空間に属すると考えてよい。弱い漸近完全性条件が成り立てば、

$$\Omega_{\pm}^{\dagger}\mathcal{H}_0 = \mathcal{M}_{\infty}(H) = \mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \equiv \mathcal{H} \quad (4.2.9)$$

となって、散乱問題で考える元の理論の Hilbert 空間は、運動量固有状態で張られるもので近似できる。このため、運動量 \vec{p}_i を持つ粒子 i の生成演算子を真空中に作用させていくことで構成される Hilbert 空間：Fock 空間 $\mathcal{H}_{\text{F}}(H_0)$ が自由粒子状態を表す。すなわち、

$$\mathcal{H}_{\text{F}} = \mathcal{M}_{\infty}(H_0) \equiv \mathcal{H}_0. \quad (4.2.10)$$

場の量子論でもこのように考えて散乱問題を記述する。先に述べたように、自由場の理論の状態は真空中に生成演算子を作用させることで構成される Hilbert 空間：Fock 空間 $\mathcal{H}_{\text{F}}(H_0)$ の元である。それと同じスペクトルを与えるが異なる Fock 空間 $\mathcal{H}_{\text{F}}(\check{H}_0)$ があって、

$$\mathcal{H}_{\text{F}}(H_0) \stackrel{w}{=} \mathcal{H}_{\text{F}}(\check{H}_0) \xrightarrow{\Omega^{\dagger}} \mathcal{H}_{\text{ac}}(\check{H}_0 + \check{V}) \xleftarrow{\text{繰り込み}} \mathcal{H}_{\text{ac}}(H_0 + V) \equiv \mathcal{H} \quad (4.2.11)$$

と考えると議論するのが、標準的な散乱問題の取り扱いである。このとき、代数的な意味での漸近的完全性は仮定してある。これを単に Møller 演算子の作用が

$$\Omega^{\dagger} : \mathcal{H}_{\text{F}} \mapsto \mathcal{H} \quad (4.2.12)$$

であると省略して書くのが標準的な記法である。

4.3 Kulish-Faddeev のドレス状態形式

序論で述べたとおりドレス状態形式の論文は数多くある。その中で最も有名なものが Kulish-Faddeev のドレス状態形式である [25]。ドレス状態形式のことを単に Kulish-Faddeev 形式という流儀もある。しかしドレス状態形式はそれぞれ異なる仮定を課したもの、異なる性質を持つものなど、実際は多種多様である。

ドレス状態形式を扱う人によって用語や方法、解釈に差異が多く見られるので、ここでは Kulish-Faddeev の原論文そのものの説明を行い、我々の用いる用語を確認する。その後で、提案する散乱問題の定式化を行うことで、混乱は少なくなるだろう。

4.3.1 Fock 基底での Dyson の散乱行列

Kulish-Faddeev の論文を見る前に、通常の散乱問題について振り返ってみよう。適宜 3 章を参考にするとよい。

Møller 演算子 Ω_{\pm}^{\dagger} の存在と、それぞれが完全であることを仮定する。このとき、未来/過去漸近自由粒子空間 $\mathcal{H}_{\infty}^{\pm}$ は興味ある未来/過去散乱空間 $\mathcal{M}^{\pm}(H)$ と一致する³。すなわち、

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}} = \langle \Phi_{\beta}^{+} | \Phi_{\alpha}^{-} \rangle \equiv \langle \Psi_{\beta}^{+} | \Psi_{\alpha}^{-} \rangle = S_{\beta\alpha}. \quad (4.3.1)$$

散乱理論ではこの散乱行列を求めることが主題と言える。強い漸近完全性が成り立つとき、

$$\mathcal{H}_{\infty}^{\pm} \equiv \mathcal{H}_{\infty} = \mathcal{M}_{\infty}(H) \equiv \mathcal{H} \quad (4.3.2)$$

²数学的には、Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ と稠密性から元の Hilbert 空間を構成するというのを省略しているといったところだろう。

³Weinberg の教科書では Lippman-Schwinger 方程式の正則化で与える $\pm i\epsilon$ の符号に合わせて、入射状態を $\Psi^{+} \in \mathcal{M}_{\infty}^{+}(H)$ 放射状態を $\Psi^{-} \in \mathcal{M}_{\infty}^{-}(H)$ で表すが、本論文では過去を $-$ 未来を $+$ で表すように決める。

のように、未来/過去散乱空間はどちらも同じになり、散乱空間を理論の Hilbert 空間 \mathcal{H} と見做して議論を進めてもよい。標準的な散乱理論ではここまでを仮定する。

散乱の状況として、基準の時刻 $t = 0$ から充分遠くの過去の状況に対応する入射状態 $|\Psi_{\alpha}^{-}\rangle$ が散乱を経て、充分遠くの未来での状況に対応する放射状態 $|\Psi_{\beta}^{+}\rangle$ へ遷移する過程を考えたい。Møller 演算子を使うと入射/放射状態と自由粒子状態が

$$\Omega_{\pm} |\Psi_{\alpha}^{\pm}\rangle \stackrel{w}{=} |\Phi_{\alpha}\rangle \quad (4.3.3)$$

で結ばれる。これを使うと、

$$S_{\beta\alpha} = \langle \Psi_{\beta}^{+} | \Omega_{+}^{\dagger} \Omega_{+} \Omega_{-}^{\dagger} \Omega_{-} | \Psi_{\alpha}^{-} \rangle = \langle \Phi_{\beta} | \mathcal{S}_D | \Phi_{\alpha} \rangle, \quad \mathcal{S}_D = \Omega_{+} \Omega_{-}^{\dagger} = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V^I(\tau) \right] \quad (4.3.4)$$

となる。Dyson の散乱演算子は $\mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}$ の写像と $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_F$ の写像の合成だから、 \mathcal{S}_D は \mathcal{H}_F から \mathcal{H}_F への写像である。式 (4.3.4) が粒子描像における散乱行列である。

Dyson の散乱演算子は広義積分で定義されている。量子力学の Coulomb 散乱で見たように、長距離相互作用による散乱ではこの広義積分は収束しない。実際、量子電磁気学 (QED) では赤外発散によってこれは収束せず、式 (4.3.4) の散乱行列は存在しない。Coulomb 散乱では位相の発散が現れるのみだったが、QED ではさらに状況は悪く、絶対値にも無限大が現れてしまう。

4.3.2 Kulish-Faddeev 形式

2 章で見たように、場の量子論の赤外発散に対応する標準的な方法は、無数の軟粒子の放出過程を考慮する Bloch-Nordsieck 形式である。この方法を使えば有限の遷移確率が計算できるものの、散乱行列は定義されないままである。

そこで、赤外有限な散乱行列を定義する向きの研究も起こった。Chung は漸近状態として自由粒子状態ではなく、無数の光子が取り巻くコヒーレント状態を考えることで Dyson の散乱行列の絶対値が赤外有限となることを示した [20]。Chung の論文はドレス状態を用いることで散乱行列が定義される可能性を指摘した点で非常に重要であり、ドレス状態形式の始まりと言える。一方、彼の議論は赤外有限となる漸近状態を手で与えるものであり、漸近状態を選ぶための指導原理がなかった。そのため可能な漸近状態が無数に存在し、有用な予言を引き出すことができない。また、位相の発散については単に無視するという手法をとる点も、散乱行列の定義を目指す上では不満が残る。

その後 Kibble は 1968 年に、Chung の考案したドレス状態の属する Hilbert 空間に関する議論を行った [21–24]。Chung が提案したドレス状態は Fock 空間には属さず、より広い Hilbert space に属することが示された。この Hilbert 空間は von Neumann 空間と呼ばれる。Fock 空間が真空に生成演算子を N 個作用させて構成される Hilbert 空間 \mathcal{H}_N の直和からなる可分な Hilbert 空間であるのに対し、von Neumann 空間は \mathcal{H}_N のテンソル積からなる不可分な Hilbert 空間である。Kibble はさらに、von Neumann 空間のうちの可分な部分空間：Kibble 空間の元から、別の Kibble 空間の元への写像を与える演算子として散乱行列を新たに定義した。しかしこの Kibble のドレス状態形式は、その構成が荷電粒子の詳細な発展に依存するため実行が困難であるという実用上の問題があった。またさらに重要な問題として、 $\alpha \rightarrow \alpha$ の過程が記述できないという特徴がある。

Chung の論文が出版されるわずか 1 年前の 1964 年に、Dollard によって量子力学の Coulomb 散乱における散乱行列の数学的な定式化が達成された [104]。この方法は 3 章で説明した通り、遠い過去/未来での相互作用を考慮して Møller 演算子を修正する方法である。Kulish-Faddeev は 1970 年にこれらの状況を踏まえて新たなドレス状態形式を提案した [25]。彼らの発想は、Dollard の方法と Chung の方法を合わせることで、Kibble のドレス状態形式の困難を解決し、Chung のドレス状態にさらに制限を与えるのではないかというものである。すなわち、漸近状態と散乱演算子を共に再定義することで、Fock 空間の元から Fock 空間の元への

遷移を与える赤外有限な散乱行列が構成できるのではないかと考えた。

この小節では Kulish-Faddeev が与えたドレス状態形式の説明を行う。好意的に解釈を行うことはいつでも可能だが、それによって元々の議論が曲解されることや、定義が多義的になって混乱を生むことが散見されるので、ここでは論文での主張をそのまま解説することにする⁴。そして次の小節で指摘する箇所については、式の初めに“!” の記号をつけることで強調しておく。

Kulish-Faddeev の漸近相互作用

さて、これから具体的に Kulish-Faddeev によるドレス状態形式を見ていく。彼らの用いたラグランジアンは次の Feynmann ゲージを取った共変的なものである。

$$!:\quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \bar{\Psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi - ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu + \mathcal{L}_c. \quad (4.3.5)$$

ここで \mathcal{L}_c は繰り込みの相殺項である。相互作用表示でのベクトル場 $\tilde{a}_\mu(x) := \Omega^\dagger(t)\tilde{A}_\mu(\vec{x})\Omega(t)$ およびスピノル場 $\psi(x) := \Omega^\dagger(t)\Psi(\vec{x})\Omega(t)$ はそれぞれ

$$\tilde{a}_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \sum_{\vec{h}} \left(\epsilon_\mu(\vec{k}, \vec{h}) e^{ik\cdot x} a(\vec{k}, \vec{h}) + \epsilon_\mu^*(\vec{k}, \vec{h}) e^{-ik\cdot x} a^\dagger(\vec{k}, \vec{h}) \right), \quad k^0 = |\vec{k}| =: \omega \quad (4.3.6)$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \left(u_\sigma(\vec{p}) e^{ip\cdot x} b_\sigma(\vec{p}) + v_\sigma(\vec{p}) e^{-ip\cdot x} d_\sigma^\dagger(\vec{p}) \right), \quad p^0 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} =: E_p \quad (4.3.7)$$

で表せる。ここで、 $h = \{+, -\}$ をヘリシティ ± 1 の横波モード、 $I = \{S, L\}$ をスカラーモード、縦波モードとして $\tilde{h} = \{h, I\}$ で表した。以後チルダ ($\tilde{}$) は非物理モード I を含むことを明示する記号として用いる。 $a(\vec{k}, \vec{h})$ は運動量 \vec{k} 、モード \vec{h} の光子の消滅演算子であり、 $b_\sigma(\vec{p})$ 、 $d_\sigma(\vec{p})$ はそれぞれスピン σ 、運動量 \vec{p} を持つ電子、陽電子の消滅演算子である。ベクトル場の偏極ベクトル $\epsilon_\mu(\vec{k}, \vec{h})$ の性質や、スピノル場の係数関数 $u_\sigma(\vec{p})$ 、 $v_\sigma(\vec{p})$ の性質は付録 E.3 に記す。

QED の相互作用は次のものである。

$$\tilde{V}^I(t) = ie \int d^3x \tilde{a}_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x). \quad (4.3.8)$$

Kulish と Faddeev はこの相互作用の $|t| \rightarrow \infty$ での漸近形を考え、それを漸近相互作用 \tilde{V}_{as} と名付けた。

相互作用を場を用いて書き下すと、

$$\begin{aligned} \tilde{V}^I(t) = ie \int d^3x \sum_{\vec{h}\sigma\sigma'} \int \frac{d^3k d^3p d^3q}{(2\pi)^{9/2}\sqrt{2\omega}} \left[a_\mu(\vec{k}, \vec{h}) e^{ik\cdot x} \left\{ \right. \right. \\ \left. \left. e^{i(p+q)\cdot x} \bar{v}_\sigma(\vec{p}) \gamma^\mu u_{\sigma'}(\vec{q}) d_\sigma(\vec{p}) b_{\sigma'}(\vec{q}) + e^{-i(p+q)\cdot x} \bar{u}_\sigma(\vec{p}) \gamma^\mu v_{\sigma'}(\vec{q}) b_\sigma^\dagger(\vec{p}) d_{\sigma'}^\dagger(\vec{q}) \right. \right. \\ \left. \left. + e^{i(p-q)\cdot x} \bar{v}_\sigma(\vec{p}) \gamma^\mu v_{\sigma'}(\vec{q}) d_\sigma^\dagger(\vec{p}) d_{\sigma'}(\vec{q}) + e^{-i(p-q)\cdot x} \bar{u}_\sigma(\vec{p}) \gamma^\mu u_{\sigma'}(\vec{q}) b_\sigma^\dagger(\vec{p}) b_{\sigma'}(\vec{q}) \right\} + \text{h.c.} \right] \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

を得る⁵。ここで \vec{x} について積分を行い、それに伴って現れる運動量のデルタ関数を用いて \vec{q} 積分まで行う。

式 (4.3.9) の 1 行目について、指数関数の肩にある t の係数は $\omega \pm (E_p + E_{p\pm k})$ で与えられる。これは常に正なので、1 行目の相互作用は激しい振動によって全て消えると考えられる。これは Dollard 形式で鞍点とならない項を無視するのと同様である。

2 行目の t の係数は $\omega \pm (E_p - E_{p\pm k})$ で与えられる。これは $\omega = 0$ で 0 となるため無視できないと考える。そこで $\omega = 0$ の部分を抜き出して漸近相互作用を定義した。すなわち $|t| \sim \infty$ での漸近形

$$!:\quad V^I(t) \sim \tilde{V}_{\text{as}}^I(t) := e \sum_{\vec{h}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3p \rho(\vec{p}) v_p^\mu [a_\mu(\vec{k}, \vec{h}) e^{ik\cdot v_p t} + (\text{h.c.})], \quad (4.3.10)$$

⁴ただし、定義や記法は本論文のものに合わせる。そうすることで本論文での定義や記法と、その他の論文でのそれらを比べることができるはずだ。

⁵ $a_\mu(\vec{k}, \vec{h}) := \epsilon_\mu(\vec{k}, \vec{h}) a(\vec{k}, \vec{h})$ とした。

$$v_p^\mu := p^\mu/E_p, E_p := \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \boldsymbol{\rho}(\vec{p}) := \sum_\sigma [b_\sigma^\dagger(\vec{p})b_\sigma(\vec{p}) - d_\sigma^\dagger(\vec{p})d_\sigma(\vec{p})] \quad (4.3.11)$$

によって漸近相互作用を定めた。これは

$$\tilde{V}_{\text{as}}^I(t) = \int d^3x \tilde{a}_\mu(x) j_{\text{cl}}^\mu(x), j_{\text{cl}}^\mu(x) = e \int d^3p v_p^\mu \boldsymbol{\rho}(\vec{p}) \delta^3(\vec{x} - \vec{v}_p t) \quad (4.3.12)$$

とも表せる。したがって充分遠い過去/未来では個々の独立な荷電粒子に光子が結合しているように見える。

Kulish-Faddeev の漸近散乱演算子

Kulish-Faddeev は Dollard に倣って、漸近ハミルトニアン $H_{\text{as}} := H_0 + \tilde{V}_{\text{as}}$ による発展演算子から散乱行列を再定義した。自由ハミルトニアンによる発展演算子は式 (3.1.57)、つまり

$$i\partial_t U_0(t) = H_0^S U_0(t) \quad (4.3.13)$$

を満たす。漸近相互作用を取り入れて、 H_0 を H_{as} に変えると、

$$i\partial_t U_{\text{as}}(t) = H_{\text{as}}^S U_{\text{as}}(t) \quad (4.3.14)$$

となる。Kulish-Faddeev はこの微分方程式を $U_{\text{as}}(t) = e^{-iH_0^S t} \tilde{Z}(t)$ の仮定を置いて解いた。この仮定から、

$$i \frac{d}{dt} \tilde{Z}(t) = \tilde{V}_{\text{as}}^I(t) \tilde{Z}(t) \quad (4.3.15)$$

が得られ、形式解が

$$\tilde{Z}(t) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{\partial_{\text{KF}}}^t d\tau \tilde{V}_{\text{as}}^I(\tau) \right] \quad (4.3.16)$$

と与えられる。 ∂_{KF} は微分方程式に課す境界条件を表す。これは次のように解ける。

$$\tilde{Z}(t) = \exp \left[-i \int_{\partial_{\text{KF}}}^t d\tau \tilde{V}_{\text{as}}^I(\tau) - \frac{1}{2} \int_{\partial_{\text{KF}}}^t d\tau \int_{\partial_{\text{KF}}}^\tau d\tau' [\tilde{V}_{\text{as}}^I(\tau), \tilde{V}_{\text{as}}^I(\tau')] \right]. \quad (4.3.17)$$

この境界条件として、有限時間を T とするとき $V_{\text{as}}(T)$ が運動量演算子と非可換だから、Poincaré 対称性から $|t| \sim \infty$ の効果のみを含むと考えた。そこで、積分の下端の寄与を手で取り除き、

$$! : \tilde{Z}(t) \stackrel{\partial_{\text{KF}}}{\cong} e^{\tilde{\mathbf{R}}(t)} e^{i\boldsymbol{\theta}(t)}, \quad (4.3.18)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) := \int d^3k \int d^3p \sum_{\tilde{h}} [\tilde{\mathbf{f}}(p, k, \tilde{h}; t) a^\dagger(\vec{k}, \tilde{h}) - (\text{h.c.})], \quad (4.3.19)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}(p, k, \tilde{h}; t) := \frac{e\boldsymbol{\rho}(\vec{p})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \frac{p \cdot \epsilon^*(k, \tilde{h})}{k \cdot p} e^{-ik \cdot v_p t}, \quad (4.3.20)$$

$$i\boldsymbol{\theta}(t) := i \frac{e^2}{8\pi} \int d^3p \int d^3q \boldsymbol{\rho}(\vec{p}) \boldsymbol{\rho}(\vec{q}) \frac{p \cdot q}{\sqrt{(p \cdot q) - m^4}} \int^t \frac{d\tau}{\tau} \quad (4.3.21)$$

を採用する。Poincaré 対称性を尊重するために運動量積分は全て全域を渡るが、関係式

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{v_p \cdot k} e^{ik \cdot v_p t} = \pm i\pi \delta(k \cdot v_p) \quad (4.3.22)$$

のために、この境界条件の下では $\omega \sim 0$ のものが抜き出される。

$\tilde{\mathbf{R}}(t)$ またはこれを指数関数の肩に乗せたもの：

$$D_{\tilde{\mathbf{f}}(t)} := \exp \left[\int d^3k \int d^3p \sum_{\tilde{h}} [\tilde{\mathbf{f}}(p, k, \tilde{h}; t) a^\dagger(\vec{k}, \tilde{h}) - (\text{h.c.})] \right] \quad (4.3.23)$$

をドレス演算子と呼ぶ。これは量子力学でコヒーレント状態を作る際の真空の並進演算子-displacement operator と同じ形をしている。量子力学におけるコヒーレント状態の性質は付録 A に置く。 $i\theta(t)$ は無限大の位相因子であり、後で見るように散乱行列の位相の発散を取り除く役割を担う。

発展演算子 U_{as} を得たので、これを使って散乱演算子を次のように定義した。

$$\mathcal{S}_{\text{KF}} := \lim_{t' \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty} \mathcal{S}_{\text{KF}}^{\text{as}}(t', t), \quad (4.3.24)$$

$$\mathcal{S}_{\text{KF}}^{\text{as}}(t', t) := \tilde{Z}^\dagger(t') \mathcal{S}(t', t) \tilde{Z}(t), \quad \mathcal{S}(t', t) := \mathcal{T} \exp \left[-i \int_t^{t'} d\tau V^I(\tau) \right]. \quad (4.3.25)$$

式 (4.3.22) より

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{\mathbf{R}}(t) = 0 \quad (4.3.26)$$

となるので、 \mathcal{S}_{KF} は $t \rightarrow \pm\infty$ の極限が存在すれば次のように定まる。

$$\mathcal{S}_{\text{KF}} = e^{-i\theta(\infty)} \mathcal{S}_D e^{i\theta(-\infty)}. \quad (4.3.27)$$

Kulish-Faddeev の漸近状態

Kulish-Faddeev の散乱演算子 \mathcal{S}_{KF} は $D_{\tilde{f}(t)}$ を含む演算子の $|t| \rightarrow \infty$ の極限として定義される。極限が収束するように漸近状態の属する Hilbert 空間を考えよう。

\tilde{Z} は荷電粒子と光子を混ぜないので、 $\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_\psi \oplus \mathcal{H}_\gamma$ のように荷電粒子と光子の Hilbert 空間に分解して考えるのが便利だ。真空は荷電粒子の真空 $|0; \psi\rangle$ と、光子の真空 $|0; \gamma\rangle$ の直和と考え、 $|0\rangle = |0; \psi\rangle |0; \gamma\rangle$ と表すことにする。漸近状態が荷電粒子を含む自由粒子状態

$$\mathcal{H}_F \ni |\Phi_\alpha\rangle = |\psi_\alpha\rangle |0; \gamma\rangle := b_{\sigma_1}^\dagger(\vec{p}_1) \cdots b_{\sigma_N}^\dagger(\vec{p}_N) d_{s_1}^\dagger(\vec{q}_1) \cdots d_{s_M}^\dagger(\vec{q}_M) |0; \psi\rangle |0; \gamma\rangle \quad (4.3.28)$$

で与えられる場合を考える。このとき、

$$D_{\tilde{f}(t)} |\Phi_\alpha\rangle = |\psi_\alpha\rangle \otimes |\tilde{f}_\alpha(t)\rangle, \quad |\tilde{f}_\alpha(t)\rangle := D_{\tilde{f}_\alpha(t)} |0; \gamma\rangle \quad (4.3.29)$$

$$D_{\tilde{f}_\alpha(t)} := \exp \left[\sum_{\tilde{h}} \int d^3k [f_\alpha(k, \tilde{h}; t) a^\dagger(\vec{k}, \tilde{h}) - \text{h.c.}] \right], \quad (4.3.30)$$

$$\tilde{f}_\alpha(k, \tilde{h}; t) := \sum_{n \in \alpha} \frac{e_n}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \frac{p_n \cdot \overline{\epsilon(k, \tilde{h})}}{k \cdot p_n} e^{-ik \cdot v_n t}, \quad v_n^\mu := p_n^\mu / E_n, \quad E_n := \sqrt{m^2 + |\vec{p}_n|^2} \quad (4.3.31)$$

が得られる。ここで整数 n は荷電粒子を指定する添字である。これらの表式は荷電粒子の種類を増やす場合は質量を $m \rightarrow m_n$ とすればそのまま使える。これはまさに光子のコヒーレント状態である。荷電粒子が存在する場合

$$\sum_{\tilde{h}} \int d^3k \left| \tilde{f}(\vec{k}, \tilde{h}; t) \right|^2 = \infty \quad (4.3.32)$$

となるので、 \mathcal{S}_{KF} は Fock 空間上の演算子としては定義されない。このことから、漸近状態についても自由粒子状態からドレス状態に変更する必要があると考える。

量子力学を思い出すと、式 (4.3.32) の左辺は光子の平均粒子数を表す。一般に無限個の光子がコヒーレントにまとわりついた状態が属する空間を、

$$\sum_{\tilde{h}} \int d^3k \left| \alpha(\vec{k}, \tilde{h}) \right|^2 = \infty \quad (4.3.33)$$

を満たすドレス演算子の関数 α で特徴付けられた空間

$$\mathcal{H}_\alpha^{\text{as}} = D_\alpha \mathcal{H}_F \quad (4.3.34)$$

と表すことにしよう。Chung や Kibble のドレス状態はこのような空間に含まれる。

Kulish-Faddeev は漸近状態が \mathcal{S}_{KF} が定義されるような $\mathcal{H}_\alpha^{\text{as}}$ に属すると考えた。そのような Hilbert 空間の元から、物理的な漸近状態 $|\Psi_\alpha^{\text{KF}}\rangle \in \mathcal{H}_{\text{as}}^{\text{phys}} \subset \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{\text{as}}$ は

$$|\Psi_\alpha^{\text{KF}}\rangle := D_{\tilde{g}_\alpha}^\dagger |\Phi_\alpha\rangle, \quad D_{\tilde{g}_\alpha} := \exp \left[\sum_{\tilde{h}} \int d^3k [g_\alpha^\mu(\vec{k}) \bar{\epsilon}_\mu(\vec{k}, \tilde{h}) a^\dagger(\vec{k}, \tilde{h}) - (\text{h.c.})] \right], \quad (4.3.35)$$

$$g_\alpha^\mu(\vec{k}) := \sum_{n \in \alpha} \frac{\phi_n(k, p_n) e_n}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \left(\frac{p_n^\mu}{p_n \cdot k} + \bar{k}^\mu \right) \quad (4.3.36)$$

を選ぶ。ここで、 $\phi_n(k, p_n)$ は \mathcal{S}_{KF} の収束条件

$$! : \quad -\frac{1}{2} \sum_{\tilde{h}} \int d^3k \left| \tilde{g}_\alpha(\vec{k}, \tilde{h}) - \tilde{f}_\alpha(\vec{k}, \tilde{h}; t) \right|^2 < \infty, \quad \text{Im} \left[\sum_{\tilde{h}} \int d^3k \tilde{g}_\alpha^*(\vec{k}, \tilde{h}) \tilde{f}_\alpha(\vec{k}, \tilde{h}; t) \right] < \infty \quad (4.3.37)$$

を満たす限り任意の関数である。これは $\omega \sim 0$ の周りで 1 の値を返す関数で実現できる。また、 $\tilde{g}_\alpha(k, \tilde{h}) := g_\alpha^\mu(\vec{k}) \bar{\epsilon}_\mu(\vec{k}, \tilde{h})$ を定めた。 \bar{k}^μ は $\vec{k} \cdot k = -1$ となるヌルベクトル

$$\bar{k}^\mu = \frac{1}{2\omega} (1, -\hat{k}) \quad (4.3.38)$$

である。 \bar{k}^μ は漸近状態から非物理的なモード $I = \{S, L\}$ 排除するための自由 Gupta-Bleuler(GB) 条件：

$$! : \quad k^\mu \epsilon_\mu(\vec{k}, \tilde{h}) a(\vec{k}, \tilde{h}) |\Psi_\alpha^{\text{KF}}\rangle = 0, \quad \forall (\vec{k}, \tilde{h}) \quad (4.3.39)$$

を要請するために導入された。この条件は漸近状態の式 (4.3.35) に $k_\mu g_\alpha^\mu = 0$ の条件を与える。

ここまでで散乱演算子と漸近状態を定めた。Kulish-Faddeev はこれを用いて散乱行列 $S_{\beta\alpha}^{\text{KF}}$ を

$$S_{\beta\alpha}^{\text{KF}} := \lim_{t' \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \langle \Psi_\beta^{\text{KF}} | \mathcal{S}_{\text{KF}}^{\text{as}}(t', t) | \Psi_\alpha^{\text{KF}} \rangle \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \Phi_\beta | D_{\tilde{g}_\alpha} \tilde{Z}^\dagger(t') \mathcal{S}(t', t) \tilde{Z}(t) D_{\tilde{g}_\alpha}^\dagger | \Phi_\alpha \rangle \quad (4.3.40)$$

と定めた。 t の極限が収束するなら、式 (4.3.26) を考慮して

$$! : \quad S_{\beta\alpha}^{\text{KF}} = \langle \langle \Psi_\beta^{\text{KF}} | e^{-i\theta(\infty)} \mathcal{S}_D e^{i\theta(-\infty)} | \Psi_\alpha^{\text{KF}} \rangle \rangle = \langle \Phi_\beta | e^{-i\theta(\infty)} D_{\tilde{g}_\alpha} \mathcal{S}_D D_{\tilde{g}_\alpha}^\dagger e^{i\theta(-\infty)} | \Phi_\alpha \rangle \quad (4.3.41)$$

と表せる。無限大の位相因子は当初の期待通り、散乱行列に現れる無限大の位相を打ち消してくれる。式 (4.3.41) の赤外有限性は広く受け入れられているが、Kulish-Faddeev の議論は不完全である。

4.3.3 Kulish-Faddeev 形式のいくつかの問題点

Chung は QED の漸近状態が

$$|\Psi_\alpha^{\text{Ch}}\rangle := \exp \left[\sum_{h=\pm} \int d^3k \left[f_\alpha(\vec{k}, h; t=0) a^\dagger(\vec{k}, h) - (\text{h.c.}) \right] \right] |\Phi_\alpha\rangle = D_{f_\alpha(t=0)} |\Phi_\alpha\rangle, \quad (4.3.42)$$

$$f_\alpha(\vec{k}, h; t) := \sum_{n \in \alpha} \frac{e_n}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \frac{p_n \cdot \bar{\epsilon}(k, h)}{k \cdot p_n} e^{-ik \cdot v_n t} \quad (4.3.43)$$

与えられる場合、 $|\langle \langle \Psi_\beta^{\text{Ch}} | \mathcal{S}_D | \Psi_\alpha^{\text{Ch}} \rangle \rangle|$ が赤外発散を持たないことを証明していた [20]。

そこで Kulish-Faddeev は、漸近状態 $|\Psi_\alpha^{\text{KF}}\rangle$ の赤外部分 $\omega \sim 0$ が Chung の漸近状態 $|\Psi_\alpha^{\text{Ch}}\rangle$ と等価であることを議論し、 $S_{\beta\alpha}^{\text{KF}}$ の赤外有限性の証明とした。その議論では、 $\mathcal{H}_{\text{as}}^{\text{phys}}$ がゲージ変換で不変であること、および $|\Psi_\alpha^{\text{KF}}\rangle$ がゲージ変換で $|\Psi_\alpha^{\text{Ch}}\rangle$ に移れることが重要である。しかし実際には非物理的なモードの存在によって一般の荷電粒子が存在する状態ではこれが不可能である。そのため赤外有限性の証明は不完全である。

このことは“!”付きの式 (4.3.5) と (4.3.39) と深く関係している。彼らのラグランジアン (4.3.5) にはゲージ固定項が含まれるが、ゴースト項が含まれない。このような理論でも、自由 GB 条件 (4.3.39) によって理論から非物理的モードが取り除けると考えられていた。しかし QED には長距離相互作用があるため、自由粒子状態に課す条件が漸近状態に適用されるべきかは非自明である。

平井・杉下はこの疑問に答えるため、理論にゴースト項を入れて BRS 電荷の漸近的な振る舞いについて議論し、次のように結論した [35]。QED での非物理的状態を禁止するゲージ不変条件は自由 GB 条件とは異なる、次の BRS 条件である。

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \mathbf{G}(\vec{k}, \vec{h}, t) |\Psi^{\text{as}}\rangle = 0, \forall (\vec{k}, \vec{h}) \quad (4.3.44)$$

$$\mathbf{G}(\vec{k}, \vec{h}, t) := k^\mu \epsilon_{\mu\alpha} a(\vec{k}, \vec{h}) - \mathbf{q}(\vec{k}, t), \quad \mathbf{q}(\vec{k}, t) := \int d^3p \frac{e\boldsymbol{\rho}(\vec{p}) e^{-ik \cdot v_p t}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}}. \quad (4.3.45)$$

\mathbf{q} は GB 条件で無視されてきた漸近相互作用の効果を表し、漸近状態が非物理的光子のコヒーレント状態であることを要請する。そのため、このような漸近状態は Chung 状態と等価にならない。

$|\Psi_\alpha^{\text{KF}}\rangle$ の α が荷電粒子を含む場合では BRS 条件 (4.3.44) は満たされないため、ゲージ対称性の観点からはよい漸近状態でない。一方、多くの論文で「Kulish-Faddeev のドレス状態」と呼ばれている状態

$$|\Psi_\alpha^{\text{KF}}(t)\rangle := D_{\vec{f}(t)} |\Phi_\alpha\rangle, |t| \sim \infty \quad (4.3.46)$$

は、全電荷が 0 であるような α に対しては条件が満たされる。このことから平井・杉下は、 g_α^μ に含まれる \vec{k}^μ は余分な付け足しであると結論した。しかし、Chung 状態の議論が使えるのは全電荷が 0 の場合だけなので、BRS 条件単体で赤外有限性を示すことはできない。また、発散する位相についても BRS 条件単体では議論できない⁶。

全電荷が 0 でないような $|\Psi_\alpha^{\text{KF}}(t)\rangle$ は漸近状態としてうまく定まらず、「Kulish-Faddeev のドレス状態」は修正されるべきだろうという議論は、漸近対称性の電荷に対する解析からすでに指摘されていた [108]。BRS 条件はこのことを更に支持するものである。

平井・杉下はのちに、Kulish-Faddeev のドレス状態形式をゲージ対称性と赤外有限性の観点から正しく再構成したものを提案した [38]。このドレス状態形式では、BRS 不変性と漸近対称性の議論からドレス状態を構成する。このようにゲージ対称性にまつわる Kulish-Faddeev 形式の抱える問題については明瞭な理解が得られてきているが、他にもいくつか非自明な問題となり得る点がいくつか存在する。

まず、“!”付きの境界条件 (4.3.18) は理論が $|t| \sim \infty$ でのみ定まることを要請しているが、この境界条件を満たすことが本当に可能なのは非自明である。

関数自由度 ϕ_n は“!”付きの収束条件 (4.3.37) の制限を受けるが、 $|t| \sim \infty$ を先にとると式 (4.3.22) から $\phi_n = 0$ 以外が許されず、ドレス状態が存在しないように思える。反対に、有限の t で収束条件を考えればドレス状態は存在するかもしれないが、先ほどの境界条件を満たせなくなるように思える。また、収束条件は赤外領域以外にほとんど制限を与えないため、ドレス状態のうちの硬い光子の振る舞いが定まらない。このため関数自由度 ϕ_n は予言に非自明な寄与を与えてしまい、理論の予言能力を損ねてしまう。このことは量子力学の Coulomb 散乱で現れる関数自由度が、射線に対しては一意に定まるため問題とならないことと対照的である。

また、量子力学では鞍点法から漸近的な振る舞いが解析できたが、“!”付きの漸近相互作用の定義 (4.3.10) は単に最小値をとる部分を抜き出したもので、議論の余地がある。

上記の非自明な問題は“!”付きの式 (4.3.41) のような、演算子を作用させる前に極限を取ってしまう記法が議論を困難にしている。そもそも演算子が収束しなければ作用と極限の順序を入れ替えることはできない。

⁶平井・杉下など、位相の発散は大きな問題ではないと考えて単に無視する場合もある。この処方は散乱行列の定式化の観点からは満足できない。ただし、平井・杉下のドレス状態でも散乱演算子として S_{KF} を使えば位相の発散も正しく打ち消される。

第 5 章

提案する量子散乱問題の定式化

この章では筆者の行った研究内容に基づいて、本学位論文の主題である場の量子論の散乱問題の定式化を行う。定式化の後、非相対論的な量子力学における Coulomb 散乱を例に挙げ、Dollard 形式との関係を確認する。その後、特殊相対論的な電磁気学を記述する QED の散乱問題の解析を行い、散乱理論の物理的な正当性を提示する。最後に、軟重力子の理論を構築して散乱問題を調べることで、場の量子論における軟重力子の役割について議論する。

5.1 提案するドレス状態形式

ここでは散乱問題の定式化を行う。

5.1.1 乗り越えるべき課題

まず、前節で説明した Kulish-Faddeev 形式の抱える幾つかの問題、未解決な疑問をここで確認しておく。

ゲージ対称性

Kulish-Faddeev 形式にはまず、ゲージ対称性の取り扱いに問題があった。明白な共変性を確保するゲージの下では、非物理的な自由度を取り除くための手続きが必要であると考えられている。彼らは自由 Gupta-Bleuler 条件によってこれを実行しようとした¹。しかし現代的な視点に立つと、明白な共変性を確保するゲージをとった理論でのゲージ対称性は、BRS 不変性に焼き直される。QED の場合、自由理論に漸近するという仮定のもとで BRS 不変性は Gupta-Bleuler 条件と等価になる。しかし QED には長距離相互作用があるため、正しくは BRS 電荷の漸近的な振る舞いによってゲージ対称性の条件を定めるべきだというのが、平井・杉下の指摘であった。彼らの議論によると、漸近状態には Coulomb 場に対応するスカラーモードの光子がまとわりついていなくてはならない。

多くの研究は Kulish-Faddeev の議論に基づいており、ゴーストをはじめから導入しない理論でのゲージ対称性の構造は確かめられていなかった。

$|t| \rightarrow \infty$ の極限の取り扱い

Kulish-Faddeev は $|t| \rightarrow \infty$ 極限が収束することを仮定して、形式的に先に極限を取って議論を進めた。この記法は必ずしも誤りではないが、彼らのドレス状態を選ぶための ϕ_n に対する収束条件や、散乱演算子を決めるための境界条件の妥当性の議論を困難にしている。

¹Kulish-Faddeev は $g_\alpha \cdot k = 0$ の条件から g_α^μ が横波の偏極ベクトルで展開できるものとした。この条件によって非物理的自由度が消えて、赤外で Chung のドレス状態と等価になるという議論だったが、 k^μ に比例する項があってもいいので、これは一般的な議論にはならない。

漸近相互作用の定義

極限の取り扱いにも関連するが、漸近相互作用の取り扱いにも議論の余地がある。量子力学の Dollard 形式では粒子の漸近的な運動が鞍点法によって記述できたため、漸近相互作用の取り方はある意味数学的に定まったものであった。しかし場の量子論においては鞍点が存在しない。そこで彼らは位相因子が最小となる $\omega \sim 0$ の部分を漸近相互作用として定義した。そのため漸近相互作用は $|t| \sim \infty$ のところでしか効かず、上記の境界条件に繋がる。量子力学での鞍点には Hamilton-Jacob 方程式が定める軌道という物理的な意味があったが、Kulish-Faddeev が用いた漸近相互作用にはこのような描像はない。

予言能力の問題

量子力学の Dollard 形式では Dollard 演算子に関数自由度が存在したが、この自由度は位相にしか影響しないため、射線に対する演算子としては一意だった。一方 Kulish-Faddeev 形式では漸近状態を収束条件から定める際に関数自由度が現れるが、この自由度は位相以外にも影響し、予言に非自明な寄与を与えてしまう。収束条件は赤外領域以外にほとんど制限を与えないため、漸近状態を定めるための指導原理がなく、理論の予言能力が損なわれてしまう。

赤外三角関係の問題

こちらは Kulish-Faddeev の論文で現れた問題ではないが、前小節で触れたように、所謂「Kulish-Faddeev のドレス状態」は全電荷が 0 となるような特殊な状況でしか漸近対称性を反映しないという議論があった。これは赤外三角関係を考える上ではかなり奇妙なことである。

また、赤外三角関係の物理を信じればメモリー効果もドレス状態形式に組み込まれるべきだが、漸近電荷保存則としての理解は提示されてきたものの、メモリー効果そのものを定量的に計算可能な形で与えるものは存在しなかった。

5.1.2 定式化-スケールの導入

上記の問題を解決または改善するために、散乱問題に 2 つの時刻 $t = \pm T$ の時間一定超曲面 Σ_{\pm} を導入する。そして散乱問題を Σ_{-} での系に対応する状態から、 Σ_{+} での系に対応する状態への遷移を記述する問題として考える。

ここで、理論に現れないスケールである赤外の距離スケール $L_V \equiv T_V$ や紫外の距離スケール ℓ_{ϵ} と、この距離 (時間) スケール T の区別を明らかにしておく²。エネルギースケールに焼き直したものをそれぞれ、

$$\lambda_V := 1/L_V \equiv 1/T_V, \quad \Lambda_{\epsilon} := 1/\ell_{\epsilon}, \quad \lambda_T := 1/T \quad (5.1.1)$$

で表す。理論に現れる適当なエネルギースケールを \mathcal{E} で表し、距離スケールを $\mathcal{L} = 1/\mathcal{E}$ で表すことにする。このとき、物理における ∞ や 0 は、多くの場合

$$(\mathcal{E}/\Lambda_{\epsilon})^{\alpha} \rightarrow \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ \infty & \alpha < 0 \end{cases}, \quad (\lambda_V/\mathcal{E})^{\alpha} \rightarrow \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ \infty & \alpha < 0 \end{cases} \quad (5.1.2)$$

という対応を表す記号である。また $\rightarrow 0$ の意味は数学の極限とは異なり、このスケールを無視するという意味であることが多い。つまり、赤外切断 λ_V や紫外切断 Λ_{ϵ} は理論に有効なスケールを規定するものである³。これは物理のモデルで用いる実数という舞台が近似の産物であることによる。実数の上で 0 に収束する列が取れるという意味での極限が取れるのは、スケール変換不変な理論に対してのみである。

²光速 $c \equiv 1$ の単位系を使っているので、 $L_V \equiv T_V$ とした。

³有効数字 2 桁の計算で 3 桁目以下の数字を無視するようなものだ。

こうしたスケールを導入する利点・目的として

- (i) 極限操作の取り扱いが見やすい。
- (ii) 時空に関する量と、理論で扱う場以外の余分な自由度を導入せずに議論したい。
- (iii) 初期値問題として漸近対称性の自由度を見るのに便利な方法である。

というものがある。

(i) について、例えばエネルギー積分や時空間積分に関して、広義積分は

$$\int_0^\infty d\omega f(\omega) \equiv \int_{\lambda_V}^{\Lambda_\varepsilon} d\omega f(\omega), \quad \int_0^\infty dx F(x) \equiv \int_{\ell_\varepsilon}^{L_V} dx F(x) \quad (5.1.3)$$

を意味するから、 $|t| \rightarrow \infty$ は $|t| \rightarrow L_V$ として、最後に λ_V の正冪の項を全て無視する操作となる。

T のスケールについては

$$(\lambda_V/\lambda_T)^\alpha \rightarrow \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ \infty & \alpha < 0 \end{cases}, \quad \lambda_T \ll \mathcal{E} \quad (5.1.4)$$

を満たすものとする。 $\lambda_T \ll \mathcal{E}$ は散乱問題を粒子描像から摂動論的に扱うために必要だ。一方、 $\lambda_T/\mathcal{E} \rightarrow 0$ の手続きで従来の確立された結果を再現するべきではあるが、これは $\lambda_T/\mathcal{E} \rightarrow 0$ を必ずしも意味しない。 λ_T/\mathcal{E} に関してどの次数までの効果を取り入れるかは状況や目的に応じて解析の最初に決め、それに応じて高次項を無視していけばよい。

(ii) について、Kulish-Faddeev 形式は Dollard 形式による散乱演算子の再定式化と、Chung の漸近状態の再定式化を共に行うものである。散乱演算子の関数自由度は境界条件によって消せるはずだと言及されているものの、示されていない。また、漸近状態の関数自由度を消すためには条件が不充分である。

一方、Dollard 形式では理論の相互作用の情報だけを使って散乱行列を定めることが可能である。Dollard 形式にも余分な関数自由度は存在するが、 X_t の決定方程式から素朴に定まる Dollard 演算子が散乱行列の極の構造を反映した適切なものとして選べる可能性も指摘されている。赤外発散がない理論ではもちろん、理論のハミルトニアンから漸近状態として選ぶべき Fock 空間を考えることができる。このように理論に含まれている場から全てを導くことができれば、余分な関数自由度は考慮する必要がないと思われる。

(iii) について、漸近平坦時空の \mathcal{I}^+ 近傍の時空の解析では、極限を先にとると区別できなくなるような、物理的に意味のある自由度が存在することを見た。場の量子論の散乱問題においても同様に漸近的な議論を行うことで、赤外の自由度が浮かび上がってくるかもしれない。散乱問題が一般の初期値問題を解くことをやめて、代わりに漸近的な境界条件を課した上で始集合から終集合への写像を求める問題だと考えれば、この方法は \mathcal{I}^- から \mathcal{I}^- への散乱問題や、別の時空での散乱問題の議論にも応用できるかもしれない。

5.1.3 定式化-漸近相互作用と漸近状態

散乱問題で真に知りたいのは、ハミルトニアン H の理論での入射状態 $\Psi_\alpha^- \in \mathcal{M}_\infty^-(H) \equiv \mathcal{H}^-$ から放射状態 $\Psi_\beta^+ \in \mathcal{M}_\infty^+(H) \equiv \mathcal{H}^+$ への遷移である。従来の散乱問題では H の理論のことをあまり知らないこともあって、よく知っている自由ハミルトニアン H_0 の理論で代用することを考える。短距離相互作用による散乱の場合、充分遠方では相互作用が無視できて H の理論は Møller 演算子 Ω^\dagger で H_0 の理論と結びつく。しかし長距離相互作用が存在する場合、 H の理論は Ω^\dagger で H_0 の理論と繋ぐことができない。そこで、遠方で残る漸近相互作用 V_{as} の効果を取り入れた Dollard 演算子 Ω_D^\dagger を用いて H_0 の理論と繋ぐのが Dollard 形式であった。言うなれば Dollard 形式は V_{as} を打ち消すように Møller 演算子を修正する方法である。

散乱問題を Σ_- での系に対応する状態から、 Σ_+ での系に対応する状態への遷移を記述する問題として考えるとき、 H の理論と繋ぐべきは H_0 の理論ではなく、 $H_{as} = H_0 + V_{as}$ の理論であろう。また、 $|t| \rightarrow \infty$ の極限では漸近相互作用も 0 になることを見た。そこで、 $t = -T_V$ での自由粒子状態が $t = -T$ まで漸近相互作用

用を受けて発展した状態に入射状態が漸近すると考える。

次のように入射状態と放射状態を恒等的に書き換える。

$$|\Psi_\alpha^-\rangle \equiv \Omega^\dagger(-T)\Omega(-T)\Omega^\dagger(-T_V)\Omega(-T_V)|\Psi_\alpha^-\rangle. \quad (5.1.5)$$

$t = -T_V$ では相互作用が消えるから、 $|\Phi_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_F$ を自由粒子状態として

$$|\Psi_\alpha^-\rangle \stackrel{\text{w}}{=} \Omega^\dagger(-T)\mathcal{S}(-T, -T_V)|\Phi_\alpha\rangle, \quad \mathcal{S}(-T, -T_V) = \mathcal{T} \exp\left[-i \int_{-T_V}^{-T} d\tau V^I(\tau)\right] \quad (5.1.6)$$

という漸近的な対応が期待される。放射状態も同様だ。

さらに T は充分大きいから、 $t \in [-T, -T_V]$ では相互作用を漸近相互作用に近似できるだろう。漸近相互作用として取り入れるべき相互作用を考えるために、Kulish-Faddeev 形式と同様に自由場を $V^I(t)$ に代入する。場の量子論の相互作用に鞍点はないから、相互作用に含まれる位相の中の t の係数が T の正冪より大きくなならないものがあれば、そのような項は全て漸近相互作用として取り入れるべき効果を含むと考える⁴。

次に、漸近平坦時空の \mathcal{S} 近傍の自由度の解析のように、 $1/T = \lambda_T$ に関してどこまでの効果を取り入れた解析を行うかを決める。つまり、主要項まで、準主要項まで、 \dots (準)^k 主要項までを考えるというこの $k = 0, 1, \dots$ を定める。そして先程の相互作用の λ_T で抑えられる部分を (準)^k 主要項を取り出すまで展開し、漸近相互作用として定義する。

この手続きにより、たとえば主要項までを取り入れる解析では $|t| > T$ の領域で

$$V^I(t) = V_{\text{as}}^I(t) + o(1/t) \equiv V_{\text{as}}^I(t) + o(\lambda_T) \quad (5.1.7)$$

となる $V_{\text{as}}^I(t)$ が漸近相互作用として求められる。また、(準)^k 主要項までを取り入れる解析では、

$$V^I(t) = V_{\text{as}}^I(t) + V_{\text{as,SL}}^I(t) + \dots + V_{\text{as,S}^k\text{L}}^I(t) + o(\lambda_T) \quad (5.1.8)$$

となる $V_{\text{as,S}^k\text{L}}^I(t)$ までを漸近相互作用として求めることになる。(準)^(k+1) 主要項を無視することで成り立つことを明示する際には記号 “ $\stackrel{\text{L}}{=}$ ” を使うことにする。つまり、 $|t| > T$ に対して、

$$V^I(t) \stackrel{\text{L}}{=} V_{\text{as}}^I(t) \quad (5.1.9)$$

が漸近相互作用を定める。

漸近相互作用の定義から漸近相互作用による発展演算子を

$$\mathcal{Z}(t', t) := \mathcal{T} \exp\left[-i \int_t^{t'} d\tau V_{\text{as}}^I(\tau)\right] \quad (5.1.10)$$

と定めると、入射状態は

$$|\Psi_\alpha^-\rangle \stackrel{\text{w}}{=} \Omega^\dagger(-T)\mathcal{S}(-T, -T_V)|\Phi_\alpha\rangle \stackrel{\text{L}}{=} \Omega^\dagger(-T)\mathcal{Z}(-T, -T_V)|\Phi_\alpha\rangle \quad (5.1.11)$$

と表せるだろう。そこで、入射状態が漸近する状態：**漸近入射状態**を

$$|\Phi_\alpha(-T)\rangle\rangle := \mathcal{Z}(-T, -T_V)|\Phi_\alpha\rangle =: \mathcal{Z}_-(-T)|\Phi_\alpha\rangle \quad (5.1.12)$$

で定める⁵。また、入射漸近状態の属する空間を

$$\mathcal{H}_{\text{as}}^-(-T) := \mathcal{Z}_-(-T)\mathcal{H}_F \quad (5.1.13)$$

⁴Kulish-Faddeev 形式ではこの係数が 0 となる部分を抜き出す。

⁵Møller とは漸近させる向きが逆なので名前に注意。漸近粒子状態は自由粒子状態に漸近する散乱状態であり、漸近入射/放射状態は散乱状態に漸近する状態である。

で表し、**過去漸近散乱空間**と名付ける。 $\Omega^\dagger(-T)$ の完全性を仮定すれば、

$$\Omega(-T) : |\Psi_\alpha^- \rangle \in \mathcal{H}^- \xrightarrow{W} |\Phi_\alpha(-T)\rangle \in \mathcal{H}_{\text{as}}^-(-T) \quad (5.1.14)$$

となる。“ \xrightarrow{W} ” は代数的な意味での写像を表す。

放射状態に関しても同様に考え、**漸近放射状態**を

$$|\Phi_\beta(T)\rangle \in \mathcal{H}_{\text{as}}^+(T) := \mathcal{Z}(T, T_V) |\Phi_\beta\rangle =: \mathcal{Z}_+(T) |\Phi_\beta\rangle \quad (5.1.15)$$

と定める。**漸近散乱演算子**を

$$\mathcal{S}_{\text{as}}(T) := \Omega(T)\Omega^\dagger(-T) = \mathcal{S}(T, -T) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{-T}^T d\tau V^I(\tau) \right] \quad (5.1.16)$$

と定めると、散乱行列に対して

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &:= \langle \Psi_\beta^+ | \Psi_\alpha^- \rangle \\ &\stackrel{W}{=} \langle \mathcal{Z}_+(T) \Phi_\beta, \mathcal{S}_{\text{as}}(T) \mathcal{Z}_-(-T) \Phi_\alpha \rangle = \langle \langle \Phi_\beta(T) | \mathcal{S}_{\text{as}}(T) | \Phi_\alpha(-T) \rangle \rangle + o(\lambda T) \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

が成り立つ。したがって漸近散乱行列

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) := \langle \langle \Phi_\beta(T) | \mathcal{S}_{\text{as}}(T) | \Phi_\alpha(-T) \rangle \rangle \quad (5.1.18)$$

と散乱行列は

$$S_{\beta\alpha} = \lim_{T \rightarrow \infty} S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) \quad (5.1.19)$$

という関係で結ばれる。 T を有限にとって解析を行いたい場合は、 $S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T)$ が求めるべき散乱行列である。

漸近波動演算子を形式的に

$$\Omega_{\text{as}}^\dagger(-T) := \Omega^\dagger(-T) \mathcal{Z}_-(-T), \quad \Omega_{\text{as}}^\dagger(T) := \Omega^\dagger(T) \mathcal{Z}_+(T) \quad (5.1.20)$$

で定める。これらの演算子が良定義であって、それぞれが完全であると仮定しよう。このとき、Dollard の漸近散乱演算子

$$\mathcal{S}_{\text{D}}^{\text{as}}(T) := \Omega_{\text{as}}(T) \Omega_{\text{as}}^\dagger(-T) = \mathcal{Z}_+^\dagger(T) \mathcal{S}_{\text{as}}(T) \mathcal{Z}_-(-T) \quad (5.1.21)$$

を用いて漸近散乱行列は

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) = \langle \Phi_\beta, \mathcal{S}_{\text{D}}^{\text{as}}(T) \Phi_\alpha \rangle \quad (5.1.22)$$

とも表せる。また、Heisenberg の漸近散乱演算子

$$\mathcal{S}_{\text{H}}^{\text{as}}(T) := \Omega_{\text{as}}(-T) \Omega_{\text{as}}^\dagger(T) = \Omega^\dagger(-T) \mathcal{Z}_-(-T) \mathcal{Z}_+^\dagger(T) \Omega(T) \quad (5.1.23)$$

を用いて

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) = \langle \Psi_\beta^+, \mathcal{S}_{\text{H}}^{\text{as}}(T) \Psi_\alpha^+ \rangle \quad (5.1.24)$$

とも表せる。完全性がなければこれらが等価とは限らないので、式 (5.1.18)、(5.1.22)、および (5.1.24) の右辺をそれぞれ漸近散乱行列、Dollard の漸近散乱行列、Heisenberg の漸近散乱行列と名付ける。

本論文では漸近波動演算子を使わず、漸近入射/放射状態を用いた (5.1.18) の漸近散乱行列を用いる。Heisenberg の漸近散乱行列を使って代数や LSZ 公式などを再考することは興味深いのが、ここでは立ち入らず今後に残しておく。また、本論文では主要項までを扱う解析に議論を限ることにする。(準) $k \geq 1$ 主要項までを扱う解析についても興味深い問題は多々あるが、これも今後に残しておく。

5.2 量子力学における Coulomb 散乱問題

ここではまず、提案する散乱理論と Dollard 形式の関係を Coulomb 散乱を例に見てみよう。 $V(\vec{x}) = C|\vec{x}|^{-1}$, $C > 0$ の散乱に対する Dollard 演算子の決定方程式は

$$\frac{dX_t(\vec{p})}{dt} = V\left(\frac{t}{m}\vec{p}\right) = \frac{mC}{|\vec{p}t|} \quad (5.2.1)$$

であり、これは

$$X_t(\vec{p}) = \text{sgn}(t) \frac{mC}{|\vec{p}|} \log |t| \quad (5.2.2)$$

を解に持つ。ここで $\text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$ とした。Dollard 演算子は

$$\Omega_D^\dagger(t) = e^{iHt} \exp\left[-i\left(H_0t + \text{sgn}(t) \frac{mC}{|\vec{p}|} \log |t|\right)\right] \quad (5.2.3)$$

となるから、

$$S_{\vec{p}'\vec{p}} = \langle \Phi_{\vec{p}'}, \Omega_D(T_V)\Omega_D^\dagger(-T_V)\Phi_{\vec{p}} \rangle = e^{-i(\theta_{\vec{p}'} - \theta_{\vec{p}})} \langle \Phi_{\vec{p}'}, \Omega(T_V)\Omega^\dagger(-T_V)\Phi_{\vec{p}} \rangle, \quad \theta_{\vec{p}} = \frac{mC}{|\vec{p}|} \log T_V \quad (5.2.4)$$

が Coulomb 散乱の散乱行列だ。

一方 $t \in [T, T_V]$ に対して、自由粒子の理論から、

$$\langle V(t) \rangle_0 = \int d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2 \frac{C}{|\vec{x}|} \stackrel{\text{L}}{=} C \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{|\vec{p}|} |\tilde{\psi}(\vec{p})|^2 = \frac{mC}{|t\langle \vec{p} \rangle_0|} \quad (5.2.5)$$

となるから、

$$\mathcal{T} \exp\left[-i \int_{T_V}^T d\tau V_{\text{as}}^I(\tau)\right] |\Phi_{\vec{p}}\rangle = \exp\left[i \int_T^{T_V} d\tau \frac{mC}{|\vec{p}|}\right] |\Phi_{\vec{p}}\rangle = \exp\left[i \frac{mC}{|\vec{p}|} \log(T_V/T)\right] |\Phi_{\vec{p}}\rangle \quad (5.2.6)$$

となって、Dollard 形式と $\lambda_T/\mathcal{E} \rightarrow 0$ の手続きで一致する。ここで、 $S_{\text{as}}(T)$ の計算でも赤外切断は λ_V であることに注意する。

このように本論文で提案する散乱理論は、少なくとも Coulomb 散乱において Dollard 形式を含むものとなっている。

5.3 量子電磁気学における散乱問題

第 5.1 節で提案した散乱理論は、形式的には摂動論的な場の量子論全般に適用可能なものである。そのため明白な共変形式での QED にも適用は可能だが、この理論ではゴーストや非物理的光子の自由度が現れてしまう。平井・杉下が示したように、明白な共変形式での QED の漸近状態には非物理的光子がまわりつき、赤外発散の構造が複雑になる。また、ゴーストや非物理的光子の自由度を取り除くために Hilbert 空間についての議論が必要になるが、そこで関数自由度が入ってしまうことがあった。

そこで今回は物理的自由度のみを持った光子を相互作用描像に持つ QED を解析して、議論することにする。この理論では拘束系のまま正準形式で QED を取り扱う。ゲージ不変ポテンシャルで議論ができる Coulomb ゲージ条件

$$\epsilon^0(\vec{k}, h) = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, h) = 0 \quad (5.3.1)$$

を満たす光子の理論を考え、ゲージ不変性についてはあとで議論することにする。Coulomb ゲージの下での伝搬関数は非共変項を含み理論の Lorentz 対称性を一見損ねてしまうが、これを打ち消すような Coulomb 相互作用にあたる非共変項を相互作用描像での理論に加えることで共変性が担保できる。この理論では Heisenberg 描像での項は共变的になっており、運動方程式は Maxwell 方程式を導く [40]。

5.3.1 漸近相互作用と漸近状態

QED の相互作用

$$V^I(t) = ie \int d^3x a_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (5.3.2)$$

に光子場 $a_\mu(x)$ およびスピノル場 $\psi(x)$ の定義式 (E.4-1)、(E.3-1) をそれぞれ代入すると、Kulish-Faddeev の式 (4.3.9) からチルダを取り去ったものが得られる。Kulish-Faddeev の議論と異なるのは、式 (4.3.9) の 2 行目について指数関数の方にある t の係数 $\omega \pm (E_p - E_{p \pm k})$ に対して、 $\omega \lesssim \lambda_T$ となる光子の運動量領域では無視できないという評価を下すことだ。なぜならこの運動量領域では $\lambda_T \ll m$ となるほど T が充分大きいとすると、

$$\omega \pm (E_p - E_{p \pm k}) = \omega \pm E_p \left[1 - \left(1 \pm \frac{2\vec{k} \cdot \vec{p} + \vec{k}^2}{E_p^2} \right)^{1/2} \right] = -k \cdot v_p + \mathcal{O}(\omega^2 \sim (\lambda_T)^2) \quad (5.3.3)$$

となるため振動しないからである。この運動量領域でのみ相互作用は生き残り、(5.3.3) のように展開パラメータを λ_T した際の主要項は

$$V_{\text{as}}^I(t) = e \sum_h \int_{S_T} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \int d^3p v_p^\mu [\epsilon_\mu(\vec{k}, h) a(\vec{k}, h) e^{ik \cdot v_p t} + (\text{h.c.})] \rho(\vec{p}) \quad (5.3.4)$$

となる。ここで、 $\int_{S_T} d^3k$ は $\omega \in [\lambda_V, \lambda_T]$ の領域での積分を意味する。この相互作用にはベクトル場の非物理的モードが入っていないこと、低エネルギー光子の寄与のみが含まれている点で Kulish-Faddeev の相互作用の式 (4.3.10) と異なる。このため、我々の方法では漸近状態からの紫外発散は存在しない。今、漸近発展演算子 $\mathcal{Z}(-T, -\infty)$ は第 4.3 節と同じ議論によって

$$\mathcal{Z}(-T, -\infty) = e^{\mathbf{R}(-T)} e^{i\theta(-T)}, \quad (5.3.5)$$

$$\mathbf{R}(t) := \int_{S_T} d^3k \int d^3p \sum_h [\mathbf{f}(p, k, h; t) a^\dagger(\vec{k}, h) - (\text{h.c.})], \quad \mathbf{f}(p, k, h; t) := \frac{e\rho(\vec{p})}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \frac{p \cdot \vec{\epsilon}(k, h)}{k \cdot p} e^{-ik \cdot v_p t}, \quad (5.3.6)$$

$$i\theta(-T) := i \frac{e^2}{8\pi} \int d^3p \int d^3q \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \frac{p \cdot q}{\sqrt{(p \cdot q) - m^4}} \log(\lambda_V / \lambda_T) \quad (5.3.7)$$

与えられる。我々の方法では Kulish-Faddeev ドレス演算子を導く際に手で課した、積分の下端が寄与しないという境界条件が関係式 (4.3.22) によって自然と満たされる。

次に漸近入射状態 $|\Phi_\alpha(-T)\rangle$ を求める。粒子描像で式 (4.3.28) のように荷電粒子のみを含む状態と考えられるとき、漸近入射状態 $|\Phi_\alpha(-T)\rangle$ はこの入射粒子状態 $|\Phi_\alpha\rangle$ に漸近発展演算子 $\mathcal{Z}(-T, -\infty)$ を作用させて

$$|\Phi_\alpha(-T)\rangle = \exp \left[i \sum_{m,n \in \alpha} \frac{e_m e_n}{8\pi \beta_{mn}} \log(\lambda_V / \lambda_T) \right] |\psi_\alpha\rangle \otimes |f_\alpha(-T)\rangle, \quad (5.3.8)$$

$$|f_\alpha(-T)\rangle = D_{f_\alpha}(-T) |0; \gamma\rangle, \quad D_{f_\alpha}(-T) := \exp \left[\sum_h \int_{S_T} d^3k [f_\alpha(k, h; -T) a^\dagger(\vec{k}, h) - \text{h.c.}] \right] \quad (5.3.9)$$

$$(5.3.10)$$

と求められる。ここで、 $f_\alpha(k, h; -T)$ は Chung 状態でてきた式 (4.3.43) と等しい。また、 $\beta_{mn} := \sqrt{1 - \frac{m^4}{(p_m \cdot p_n)^2}}$ は粒子の相対速度である。我々の形式では漸近相互作用に現れる光子は低エネルギー光子だけなので、粒子描像の漸近状態に硬い光子を入れる場合にも容易に拡張できる⁶。この場合 $|f_\alpha(-T)\rangle$ はまさに軟光子のコヒーレント状態であり、QED の漸近状態はこのように軟光子がまわりついたドレス状態であると言える。同様にして放射粒子状態に漸近発展演算子を作用させて、漸近放射状態 $|\Phi_\beta(T)\rangle$ も得られる。

⁶硬い光子を入れる場合はエネルギーが $\omega \leq \lambda_T$ の光子の真空 $|0; \gamma_s\rangle$ とエネルギー $\lambda_T < \omega$ の光子の真空 $|0; \gamma_h\rangle$ に分けて、光子の真空を $|0; \gamma\rangle = |0; \gamma_s\rangle |0; \gamma_h\rangle$ のようにすればよい。

5.3.2 漸近散乱行列と物理的な遷移確率

漸近散乱行列の定義式 (5.1.18) より

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) = e^{i\theta_{\beta\alpha}(T,t)} \langle 0 | D_{f_{\beta}(T)}^{\dagger} \prod_{m \in \beta} a(p_m, \sigma_m, \mathcal{N}_m) \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{-T}^T d\tau V^I(\tau) \right] \prod_{n \in \alpha} a^{\dagger}(p_n, \sigma_n, \mathcal{N}_n) D_{f_{\alpha}(-T)} | 0 \rangle \quad (5.3.11)$$

である。 \mathcal{N}_n は n 番目の粒子の種類、つまり、光子や電子、陽電子を表す。 $i\theta_{\beta\alpha}(T,t)$ は漸近状態に付随する $t \rightarrow \infty$ で発散する位相因子

$$\sum_{\substack{m,n \in \alpha \\ m,n \in \beta}} \frac{e_m e_n}{8\pi\beta_{mn}} \log(\lambda_V/\lambda_T) \quad (5.3.12)$$

である。ここでの和は m, n を共に放射粒子状態、もしくは共に入射粒子状態からとる場合を走る。また、 $\prod_{n \in m} a(p_m, \sigma_m, \mathcal{N}_m)$ は放射粒子状態の全ての消滅演算子をかけたものであり、 $\prod_{n \in \alpha} a^{\dagger}(p_n, \sigma_n, \mathcal{N}_n)$ は入射粒子状態の全ての生成演算子をかけたものである。記述を簡潔にするために以降は特別に触れない限りは硬い光子はいないものとし、運動量とスピンの引数も省略する。我々の方法では硬い光子の生成消滅演算子はドレス演算子と可換であるため、硬い光子を議論に加えることは容易である。 $\langle 0 | \mathcal{O} = 0$ となる演算子 \mathcal{O} の違いを除いて等しいことを記号 \doteq と書くことにすると、

$$\begin{aligned} & D_{f(T)}^{\dagger} \prod_{m',n'} b_{m'} d_{n'} \mathcal{S}_{\text{as}}(T) \prod_{m,n} b_m^{\dagger} d_n^{\dagger} D_{f(-T)} \\ &= \prod_{m',n'} b_{m'} d_{n'} \left(\mathcal{S}_{\text{as}}(T) D_{f_{\beta}(T)}^{\dagger} + [D_{f_{\beta}(T)}^{\dagger}, \mathcal{S}_{\text{as}}(T)] \right) D_{f_{\alpha}(-T)} \prod_{m,n} b_m^{\dagger} d_n^{\dagger} \\ &\doteq \prod_{m',n'} b_{m'} d_{n'} \mathcal{S}_{\text{as}}(T) \prod_{m,n} b_m^{\dagger} d_n^{\dagger} D_{f_{\beta}(T)}^{\dagger} D_{f_{\alpha}(-T)} + \prod_{m',n'} b_{m'} d_{n'} \mathfrak{S}(T, -T) \prod_{m,n} b_m^{\dagger} d_n^{\dagger} D_{f_{\beta}(T)}^{\dagger} D_{f_{\alpha}(-T)} \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(T, -T) &:= \mathcal{T} \exp \left[e \int_{-T}^T d\tau \int d^3x \mathcal{A}_{\mu}(x) \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x) \right] \\ \mathcal{A}_{\mu}(x) &:= \sum_{n \in \beta} \int_{\omega < \lambda_T} \frac{e_n d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} P_{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{p_n^{\nu}}{k \cdot p_n} e^{-ik \cdot (x - v_n T)} \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

と定義した。また、 $D_{\beta}^{\dagger} \doteq e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\bar{\beta}a}$ も用いた。このとき、 T が充分大きいと考えると

$$T \frac{\sin[(E_{\beta} - E_{\alpha})T]}{(E_{\beta} - E_{\alpha})T} \stackrel{\text{L}}{=} 2\pi\delta(E_{\beta} - E_{\alpha}) \Rightarrow \langle \Phi_{\beta} | \mathcal{S}_{\text{as}}(T) | \Phi_{\alpha} \rangle \stackrel{\text{L}}{=} S_{\beta\alpha}^{\text{D}} \quad (5.3.15)$$

と近似できるので、式 (5.3.13) の第 1 項目は

$$\prod_{m',n'} b_{m'} d_{n'} \mathcal{S}_{\text{as}}(T) \prod_{m,n} b_m^{\dagger} d_n^{\dagger} D_{f_{\beta}(T)}^{\dagger} D_{f_{\alpha}(-T)} \doteq S_{\beta\alpha}^{\text{D}} D_{f_{\beta}(T)}^{\dagger} D_{f_{\alpha}(-T)} + o(\lambda_T) \quad (5.3.16)$$

となる。式 (5.3.13) の第 2 項目は光子の演算子を含まないため、 m, n 個の電子、陽電子から m', n' 個の電子、陽電子に至る散乱が作れず

$$\prod_{m',n'} b_{m'} d_{n'} \mathfrak{S}(T, -T) \prod_{m,n} b_m^{\dagger} d_n^{\dagger} D_{f_{\beta}(T)}^{\dagger} D_{f_{\alpha}(-T)} \doteq 0 \quad (5.3.17)$$

となる。以上より、漸近散乱行列は

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) \stackrel{\text{L}}{=} e^{i\theta_{\beta\alpha}(T,t)} \langle f_{\beta}(T) | f_{\alpha}(-T) \rangle S_{\beta\alpha}^{\text{D}} \quad (5.3.18)$$

で与えられる。この表式は実は Chung の論文の式 (64) と同等である。赤外切断を λ_V とし、 $S_{\beta\alpha}^D$ は内線の光子のエネルギー領域を $\omega \in [\lambda_V, \lambda_T]$ 及び $\omega > \lambda_T$ に分離して低エネルギー側の最低次の補正を取り入れると、

$$S_{\beta\alpha}^D = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{m,n} \frac{e_m e_n \eta_m \eta_n}{(2\pi)^3} \int_{S_T} \frac{d^3 k}{2\omega} \alpha_{mn}(k) \right] \exp \left[i \sum_{\substack{m,n \in \alpha \\ m,n \in \beta}} \frac{e_m e_n}{8\pi \beta_{mn}} \log \frac{\lambda_T}{\lambda_V} \right] S_{\beta\alpha}^D(\lambda_T), \quad (5.3.19)$$

$$\alpha_{mn}(k) := \frac{(p_m \cdot p_n)}{(p_m \cdot k)(p_n \cdot k)}$$

で表される [56]。ここで m, n の和は全ての外線を走り、 η_m は m 番目の粒子が放射粒子状態の粒子を指定するものであれば +1 を、入射粒子状態の粒子を指定するものであれば -1 を返す符号因子である。さらに、 $S_{\beta\alpha}^D(\lambda_T)$ はエネルギー $\omega > \lambda_T$ の内線光子の補正のみを含めた散乱行列で、繰り込みの処方によって有限となる。赤外発散の問題は赤外切断を 0 とする極限で (5.3.19) の補正が位相を発散させ、さらに大きさを 0 にしてしまう問題であった。

今、我々が計算すべき最後の要素、 $\langle f_\beta(T) | f_\alpha(-T) \rangle$ を計算する。これはコヒーレント状態の内積であり、次のように与えられる。

$$\langle f_\beta(T) | f_\alpha(-T) \rangle = \Upsilon_{\beta\alpha}(T) e^{i\chi_{\beta\alpha}(T)}, \quad (5.3.20)$$

$$\Upsilon_{\beta\alpha}(T) := \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_h \int_{S_T} d^3 k |f_\beta(k, h; T) - f_\alpha(k, h; -T)|^2 \right], \quad (5.3.21)$$

$$i\chi_{\beta\alpha}(T) := i \operatorname{Im} \sum_h \int_{S_T} d^3 k f_\alpha(k, h; -T) \bar{f}_\beta(k, h; T). \quad (5.3.22)$$

ここで先ほどと同じ赤外切断 λ_V を導入した。まず $\Upsilon_{\beta\alpha}(T)$ を計算する。ここで次が成り立つ。

$$-\frac{1}{2} \sum_h \int d^3 k |f_\beta(k, h; T) - f_\alpha(k, h; -T)|^2 = -\frac{1}{2} \sum_h \int d^3 k (|f_\alpha(-T)|^2 + |f_\beta(T)|^2 - 2 \operatorname{Re}[f_\alpha(-T) \bar{f}_\beta(T)]). \quad (5.3.23)$$

ここで f の引数から k, h は省略し、積分区間も省略した。第 1 項目について、

$$-\frac{1}{2} \sum_h \int d^3 k |f_\alpha(-T)|^2 = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} \left[\sum_{m \in \alpha} e_m^2 \gamma_{mm}(k) + \sum_{\substack{m,n \in \alpha \\ m \neq n}} e_m e_n \gamma_{mn}(k) \cos[(v_m - v_n) \cdot kT] \right], \quad (5.3.24)$$

$$\gamma_{mn}(k) := \alpha_{mn}(k) + \frac{p_m \cdot \bar{k}}{p_m \cdot k} + \frac{p_n \cdot \bar{k}}{p_n \cdot k} \quad (5.3.25)$$

が成り立つ。ここで、 \bar{k}^μ は Kulish-Faddeev の導入したヌルベクトルと同じもので、 $\bar{k}^\mu := \frac{1}{2\omega}(1, -\hat{k})$ である。また、3 項目について、

$$\sum_h \int d^3 k f_\alpha(-T) \bar{f}_\beta(T) = \sum_{\substack{m \in \alpha \\ n \in \beta}} \frac{e_m e_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} e^{i(v_m + v_n) \cdot kT} \gamma_{mn}(k) \quad (5.3.26)$$

が成り立つ。したがって、

$$\log \Upsilon_{\beta\alpha}(T) = - \int \frac{d^3 k}{2\omega} \left[\sum_{m,n} \frac{\eta_m \eta_n e_m e_n}{2(2\pi)^3} \alpha_{mn}(k) - \sum_{m \neq n} \frac{\eta_m \eta_n e_m e_n}{2(2\pi)^3} \gamma_{mn}(k) \{1 - \cos[(\eta_m v_m - \eta_n v_n) \cdot kT]\} \right] \quad (5.3.27)$$

が得られる。ここで、 m, n の和は全ての外線を走る。また、従来の散乱行列の対称性から電荷保存則 $\sum_n \eta_n e_n = 0$ が成り立つことを使った。第1項目は $\mathcal{O}(\omega^{-1}) \sim \mathcal{O}(T)$ であり、第2項目は $\mathcal{O}(\omega T) \sim \mathcal{O}(T^0)$ である。 $\mathcal{O}(\lambda_T)$ の最低次までの寄与を取り入れることに決めていたので、

$$\log \Upsilon_{\beta\alpha}(T) \stackrel{\text{L}}{=} - \int \frac{d^3k}{2\omega} \left[\sum_{m,n} \frac{\eta_m \eta_n e_m e_n}{2(2\pi)^3} \alpha_{mn}(k) \right] \quad (5.3.28)$$

がり入れるべき補正となる⁷。また、漸近相互作用による位相の補正は $i\theta_{\beta\alpha}(T) + i\chi_{\beta\alpha}(T)$ だが、

$$i\chi_{\beta\alpha}(T) = i \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{\substack{m \in \alpha, n \in \beta \\ m \in \beta, n \in \alpha}} \int \frac{d^3k}{2\omega} e_m e_n \gamma_{mn}(k) \sin[(v_m + v_n) \cdot kT] \quad (5.3.29)$$

のため、これは ω 積分のなかで $\mathcal{O}(\omega T) \sim \mathcal{O}(T^0)$ 次である。一方 $\theta_{\beta\alpha}(T)$ は ω 積分の中で $\mathcal{O}(T)$ だから、 $\chi_{\beta\alpha}(T)$ はこの枠組みで無視される。以上より漸近散乱行列 $S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T)$ は

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) \stackrel{\text{L}}{=} S_{\beta\alpha}^{\text{D}}(\lambda_T) \quad (5.3.30)$$

となる。つまり、赤外切断を λ_T として考えた散乱行列に一致する。これはいかなる発散も持たないので、時刻 $t = -T$ での漸近状態と時刻 $t = T$ での漸近状態を結びつける散乱行列として定義される。Dyson の散乱行列のユニタリ性から、入射/放射状態に対応する粒子描像での状態が λ_T 以下のエネルギーを持つ要素を持たないと考えればこれはユニタリな演算子と言える。すなわち、

$$\begin{aligned} \int d\beta \overline{S_{\beta\gamma}^{\text{as}}(T)} S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) &= \int d\beta \overline{S_{\beta\gamma}^{\text{D}}(\lambda_T)} S_{\beta\alpha}^{\text{D}}(\lambda_T) = \int d\beta \langle \Phi_\gamma | \mathcal{S}_D^{\text{hard}} | \Phi_\beta \rangle \langle \Phi_\beta | \mathcal{S}_D^{\text{hard}} | \Phi_\alpha \rangle \\ &= \int d\beta \langle \Psi_\gamma^+ | \Psi_\beta^- \rangle \langle \Psi_\beta^- | \Psi_\alpha^+ \rangle = \langle \Psi_\gamma^+ | \Psi_\alpha^+ \rangle = \delta(\gamma - \alpha) \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

である。ここで、 S_D^{hard} を λ_T 以上のエネルギーを持つ粒子のみを考慮した Dyson の散乱演算子とした。

この節の最後に遷移確率についても議論する。1光子を検出できる最小のエネルギーを Λ_D とし、入射粒子状態、放射粒子状態のエネルギー測定分解能を Λ とすると、

- (i) 軟光子が観測できない、つまり $\lambda_T \leq \Lambda_D$
- (ii) 軟光子が観測できる、つまり $\lambda_T > \Lambda_D$

という場合が考えられる。

(i) の場合は $\omega_i \in [\lambda_T, \Lambda_D]$ のエネルギーを持つ光子が $\sum_i \omega_i < \Lambda$ を満たす限り無数に放出される場合を考える必要がある。したがって、今回考えるべき遷移確率 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\text{as}}(\Lambda_D, \Lambda)$ は、 $S_{\beta\alpha}^{\text{D}}(\lambda_T)$ から計算される遷移確率を $\Gamma_{\beta\alpha}^{\text{D}}(\lambda_T)$ とすると、

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\text{as}}(\Lambda_D, \Lambda) = \Gamma_{\beta\alpha}^{\text{D}}(\lambda_T) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(A_{\beta\alpha})^N}{N!} \int_{\lambda_T \leq \omega_i \leq \Lambda_D, \sum_i \omega_i \leq \Lambda} \prod_{i=1}^N \frac{d\omega_i}{\omega_i} = \mathcal{F}(\Lambda_D/\Lambda; A_{\beta\alpha}) (\Lambda_D T)^{A_{\beta\alpha}} \Gamma_{\beta\alpha}^{\text{D}}(\lambda_T), \quad (5.3.32)$$

$$A_{\beta\alpha} := -\frac{1}{8\pi} \sum_{m,n} \frac{\eta_m \eta_n e_m e_n}{\beta_{mn}} \log \left(\frac{1 + \beta_{mn}}{1 - \beta_{mn}} \right) > 0, \quad (5.3.33)$$

$$\mathcal{F}(x; A) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin u}{u} \exp \left[A \int_0^x \frac{d\omega}{\omega} (e^{i\omega u} - 1) \right] = 1 - \frac{A^2 \Theta(x - 1/2)}{2} \int_{1-x}^x \frac{d\omega}{\omega} \log \left(\frac{x}{1-\omega} \right) + \dots \quad (5.3.34)$$

⁷第2項目は漸近相互作用と光子の内線の補正を準最低次の寄与まで取り入れる枠組みで意味を持つが、この場合ループ補正やドレス状態にもその寄与を取り入れなければならない。

と求められる。このとき、 $\Gamma_{\beta\alpha}^D(\lambda_T) \propto (\lambda_T)^{A_{\beta\alpha}}$ よりこれは T に依存せず、Bloch-Nordsieck の手法で得られるものと完全に一致する。このような場合は $T \rightarrow \infty$ の極限を取ることができる。

(ii) の場合は、 $T \rightarrow \infty$ が取れる状況を考えて存在しない。しかし、充分大きい T を固定した場合を考えてみよう。このとき、漸近状態は

$$|\Phi_\alpha(-T)\rangle\rangle = \exp\left[i \sum_{m,n \in \alpha} \frac{e_m e_n}{8\pi\beta_{mn}} \log(\lambda_V/\lambda_T)\right] |\psi_\alpha\rangle \otimes [|f_\alpha^{\text{visible}}(-T)\rangle \oplus |f_\alpha^{\text{invisible}}(-T)\rangle] \quad (5.3.35)$$

とかける。ここで、“visible” 及び “invisible” はそれぞれ、 $\omega \in [\Lambda_D, \lambda_T]$, $\omega \in [\lambda_V, \Lambda_D]$ のエネルギーを持つ軟光子のみを考慮したものであることを意味する。散乱行列を計算する際の内線光子のエネルギーを λ_T でなく Λ_D で分けることにすると、上と全く同じ計算から

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha}^D &= \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{m,n} \frac{e_m e_n \eta_m \eta_n}{(2\pi)^3} \int_{\lambda_V \leq \omega \leq \Lambda_D} \frac{d^3 k}{2\omega} \alpha_{mn}(k)\right] \exp\left[i \sum_{\substack{m,n \in \alpha \\ m,n \in \beta}} \frac{e_m e_n}{8\pi\beta_{mn}} \log \frac{\Lambda_D}{\lambda_V}\right] S_{\beta\alpha}^D(\Lambda_D), \quad (5.3.36) \\ S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) &= e^{i\theta_{\beta\alpha}(1/\Lambda, t) + i\theta_{\beta\alpha}(T, \Lambda_D)} \langle f_\beta^{\text{visible}}(T) | f_\alpha^{\text{visible}}(-T) \rangle \langle f_\beta^{\text{invisible}}(T) | f_\alpha^{\text{invisible}}(-T) \rangle S_{\beta\alpha}^D \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{m,n} \frac{e_m e_n \eta_m \eta_n}{(2\pi)^3} \int_{\Lambda_D \leq \omega \leq \lambda_T} \frac{d^3 k}{2\omega} \alpha_{mn}(k)\right] \exp\left[i \sum_{\substack{m,n \in \alpha \\ m,n \in \beta}} \frac{e_m e_n}{8\pi\beta_{mn}} \log(\Lambda_D/\lambda_T)\right] S_{\beta\alpha}^D(\Lambda_D) \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

が得られる。 $S_{\beta\alpha}^D(\Lambda_D)$ は先ほどと同様に $\omega > \Lambda_D$ のエネルギーを持つ内線光子の補正を含めた散乱行列である。

$$-\frac{1}{2} \sum_{m,n} \frac{e_m e_n \eta_m \eta_n}{(2\pi)^3} \int_{\Lambda_D \leq \omega \leq \lambda_T} \frac{d^3 k}{2\omega} \alpha_{mn}(k) = -\frac{1}{2} A_{\beta\alpha} \log(\Lambda_D/\lambda_T) \quad (5.3.38)$$

なので、この漸近散乱行列も (Λ_D/λ_T) が有限な限り有限である。また、 $\Lambda_D \rightarrow \lambda_T$ とすると軟光子が見えない場合 (i) を全て再現する。このとき、今回考えるべき物理的な遷移確率 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T)$ は、式 (5.3.37) の大きさの2乗を拾って、

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) = \left(\frac{\lambda_T}{\Lambda_D}\right)^{A_{\beta\alpha}} \Gamma_{\beta\alpha}^D(\Lambda_D) \quad (5.3.39)$$

と求められる。ここで、 $\Gamma_{\beta\alpha}^D(\Lambda_D)$ は $S_{\beta\alpha}^D(\Lambda_D)$ から計算される遷移確率であり、 $\Gamma_{\beta\alpha}^D(\Lambda_D) \propto (\Lambda_D)^{A_{\beta\alpha}}$ なので $\Gamma_{\beta\alpha}^{\text{as,L}}(T)$ は光子検出器の精度 Λ_D に依存しない。以上の考察から、検出器の性能を高めていけば (i) の場合の物理的な遷移確率 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\text{as}}(\Lambda_D, \Lambda)$ と (ii) の場合の物理的な遷移確率 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T)$ の違いによって原理的には遷移確率に違いが生じる可能性がある⁸。

5.3.3 ゲージ不変性と漸近対称性

Coulomb ゲージ条件を課した際の漸近散乱行列については議論したので、これからゲージ不変性について議論する。漸近散乱行列の式 (5.3.18) の $S_{\beta\alpha}^D$ は従来の散乱行列と思うとゲージ不変であるから $\langle f_\beta(T) | f_\alpha(-T) \rangle$ について議論すればよい。軟光子のコヒーレント状態 $|f_\alpha(\pm T)\rangle$ に対して、 $\epsilon_\mu(k, h) \rightarrow \epsilon_\mu(k, h) + \bar{\epsilon}_\pm(k, h) k_\mu$ のゲージ変換を施すと⁹、

$$f_\alpha(k, h; \pm T) \rightarrow f_\alpha(k, h \pm T) + \epsilon_\alpha^\pm(k, h; \pm T), \quad \epsilon_\alpha^\pm(k, h; \pm T) := \sum_{m \in \alpha} \frac{e_m}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \epsilon_\pm(k, h) e^{\mp i k \cdot v_m T} \quad (5.3.40)$$

⁸もちろん、遷移確率の差異を検証しようとするには検出器と光子の相互作用まで詳細に議論する必要がある。軟光子は相互作用が切れないような光子であるから、背景のノイズに埋もれてこの違いは実際には見えない可能性は高いように思える。しかし理想的な測定について議論ができることは理論として健全であろう。

⁹複素共役は記法を単純にするために用いた。

の変換を受ける。これより軟光子のコヒーレント状態の内積は次のように変換される。

$$\langle f_\beta(T) | f_\alpha(-T) \rangle \rightarrow \langle f_\beta(T) | f_\alpha(-T) \rangle \times \langle \varepsilon_\beta^+(T) | \varepsilon_\alpha^-(T) \rangle \exp \left[\sum_h \int_{S_T} d^3k Z_{\beta\alpha}(k, h; T) \right], \quad (5.3.41)$$

$$Z_{\beta\alpha}(k, h; T) := -\operatorname{Re} \left[(\overline{f_\beta(T)} - \overline{f_\alpha(-T)}) (\varepsilon_\beta^+(T) - \varepsilon_\alpha^-(T)) \right] + i \operatorname{Im} \left[f_\alpha(-T) \overline{\varepsilon_\beta^+(T)} + \overline{f_\beta(T)} \varepsilon_\alpha^-(T) \right]. \quad (5.3.42)$$

ゲージ変換の関数 ε^\pm を 3 次元運動量空間上の 2 乗可積分関数にとると、球面調和関数 $Y_{\ell m}(\hat{k})$ を用いて一般に

$$\varepsilon_\pm(k, h) = \sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{m_i=-\ell_i}^{\ell_i} \sum_{\ell_i=0}^{\infty} \omega^i \chi_{\ell_i m_i}^{\pm(i)}(h) Y_{\ell_i m_i}(\hat{k}) \quad (5.3.43)$$

とかける。ここで $\langle \varepsilon_\beta^-(T) | \varepsilon_\alpha^+(-T) \rangle$ の赤外の寄与を考えたい。そこで $i = -1$ のもの、

$$\varepsilon_a(k, h) = \omega^{-1} \xi^a(\hat{k}, h), \quad \xi^a(\hat{k}, h) = \sum_{\ell m} \chi_{\ell m}^a(h) Y_{\ell m}(\hat{k}) \neq 0, \quad a = \begin{cases} + & \text{漸近放射状態} \\ - & \text{漸近入射状態} \end{cases} \quad (5.3.44)$$

のゲージ変換を考えることにする。この変換を主要な漸近相互作用の効果のみを取り入れる今回の枠組みにおける場の理論の大ゲージ変換と呼ぶことにする。このとき、

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_\beta(T) | \varepsilon_\alpha(-T) \rangle &\stackrel{\text{L}}{=} \exp \left[-\frac{1}{2(2\pi)^3} \log \frac{\lambda_T}{\lambda_V} \sum_{m,n} \sum_h \int d\Omega_{\hat{k}} \left(\eta_m \eta_n e_m e_n \xi^{a_m}(\hat{k}, h) \overline{\xi^{a_n}(\hat{k}, h)} \right) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2(2\pi)^3} \log \frac{\lambda_T}{\lambda_V} \sum_h \sum_{\ell m} |Q_- \chi_{\ell m}^-(h) - Q_+ \chi_{\ell m}^+(h)|^2 \right] \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

と計算できる。途中の a_m は $m \in \beta$ のとき $a_m = +$, $m \in \alpha$ のとき $a_m = -$ で定義した。 Q_- , Q_+ はそれぞれ $t = -T$, $t = T$ の超曲面上の全電荷である。これは任意の h, ℓ, m に対して

$$Q_- \chi_{\ell m}^-(h) = Q_+ \chi_{\ell m}^+(h) \quad (5.3.46)$$

が成り立つ場合に限って漸近散乱行列が非零で存在することがわかる。逆に、式 (5.3.46) が成り立つとき、 $Z_{\beta\alpha}(k, h; T)$ は λ_T の準最低次の項に当たるため漸近散乱行列は不変である。従来の散乱行列の対称性から、 $Q_- = Q_+$ であるため、このゲージ不変条件は入射/放射の漸近状態に対するゲージ変換の関数に対し

$$\xi^-(\hat{k}, h) = \xi^+(\hat{k}, h) \quad (5.3.47)$$

を要請するものである。これらの関係は大電荷保存則とその大電荷による大ゲージ変換に対応している。

量子論における漸近対称性についてここでもう少し詳しく議論してみよう。大ゲージ変換

$$\epsilon_\mu(k, h) \rightarrow \epsilon_\mu(k, h) + \omega^{-1} \xi(\hat{k}, h) k_\mu, \quad \xi(\hat{k}, h) \neq 0 \quad (5.3.48)$$

を施した後の漸近状態を $|\Phi_\alpha^\xi(\pm T)\rangle \equiv |\psi_\alpha\rangle \otimes |f_\alpha^\xi(\pm T)\rangle$ などと書くことにする¹⁰。このとき、元の漸近状態を $|\Phi_\alpha^0(\pm T)\rangle \equiv |\psi_\alpha\rangle \otimes |f_\alpha^0(\pm T)\rangle$ と書く。先ほどと同様の計算から

$$\langle \langle \Phi_\beta^\eta(\pm T) | | \Phi_\alpha^\xi(\pm T) \rangle \rangle \stackrel{\text{L}}{=} \begin{cases} \delta(\beta - \alpha) & \text{for } \eta(\hat{k}, h) = \xi(\hat{k}, h) \\ 0 & \text{for } \eta(\hat{k}, h) \neq \xi(\hat{k}, h) \end{cases} \quad (5.3.49)$$

$$\langle \langle \Phi_\beta^\eta(\pm T) | | \Phi_\alpha^\xi(\mp T) \rangle \rangle \stackrel{\text{L}}{=} \begin{cases} \delta(\xi - \Xi_\alpha) \delta(\xi - \eta) \delta(\beta - \alpha) & \text{for } f_\alpha \neq 0 \\ 1 & \text{for } f_\alpha = f_\beta = 0 \end{cases} \quad (5.3.50)$$

¹⁰Hilbert 空間を考える際には射線 (位相因子の違いを同一視したもの) を考えれば良いため位相は無視した。

が得られる。ここで、式 (5.3.50) では、 α が真空でない場合 $\langle f_\alpha(\pm T) | f_\alpha(\mp T) \rangle$ が

$$\sum_h \left| \Xi_\alpha(\vec{k}, h) \right|^2 Q^2 = \mathcal{I}_\alpha^\mu \eta_{\mu\nu} \mathcal{I}_\alpha^\nu, \quad \mathcal{I}_\alpha^\mu := \sum_{n \in \alpha} \frac{e_n \eta_n p_n^\mu}{\hat{k} \cdot p_n} \quad (5.3.51)$$

を満たす Ξ_α による大ゲージ変換をすることによってのみ、赤外発散を打ち消して $\langle f_\alpha^{\Xi_\alpha}(\pm T) | f_\alpha^{\Xi_\alpha}(\mp T) \rangle = 1$ にできることを使った。これは $\alpha \rightarrow \alpha$ の遷移を許すためには大ゲージ変換の自由度が定まるという意味で、 α の状態に固有な大電荷を与えるように思える。

この結果から QED では大ゲージ変換の関数 $\xi(\vec{k}, h)$ によって入射/放射状態に対応する漸近状態が住む Hilbert 空間が分割されることがわかる。また、式 (5.3.50) は軟光子の属する Hilbert 空間と荷電粒子の属する Hilbert 空間が直和構造を持たないことを意味する。つまり QED の入射/放射状態に対応する漸近状態が住む Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\text{as}}^- / \mathcal{H}_{\text{as}}^+$ は次のようにかける。

$$\mathcal{H}_{\text{as}}^-(-T) = \bigoplus_{\xi} \mathcal{H}_{\text{as}, \xi}^-(-T), \quad \mathcal{H}_{\text{as}, \xi}^-(-T) := \mathcal{H}_{\text{F}}^{\text{as}} \otimes \mathcal{H}_{\xi}^{\text{soft}}(-T), \quad |\Phi_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{\text{F}}^{\text{as}}, \quad |f_\alpha^\xi(-T)\rangle \in \mathcal{H}_{\xi}^{\text{soft}}(-T) \quad (5.3.52)$$

$$\mathcal{H}_{\text{as}}^+(T) = \bigoplus_{\xi} \mathcal{H}_{\text{as}, \xi}^+(T), \quad \mathcal{H}_{\text{as}, \xi}^+(T) := \mathcal{H}_{\text{F}}^{\text{as}} \otimes \mathcal{H}_{\xi}^{\text{soft}}(T), \quad |\Phi_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{\text{F}}^{\text{as}}, \quad |f_\alpha^\xi(T)\rangle \in \mathcal{H}_{\xi}^{\text{soft}}(T) \quad (5.3.53)$$

ここで $\mathcal{H}_{\text{F}}^{\text{as}}$ は荷電粒子と $\omega > \lambda_T$ の光子 (と真空) が属する Fock 空間である。また、

$$\mathcal{H}_{\xi}^{\text{soft}}(\pm T) \perp \mathcal{H}_{\eta}^{\text{soft}}(\pm T) \text{ if } \xi \neq \eta \quad (5.3.54)$$

の関係が満たされる。ここで、記号 \perp は左辺の任意の元と右辺の任意の元の内積が 0 となることを表す。考える漸近状態 $|\Phi_\alpha^\xi(\pm T)\rangle$ は \mathcal{H}_{ξ}^{\pm} に属する。すなわち、

$$|\Phi_\alpha^\xi(\pm T)\rangle \in \mathcal{H}_{\xi}^{\pm} = \mathcal{H}_{\text{F}} \otimes \mathcal{H}_{\xi}^{\text{soft}}(\pm T). \quad (5.3.55)$$

このように考えると、漸近 S 演算子は $\mathcal{H}_{\text{as}, \xi}^-(-T) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{as}, \xi}^+(T)$ への写像と理解でき、量子論における漸近対称性は $\mathcal{H}_{\text{as}, \xi}^-(-T) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{as}, \eta}^+(T)$, $\eta \neq \xi$ を禁じる超選択則として理解できる。これは Kulish-Faddeev 形式とは大きく異なる¹¹。

5.3.4 ドレス状態形式における QED メモリー効果

最後に QED のメモリー効果について議論する。入射粒子状態、放射粒子状態ともに硬い光子が存在しない場合を考える。このとき、時刻 $t = T$ での光子場の期待値 $\langle a_\mu(\vec{x}, T) \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle a_\mu(\vec{x}, T) \rangle &:= \langle f_\beta(T) | a_\mu(\vec{x}, T) | f_\beta(T) \rangle = \int_{\omega \leq \lambda_T} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[\sum_{m \in \beta} \frac{e_m}{k \cdot p_m} p_m^\nu P_{\nu\mu}(\vec{k}) e^{-\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{v}_m T)} + \text{c.c.} \right] \\ &= \sum_{m \in \beta} \frac{e_m}{(2\pi)^3} \int_{\omega \leq \lambda_T} \frac{d^3 k}{2\omega} \left[\frac{p_{m\mu}}{k \cdot p_m} + \bar{k}_\mu + \frac{c \cdot p_m}{k \cdot p_m} k_\mu \right] \cos\{\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{v}_m T)\} \end{aligned} \quad (5.3.56)$$

と与えられる。この 0 成分は 0 である。簡単のため $\vec{x} = 0$ での値を評価する¹²。対称性から \vec{v}_m を z 軸に向けて計算できて、次の表式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}(\vec{0}, T) \rangle &= - \sum_{m \in \beta} \frac{e_m \vec{v}_m}{8\pi^2} \int_0^{\lambda_T} d\omega \int_{-1}^1 du \frac{\cos(\omega T v_m u)}{1 - v_m u} = - \sum_{m \in \beta} \frac{e_m \hat{v}_m}{8\pi^2 T} G(v_m), \\ G(v_m) &:= [\text{Ci}(1 + v_m) - \text{Ci}(1 - v_m)] \sin 1 - [\text{Si}(1 + v_m) - \text{Si}(1 - v_m)] \cos 1 + 2\text{Si}(v_m). \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

¹¹ この意味では Kibble の散乱理論に近い。しかしこの方法では $\alpha \rightarrow \alpha$ の遷移も記述できる。

¹² 実際には $\vec{x} = \pm \vec{x}_0$ の 2 点でのベクトルポテンシャルの差の変化を考えるべきだが、詳細な解析は別の機会に行う。

ここで、 γ_E を Euler-Mascheroni 定数とした。また、 $\text{Ci}(x)$ は余弦積分関数

$$\text{Ci}(x) := - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \gamma_E + \log x + \text{Cin}(x), \quad \text{Cin}(x) := \int_0^x dt \frac{1 - \cos t}{t} \quad (5.3.58)$$

であり、 $\text{Si}(x)$ は正弦積分関数

$$\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (5.3.59)$$

である。ここで、 $G(v)$ の概形は次の通り。図のように $v = 1$ で発散するが、光速の 99% 程度の速さでは $\mathcal{O}(1)$ 程度である。

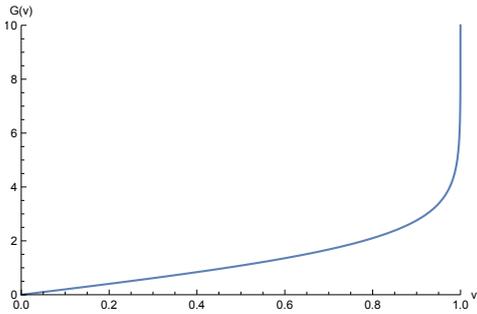


図 5.1 $v \in [0, 1]$ での $G(v)$ の概形

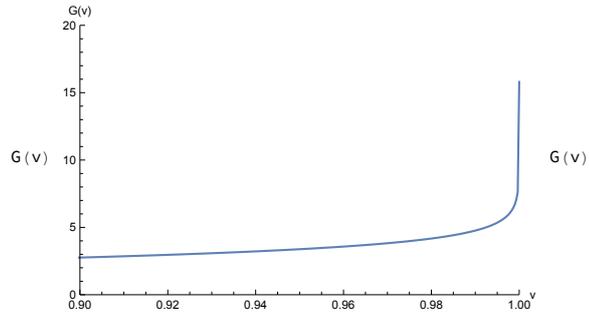


図 5.2 $v \in [0.9, 1]$ での $G(v)$ の概形

同様に時刻 $t = -T$ でのベクトルポテンシャルの期待値を計算することもできるから、その差 $\langle \delta \vec{a}(\vec{0}) \rangle$ は

$$\langle \delta \vec{a}(\vec{0}) \rangle = - \sum_n \frac{e_n \eta_n G(v_n)}{8\pi^2 T} \hat{v}_n \quad (5.3.60)$$

と計算できる。ここで、 m は全ての外線を走る。メモリー効果に対しては λ_T に比例するこの式が λ_T の最低次なので、これは今回の枠組みでは無視されない。このベクトルポテンシャルの変化を Aharonov-Bohm 効果 [109, 110] などで測ることで、原理的には散乱を見なくとも散乱の情報のある程度引き出すことができるかもしれない。これは電磁メモリー効果の場の理論からの導出と言える。

一方、電場や磁場の変化によってメモリー効果を見る可能性が研究されている [92] が、電場や磁場は我々の解析では現れない。これは、 $\vec{B} = \nabla \times \vec{a}$ より

$$\langle \delta B(\vec{0}) \rangle = \sum_m \frac{e_m \eta_m}{2(2\pi)^3} \int_0^{\lambda_T} d\omega \omega \int d\Omega_{\vec{k}} \frac{\hat{k} \times \vec{v}_m}{1 - \hat{k} \cdot \vec{v}_m} \sin(\omega T \hat{k} \cdot \vec{v}_m) = 0 \quad (5.3.61)$$

となるからである。また、電場は Coulomb ゲージをとっているため現れない。

5.3.5 QED の結果のまとめ

この節では本論文で提案する散乱理論を Coulomb ゲージをとった QED に適用した。時刻 $|t| > T$ での相互作用から漸近相互作用を導出し、それを元に時刻 $t = \pm T$ の時間一定超曲面 Σ_{\pm} で放射/入射状態が漸近する漸近状態を求めた。そしてそれらの漸近状態を結びつける漸近散乱行列を計算した。この漸近散乱行列は発散を持たず、Fock 空間の定義を少し変更することでユニタリ性が示される。遷移確率についても議論し、 λ_T 以下のエネルギーを持つ軟光子が観測にかからないような状況では、物理的な遷移確率は Bloch-Nordsieck の方法で知られていた遷移確率と完全に一致することを明らかにした。このような場合では T 依存性がないため、問題なく $T \rightarrow \infty$ の極限を取ることができる。

また、場の量子論での赤外三角関係に対して

- (i) 大ゲージ変換が漸近状態に対するゲージ変換に対応すること。

- (ii) 漸近対称性が大ゲージ変換の関数によって特徴づけられる Hilbert 空間の分割を意味すること。
- (iii) メモリー効果が、荷電粒子の情報を持った軟光子によってベクトルポテンシャルの期待値が変位する現象として現れること。

がそれぞれ明らかとなった。散乱行列が定義可能であることと合わせて、これらは提案する散乱理論が赤外の物理を理解する上でも有用であることを示唆する。

また、 $T \rightarrow \infty$ を取らない状況を考えることで検証可能な予言を引き出し得ることも新しい発見である。より詳細な議論は必要となるだろうが、我々が与えた非常に精度の高い光子検出器を用いた場合での散乱確率の変化や、メモリー効果は原理的には検証可能である。

今回の解析では、Kulish-Faddeev のドレス状態形式の抱える問題：

- (1) ゲージ対称性の取り扱いの問題
- (2) 極限操作の取り扱いの問題
- (3) 漸近相互作用の定義の問題
- (4) 予言能力を持たないという問題
- (5) 赤外三角関係を十分に反映しないという問題

の全てが改善された。

5.4 軟重力子の理論と散乱問題

重力子を含む理論には繰り込みの問題、ゴーストの問題、共変性の問題など、さまざまな困難があって未だに十分な理解が得られているとは言い難い状況にある。

赤外三角関係を通じて重力子が与える赤外効果の理解は深まりつつあるが、ドレス状態形式については知限りの先行研究は皆 Kulish-Faddeev の方法を踏襲した議論に基づいており、QED で抱える問題をそのまま受け継いでしまっている。QED より複雑で深刻な紫外側の問題や、ゴーストなどの非物理的自由度の問題は単に無視することで解析が進められてきた [31, 36, 111, 112]。

一方、QED では Coulomb ゲージの理論を考えることで、非物理的自由度を導入せずに共変的な理論を組むことが可能であった。実は重力子を含む理論でも、いくつかの問題に目を瞑ればこれと同じことが可能である。

相互作用表示で無質量ヘリシティ 2 のゲージ粒子である重力子と、物質場のエネルギー運動量テンソルが結合している相互作用ラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^I(x) = h_{\mu\nu}(x)T^{\mu\nu}(x), \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.4.1)$$

を持つ理論を考える。重力子を TT ゲージ

$$h^{0\mu} = 0, \partial_\mu h^{\mu\nu} = 0, \eta_{\mu\nu}h^{\mu\nu} = 0 \quad (5.4.2)$$

を満たすものだとすると、この伝搬関数は Coulomb ゲージの QED 同様に非共変項を含む。そこで Newton 相互作用項を加え、重力子の伝搬関数の非共変項を打ち消すようにしよう。

Weinberg の議論 [40] によると、Heisenberg 場に対して適切なゲージ条件を取ることで Heisenberg 表示の理論が線形 Einstein 方程式を満たす理論となることが示せる。

一方、重力子のエネルギー運動量が理論に組み込まれていないため、ラグランジアン of 段階で理論の Lorentz 対称性が破れてしまう問題がある。また、繰り込み不可能という問題はもちろんあり、これに対処するために高階微分項を取り入れるとやはり非物理的自由度をどうにかして取り除かねばならないという困難がある。

ここで我々のドレス状態形式を思い浮かべよう。ここでは $t = \pm T$ の時刻一定超曲面を導入して散乱問題を定式化した。この方法は一見すると Lorentz 対称性を破っているように思える。しかし実は、漸近対称性が理

論の Lorentz 対称性を回復する役目を果たすことが以下で見られるようにわかる。軟粒子の存在を自発的 Lorentz 対称性の破れとして考える議論がある [26, 28, 46]。しかし我々の解析では同様の結果から逆の結論が導かれる。つまり、ラグランジアン段階で破れている Lorentz 対称性が、漸近対称性によって状態・散乱行列の段階では守られるのだ。この機構は自発的 Lorentz 対称性の回復と呼んでもよいだろう。

また、軟重力子のみを考える上では繰り込みの問題は現れない。そのため Weinberg の議論に則れば、非物理的自由度を導入せずに軟重力子が理論に与える影響を議論することが可能である。

5.4.1 QED の Lorentz 対称性

ここで、QED の Lorentz 対称性について改めて考えてみよう。

硬い光子の場に対して Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} U(\Lambda)a_\mu(x)U^{-1}(\Lambda) &= \Lambda_\mu^\nu a_\nu(\Lambda x) + \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu \Omega_\Lambda(\Lambda x), \\ \partial_\nu \Omega_\Lambda(x) &\equiv - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \sum_h \left[\xi^\Lambda(\vec{k}, h) k_\nu a(\vec{k}, h) e^{ik \cdot x} + (\text{h.c.}) \right], \\ \xi^\Lambda(k, h) &:= \Lambda_\mu^0 \epsilon^\mu(\vec{k}, h) / (\Lambda_\nu^0 k^\nu) \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

の変換をもたらす。回転対称性を使って Λ のブースト部分を 3 軸へのブーストに取ると、

$$\xi^{\Lambda(\varpi)}(\vec{k}, h) = \left[(-b_\varpi \cdot (-\sin \theta)) / \sqrt{2} \right] / [\omega(a_\varpi - b_\varpi \cos \theta)] = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \cdot \frac{(\varpi^2 - 1) \sin \theta}{\varpi^2(1 - \cos \theta) + 1 + \cos \theta} \quad (5.4.4)$$

が得られる。ここで 3 軸を指すヌル運動量のエネルギーを ϖ 倍にするようなブーストが

$$\Lambda_{(\varpi)}^{\check{a} \check{b}} = \begin{pmatrix} a_\varpi & b_\varpi \\ b_\varpi & a_\varpi \end{pmatrix}, \quad a_\varpi := \frac{\varpi^2 + 1}{2\varpi}, \quad b_\varpi := \frac{\varpi^2 - 1}{2\varpi} \quad (5.4.5)$$

とかけることを使った。 $\check{a} = \{3, 0\}$ は $3 \rightarrow 0$ の順に並べたことを意味する。また、 $\xi^{\Lambda(\varpi)}$ は $\varpi \in (0, \infty)$ で正則である¹³。

さて、ドレス状態に対して Lorentz 変換 Λ を作用させることを考える。位相を無視すると、

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Phi_\alpha(t)\rangle &= U(\Lambda)D_{\mathbf{f}(t)}U^{-1}(\Lambda) \prod_\alpha [U(\Lambda)a^\dagger(p_\alpha, \sigma_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)U^{-1}(\Lambda)]|0\rangle \\ &= D_{U(\Lambda)\mathbf{f}(t)U^{-1}(\Lambda)} \prod_\alpha \sqrt{\frac{(\Lambda p_\alpha)^0}{p_\alpha^0}} \sum_{\sigma'_\alpha} D_{\sigma_\alpha \sigma'_\alpha}(\mathcal{W}^{-1}(p_\alpha, \Lambda)) a^\dagger(\Lambda p_\alpha, \sigma'_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)|0\rangle \\ &=: D_{U(\Lambda)\mathbf{f}(t)U^{-1}(\Lambda)} |\Phi_{\alpha\Lambda}\rangle \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} &\sum_h \int d^3p eU(\Lambda)\rho(\vec{p})U^{-1}(\Lambda) \int_{S_T} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \left[\frac{p^\mu}{k \cdot p} e^{-ik \cdot v_p t} U(\Lambda)a_\mu^\dagger(\vec{k}, h)U^{-1}(\Lambda) - (\text{h.c.}) \right] \\ &= \sum_h \int d^3q \frac{e\rho(\vec{q})}{(2\pi)^{3/2}} \int_{S_T} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \sqrt{\omega_\Lambda} \left[\left(\frac{q \cdot \bar{\epsilon}(\vec{k}_\Lambda, h)}{q \cdot (\Lambda k)} - \zeta^\Lambda(\vec{k}_\Lambda, h) \right) e^{-i(\Lambda k) \cdot v_q \frac{E_q}{E_{q_{\Lambda^{-1}}}} t} a^\dagger(\vec{k}_\Lambda, h) - (\text{h.c.}) \right], \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

$$\zeta^\Lambda(\vec{k}_\Lambda, h) := [\Lambda_\nu^0 \epsilon^\nu(\vec{k}_\Lambda, h)] / \omega =: \xi^\Lambda(\vec{k}, h) / \omega \quad (5.4.8)$$

が成り立つ。したがって Λ が空間回転の場合、回転対称性から $U(\Lambda)D_{\mathbf{f}(t)}U^{-1}(\Lambda) = D_{\mathbf{f}(t)}$ で不変となる。そこで先ほどの 3 軸ブースト $\Lambda = \Lambda_{(\varpi)}$ を考えると、

$$\Lambda_{(\varpi)}^\mu{}_\nu k^\nu = \omega(a_\varpi + b_\varpi \cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, b_\varpi + a_\varpi \cos \theta) \quad (5.4.9)$$

¹³ $0, \infty$ のときはそれぞれ $\theta = (2n + 1)\pi, 2n\pi$, where $n \in \mathbb{Z}$ で発散する。

となる。これより次の座標変換

$$(\omega, \theta, \varphi) \rightarrow (\varrho, \Theta, \Phi) := (\omega(a_{\varpi} + b_{\varpi} \cos \theta), \arccos \frac{b_{\varpi} + a_{\varpi} \cos \theta}{a_{\varpi} + b_{\varpi} \cos \theta}, \varphi) \quad (5.4.10)$$

を行うとこの変換で軟光子の運動量空間の半径 λ_T の球面がどのように変形するかがわかる。積分測度は

$$\begin{aligned} \omega^2 \sin \theta d\omega \wedge d\theta \wedge d\varphi &= [\varrho(a - b \cos \Theta)]^2 \left(\frac{\sin \Theta}{a - b \cos \Theta} \right) \left(\frac{d\varrho + b\omega \sin \theta d\theta}{a + b \cos \theta} \right) \wedge [(a + b \cos \theta)d\Theta] \wedge d\Phi \\ &= \varrho^2 (a - b \cos \Theta) \sin \Theta d\varrho \wedge d\Theta \wedge d\Phi \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

と変わるが、運動量空間に占める体積は変わらず $\frac{4\pi}{3} \lambda_T^3$ である。また、

$$\cos \Theta = 1 - \frac{2(1 - \cos \theta)}{\varpi^2(1 + \cos \theta) + 1 - \cos \theta} \quad (5.4.12)$$

および

$$\omega_{\Lambda} = \varrho = \frac{2\varpi}{\varpi^2(1 - \cos \theta) + 1 + \cos \theta} \omega \quad (5.4.13)$$

によって変換した先のエネルギーと角度の依存性がわかる。これでブーストによって球面がブースト方向に引き伸ばされ、逆方向に縮められる様子がわかった。このとき式 (5.4.7) は

$$\begin{aligned} U(\Lambda) f U^{\dagger}(\Lambda) &= f^{\Lambda}, \\ f^{\Lambda} &= \sum_h \int d^3 q \int_0^{\pi} d\Theta \sin \Theta \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\frac{\lambda_T}{a-b \cos \Theta}} d\varrho \varrho^2 \frac{e \boldsymbol{\rho}(\vec{q})}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\varrho}} \left[\left(\frac{q \cdot \vec{\epsilon}(\vec{\ell}, h)}{q \cdot \ell} - \zeta^{\Lambda}(\vec{\ell}, h) \right) e^{-i\ell \cdot v_q T_q^{\Lambda}} a^{\dagger}(\vec{\ell}, h) - (\text{h.c.}) \right] \\ &=: \sum_h \int d^3 q \int_{S_T} d^3 \ell \frac{e \boldsymbol{\rho}(\vec{q})}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\varrho}} \left[\left(\frac{q \cdot \vec{\epsilon}(\vec{\ell}, h)}{q \cdot \ell} - \zeta^{\Lambda}(\vec{\ell}, h) \right) e^{-i\ell \cdot v_q T_q^{\Lambda}} a^{\dagger}(\vec{\ell}, h) - (\text{h.c.}) \right] \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

となる。ここで、

$$\ell^{\mu} := \varrho(1, \sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta), T_q^{\Lambda} := \frac{E_q}{E_{q_{\Lambda^{-1}}}} T \quad (5.4.15)$$

を定義した。 ζ^{Λ} を含まない項ではブーストを荷電粒子の運動量積分に吸収させられる。したがって Lorentz 変換による非共変な効果は ζ^{Λ} を含む項だけから生じる。しかし ζ^{Λ} の項はゲージ関数を

$$\xi^{\Lambda}(\vec{\ell}, h) = \frac{\varpi^2 - 1}{4\varpi^2} [\varpi^2(1 - \cos \Theta) + 1 + \cos \Theta] \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Theta \right) \quad (5.4.16)$$

もしくは同等に

$$\xi^{\Lambda}(\vec{k}, h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\varpi^2 - 1) \sin \theta}{\varpi^2(1 + \cos \theta) + 1 - \cos \theta} \quad (5.4.17)$$

とした大ゲージ変換を与えるものと見做せる。大ゲージ変換が予言に影響しないことが漸近対称性であったから、漸近対称性によりドレス状態は Lorentz 共変と言える。

5.4.2 軟重力子の理論

前節で Weinberg の重力子理論の問題であった、理論のラグランジアン of 段階での Lorentz 対称性の破れが、実は問題ではない可能性が開かれた。重力子の理論には、他にも繰り込み不能な理論であるという困難があり、このことが量子論における重力の取り扱いを複雑にする一因となっている。

そこで軟重力子のみが理論に存在するような理論を構成し、重力の量子的な側面のうち軟重力子が担う役割を鮮明にすることを目指す。ここでは自己相互作用する質量を持った実スカラー場と、軟重力子の理論を考える。

模型の構築

今回の模型では重力を場の量子論の枠組みで説明することが期待される重力子のうち、低エネルギー部分のみを取り出した有効理論を考える。我々のドレス状態形式によると、「柔らかさ」は慣性観測者ごとに定まる。そこで、ある慣性観測者を固定して、その観測者にとっての軟重力子の役割を調べるという有効理論と位置付けることにして理論構築を始めよう。

重力子については、Weinberg の重力子理論でエネルギーの紫外切断を λ_T にしたものを採用する。スカラー場は ϕ^4 理論つまり、

$$\mathcal{L}_\phi^I(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - \frac{g}{4!}\phi^4(x) \quad (5.4.18)$$

となる理論を採用する。また、相互作用表示で重力子は、エネルギー運動量テンソルの $\eta^{\mu\nu}$ に比例する項とは結合しない。したがって重力子の相互作用ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{h,\text{int}}^I(x) = \frac{\kappa}{2}h_{\mu\nu}(x)\partial^\mu\phi(x)\partial^\nu\phi(x) - \mathcal{V}_N^I(x) \quad (5.4.19)$$

である。ここで、 $\mathcal{V}_N^I(x)$ は伝搬関数の非共変項を打ち消す Newton 項である。

軟重力子の理論は QED と基本的な構造が同じである。同様の解析から、漸近相互作用は QED のものに対して、

$$\left\{ \epsilon_\mu(\vec{k}, h), -e\boldsymbol{p}(\vec{p}), \frac{p^\mu}{E_p} \right\} \longrightarrow \left\{ \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}, h), \frac{\kappa E_p}{2}\mathbf{N}(\vec{p}), \frac{p^\mu p^\nu}{E_p^2} \right\}, \mathbf{N}(\vec{p}) := b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}) \quad (5.4.20)$$

と変更したものとなる。

したがって

$$\mathbf{f}(\vec{p}, \vec{k}, h; t) \rightarrow \mathbf{g}(\vec{p}, \vec{k}, h; t) := -\frac{\frac{\kappa}{2}\mathbf{N}(\vec{p})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \frac{p^\mu p^\nu \overline{\epsilon_{\mu\nu}}(\vec{k}, h)}{k \cdot p} e^{-ik \cdot v_p t} \quad (5.4.21)$$

$$\hat{h}(t) \rightarrow -\frac{\kappa^2}{64\pi} \int d^3p \int d^3q \mathbf{N}(\vec{p})\mathbf{N}(\vec{q}) \frac{2(p \cdot q)^2 - m_p^2 m_q^2}{\sqrt{(p \cdot q) - m_p^2 m_q^2}} \log(\lambda_V/\lambda_T) \quad (5.4.22)$$

となる。

したがって漸近入射状態は

$$|\Phi_\alpha(-T)\rangle\rangle = \exp\left[-i \sum_{mn \in \alpha} \frac{\kappa^2(1 + \beta_{mn}^2)}{64\pi\beta_{mn}\sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} \log(\lambda_V/\lambda_T)\right] |\psi_\alpha\rangle \otimes |g_\alpha(-T)\rangle, \quad (5.4.23)$$

$$|g_\alpha(-T)\rangle = D_{g_\alpha(-T)} |0; h\rangle, D_{g_\alpha(-T)} := \exp\left[\sum_h \int_{S_T} d^3k [g_\alpha(k, h; -T)a^\dagger(\vec{k}, h) - \text{h.c.}]\right] \quad (5.4.24)$$

$$g_\alpha(\vec{k}, h; -T) := -\sum_{n \in \alpha} \frac{\frac{\kappa}{2}e^{ik \cdot v_n T}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \frac{p_n^\mu p_n^\nu \overline{\epsilon_{\mu\nu}}(\vec{k}, h)}{k \cdot p_n} \quad (5.4.25)$$

となる。漸近放射状態も同様だ。

5.4.3 漸近散乱振幅

外線に重力子のいない、スカラー粒子の散乱過程 $\alpha \rightarrow \beta$ を考える。このとき、理論の重力子は低エネルギー重力子だけなので、ループ補正にのみ影響を与える。軟重力子が外線のスカラー粒子を繋ぐときにかかる補正は上記の対応によって、

$$K_{mn} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \eta_m \eta_n \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \int_{S_T} \frac{d^3k p_m^\mu p_m^\nu (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) p_n^\rho p_n^\sigma}{2[k^2 - i\varepsilon][p_n \cdot k - i\eta_n \varepsilon][-p_m \cdot k - i\eta_m \varepsilon]} + o(\lambda_T) \quad (5.4.26)$$

となる。留数定理から

$$K_{mn} = \kappa^2 \frac{\eta_m \eta_n m_m m_n (1 + \beta_{mn}^2)}{64\pi^2 \beta_{mn} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} \log \frac{1 + \beta_{mn}}{1 - \beta_{mn}} \log \frac{\lambda_T}{\lambda_V} + i\kappa^2 (1 + \eta_m \eta_n) \frac{m_m m_n (1 + \beta_{mn}^2)}{64\pi \beta_{mn} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} \log \frac{\lambda_T}{\lambda_V} \quad (5.4.27)$$

がわかる。ドレス状態の軟重力子の内積からくる補正は

$$\alpha_{mn}(k) \rightarrow \tilde{\alpha}_{mn}(k) = \frac{2(p_m \cdot p_n)^2 - m_m^2 m_n^2}{2(p_m \cdot k)(p_n \cdot k)} \quad (5.4.28)$$

$$\gamma_{mn}(k) \rightarrow \tilde{\gamma}_{mn}(k) = \tilde{\alpha}_{mn}(k) + \sigma_{mn}(k) \quad (5.4.29)$$

$$\sigma_{mn}(k) := \frac{(p_m \cdot k)^2}{p_m \cdot k} k \cdot p_n + 2 \frac{p_n \cdot \bar{k}}{p_n \cdot k} p_n \cdot p_m - \frac{(p_n \cdot p_n) k \cdot p_m}{p_n \cdot k} + (m \leftrightarrow n) \quad (5.4.30)$$

の対応で与えられる。QED で $\sum_n e_n \eta_n = 0$ を使ったように、ここでも $\sum_n p_n^\mu \eta_n = 0$ を使って

$$\log \tilde{\Upsilon}_{\beta\alpha}(T) = - \int \frac{d^3 k}{2\omega} \left[\sum_{m,n} \frac{\eta_m \eta_n \kappa^2}{8(2\pi)^3} \tilde{\alpha}_{mn}(k) - \sum_{m \neq n} \frac{\eta_m \eta_n \kappa^2}{8(2\pi)^3} \tilde{\gamma}_{mn}(k) [1 - \cos[(\eta_m v_m - \eta_n v_n) \cdot kT]] \right] \quad (5.4.31)$$

が得られる。ここで、 m, n の和は全ての外線を走る。第 1 項目は $\mathcal{O}(\omega^{-1}) \sim \mathcal{O}(T)$ であり、第 2 項目は $\mathcal{O}(\omega T) \sim \mathcal{O}(T^0)$ である。したがって $\mathcal{O}(\lambda_T)$ の最低次までの寄与

$$\log \tilde{\Upsilon}_{\beta\alpha}(T) \stackrel{\text{L}}{=} - \int \frac{d^3 k}{2\omega} \left[\sum_{m,n} \frac{\eta_m \eta_n \kappa^2}{8(2\pi)^3} \tilde{\alpha}_{mn}(k) \right] = -\frac{1}{2} B_{\beta\alpha} \quad (5.4.32)$$

が取り入れるべき補正となる。ここで、

$$B_{\beta\alpha} := \frac{\kappa^2}{64\pi} \sum_{n,m} \eta_m \eta_n m_m m_n \frac{1 + \beta_{mn}^2}{\beta_{mn} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} \log \left(\frac{1 + \beta_{mn}}{1 - \beta_{mn}} \right) = \sum_{mn} K_{mn} \quad (5.4.33)$$

を定義した。これは軟重力子のループ補正と打ち消し合う。また、ドレス状態の発散する位相は $-\frac{i}{2} \text{Im}[K_{mn}]$ であり、これもまた軟重力子のループ補正と打ち消し合う。以上の事実から、

$$S_{\beta\alpha}^{\text{as}}(T) \stackrel{\text{L}}{=} S_{\beta\alpha}^{\text{D},\phi}(\lambda_T) \quad (5.4.34)$$

が得られる。ここで、 $S_{\beta\alpha}^{\text{D},\phi}$ は ϕ^4 理論で計算した Dyson の散乱行列である。この結果は、軟重力子の λ_T についての主要項は散乱現象の予言に全く影響を与えないことを意味する。

5.4.4 軟重力子の役割

軟重力子は散乱行列に影響を与えない。では、軟重力子は非自明な役割を持たないのだろうか？

本論文で提案する散乱理論では、散乱問題を時刻 $t = -T$ の時間一定面 Σ_- で定まる状態から時刻 $t = T$ の時間一定面 Σ_+ で定まる状態への遷移を記述する問題として扱う。時空に面を導入したことで、この理論は一見 Lorentz 対称性を破るように思える。しかし QED では、漸近対称性の存在によって Lorentz 対称性が回復する機構が働くことを見た。一般に質量を持つ粒子のみを含む理論ではこの機構は働かない。そこで、任意の粒子と結合する重力子が存在すれば、QED と同様の機構によって Lorentz 共変性が守られると期待できる。

これを見るために、まずは漸近散乱行列の漸近対称性を見よう。

漸近対称性

重力子の漸近対称性変換は、

$$\delta \epsilon_{\mu\nu}^\pm(\hat{k}, h) = \omega^{-1} k_{(\mu} \overline{\lambda_{\nu)}^\pm}(\hat{k}, h), \quad \lambda_\mu^\pm(\hat{k}, h) = \Lambda_{\mathcal{O}}^\pm(\hat{k}, h) \hat{k}_\mu + \Lambda_+^\pm(\hat{k}, h) \epsilon_\mu(\hat{k}, +) + \Lambda_-^\pm(\hat{k}, h) \epsilon_\mu(\hat{k}, -) \quad (5.4.35)$$

で与えられる。この変換は漸近状態に対して $g_\alpha(\vec{k}, h; \pm T) \rightarrow g_\alpha(\vec{k}, h; \pm T) + \varepsilon_\alpha^\pm(\vec{k}, h; \pm T)$

$$\varepsilon_\alpha^\pm(\vec{k}, h; \pm T) := \sum_{n \in \alpha} \frac{-\frac{\kappa}{2} e^{\mp i k \cdot v_n T}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega\omega}} p_n^\mu \left[\Lambda_{\emptyset}^\pm(\hat{k}, h) \hat{k}_\mu + \Lambda_+^\pm(\hat{k}, h) \epsilon_\mu(\hat{k}, +) + \Lambda_-^\pm(\hat{k}, h) \epsilon_\mu(\hat{k}, -) \right] \quad (5.4.36)$$

の変換を誘導する。漸近散乱行列への補正は、軟重力子のコヒーレント状態の内積

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_\beta^+(T) | \varepsilon_\alpha^-(T) \rangle &\stackrel{L}{=} \exp \left[-\frac{\kappa^2}{16(2\pi)^3} \log(\lambda_T/\lambda_V) \sum_h \sum_{nm} \int d\Omega \eta_n \eta_m \left(p_n \cdot \varepsilon^{\eta_n}(\hat{k}, h) \right) \left(p_m \cdot \overline{\varepsilon^{\eta_m}}(\hat{k}, h) \right) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\kappa^2}{2(4\pi)^3} \log(\lambda_T/\lambda_V) \sum_h \int d\Omega \left| P_{\text{out}} \cdot \varepsilon^+(\hat{k}, h) - P_{\text{in}} \cdot \varepsilon^-(\hat{k}, h) \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

が主要なものとして加わる。 $P_{\text{out}}^\mu, P_{\text{in}}^\mu$ は $t = \pm T$ の空間超曲面上の硬い全エネルギー運動量であり、 $P_{\text{out}}^\mu = P_{\text{in}}^\mu \equiv P^\mu$ と考えてよい。したがって漸近散乱行列が 0 とならないためには、

$$\begin{aligned} 0 = \sum_h \int d\Omega &\left[\left(\Lambda_{\emptyset}^+(\hat{k}, h) - \Lambda_{\emptyset}^-(\hat{k}, h) \right) \left(1 - V_{\emptyset}(\hat{k}, h) \right) \right. \\ &\left. - \left(\Lambda_+^+(\hat{k}, h) - \Lambda_+^-(\hat{k}, h) \right) V_+(\hat{k}, h) - \left(\Lambda_-^+(\hat{k}, h) - \Lambda_-^-(\hat{k}, h) \right) V_-(\hat{k}, h) \right]^2 \end{aligned} \quad (5.4.38)$$

とならなければならない。ここで、

$$\vec{V} := \vec{P}/P^0, \quad V_{\emptyset}(\hat{k}, h) := \vec{V} \cdot \hat{k}, \quad V_{\pm}(\hat{k}, h) := \vec{V} \cdot \vec{\epsilon}(\hat{k}, \pm) \quad (5.4.39)$$

を定めた。この要請は

$$\begin{aligned} \Lambda_{\emptyset}^+(\hat{k}, h) &= \Lambda_{\emptyset}^-(\hat{k}, h) \\ \Lambda_+^+(\hat{k}, h) &= \Lambda_+^-(\hat{k}, h) \\ \Lambda_-^+(\hat{k}, h) &= \Lambda_-^-(\hat{k}, h) \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

を意味する。これらはエネルギー運動量の分布を歪めるような変換に対応する。エネルギー運動量分布の歪みを同じくする観測者にとっての状態間のみ遷移可能であることを意味する。結局この条件は

$$\lambda_\mu^+(\hat{k}, h) = \lambda_\mu^-(\hat{k}, h) \quad (5.4.41)$$

となって、Hilbert 空間がこの関数によって超選択区間に分割されることがわかる。すなわち、軟重力子は理論の Hilbert 空間を

$$\mathcal{H}_{\text{as}}^\pm(\pm T) = \bigoplus_{\lambda_\mu} \mathcal{H}_{\text{as}, \lambda_\mu}^\pm(\pm T), \quad \mathcal{H}_{\text{as}, \lambda_\mu}^\pm(\pm T) := \mathcal{H}_{\text{F}}^{\text{as}} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_\mu}^{\text{soft}}(\pm T) \quad (5.4.42)$$

と分割する。Lorentz 変換は QED と同様の機構で漸近対称性により回復する。このことは軟重力子が各慣性観測者毎に Hilbert 空間を分割する役割を担うことを意味する。異なる慣性観測者同士の状態は異なる超選択区間に属するので、これらを重ね合わせても状態間の干渉が起きないという予言が得られる。

重力メモリー効果

また、原理的に観測可能な物理量として、軟重力子はメモリー効果を与える。メモリー効果は $t = \pm T$ の超曲面上での重力子の期待値の差として現れる。ある位置 \vec{x} におけるメモリーは、

$$\begin{aligned} \delta \langle h_{ij}(\vec{x}) \rangle &:= \langle g_\beta(T) | h_{ij}(\vec{x}, T) | g_\beta(T) \rangle - \langle g_\alpha(-T) | h_{ij}(\vec{x}, -T) | g_\alpha(-T) \rangle \\ &= \sum_n \frac{\kappa \eta_n E_n}{(2\pi)^3} \int_0^{\lambda_T} d\omega \int d\Omega \frac{\cos[\omega \hat{k} \cdot (\vec{x} - \eta_n \vec{v}_n T)]}{1 - \vec{v}_n \cdot \hat{k}} (v_n v_n)_{ij}^{\text{TT}} \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

となる。ここで、TT は重力子の運動量方向に対しての無トレース横成分である。これはベクトル射影テンソルを使って構成できる TT テンソル

$$(\text{TT})_{k\ell}^{ij}(\hat{k}) := P_k^i(\hat{k})P_\ell^j(\hat{k}) - \frac{1}{2}P^{ij}(\hat{k})P_{k\ell}(\hat{k}) \quad (5.4.44)$$

を作用させて得られる。TT テンソルは対称テンソルに対してはテンソル射影テンソルの 1/2 倍に一致する¹⁴。また、

$$\hat{\theta} := (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta), \quad \hat{\phi} := (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \quad (5.4.45)$$

を使えばベクトル射影テンソルは

$$P_j^i(\hat{k}) = \hat{\theta}^i \hat{\theta}_j + \hat{\phi}^i \hat{\phi}_j \quad (5.4.46)$$

とかけるから、任意の対称テンソル A_{ij} の TT 部分は

$$(\text{TT}A)_{ij} = A_+ (\hat{\theta}_i \hat{\theta}_j - \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j) + A_\times (\hat{\theta}_i \hat{\phi}_j - \hat{\phi}_i \hat{\theta}_j) \quad (5.4.47)$$

$$A_+ := \frac{1}{2} [\hat{\theta}^i \hat{\theta}^j - \hat{\phi}^i \hat{\phi}^j] A_{ij}, \quad A_\times := \frac{1}{2} [\hat{\theta}^i \hat{\phi}^j + \hat{\phi}^i \hat{\theta}^j] A_{ij} \quad (5.4.48)$$

と分解できる。これはいわゆるプラスモードとクロスモードと呼ばれるものだ。式 (5.4.43) のエネルギー積分を実行すると、

$$\frac{\kappa}{2\pi^2 T} \sum_n \eta_n E_n \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{(v_n v_n)_{ij}^{\text{TT}} \sin[\hat{k} \cdot \vec{v}_n - \eta_n \lambda_T \hat{k} \cdot \vec{v}_n]}{1 - \hat{k} \cdot \vec{v}_n} \frac{\hat{k} \cdot \vec{v}_n - \eta_n \lambda_T \hat{k} \cdot \vec{v}_n}{\hat{k} \cdot \vec{v}_n - \eta_n \lambda_T \hat{k} \cdot \vec{v}_n} \quad (5.4.49)$$

が得られる。ここで、 $|\vec{x}|/T \ll 0$ の場合を近似的に考えることにしよう。すると、

$$\text{sinc}(a + \varepsilon) = \text{sinc}(a) + \frac{a \cos a - \sin a}{a^2} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.4.50)$$

を使ってメモリーが

$$\sum_n \frac{\kappa \eta_n E_n}{2\pi^2 T} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{(v_n v_n)_{ij}^{\text{TT}}}{1 - \hat{k} \cdot \vec{v}_n} \left[\frac{\sin[\hat{k} \cdot \vec{v}_n]}{\hat{k} \cdot \vec{v}_n} - \eta_n \lambda_T \frac{(\hat{k} \cdot \vec{v}_n) \cos(\hat{k} \cdot \vec{v}_n) - \sin(\hat{k} \cdot \vec{v}_n)}{(\hat{k} \cdot \vec{v}_n)^2} \hat{k} \cdot \vec{x} \right] + \mathcal{O}((\lambda_T^3)) \quad (5.4.51)$$

と計算できる。 λ_T の主要項としては $|\vec{x}|/T = 0$ としたものが残る。よって

$$\delta \langle h_{ij}(\vec{x}) \rangle \stackrel{\text{L}}{=} \delta \langle h_{ij}(\vec{0}) \rangle \quad (5.4.52)$$

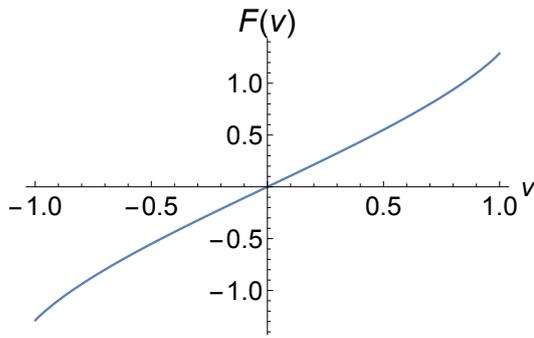
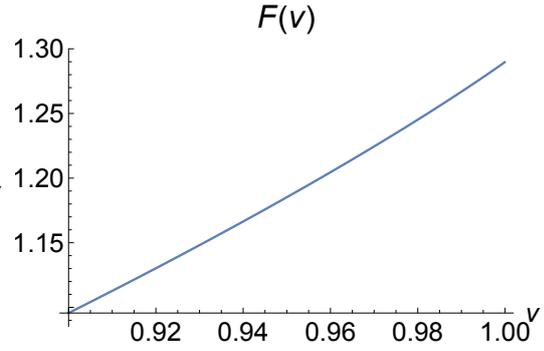
となる。計算を実行するためには、回転対称性を使って \vec{v}_n を 3 軸に向けて積分を実行したものを足し上げればよい。こうするとクロスモードは消えて、プラスモードだけが残る。したがって、

$$\begin{aligned} \delta \langle h_{ij}(\vec{0}) \rangle &= \sum_n \frac{\kappa \eta_n E_n}{8\pi^3 T} \int d\Omega_n \frac{\sin(v_n \cos\theta_n)}{(1 - v_n \cos\theta_n) v_n \cos\theta_n} \frac{1}{2} v_n^2 \sin^2 \theta_n [\hat{\theta}_{ni} \hat{\theta}_{nj} - \hat{\phi}_{ni} \hat{\phi}_{nj}] \\ &= \sum_n \frac{\kappa \eta_n E_n}{16\pi^2 T} \int_{-1}^1 du \frac{v_n^2 (1 - u^2)}{1 - v_n u} \frac{\sin(v_n u)}{v_n u} (1 - u^2) [3\hat{v}_{ni} \hat{v}_{nj} - \delta_{ij}] \\ &= \sum_n \frac{3\kappa \eta_n |\vec{p}_n|}{16\pi^2 T} F(v_n) [v_n]_{\langle ij \rangle}, \end{aligned} \quad (5.4.53)$$

$$F(v) := \int_{-v}^v dx \frac{[1 - (\frac{x}{v})^2]^2 \sin x}{(1 - x)x} \quad (5.4.54)$$

と計算できる。ここで、 $n_{\langle ij \rangle} = \hat{n}_i \hat{n}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}$ の無トレース対称表記を用いた。 $F(v)$ の外形は次の通り。

¹⁴ $P_{ijkl}(\vec{k})$ は完全に TT 部分を取り出すテンソルになっている。

図 5.3 $v \in [-1, 1]$ での $F(v)$ の概形図 5.4 $v \in [0.9, 1]$ での $F(v)$ の概形

QED の場合と異なり、 $v \rightarrow 1$ で発散せず、有限の値を取る。その値は $2(\cos(1) - \sin(1) + \text{Si}(1)) \approx 1.28983\dots$ である¹⁵。また、QED 同様に $F(0) = 0$ となる。

平坦時空のヘリシティ 2 ゲージ粒子が時空の計量という意味を持つなら、観測量としてメモリー効果は $x^i = x^i(\lambda)$ の経路の長さの変化

$$\Delta L = \delta \int d\lambda \sqrt{g_{ij}(\vec{x})} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \stackrel{L}{=} \int d\lambda \frac{\delta \langle h_{ij}(\vec{0}) \rangle \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}}{2\sqrt{\eta_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}}} = \sum_n \frac{3\kappa^2 \eta_n |\vec{p}_n|}{32\pi^2 T L} F(v_n) \int d\lambda [v_n]_{(ij)} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \quad (5.4.55)$$

として評価できる。ここで、計量を $\eta_{\mu\nu}$ としたときの経路長を L と定義した。

5.4.5 線形重力理論のまとめ

本研究では Weinberg の重力子の理論をドレス状態形式の枠組みの中で考えることによって、低エネルギー重力子を加えた理論を構築した。通常、エネルギーの紫外切断を理論のパラメータとして取り入れると、Lorentz 対称性が破れ、対称性に依拠する様々な議論が有効でなくなってしまう。一方、今回の理論では紫外切断のある観測者が定義する「柔らかさ」 λ_T で与えたが、この切断によって破れる場の段階での Lorentz 対称性は、ドレス状態の持つ漸近対称性によって回復する。

本論文で提案する散乱理論では、時間一定超曲面 Σ_{\pm} を導入することによって場の段階での Lorentz 対称性を破ってしまう。そのため硬い粒子のみの散乱を考える際に、Lorentz 対称性から得られる良い性質が使えない可能性があった。しかし理論に軟重力子を加えることによって、 Σ_{-} から Σ_{+} の状態の遷移を Lorentz 対称性を漸近対称性の意味で保ったままに議論することが可能となる。この意味で今回の定式化では、軟重力子の存在は理論に要請されるものである。

λ_T の主要項のみを取り扱う今回の枠組みでは、散乱問題の予言に軟重力子は影響を与えないことがわかった¹⁶。軟重力子定理は主要項に関しては外線粒子の種類を問わないので、この結果は有質量粒子の散乱問題に対してはスピンを問わずに成り立つと言えるだろう。散乱問題の予言に影響を与えない一方で、メモリー効果によって軟重力子を含む理論とそうでない理論は区別できる可能性がある。

重力メモリー効果の主要項は式 (5.4.55) で与えられる。この予言を実証できれば、量子論の枠組みで重力を

¹⁵QED の場合に解析解も与えたので一応ここでも与えておくと次のようになる。

$$F(v) = \frac{(1-v^2)^2 (\text{Ci}(1+v) - \text{Ci}(1-v))}{v^4} \sin(1) + 2\text{Si}(v) + \frac{(1-v^2)^2 (\text{Si}(1-v) - \text{Si}(1+v))}{v^4} \cos(1) + \frac{2v \cos(v) - 2 \sin(v)}{v^4}.$$

¹⁶ λ_T より小さいエネルギーの重力子が検出できるほど検出機の精度を高くできれば、Bloch-Nordsieck 形式との差異から軟重力子の影響を見ることが原理的にはできる。しかしこれは軟光子 1 つを検出するのと比べても困難だろう。

記述すると期待される重力子のうち、少なくとも低エネルギーの軟重力子は存在時空の幾何を表すものとして解釈可能な形で存在することが強く示唆される。

また、ローレンツ対称性を担保する漸近対称性が Hilbert 空間を超選択区間に分割するという結果は重力の量子的側面を理解する上で重要な示唆を与えるだろう。近年重力の量子性を検証する試みが盛んであるが、その中で重力の重ね合わせについての議論がある。異なる超選択区間に属する状態は純粋状態としては重ね合わせることができず、干渉効果が生まれない。漸近対称性は時間的方向を異にする観測者にとっての状態が Hilbert 空間の異なる超選択区間に属することを予言するから、このことによって軟重力子の存在や役割を確かめることができるかもしれない。

第 6 章

結論と議論

場の量子論は素粒子標準模型に代表されるように大きな成功を収めているが、重力の説明には成功していない。そのため量子重力理論の構築が現代物理学の大きな課題となっている。この困難は、理論的には繰り込みや非物理的自由度の問題などから生じ、実験観測的には量子効果が顕となるスケールを実現し難いために生じる。このような未だ見ぬスケールの物理法則を探る手掛かりとして、散乱の過程を記述する散乱行列のユニタリ性などの性質が注目されている。ところが、光子や重力子などの無質量粒子を含んだ理論では赤外発散の問題によって散乱行列の存在すら明らかではなかった。

本研究では赤外発散を取り除くためのドレス状態形式を再考し、散乱行列の定式化をおこなった。具体的な方針として、一般相対性理論において漸近対称性が初期値問題を定義する際に現れることに着目し、散乱問題を、時刻 $t = -T$ の時間一定超曲面 Σ_- 上に定義される状態から、時刻 $t = +T$ の時間一定超曲面 Σ_+ 上に定義される状態への遷移を記述する初期値問題として定める。これは本来当然のことだが、無限をとる極限操作に飲み込まれ、従来の定式化では隠れてしまっていた。また予言能力を担保するために、 Σ_{\pm} や赤外/紫外切断などの時空の量と、理論のハミルトニアン以外のものは導入せずに発展が記述できるように設定する。この定式化においては、散乱の記述に用いる Σ_{\pm} での漸近状態が、理論の相互作用を用いて導出するべきものとなる。

こうして定式化した散乱問題を、まず量子力学の Coulomb 散乱に適用した。その場合、Dollard 形式と等価な散乱理論となる。

次に、実験的にも理論的にもよく知られた量子電磁気学に適用した。提案する散乱理論でも量子電磁気学の漸近状態は、軟光子の相互作用を取り入れたドレス状態となる。この意味でドレス状態形式を用いた散乱問題の定式化とも言える。この研究で行ったことは以下の通りである。

- (I-A) 得られたドレス状態を用いて遷移確率を計算することで、この散乱理論がこれまでによく知られていた結果を再現しながら、さらに広い状況にも適用可能であることを示した。
- (I-B) 量子電磁気理論の状態や、漸近状態の属する Hilbert 空間についての議論を行い、散乱行列がその Hilbert 空間でユニタリであることを示した。
- (I-C) 散乱行列のゲージ対称性を調べることで、場の量子論における漸近対称性の在り方の一面を明らかにした。
- (I-D) メモリー効果が提案する散乱理論の枠組みの中に組み込まれていることを示し、簡単な例によって、原理的には検証可能な理論予測が得られることの示唆を与えた。

これらの結果から、提案する散乱理論は「軟粒子定理を超えて散乱行列をユニタリに定義するドレス状態」、場の量子論における漸近対称性およびメモリー効果」の全てを内包するという意味で、赤外三角関係に対して統一的な視座を与えるものと言えよう。本研究で行った散乱問題の定式化の妥当性は、この観点からも支持される。

この散乱理論では、時空に Σ_{\pm} の超曲面を導入することで一見 Lorentz 対称性を破っているように思える。ところが、こうした場の段階での Lorentz 対称性の破れは、ドレス状態に備わる漸近対称性によって状態の段階で回復することが明らかとなった。この事実は軟重力子の理論の可能性を開く。

次に、S. Weinberg の議論 [40] に基づいて軟重力子の理論の構築を行い、具体的に質量を持つ実スカラー粒子と軟重力子が存在する際の散乱について調べた。漸近状態はやはり軟重力子の相互作用を取り入れたドレス状態となる。この研究で行ったことは以下の通りである。

- (II-A) 得られたドレス状態を用いて遷移確率を計算することで、軟重力子 1 個の観測ができない限りは、散乱結果の予言に軟重力子が寄与しないことを示した。
- (II-B) メモリー効果の議論を行い、これに対しては軟重力子が非自明な予言を与えることを明らかにした。
- (II-C) 軟重力子のドレス状態に備わる漸近対称性が Lorentz 対称性を回復する機構を確認した。
- (II-D) 軟重力子の与える赤外発散によって、ある慣性観測者にとっての状態は、別の慣性観測者にとっての状態と直交することを示した。

(II-A) と (II-B) は軟重力子の存在を検証する際の方針を与えるものと言えよう。メモリー効果を現実的な設定で定量的に評価し、検証可能な予言を与えることを目指した研究を今後行う予定である。散乱した粒子を検出せずメモリー効果だけを測定することを考えたときに、散乱の情報をどれだけ引き抜けるのかという問題も興味深い。また、漸近状態を導出する際に、準主要項まで相互作用を取り入れる枠組みでの散乱理論を考えることも面白いだろう。準主要項が遷移確率やメモリー効果に対する予言に与える影響を詳細に解析することは有意義だと考えている。

(II-C) は逆に言えば、質量を持った粒子のみを理論に取り入れるとき、 $T \rightarrow \infty$ の極限だけが Lorentz 対称性を満たすことを意味する。 $T \rightarrow \infty$ の極限だけが Lorentz 対称性を満たすということは、これまで試みられてきた散乱問題の定式化の上では自明な障害であり、本研究で構築した Σ_{\pm} を導入する散乱理論がこれまで提案されなかった大きな理由の 1 つであろう。一方、提案する散乱理論では軟重力子の存在を理論に要請することで、時刻 $t = -T$ から $t = T$ への時間発展が Lorentz 対称性を尊重した理論の下で記述できる。量子電磁気学では光子がこの役割を担ったために軟重力子を導入せずとも散乱理論が設定できたが、ここでさらに軟重力子を理論に加えた場合の赤外三角関係を解析することも非常に興味深い問題である。

(II-D) は Hilbert 空間が軟重力子によって、各慣性系毎に対応する超選択区間に分割されることを意味する。実験・観測技術の向上により、重力の量子的側面を検証する提案が為されている [42–44]。これらの提案には位置の重ね合わせ状態が重要な役割を担うことが多いが、軟重力子が超選択則を与えるという本研究で明らかとなった著しい性質は、このような研究にも考慮すべき基礎を与えることになるだろう。異なる超選択区間に属する状態は純粋状態として重ね合わせることができないのである。ドレス状態を考慮した状態の重ね合わせに関する示唆に富んだ研究として、平井・杉下の研究 [45] がある。ドレス状態に対して可能な重ね合わせ状態を与えて解析を行うことで、重力の本質的に量子論的な側面に迫れるかもしれない。このような方向の非常に興味深い研究も今後に残されている。

今回提案した漸近状態、散乱行列の定義は形式的には理論の詳細に依らないものである。したがって QED や線形重力理論以外の無質量粒子を含む理論に非自明な結果を与える可能性がある。

赤外三角関係は線形重力理論と量子電磁気学以外にも、超対称性のある理論、磁荷のある理論、弦理論など、あらゆる理論で発見、示唆されている。また、背景時空も 4 次元漸近平坦に限らず、高次元や漸近 (A)dS で議論されているし、さらに主要なもの、準主要なものといった階層性も見つかっている。本論文での散乱問題の定式化が、これらの理解を深める一助となることが期待できる。

例えば、スカラー QED の漸近対称性の解析から準主要項までの軟光子定理が現れるという解析 [113, 114] や、ゲージ理論以外の漸近対称性の議論 [91, 115] が存在する。場の理論の漸近状態から漸近対称性を探るといった視点がこれらの理解を深めてくれるかもしれない。

λ_T についての主要項を超えた解析も面白いだろう。準主要な軟光子定理に対応した準主要なドレス状態についての議論がある [36] が、我々の理論形式で λ_T の準主要項までを取り入れれば導出されるかもしれない。 λ_T を有限に留める解析においては準主要項以上の寄与も意味を成すので、そちらの発展も期待される。

他にも、超回転対称性に対する理解を深めることができるかもしれない。また、準主要項以降が散乱確率に影響するのかもしれないのかという議論も自明ではない。このことを真剣に議論するためには、散乱振幅に現れた λ_T の高次として無視した補正が、高次のドレスと高次のループ補正を全て取り入れたときに消えるのかどうかを確認しなければならない。

また、メモリー効果の QED と線形重力理論での無質量極限の振る舞いの違いは興味深い。これは QED が漸近状態を定義する面上に無質量の荷電粒子が存在することを禁止している一方で、あらゆる粒子と結合する重力子はそのような禁止則をもたさないと示唆のようにも思える。QED と線形重力子の理論の違いとして共線発散の有無があるが、共線発散の対処を考えることでメモリー効果が有限になるのかなどは面白い問題だろう。この視点は Yang-Mills 模型を考える上でも一定の意味を持つかもしれない。

線形を超えた重力理論をドレス状態形式で構築し、その意味するところを調べることもできるだろう。また、光子と重力子両方が存在する場合の漸近状態や、その帰結にも興味がある。これまでの研究では単純に直和的な寄与が考えられてきたが、光子と重力子の結合があればそれはそれらの自由度を混ぜるような影響を与えるかもしれない。

軟光子の存在は Lorentz 対称性の破れの表出だという議論がある [26, 28, 46]。これは軟光子の相互作用によって、全電荷が 0 とならない状況では Lorentz 対称性が破られるというものだ。そのため Lorentz 対称性を尊重した散乱理論を考えるためには、この世界の観測不能な遠方に電荷を 0 にするような反粒子の対を付け足す必要があるという議論がある。しかしこのような月の裏側に都合の良いものを付け足すような操作は、クラスタ分解原理などを信じるような、物理の理論は検証可能なもので構成されて欲しいとする立場からは受け入れ難いものだ。また、このような電荷を打ち消す操作は重力理論では不可能である¹。そこで電荷が 0 でない状況で漸近対称性や Lorentz 対称性がどのようにになっているかを理解することは不可欠であり、本研究はこれに関して 1 つの解答を与えた結果となる。

ドレス状態は基礎的な概念にもかかわらず、これまで定量的な議論がほとんどなされていない未開拓の分野と言える。様々な理論の散乱問題をドレス状態形式で解析する以外にも、上で少し議論したように、重ね合わせなどのより量子力学的な問題の解析に適用することも重要だろう。また、散乱行列は未知の理論を探る上での手がかりとして使われているが、無質量粒子が存在する理論ではドレス状態形式以外でそれを定義することは、筆者の知る限り今の所できていない。したがって散乱行列を用いた理論の制限にも、ドレス状態形式の側面から議論に検討の余地が生まれるかもしれない。

また、情報問題についても触れておく。論文 [18] では BH に打ち込まれたカレントの情報を持った光子が地平面上と無限遠方に励起すること示され、情報を軟光子が担う可能性が議論された。彼らの主張ではこれは漸近対称性の電荷によって引き起こされたものであり、漸近対称性とその電荷が情報問題解決の糸口になることが指摘された。一方今回の解析では、漸近対称性は漸近状態に含まれる軟光子のゲージ変換に対する制限として与えられる。つまり、漸近対称性は粒子の情報を含まないのである。その代わりに、漸近状態がコヒーレント状態の関数 f_α を通して粒子の情報を保持している。この観点から、情報問題を漸近対称性から考える場合、本質的に重要なのはその対応する電荷ではなく、ドレス状態という従来の Fock 基底から外れた特殊な状態なのだと考えられる。ドレス状態を用いた同様の考察が我々とは異なる文脈でもなされている [29, 30]。実際、漸近対称性からは軟粒子定理が導けるが、軟粒子定理は散乱行列そのものの赤外発散を防ぐことができず、ユニタリ性の議論ができないのだ。今回見たように我々のドレス状態形式では散乱行列はユニタリであるから、情報問題を考える場合の出発点になり得るだろう。また、そのほかにもドレス状態をから生じる差異を

¹このような困難もあって、量子重力理論の散乱はより純粋な代数的な方法で構成されるべきだという議論もある [116]。

調べる研究も行われてきている [33, 45, 117]。ドレス状態を考慮した物理の解析は今後ますます重要となっていくだろう。

本研究が普遍的に現れる赤外の物理に通底する何かを照らし出すことを期待して、研究を続けていく。

付録 A

コヒーレント状態

A.1 コヒーレント状態の諸性質

Baker-Campbell-Hausdorff の公式は、

$$e^A e^B = \exp \left[A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots \right] \quad (\text{A.1-1})$$

で与えられる。これより、

$$D_\alpha := \exp [\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a] = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\bar{\alpha} a} \quad (\text{A.1-2})$$

が得られる。したがって、 $\alpha \in \mathbb{C}$ を径数とするコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は、

$$|\alpha\rangle := D_\alpha |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \quad (\text{A.1-3})$$

で表せる。コヒーレント状態は

$$[a, f(a^\dagger, a)] = \frac{\partial}{\partial a^\dagger} f(a^\dagger, a) \quad (\text{A.1-4})$$

を用いると

$$a |\alpha\rangle = [a, D_\alpha] |0\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (\text{A.1-5})$$

と容易にわかるので、消滅演算子 a の固有値 α を持つ固有状態である。粒子数基底での状態が

$$|n\rangle := \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{A.1-6})$$

であることを使うと粒子数基底では

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{A.1-7})$$

とかける。このように、コヒーレント状態はあらゆる粒子数の状態を重ね合わせた状態である。平均粒子数 $\langle n \rangle$ は

$$\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (\text{A.1-8})$$

で与えられる。場の理論のドレス状態では $|\alpha|^2$ に対応するものが発散するので、平均粒子数が無限大となってしまうことがわかる。また、粒子数が n である確率は

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{1}{n!} \langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle} \quad (\text{A.1-9})$$

で与えられる。これは Poisson 分布である。

コヒーレント状態の内積は再び式 (A.1-4) を用いると、

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \langle 0 | e^{\bar{\beta} a} e^{\alpha a^\dagger} | 0 \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \bar{\beta})^n}{n!} \langle 0 | e^{\alpha a^\dagger} | 0 \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^{\alpha \bar{\beta}} \quad (\text{A.1-10})$$

または同等に

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2} e^{i \operatorname{Im} \alpha \bar{\beta}} \quad (\text{A.1-11})$$

で与えられることがわかる。さらに並進させたときの内積は、

$$\langle \beta + \eta | \alpha + \xi \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle \langle \eta | \xi \rangle \exp[-\operatorname{Re}[(\beta - \alpha)(\bar{\eta} - \bar{\xi})] + i \operatorname{Im}[\alpha \bar{\eta} + \xi \bar{\beta}]] \quad (\text{A.1-12})$$

で与えられる。このようにコヒーレント状態は正規性 $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ を満たすが、直交性は満たさない。しかし場の理論のドレス状態については、 $|\beta - \alpha|^2$ に対応するものが無限大の大きさとなり得るため直交することがある。

また、非直交だが以下のように完全性が成り立つ。これは過剰完全性と呼ばれる。

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d\bar{\alpha} d\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = I. \quad (\text{A.1-13})$$

証明は例えば次のようにできる。

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d\bar{\alpha} d\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \frac{1}{\pi} \int d\bar{\alpha} d\alpha \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\bar{\alpha})^m}{\sqrt{m!}} |n\rangle \langle m|. \quad (\text{A.1-14})$$

ここで $\alpha = re^{i\theta}$, $\bar{\alpha} = re^{-i\theta}$ の変数変換を行えば、

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d\bar{\alpha} d\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} dr r^{n+m+1} e^{-r^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} e^{i\theta(n-m)} |n\rangle \langle m| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} dr r^{2n+1} e^{-r^2} |n\rangle \langle n|. \quad (\text{A.1-15})$$

さらに $r^2 = x$ の変数変換と、 $n! = \int_0^{\infty} dx x^n e^{-x}$ を用いれば

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d\bar{\alpha} d\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = I \quad (\text{A.1-16})$$

が示される。□

付録 B

添字の計算を簡便化する諸定義

B.1 添字の対称化と反対称化

Kronecker のデルタを n 個並べたものを

$$\delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} := \delta_{\nu_1}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \dots \delta_{\nu_n}^{\mu_n} =: \delta_{\nu_n}^{\mu_n} \quad (\text{B.1-1})$$

と定義する。ここで添字について、

$$\boldsymbol{\mu}_n := \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \quad (\text{B.1-2})$$

という記法を導入した。式 (B.1-1) の完全対称化

$$\delta_{(\boldsymbol{\rho}_n)}^{\boldsymbol{\mu}_n} \equiv \delta_{\boldsymbol{\rho}_n}^{(\boldsymbol{\mu}_n)} := \frac{1}{n!} \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{S}_n} \delta_{\rho_{\sigma_1}}^{\mu_1} \delta_{\rho_{\sigma_2}}^{\mu_2} \dots \delta_{\rho_{\sigma_n}}^{\mu_n} \quad (\text{B.1-3})$$

を定める。 \mathfrak{S}_n は n 次対称群である。テンソルの完全対称化はこれを用いて

$$A_{(\boldsymbol{\mu}_n)} := A_{\boldsymbol{\alpha}_n} \delta_{(\boldsymbol{\mu}_n)}^{\boldsymbol{\alpha}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{S}_n} [A_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_n}}], \quad A^{(\boldsymbol{\mu}_n)} := A^{\boldsymbol{\alpha}_n} \delta_{\boldsymbol{\alpha}_n}^{(\boldsymbol{\mu}_n)} \quad (\text{B.1-4})$$

で行える。また、

$$g^{\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{\nu}_n)} := g^{\mu_1 \rho_1} g^{\mu_2 \rho_2} \dots g^{\mu_n \rho_n} \delta_{\boldsymbol{\rho}_n}^{(\boldsymbol{\nu}_n)} \quad (\text{B.1-5})$$

を定めておく。また、式 (B.1-1) の完全反対称化

$$n! \delta_{[\boldsymbol{\rho}_n]}^{\boldsymbol{\mu}_n} \equiv n! \delta_{\boldsymbol{\rho}_n}^{[\boldsymbol{\mu}_n]} := \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn} \boldsymbol{\sigma} \delta_{\rho_{\sigma_1}}^{\mu_1} \delta_{\rho_{\sigma_2}}^{\mu_2} \dots \delta_{\rho_{\sigma_n}}^{\mu_n} = \frac{-1}{(D-n)!} \mathcal{E}^{\boldsymbol{\mu}_n \boldsymbol{\alpha}_{n+1:D}} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\rho}_n \boldsymbol{\alpha}_{n+1:D}} \quad (\text{B.1-6})$$

を定める。ここで添字について

$$\boldsymbol{\mu}_{k;n} := \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_{n-1} \mu_n, \quad (\text{B.1-7})$$

の記法を導入した。 $\mathcal{E}^{\mu_1 \dots \mu_D}$ は完全反対称の Levi-Civita テンソル

$$\mathcal{E}^{\mu_1 \dots \mu_D} := \frac{1}{\sqrt{-\det[\mathbf{g}]}} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D}, \quad \mathcal{E}_{\mu_1 \dots \mu_D} = \sqrt{-\det[\mathbf{g}]} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} \quad (\text{B.1-8})$$

である。ここで、Levi-Civita 記号

$$\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} := \begin{cases} +1 & (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D) \text{ が } (012 \dots D) \text{ の偶置換} \\ -1 & (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D) \text{ が } (012 \dots D) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (\text{B.1-9})$$

を用いた。これを使えば

$$A_{[\boldsymbol{\mu}_n]} := A_{\boldsymbol{\alpha}_n} \delta_{[\boldsymbol{\mu}_n]}^{\boldsymbol{\alpha}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn} \boldsymbol{\sigma} [A_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_n}}], \quad A^{[\boldsymbol{\mu}_n]} := A^{\boldsymbol{\alpha}_n} \delta_{\boldsymbol{\alpha}_n}^{[\boldsymbol{\mu}_n]} \quad (\text{B.1-10})$$

によってテンソルの完全反対称化が行える。また、

$$g^{\mu_n[\nu_n]} := g^{\mu_1\rho_1} g^{\mu_2\rho_2} \dots g^{\mu_n\rho_n} \delta_{\rho_n}^{[\nu_n]} = \frac{-1}{n!(D-n)!} \mathcal{E}^{\mu_n \alpha_{n+1}; D} \mathcal{E}^{\nu_n}_{\alpha_{n+1}; D} \quad (\text{B.1-11})$$

を定めておく。

添字について、

$$\hat{\mu}_n^i \lambda := \mu_1 \dots \mu_{i-1} \lambda \mu_{i+1} \dots \mu_n \quad (\text{B.1-12})$$

を定める。これを決めると例えば、 (n, m) テンソルに対する共変微分が

$$\nabla_\alpha T_{\nu_m}^{\mu_n} = \nabla_\alpha T_{\nu_m}^{\mu_n} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu_i} T_{\nu_m}^{\hat{\mu}_n^i \lambda} - \sum_{j=1}^m \Gamma_{\alpha\nu_j}^\lambda T_{\hat{\nu}_m^j \lambda}^{\mu_n} \quad (\text{B.1-13})$$

と表せる。

付録 C

Einstein 方程式のゲージ不変分解

C.1 ベクトルとテンソルの規約分解

空間的ベクトル場 $A^i(\vec{x})$ は縦方向と横方向への規約分解

$$A^i(\vec{x}) = \partial^i A(\vec{x}) + \check{A}^i(\vec{x}), \quad \partial_i \check{A}^i(\vec{x}) = 0 \quad (\text{C.1-1})$$

が可能だ。この名前は Fourier 変換

$$A^i(\vec{x}) = \int d^3k \tilde{A}^i(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i \int d^3k k^i \tilde{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \int d^3k \tilde{\check{A}}^i(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (\text{C.1-2})$$

によって運動量空間でみたときに、 k^i 方向とそれに垂直な方向の分解であることに因む。つまり、

$$\tilde{A}^i = ik^i \tilde{A} + \tilde{\check{A}}^i \quad (\text{C.1-3})$$

に分解される。

さて、この分解の一意性について考えてみよう。

$$\partial_i A^i = \nabla^2 A \quad (\text{C.1-4})$$

の Poisson 方程式は、 $A(\vec{x})$ が $A^i(\vec{x})$ が $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ で十分早く減衰するように 0 に近づくなれば一意に解を持つ。このようにして、 A が定まれば残りの要素として \check{A}^i も一意に定まる。

同じことを空間的対称テンソル場 A^{ij} についても行う。これは

$$A^{ij} = \frac{1}{3} \delta^{ij} A + (\partial^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \nabla^2) B + 2\partial^{(i} \check{A}^{j)} + \check{A}^{ij}, \quad \partial_i \check{A}^i = 0, \partial_i \check{A}^{ij} = 0 = \delta_{ij} \check{A}^{ij} \quad (\text{C.1-5})$$

として規約分解が可能だ。各項はそれぞれ、トレース部分、縦-無トレース部分、縦-横部分、横-無トレース (TT) 部分を表す。

この分解の一意性もベクトル場の場合と同様に確認できる。まず、トレースを取ることで A を得る。次に、微分によって

$$\partial_j A^{ij} = \frac{1}{3} \partial^i A + \frac{2}{3} \nabla^2 \partial^i B + \nabla^2 \check{A}^i, \quad \partial_{ij} A^{ij} = \frac{1}{3} \nabla^2 A + \frac{2}{3} \nabla^4 B \quad (\text{C.1-6})$$

を得る。 A を既知っているから、2つ目の式は $\nabla^2 B$ についての Poisson 方程式とみなせて、ベクトル場の場合と同じ条件で一意に $\nabla^2 B$ が定まる。再び $\nabla^2 B$ の式を解いて B を得る。最後に、1つ目の式は \check{A}^i についての Poisson 方程式になるから、これが一意に定まれば、最後の余りとして \check{A}^{ij} も一意に定まる。

運動量空間での分解は

$$\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{3} \delta^{ij} \tilde{A} - (k^i k^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} k^2) \tilde{B} + 2ik^{(i} \tilde{\check{A}}^{j)} + \tilde{\check{A}}^{ij} \quad (\text{C.1-7})$$

となる。

C.2 線形摂動計量とその分解

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (\text{C.2-1})$$

という分解で、 $h_{\mu\nu}$ が十分小さく、2 次以降の項が無視できる状況を考える。

$$h_{00} =: 2U, \quad (c^{-2}) \quad (\text{C.2-2})$$

$$h_{0i} =: -4\check{L}_i - \partial_i L, \quad ((c^{-3}, c^{-1})) \quad (\text{C.2-3})$$

$$h_{ij} =: 2\delta_{ij}V + (\partial_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)B + 2\partial_{(i}\check{B}_{j)} + \check{h}_{ij} \quad ((c^{-2}, c^0, c^{-2}, c^0)) \quad (\text{C.2-4})$$

というように $h_{\mu\nu}$ の各成分を分解する。係数は記法の簡便のためであり、こうでなくともよい。 (c^n) などは、 $c \equiv 1$ でない単位系を取る際に各項にかけるべき因子を表す。この 10 個の自由度は、ゲージ固定によって 4 つ落とすことができる。

微小座標変換

$$\chi^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha) \quad (\text{C.2-5})$$

を考えよう。 ξ^μ の 1 次までで、この逆変換は

$$x^\mu \stackrel{\text{L}}{=} \chi^\mu - \xi^\mu(\chi^\alpha) \quad (\text{C.2-6})$$

で与えられる。したがって $dx^\mu = (\delta^\mu_\nu - \partial_\nu \xi^\mu) d\chi^\nu$ だから、計量に誘導される変換は、

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) \stackrel{\text{L}}{\rightarrow} g_{\mu\nu}(\chi^\alpha) - \partial_\mu \xi_\nu(\chi^\alpha) - \partial_\nu \xi_\mu(\chi^\alpha), \quad \xi_\mu := \eta_{\mu\nu} \xi^\nu \quad (\text{C.2-7})$$

となる。線形摂動計量に対してこれは

$$h_{\mu\nu}(x^\alpha) \stackrel{\text{L}}{\rightarrow} h_{\mu\nu}(\chi^\alpha) - 2\partial_{(\mu} \xi_{\nu)}(\chi^\alpha) \quad (\text{C.2-8})$$

を意味する。これは電磁気学の類推から、線形重力理論のゲージ変換と呼ばれる。

さて、この変換に現れるベクトル場にも同様の分解を与えよう。これを

$$\xi_0 =: \alpha, \quad (c^{-1}) \quad (\text{C.2-9})$$

$$\xi_i =: 4\check{\beta}_i + \partial_i \beta, \quad \partial^i \check{\beta}_i = 0, \quad (c^{-2}, c^0) \quad (\text{C.2-10})$$

と書くことにする。するとゲージ変換によって分解した線形摂動計量の各要素は

$$U \rightarrow U - \dot{\alpha} \quad (\text{C.2-11})$$

$$L_i \rightarrow L_i + \dot{\check{\beta}}_i \quad (\text{C.2-12})$$

$$V \rightarrow V - \frac{1}{3}\nabla^2 \beta \quad (\text{C.2-13})$$

$$\check{h}_{ij} \rightarrow \check{h}_{ij} \quad (\text{C.2-14})$$

$$A \rightarrow A + \alpha + \dot{\beta} \quad (\text{C.2-15})$$

$$B \rightarrow B - 2\beta \quad (\text{C.2-16})$$

$$\check{B}_i \rightarrow \check{B}_i - 4\check{\beta}_i \quad (\text{C.2-17})$$

と変換される¹。式 (C.2-14) は TT 部分のゲージ不変性を表している。これらの変換からその他のゲージ不変な量を構成できる。それは、

$$\Phi := U + \dot{A} + \frac{1}{2}\ddot{B} \quad (\text{C.2-18})$$

¹ $c \equiv 1$ でない単位系を考える際には、 $\dot{\alpha} \rightarrow \partial_t \alpha = c\partial_0 \alpha \equiv c\dot{\alpha}$ と取り直して、さらに $\nabla^2 \rightarrow c^2 \nabla^2$ とすればよい。

$$\check{\Upsilon}_i := \check{L}_i + \frac{1}{4}\dot{\check{B}}_i \quad (\text{C.2-19})$$

$$\Psi := V - \frac{1}{6}\nabla^2 B \quad (\text{C.2-20})$$

の組み合わせであることがわかる。線形摂動計量 $h_{\mu\nu}$ の自由度は $\{\check{h}_{ij}, \Phi, \check{\Upsilon}_i, \Psi\}$ の6つが担う。

ゲージ不変な量で理論を構成できるという意味で便利なゲージとして、Coulomb ゲージがある。これは

$$A = 0, B = 0, \check{B}_i = 0 \quad (\text{C.2-21})$$

のゲージ条件で与えられる。このとき $h_{\mu\nu}$ は

$$h_{00} = 2U \quad (\text{C.2-22})$$

$$h_{0i} = -4\check{L}_i \quad (\text{C.2-23})$$

$$h_{ij} = 2\delta_{ij}V + \check{h}_{ij} \quad (\text{C.2-24})$$

となる。つまりゲージ不変ポテンシャルは Coulomb ゲージ条件の下で

$$\{\Phi, \check{\Upsilon}_i, \Psi\} \stackrel{\text{g}}{\equiv} \{U, \check{L}_i, V\} \quad (\text{Coulomb gauge}) \quad (\text{C.2-25})$$

となる。もしあらゆる量を Coulomb ゲージの下で書くことができれば、それはゲージ不変な量で書かれることになるので、非常に便利である。また、各要素の物理的解釈も比較的行いやすいので、理論を考える際には便利なゲージになる。

C.3 ゲージ不変ポテンシャルによる Einstein 方程式

ゲージ不変な量は Coulomb の下で書き下し、式 (C.2-25) の関係を使ってゲージ不変ポテンシャルで書き直すことができる。たとえば、共変 Riemann 曲率はゲージ不変量なので Coulomb ゲージでの計算から

$$R_{0i0j} = -\partial_{ij}\Phi - \delta_{ij}\ddot{\Psi} - 4\partial_{(i}\dot{\Phi}_{j)} - \frac{1}{2}\ddot{\check{h}}_{ij}, ((c^{-2}, c^{-4}, c^{-4}, c^{-2})) \quad (\text{C.3-1})$$

$$R_{0ijk} = 2\delta_{i[j}\partial_{k]}\dot{\Psi} - 4\partial_i\partial_{[j}\check{\Upsilon}_{k]} - \partial_{[j}\dot{\check{h}}_{k]i}, ((c^{-3}, c^{-3}, c^{-1})) \quad (\text{C.3-2})$$

$$R_{ijkl} = 2(\delta_{i[\ell}\partial_{k]j}\Psi + \delta_{j[k}\partial_{\ell]i}\Psi) + (\partial_{i[\ell}\check{h}_{k]j} + \partial_{j[k}\check{h}_{\ell]i}), ((c^{-2}, c^0)) \quad (\text{C.3-3})$$

とわかる。Einstein テンソル

$$E_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv \underline{R}_{\mu\nu} \quad (\text{C.3-4})$$

の各成分は、

$$E_{00} = -2\nabla^2\Psi, ((c^{-2})) \quad (\text{C.3-5})$$

$$E_{0i} = -2\partial_i\dot{\Psi} + 2\nabla^2\check{\Upsilon}_i, ((c^{-3}, c^{-3})) \quad (\text{C.3-6})$$

$$E_{ij} = -\frac{2}{3}\delta_{ij}(\Phi - \Psi) - 2\delta_{ij}\ddot{\Psi} + \left(\partial_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)(\Phi - \Psi) + \partial_{(i}\dot{\Phi}_{j)} - \frac{1}{2}\square\check{h}_{ij}, ((c^{-2}, c^{-4}, c^{-2}, c^{-4}, c^0)) \quad (\text{C.3-7})$$

とわかる。ベクトル場、および対称テンソル場の規約分解を思いだすと、これらの式は Einstein テンソルの対応する規約分解になっていることがわかる。

Einstein 方程式を規約分解するために、物質のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を分解する。それを

$$T_{00} =: \rho, ((c^2)) \quad (\text{C.3-8})$$

$$T_{0i} =: \check{\pi}_i + \partial_i\pi, ((c)) \quad (\text{C.3-9})$$

$$T_{ij} =: s\delta_{ij} + \left(\partial_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\sigma + 2\partial_{(i}\check{\sigma}_{j)} + \check{\sigma}_{ij}, ((c^0, c^0, c^0, c^0)) \quad (\text{C.3-10})$$

と書くことにする。当然のことだが、 ρ は座標系 x^α に対しての静止系で測った質量密度であり、完全流体などで使う素片の静止系で測った正規質量密度とは異なることを注意しておく。 $T_{\mu\nu}$ は 10 成分だが、線形理論における局所エネルギー運動量保存則

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{C.3-11})$$

によって 4 つの関係式

$$\nabla^2 \pi = -\dot{\rho}, \quad \nabla^2 \check{\sigma}_i = -\dot{\check{\pi}}_i, \quad \nabla^2 \sigma = -\frac{3}{2}(\dot{\pi} + \varsigma) \quad (\text{C.3-12})$$

が存在する。Einstein 方程式

$$E_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{C.3-13})$$

の独立なものを取り出すと

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G \rho, \quad (\text{C.3-14})$$

$$\nabla^2 (\Phi - \Psi) = -12\pi G (\dot{\pi} + \varsigma) \quad (\text{C.3-15})$$

$$\nabla^2 \check{\Upsilon}_i = -4\pi G \check{\pi}_i \quad (\text{C.3-16})$$

$$\square \check{h}_{ij} = -16\pi G \check{\sigma}_{ij} \quad (\text{C.3-17})$$

が得られる^{2 3}。Einstein 方程式のこの分解を見ると、重力の自由度のうち時間発展を担う伝搬する自由度は \check{h}_{ij} であることがわかる。その他の自由度である $\{\Psi, \check{\Upsilon}_i, \Phi\}$ は同時刻での物質の担う自由度によって定まる非伝搬自由度である。

線形摂動重力のゲージ不変形式は理論としての見通しが良いという長所があるが、 $T_{\mu\nu}$ の各要素を決定する方程式を解くのが難しいという欠点がある。そのため重力の伝搬を解く際、実用的には線形 Einstein 方程式の Lorenz ゲージ

$$\square \underline{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{C.3-19})$$

を用いることが多い。

無質量ヘリシティ 2 理論の構築のために本論ではゲージ不変形式を使うのが便利である。しかし Weinberg の理論は Weinberg 特有のゲージであることに注意。

² $c \equiv 1$ ないときには式 (C.3-15) の右辺には c^{-2} を、式 (C.3-17) の右辺には c^{-4} をかければよい。

³残りの式は

$$\dot{\Psi} = 4\pi G \pi, \quad \Phi - \Psi = 8\pi G \sigma, \quad \dot{\check{\Upsilon}}_i = 4\pi G \check{\sigma}_i \quad (\text{C.3-18})$$

であるが、これは式 (C.3-12) と従属であり、余剰である。

付録 D

球面調和関数と STF 分解

メモリー効果で使う球面調和関数や、対称無トレース-Symmetric Trace Free(STF) 部分についてメモする。

D.1 球面調和関数

Legendre の陪多項式 $P_\ell^m(u)$

$$P_\ell^m(\mu) := 2^{-\ell} (1 - \mu^2)^{m/2} \sum_{j=0}^{\lfloor \ell-m \rfloor} \frac{(-1)^j (2\ell - 2j)!}{j!(\ell - j)!(\ell - 2j - m)!} \mu^{\ell - 2j - m}, \quad (\text{D.1-1})$$

を使うと、球面調和関数は

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) := C_{\ell, m} s_m P_\ell^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad C_{\ell, m} := \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}}, \quad s_m := (-1)^{\frac{m + |m|}{2}}. \quad (\text{D.1-2})$$

とかける。もしくは、 $m = 0$ に対して

$$Y_{\ell 0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{D.1-3})$$

として、 $m > 0$ のとき、

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{D.1-4})$$

$$P_\ell^m(\mu) = (-1)^m (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_\ell(\mu) \quad (\text{D.1-5})$$

とかいて、 $m < 0$ の場合は

$$Y_{\ell - m}(\theta, \phi) = (-1)^m \overline{Y_{\ell m}(\theta, \phi)} \quad (\text{D.1-6})$$

と考えてもよい。

D.2 対称無トレース (STF) 積

空間 3 次元のときの STF 積は

$$n^{\langle j_1 j_2 \rangle} = n^{j_1} n^{j_2} - \frac{1}{3} \delta^{j_1 j_2} \quad (\text{D.2-1})$$

$$n^{\langle j_1 j_2 j_3 \rangle} = n^{j_1} n^{j_2} n^{j_3} - \frac{1}{5} (\delta^{j_1 j_2} n^{j_3} + \delta^{j_2 j_3} n^{j_1} + \delta^{j_3 j_1} n^{j_2}) \quad (\text{D.2-2})$$

$$n^{\langle j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle} = n^{j_1} n^{j_2} n^{j_3} n^{j_4}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{7} \left(\delta^{j_1 j_2} n^{j_3} n^{j_4} + \delta^{j_2 j_3} n^{j_1} n^{j_4} + \delta^{j_3 j_4} n^{j_1} n^{j_2} + \delta^{j_4 j_1} n^{j_2} n^{j_3} + \delta^{j_1 j_3} n^{j_2} n^{j_4} + \delta^{j_2 j_4} n^{j_1} n^{j_3} \right) \\
& + \frac{1}{35} \left(\delta^{j_1 j_2} \delta^{j_3 j_4} + \delta^{j_1 j_3} \delta^{j_2 j_4} + \delta^{j_1 j_4} \delta^{j_2 j_3} \right)
\end{aligned} \tag{D.2-3}$$

などと与えられる。一般には

$$n^{\langle j_\ell \rangle} = \sum_{k=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} \ell C_{2k} (-1)^k \frac{(2\ell - 2k - 1)!!}{(2\ell - 1)!!} \left[n^{(j_1} n^{j_2} \dots n^{j_{2k}} \delta^{j_{2k+1} j_{2k+2}} \dots \delta^{j_{\ell-1} j_\ell} \right] \tag{D.2-4}$$

と表せる。対称テンソルが対称な部分を取り出す演算となるように、STF テンソルは STF な部分を取り出す演算となる。すなわち、

$$A^{j_k} B_{\langle j_k \rangle} = A^{\langle j_k \rangle} B_{\langle j_k \rangle} \tag{D.2-5}$$

が成り立つ。また、STF テンソルは以下を満たす。

$$n^{\langle j_\ell \rangle} n_{\langle j_\ell \rangle} = \frac{\ell!}{(2\ell - 1)!!} \tag{D.2-6}$$

$$n_j n^{\langle j j_\ell \rangle} = \frac{\ell + 1}{2\ell + 1} n^{\langle j_\ell \rangle} \tag{D.2-7}$$

$$n_{\langle j_\ell \rangle} n^{\langle j j_\ell \rangle} = \frac{(\ell + 1)!}{(2\ell + 1)!!} n^j \tag{D.2-8}$$

$$n'_{\langle j_\ell \rangle} n^{\langle j_\ell \rangle} = \frac{\ell!}{(2\ell - 1)!!} P_\ell(\mu), \quad \mu := \vec{n}' \cdot \vec{n} \tag{D.2-9}$$

$$n'_{\langle j_\ell \rangle} n^{\langle j j_\ell \rangle} = \frac{(\ell + 1)!}{(2\ell + 1)!!} \left[\frac{dP_{\ell+1}}{d\mu} n^j - \frac{dP_\ell}{d\mu} n'^j \right] \tag{D.2-10}$$

ここで $P_\ell(\mu)$ は Legendre 多項式

$$P_\ell(\mu) = 2^{-\ell} \sum_{k=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2\ell - 2k)!}{k!(\ell - k)!(\ell - 2k)!} \mu^{\ell - 2k} \tag{D.2-11}$$

である¹。これを示すのには、

$$(2k)!! = 2^k k!, \quad (2\ell - 2k - 1)!! = \frac{(2\ell - 2k)!}{2^{\ell - k} (\ell - k)!} \tag{D.2-13}$$

STF テンソルは球面の固有調和テンソル関数であり

$$\partial_A \partial^A n^{\langle j_\ell \rangle} = -\ell(\ell + 1) n^{\langle j_\ell \rangle} \tag{D.2-14}$$

を満たす。ここで ∂_A は S^2 の共変微分である。 S^2 の計量を q_{AB} として、 $\partial^A = q^{AB} \partial_B$ である。この性質から、STF テンソルは球面調和関数 $Y_{\ell m}(x^A)$ の $m \in (-\ell, \ell)$ を基底として表せる。

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \tag{D.2-15}$$

として天球上に座標を入れると、これは

$$n^{\langle j_\ell \rangle} = N_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}^{\langle j_\ell \rangle} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad N_\ell := \frac{4\pi\ell!}{(2\ell + 1)!!} \tag{D.2-16}$$

¹微分を使って表すと、

$$P_\ell(\mu) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\mu^\ell} (\mu^2 - 1)^\ell \tag{D.2-12}$$

これは Rodrigues の公式と呼ばれる。直交多項式を得る微分形の式を Rodrigues の公式と呼ぶこともあるらしい。こういうものを Rodrigues 形式と呼ぶことにする。

と表せる。 $\mathcal{Y}_{\ell m}^{\langle j_\ell \rangle}$ は定数 STF テンソルで

$$\mathcal{Y}_{\ell-m}^{\langle j_\ell \rangle} = (-1)^m \overline{\mathcal{Y}_{\ell m}^{\langle j_\ell \rangle}} \quad (\text{D.2-17})$$

を満たす。球面調和関数の性質から、

$$\mathcal{Y}_{\ell m}^{\langle j_\ell \rangle} = \frac{1}{N_\ell} \int d\Omega n^{\langle j_\ell \rangle}(\theta, \phi) \overline{Y_{\ell m}(\theta, \phi)} \quad (\text{D.2-18})$$

となるから、 $\vec{n}' = (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') n'_{\langle j_\ell \rangle}$ と縮約を取ると

$$\mathcal{Y}_{\ell m}^{\langle j_\ell \rangle} n'_{\langle j_\ell \rangle} = \frac{2\ell+1}{4\pi} \int d\Omega P_\ell(\mu) \overline{Y_{\ell m}(\theta, \phi)} \quad (\text{D.2-19})$$

が得られる。Legendre 多項式の加法定理

$$P_\ell(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_{\ell m}(\theta', \phi')} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (\text{D.2-20})$$

$$\cos \gamma := \vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad (\text{D.2-21})$$

を使うと、球面調和関数の完全正規直交性

$$\int d\Omega Y_{\ell m}(\theta, \phi) \overline{Y_{\ell' m'}(\theta, \phi)} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\text{D.2-22})$$

から、式 (D.2-16) の逆関係

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \overline{\mathcal{Y}_{\ell m}^{\langle j_\ell \rangle} n'_{\langle j_\ell \rangle}} \quad (\text{D.2-23})$$

が導ける。

付録 E

Minkowski 時空の場とゲージ場

E.1 表現 ℓ の場の係数関数

Poincaré 群の表現 ℓ の消滅場 $\psi_\ell^+(x)$ は

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p u_\ell(\vec{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} a(\vec{p}, \sigma, n) \quad (\text{E.1-1})$$

で表される。ここで σ はスピン n は粒子の種類、 u_ℓ は表現 ℓ の係数関数だ。 x の依存性は並進対称性から $e^{ip \cdot x}$ の形に決まっている。係数関数の性質を調べる。場の Lorentz 対称性から以下を要請する。

$$U_0(\Lambda) \psi_\ell^+(x) U_0^\dagger(\Lambda) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{\ell}}^+(\Lambda x) = \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p e^{ip \cdot \Lambda x} \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{\ell}}(\vec{p}, \sigma, n) a(\vec{p}, \sigma, n). \quad (\text{E.1-2})$$

また、消滅演算子の Lorentz 変換則から

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda) \psi_\ell^+(x) U_0^\dagger(\Lambda) &= \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p u_\ell(\vec{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} \mathcal{D}_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) a(\vec{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) \\ &= \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3\Lambda p u_\ell(\vec{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\bar{\sigma}} \mathcal{D}_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) a(\vec{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) \\ &= \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3q u_\ell(q_\Lambda^{-1}, \sigma, n) e^{iq \cdot \Lambda x} \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}q)^0}{q^0}} \sum_{\bar{\sigma}} \mathcal{D}_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, \Lambda^{-1}q)) a(\vec{q}, \bar{\sigma}, n) \end{aligned} \quad (\text{E.1-3})$$

を得る。ここで、 \vec{p}_Λ は Λp の空間成分であること、 $\frac{d^3p}{p^0}$ が運動量空間上の不変測度、すなわち $\frac{d^3p}{p^0} = \frac{d^3\Lambda p}{(\Lambda p)^0}$ であること、および $q := \Lambda p$ として $= \Lambda^{-1}q \cdot x = q \cdot \Lambda x$ となることを用いた。また、 $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ は Wigner 回転である。式 (E.1-2) と式 (E.1-3) を比較して、

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{\ell}}(\vec{p}, \sigma, n) &= \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} \mathcal{D}_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, \Lambda^{-1}p)) u_\ell(p_{\Lambda^{-1}}, \bar{\sigma}, n) \\ \Leftrightarrow \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{\ell}}(\vec{p}_\Lambda, \sigma, n) &= \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\bar{\sigma}} \mathcal{D}_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) u_\ell(\vec{p}, \bar{\sigma}, n) \end{aligned} \quad (\text{E.1-4})$$

を得る。 D と \mathcal{D} は Lorentz 変換の表現なので、 $D(\bar{\Lambda})D(\Lambda) = D(\bar{\Lambda}\Lambda)$ 故に $D(\Lambda^{-1}) = D^{-1}(\Lambda)$ などが言える。したがって、式 (E.1-4) は

$$\sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}^{-1}(\Lambda) u_{\bar{\ell}}(\vec{p}_\Lambda, \sigma, n) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\bar{\sigma}} \left[\mathcal{D}_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \right]^{-1} u_\ell(\vec{p}, \bar{\sigma}, n) \quad (\text{E.1-5})$$

であり、同等に、

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\ell}(\vec{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n) \mathcal{D}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda) u_{\bar{\ell}}(\vec{p}, \sigma, n) \quad (\text{E.1-6})$$

の性質を係数関数が満たすことがわかる。略記して、

$$u_{\bar{\sigma}}^{\ell} \mathcal{D}_{\bar{\sigma}\sigma}^{\ell} = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}^{\ell} u_{\bar{\ell}}^{\sigma} \quad (\text{E.1-7})$$

と書くこともある。

表現 ℓ の自由場は表現 ℓ の消滅場と生成場の線型結合で、

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)] = 0, (x - y)^2 > 0 \quad (\text{E.1-8})$$

を満たすように

$$\psi_{\ell}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma n} \int d^3 p [\lambda e^{ip \cdot x} u_{\ell}(\vec{p}, \sigma, n) a(\vec{p}, \sigma, n) + \kappa e^{-ip \cdot x} v_{\ell}(\vec{p}, \sigma, n^c) a^{\dagger}(\vec{p}, \sigma, n^c)] \quad (\text{E.1-9})$$

の λ と κ を調整したものを採用する。ここで、相互作用は正規順序で組まれているものとし、 n^c は charge Q の保存: $[Q, \mathcal{H}] = 0$ から存在が要請される n の反粒子を表す。

E.2 質量をもつ実スカラー場

有質量実スカラー場は

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}} (e^{ip \cdot x} a(\vec{p}) + e^{-ip \cdot x} a^{\dagger}(\vec{p})) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (\text{E.2-1})$$

とかける。

E.3 質量をもつ Dirac スピノル場

有質量 Dirac スピノル場は

$$\psi(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} [u_{\sigma}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} b_{\sigma}(p) + \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} d_{\sigma}^{\dagger}(p)] \quad (\text{E.3-1})$$

とかける。 $b_{\sigma}(p)$ はスピン σ 運動量 \vec{p} を持つ荷電粒子の消滅演算子で、 $d_{\sigma}^{\dagger}(p)$ はスピン σ 運動量 \vec{p} を持つ反粒子の生成演算子である。

ここで、スピノル場の係数関数はそれぞれ次の性質を持つ。

$$\begin{aligned} (ip^{\mu} \gamma_{\mu} + m) u_{\sigma}(\vec{p}) &= 0, \quad \bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) u_{\sigma'}(\vec{p}) = \delta_{\sigma\sigma'} \frac{m}{E_p}, \quad \sum_{\sigma} \bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) u_{\sigma}(\vec{p}) = \frac{1}{2E_p} (-ip^{\mu} \gamma_{\mu} + m) \beta, \\ (ip^{\mu} \gamma_{\mu} - m) v(\vec{p}, \sigma) &= 0, \quad \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) v_{\sigma'}(\vec{p}) = -\delta_{\sigma\sigma'} \frac{m}{E_p}, \quad \sum_{\sigma} \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) v_{\sigma}(\vec{p}) = -\frac{1}{2E_p} (ip^{\mu} \gamma_{\mu} + m) \beta. \end{aligned} \quad (\text{E.3-2})$$

ガンマ行列は

$$\gamma^{\mu} = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad \gamma^0 := -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} := -i \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.3-3})$$

であり、Pauli 行列は

$$\sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.3-4})$$

である。また、 $\beta := i\gamma^0$ だ。

E.4 無質量ヘリシティ 1 ゲージ場

無質量ヘリシティ 1 ゲージ場は

$$a_\mu(x) = \sum_{h=\pm 1} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \left[\epsilon_\mu(\vec{k}, h) e^{ik \cdot x} a(\vec{k}, h) + (\text{h.c.}) \right] \quad (\text{E.4-1})$$

とかける。これは光子を表す場である。ここで $\epsilon_\mu(\vec{k}, h)$ は運動量 \vec{k} 偏極の h の偏極ベクトル

$$\epsilon_\mu(\vec{k}, \pm 1) = R(\hat{\vec{k}}) \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \quad (\text{E.4-2})$$

である。ここで、 $R(\hat{\vec{k}})$ は基準運動量 $k_s^\mu = (1, 0, 0, 1)$ を $\hat{\vec{k}}$ の方へ回転させる演算を表す。また、 $a(\vec{k}, h)$ は運動量 \vec{k} とヘリシティ h を持つ光子の消滅演算子だ。これは Coulomb ゲージ

$$k^\mu \epsilon_\mu(\vec{k}, h) = 0, \quad \epsilon_0(\vec{k}, h) = 0 \quad (\text{E.4-3})$$

を満たす。

偏極ベクトルは

$$P_{\mu\nu}(\vec{k}) := \sum_{h=\pm 1} \epsilon_\mu(\vec{k}) \bar{\epsilon}_\nu(\vec{k}) = \eta_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}(\vec{k}), \quad Q_{\mu\nu}(\vec{k}) := -k_\mu \bar{k}_\nu - \bar{k}_\mu k_\nu, \quad k \cdot \bar{k} = -1 \quad (\text{E.4-4})$$

を満たす。 $Q_{\mu\nu}(\vec{k}), P_{\mu\nu}(\vec{k})$ はそれぞれ \vec{k} の方向、および \vec{k} に直交する方向への射影となっている。すなわち、

$$Q_{\mu\nu}(\vec{k}) k^\nu = k_\mu, \quad P_{\mu\nu}(\vec{k}) k^\nu = 0 \quad (\text{E.4-5})$$

が成り立つ。スカラーモード S と縦波モード L を合わせて非物理的モード $I = \{S, L\}$ とする。「非物理的偏極ベクトル」を

$$\epsilon_\mu(\vec{k}, S) := (1, \vec{0}), \quad \epsilon_\mu(\vec{k}, L) := (0, \hat{\vec{k}}) \quad (\text{E.4-6})$$

と定義すると、 $Q_{\mu\nu}(\vec{k})$ は

$$Q_{\mu\nu}(\vec{k}) = \sum_I \bar{\epsilon}_\mu(\vec{k}, I) \epsilon_\nu(\vec{k}, I) \quad (\text{E.4-7})$$

とかける。 $\tilde{h} = \{h, I\}$ とすると、

$$\eta_{\mu\nu} = \sum_{\tilde{h}} \bar{\epsilon}_\mu(\vec{k}, \tilde{h}) \epsilon_\nu(\vec{k}, \tilde{h}) \quad (\text{E.4-8})$$

となるので便利だ。

非物理的モードを含む無質量ヘリシティ 1 の「ベクトル場」 \tilde{a}_μ についてもここで記す。ベクトル場及びゲージ場の交換関係は

$$\left[\tilde{a}_\mu(\vec{k}, \tilde{h}), \tilde{a}_\mu^\dagger(\vec{k}', \tilde{h}') \right] = \eta_{\mu\nu} \delta_{\tilde{h}\tilde{h}'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \left[a_\mu(\vec{k}, h), a_\mu^\dagger(\vec{k}', h') \right] = P_{\mu\nu}(\vec{k}) \delta_{hh'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{E.4-9})$$

となる。伝搬関数は点 x の場と点 y の場の T 積の真空期待値でかけるので、 $\tilde{a}_\mu(x)$ と $a_\mu(x)$ の伝搬関数はそれぞれ

$$-i\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\varepsilon} e^{iq \cdot (x-y)} \quad (\text{E.4-10})$$

$$-i\Delta_{\mu\nu}(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{\Pi_{\mu\nu}(\vec{q})}{q^2 - i\varepsilon} e^{iq \cdot (x-y)} \quad (\text{E.4-11})$$

で与えられる。ここで $\Pi_{\mu\nu}(\vec{q})$ は $n_\mu := (-1, \vec{0})$ を用いて運動量殻外に拡張された射影演算子

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \eta_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}^{\text{gr}}(q) + \Pi_{\mu\nu}^{\text{nc}}(q) \quad (\text{E.4-12})$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{gr}}(q) := \frac{q^0 (q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu) - q_\mu q_\nu}{|\vec{q}|^2} \quad (\text{E.4-13})$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{nc}}(q) := \frac{q^2 n_\mu n_\nu}{|\vec{q}|^2} \equiv \left(1 - \frac{(q^0)^2}{|\vec{q}|^2}\right) n_{\mu\nu} \quad (\text{E.4-14})$$

である。ここで、 $q^2 := -(q^0)^2 + |\vec{q}|^2$ および $n_{\mu\nu} := n_\mu n_\nu$ を定義した。 Π^{gr} の項は、光子が保存カレントと結合するなら保存則によって理論に影響を与えない。

式 (E.4-11) は Lorentz 共変ではないが、このような Coulomb ゲージでの理論の場合ハミルトニアンに存在する非共変項とプロパゲータの非共変項が相殺するので実質的な伝搬関数を式 (E.4-10) とすることが可能だ。

E.5 無質量ヘリシティ 2 ゲージ場

無質量ヘリシティ 2 ゲージ場は

$$h_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \sum_{h=\pm 2} \left[\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}, h) e^{ip \cdot x} a(\vec{k}, h) + (\text{h.c.}) \right] \quad (\text{E.5-1})$$

とかける。これは重力子を表す場である。ここで $\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}, h)$ は運動量 \vec{k} 偏極 h の偏極テンソル

$$\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}, h) = \epsilon_\mu(\vec{k}, h/2) \epsilon_\nu(\vec{k}, h/2), \quad (\text{E.5-2})$$

であり、 $a(\vec{k}, h)$ は運動量 \vec{k} とヘリシティ h を持つ重力子の消滅演算子だ。重力子はいわゆる TT ゲージ

$$k^\mu \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}, h) = 0, \quad \eta^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}, h) = 0 \quad (\text{E.5-3})$$

および放射ゲージ

$$\epsilon_{0\mu}(\vec{k}, h) = 0 \quad (\text{E.5-4})$$

を満たす。また、偏極は

$$P_{\mu\nu\rho\sigma}(\vec{k}) := \sum_{h=\pm 2} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}, h) \overline{\epsilon_{\rho\sigma}(\vec{k}, h)} = \frac{1}{2} \left[P_{\mu\rho}(\vec{k}) P_{\nu\sigma}(\vec{k}) + P_{\mu\sigma}(\vec{k}) P_{\nu\rho}(\vec{k}) - P_{\mu\nu}(\vec{k}) P_{\rho\sigma}(\vec{k}) \right] \quad (\text{E.5-5})$$

を満たす。また、テンソル偏極は

$$P_{\mu\nu\rho\sigma}(\vec{k}) = P_{\nu\mu\rho\sigma}(\vec{k}) = P_{\mu\nu\sigma\rho}(\vec{k}) = P_{\rho\sigma\mu\nu}(\vec{k}) \quad (\text{E.5-6})$$

という対称性を持つ。交換関係は

$$[a_{\mu\nu}(\vec{k}, h), a_{\rho\sigma}^\dagger(\vec{k}', h')] = P_{\mu\nu\rho\sigma}(\vec{k}) \delta_{hh'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{E.5-7})$$

である。これを使うと、運動量殻外に拡張されたテンソル偏極は

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}(q) &= \frac{1}{2} [\Pi_{\mu\rho}(q) \Pi_{\nu\sigma}(q) + \Pi_{\mu\sigma}(q) \Pi_{\nu\rho}(q) - \Pi_{\mu\nu}(q) \Pi_{\rho\sigma}(q)] \\ &= \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{cov}}(q) + \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{gr}}(q) + \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{nc}}(q) \end{aligned} \quad (\text{E.5-8})$$

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{cov}}(q) := \frac{1}{2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \equiv \frac{1}{2} (\eta\eta)_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} \quad (\text{E.5-9})$$

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{gr}}(q) := \frac{1}{2} \left[(\Pi^{\text{gr}}(q) \Pi(q))_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} + (\Pi(q) \Pi^{\text{gr}}(q))_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} \right] \quad (\text{E.5-10})$$

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{nc}}(q) := \frac{1}{2} \left[(\Pi^{\text{nc}}(q)\eta)_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} + (\eta\Pi^{\text{nc}}(q))_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} + (\Pi^{\text{nc}}(q)\Pi^{\text{nc}}(q))_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} \right] \quad (\text{E.5-11})$$

$$= \frac{q^2}{2|\vec{q}|^2} \left[(n\eta)_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} + (\eta n)_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} \right] + \frac{(q^2)^2}{2|\vec{q}|^4} n_{\mu\nu} n_{\rho\sigma} \quad (\text{E.5-12})$$

として与えられる。重力子の伝搬関数は、

$$-i\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 - i\varepsilon} \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}(q) \quad (\text{E.5-13})$$

だから、式 (E.5-8) のように分割して、

$$-i\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{cov}}(x, y) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{iq \cdot (x-y)}}{2(q^2 - i\varepsilon)} (\eta\eta)_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} \quad (\text{E.5-14})$$

$$-i\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{gr}}(x, y) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 - i\varepsilon} \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{gr}}(q) \quad (\text{E.5-15})$$

$$-i\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{nc}}(x, y) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{iq \cdot (x-y)}}{2|\vec{q}|^2} \left[(n\eta)_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} + (\eta n)_{\{\mu\nu\rho\sigma\}} \right] + \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{q^2 e^{iq \cdot (x-y)}}{2|\vec{q}|^4} n_{\mu\nu} n_{\rho\sigma} \quad (\text{E.5-16})$$

となる。重力子が相互作用描像で保存カレントと結合するなら、保存則によって $T^{\mu\nu}(x)\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{gr}}(x, y)T^{\rho\sigma}(x) \propto \partial_\lambda T^{\lambda\kappa} = 0$ となるから、この項は理論に影響を与えない。Dirac のデルタ関数を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq^0}{2\pi} e^{-iq^0(x^0 - y^0)} = \delta(x^0 - y^0), \quad \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \int d^3q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{(2\pi)^3} \quad (\text{E.5-17})$$

で表すことにし、

$$\mathcal{D}(\vec{x} - \vec{y}) := \int d^3q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{(2\pi)^3 |\vec{q}|^2} = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}, \quad \mathcal{E}(\vec{x} - \vec{y}) := \int d^3q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{(2\pi)^3 |\vec{q}|^4} = -\frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{8\pi} + \mathcal{E}_\lambda \quad (\text{E.5-18})$$

を定義する。これらはそれぞれ

$$\vec{\nabla}^2 \mathcal{D}(\vec{x}) = -\delta^3(\vec{x}), \quad \vec{\nabla}^2 \mathcal{E}(\vec{x}) = -D(\vec{x}) \quad (\text{E.5-19})$$

を満たす。また、

$$\mathcal{E}_\lambda := \mathcal{E}(\vec{0}) = \frac{1}{2\pi^2 \lambda} \quad (\text{E.5-20})$$

は赤外切断 λ を 0 にとる極限で発散する定数である。これを使うと $\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{nc}}(x, y)$ は

$$2\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{nc}}(x, y) = \delta(x^0 - y^0) \mathcal{D}(\vec{x} - \vec{y}) [n_{\mu\rho} n_{\nu\sigma} + n_{\nu\sigma} n_{\mu\rho} - n_{\mu\nu} n_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho} n_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} n_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} n_{\rho\sigma} + n_{\mu\nu} n_{\rho\sigma}] \\ - \partial_{x^0}^2 \delta(x^0 - y^0) \mathcal{E}(\vec{x} - \vec{y}) n_{\mu\nu} n_{\rho\sigma} \quad (\text{E.5-21})$$

となる。これを使って Newton 項を構成する。Newton 項が相互作用描像の理論に存在すれば、伝搬関数は実質的に共変な式 (E.5-14) として考えてよい。

付録 F

Heisenberg 場の運動方程式

F.1 相互作用描像と Heisenberg 描像

相互作用描像で理論を先に作ったとき、Heisenberg 描像での場が満たすべき性質について記す。2 階以上の微分: 高階微分を含まない局所的な理論を考え、ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}^I(x) = \mathcal{L}_{\text{free}}^I[\{\psi_\ell, \partial_\mu \psi_\ell\}_\ell; x] + \mathcal{L}_{\text{int}}^I[\{\psi_\ell, \partial_\mu \psi_\ell\}_\ell; x] \quad (\text{F.1-1})$$

とする¹。ここで、 $\psi_\ell(x)$ は Lorentz 群の表現としての自由場、またはゲージ場で

$$\square \psi_\ell(x) = 0 \quad (\text{F.1-3})$$

$$[\psi_\ell(\vec{x}, t), \psi_m(\vec{y}, t)] = 0 \quad (\text{F.1-4})$$

$$[\dot{\psi}_\ell(\vec{x}, t), \dot{\psi}_m(\vec{y}, t)] = 0 \quad (\text{F.1-5})$$

$$[\psi_\ell(\vec{x}, t), \dot{\psi}_m(\vec{y}, t)] = i\mathcal{D}_{\ell m}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{F.1-6})$$

を満たすものとする。このとき、式 (F.1-4) の時間微分から、

$$\mathcal{D}_{\ell m}(\vec{x} - \vec{y}) = \mathcal{D}_{m\ell}(\vec{y} - \vec{x}) \quad (\text{F.1-7})$$

が成り立つ。仮定から ψ_ℓ の粒子は相互作用として

$$\begin{aligned} \delta V_\ell^I(t) &= - \int d^3x \left[\frac{\delta}{\delta \psi_\ell} \mathcal{L}_{\text{int}}^I[\{\psi_\ell, \partial_\mu \psi_\ell\}_\ell; x] \delta \psi_\ell(x) + \frac{\delta}{\delta \partial_\mu \psi_\ell} \mathcal{L}_{\text{int}}^I[\{\psi_\ell, \partial_\mu \psi_\ell\}_\ell; x] \delta \partial_\mu \psi_\ell(x) \right] \\ &=: - \int d^3x [\mathcal{W}_\ell(\psi, \partial\psi; x) \delta \psi_\ell(x) + \mathcal{W}_\ell^\mu(\psi, \partial\psi; x) \delta \partial_\mu \psi_\ell(x)] \end{aligned} \quad (\text{F.1-8})$$

の結合をもつ。ここで、太字で集合を表すことにした。粒子描像の場 ψ_ℓ と Heisenberg 描像の場 Ψ_ℓ は

$$\Psi_\ell(x) = \Omega^\dagger(t) \psi_\ell(x) \Omega(t), \quad \Omega(t) := U_0^\dagger(t) U(t) = \exp[iH_0 t] \exp[-iHt] \quad (\text{F.1-9})$$

で結ばれる。

$$\frac{d\Omega}{dt} = -iV^I(t)\Omega(t), \quad \frac{d\Omega^\dagger}{dt} = i\Omega^\dagger(t)V^I(t) \quad (\text{F.1-10})$$

より、

$$\dot{\Psi}_\ell(x) = \Omega^\dagger(t) \left[\dot{\psi}_\ell(x) + i[V^I(t), \psi_\ell(x)] \right] \Omega(t) \quad (\text{F.1-11})$$

¹このため、重力のラグランジアンは Einstein-Hilbert ではなく、それと全微分項で一致する Landau-Lifshitz のもの

$$\mathcal{L}_{\text{LL}} = \sqrt{-g}G = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} [\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma] \quad (\text{F.1-2})$$

と考える。

が得られる。相互作用の仮定から ($\mathcal{L}_{\text{int}}^I = -\mathcal{V}^I$)

$$\begin{aligned} [V^I(t), \psi_\ell(x)] &= - \sum_k \int d^3y \left(\mathcal{W}_k(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) [\psi_k(\vec{y}, t), \psi_\ell(\vec{x}, t)] + \mathcal{W}_k^\mu(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) [\partial_\mu^y \psi_k(\vec{y}, t), \psi_\ell(\vec{x}, t)] \right) \\ &= i \sum_k \int d^3y \mathcal{W}_k^0(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) \mathcal{D}_{\ell k}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{F.1-12})$$

となるから、

$$\dot{\Psi}_\ell(x) = \Omega^\dagger(t) \dot{\psi}_\ell(x) \Omega(t) - \sum_k \int d^3y \mathcal{W}_k^0(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) \mathcal{D}_{\ell k}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{F.1-13})$$

となる。再び時間微分をとると、

$$\ddot{\Psi}_\ell(x) = \Omega^\dagger(t) [\ddot{\psi}_\ell(x) + i[V^I(t), \dot{\psi}_\ell(x)]] \Omega(t) - \sum_k \int d^3y \dot{\mathcal{W}}_k^0(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) \mathcal{D}_{\ell k}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{F.1-14})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} [V^I(t), \dot{\psi}_\ell(x)] &= - \sum_k \int d^3y \left(\mathcal{W}_k(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) [\psi_k(\vec{y}, t), \dot{\psi}_\ell(\vec{x}, t)] + \mathcal{W}_k^\mu(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) [\partial_\mu^y \psi_k(\vec{y}, t), \dot{\psi}_\ell(\vec{x}, t)] \right) \\ &= -i \sum_k \int d^3y \left(\mathcal{W}_k(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) \mathcal{D}_{k\ell}(\vec{y} - \vec{x}) + \mathcal{W}_k^i(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) \partial_i^y \mathcal{D}_{k\ell}(\vec{y} - \vec{x}) \right) \\ &= -i \sum_k \int d^3y \left(\mathcal{W}_k(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) - \partial_i^y \mathcal{W}_k^i(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\psi}; \vec{y}, t) \right) \mathcal{D}_{k\ell}(\vec{y} - \vec{x}) \\ &\quad + \cancel{[\mathcal{W}_k^i(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) \mathcal{D}_{\ell k}(\vec{x} - \vec{y})]_{y_i = -L_V}^{L_V}} \end{aligned} \quad (\text{F.1-15})$$

となる。式 (F.1-7) を使うと

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi}_\ell(x) &= \Omega^\dagger(t) \ddot{\psi}_\ell(x) \Omega(t) \\ &\quad - \sum_k \int d^3y \left[\mathcal{W}_k^0(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) - \left(\mathcal{W}_k(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) - \partial_i^y \mathcal{W}_k^i(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) \right) \right] \mathcal{D}_{\ell k}(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \Omega^\dagger(t) \ddot{\psi}_\ell(x) \Omega(t) + \sum_k \int d^3y [\mathcal{W}_k(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) - \partial_\mu \mathcal{W}_k^\mu(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t)] \mathcal{D}_{\ell k}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{F.1-16})$$

が得られる。ここで空間微分に関しては

$$\partial_i \Psi_\ell(x) = \Omega^\dagger(t) \partial_i \psi_\ell(x) \Omega(t) \quad (\text{F.1-17})$$

であることを使うと、

$$\begin{aligned} -\square \Psi_\ell(x) &= \ddot{\Psi}_\ell(x) - \nabla^2 \Psi_\ell(x) \\ &= -\Omega^\dagger(t) [\square \psi_\ell(x)] \Omega(t) + \int d^3y [\mathcal{W}_k(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) - \partial_\mu \mathcal{W}_k^\mu(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t)] \mathcal{D}_{\ell k}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{F.1-18})$$

となるから、Heisenberg 描像の場合は

$$\square \Psi_\ell(x) = - \sum_k \int d^3y \mathcal{D}_{\ell k}(\vec{x} - \vec{y}) \mathcal{T}_k(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) \quad (\text{F.1-19})$$

を満たす。ここで、

$$\mathcal{T}_k(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) := \mathcal{W}_k(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) - \partial_\mu \mathcal{W}_k^\mu(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Psi}; \vec{y}, t) \quad (\text{F.1-20})$$

を定義した。

これを使って Weinberg は彼の重力子が Heisenberg 描像で線形 Einstein 方程式を運動方程式とするものであることを示した。

付録 G

弱重力場についての摂動論の計算

G.1 準備

線形重力理論を扱うので、弱重力場についての摂動論の計算を与える。

背景時空からの摂動論

局所的に $\mathbb{M}^{1,d}$ の座標系を用いて記述できる時空を考える。また、 $D := d + 1$ も定めておく。時空の計量 $g_{\mu\nu}$ が、ある背景時空の計量 $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ からの摂動として

$$g_{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad \kappa := \sqrt{32\pi G} \quad (\text{G.1-1})$$

と書かれる場合について考える。種々の幾何学量量の摂動展開を求めるのがこの節の目標である。この節では $\kappa = 1$ の単位系を考えることにする。

変分法

計量を定めることで決まる汎関数 $F[\{g_{\mu\nu}\}]$ に対して、 $\{g_{\alpha\beta}\} \rightarrow \{g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}\}$ とすると、

$$F[\mathbf{g} + \delta\mathbf{g}] = F[\mathbf{g}] + \frac{\delta F[\mathbf{g}]}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{g}\|^2) \quad (\text{G.1-2})$$

となる。 $\mathcal{O}(\|\delta\mathbf{g}\|^2)$ の量を無視して、変分を

$$\delta F[\mathbf{g}] := \frac{\delta F[\mathbf{g}]}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} \quad (\text{G.1-3})$$

によって定める。 n 階変分は

$$\delta^{(n)} F[\mathbf{g}] := \underbrace{\delta \cdots \delta}_{n \text{ 個}} F[\mathbf{g}] = \frac{\delta^n F[\mathbf{g}]}{\delta g_{\alpha_1\beta_1} \cdots \delta g_{\alpha_n\beta_n}} \delta g_{\alpha_1\beta_1} \cdots \delta g_{\alpha_n\beta_n} \quad (\text{G.1-4})$$

によって与えられる。これを使うと、

$$F[\overset{\circ}{\mathbf{g}} + \mathbf{h}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^{(n)} F[\mathbf{g}] \Big|_{(\mathbf{g}, \delta\mathbf{g}) = (\overset{\circ}{\mathbf{g}}, \mathbf{h})} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta^n F[\mathbf{g}]}{\delta g_{\alpha_1\beta_1} \cdots \delta g_{\alpha_n\beta_n}} \Big|_{\mathbf{g} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}} h_{\alpha_1\beta_1} \cdots h_{\alpha_n\beta_n} \quad (\text{G.1-5})$$

という形で F の摂動展開を求めることができる。以後これを用いて具体的な幾何学量量の摂動展開を求めていく。

G.2 逆計量

逆計量 $g^{\mu\nu}$ の摂動展開を求める。定義から $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$ を満たす。これに変分を取れば

$$\delta^{(1)}g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}\delta g_{\rho\sigma} =: -(\delta g)^{\mu\nu} \quad (\text{G.2-1})$$

となる。再度変分を取ると、

$$\delta^{(2)}g^{\mu\nu} = (g^{\mu\rho_2}g^{\sigma_2\rho_1}g^{\sigma_1\nu} + g^{\mu\rho_1}g^{\sigma_1\rho_2}g^{\sigma_2\nu})\delta g_{\rho_1\sigma_1}\delta g_{\rho_2\sigma_2} = 2(\delta g)^\mu_{\alpha_1}(\delta g)^{\alpha_1\nu} =: 2[(\delta g)_2]^{\mu\nu} \quad (\text{G.2-2})$$

が得られる。これを繰り返すと、

$$\begin{aligned} \delta^{(n)}g^{\mu\nu} &= (-1)^n \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} g^{\mu\rho_{s_1}}g^{\sigma_{s_1}\rho_{s_2}}g^{\sigma_{s_2}\rho_{s_3}} \cdots g^{\sigma_{s_{n-1}}\rho_{s_n}}g^{\sigma_{s_n}\nu} \delta g_{\rho_1\sigma_1}\delta g_{\rho_2\sigma_2} \cdots \delta g_{\rho_n\sigma_n} \\ &= (-1)^n n! (\delta g)^\mu_{\alpha_1} (\delta g)^{\alpha_1}_{\alpha_2} \cdots (\delta g)^{\alpha_{n-2}}_{\alpha_{n-1}} (\delta g)^{\alpha_{n-1}\nu} =: (-1)^n n! [(\delta g)_n]^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{G.2-3})$$

となることがわかる。ここで、 \mathfrak{S}_n は n 次対称群であり、和は (s_1, s_2, \dots, s_n) の並び替え全てを取るという意味である。

$$[(\delta g)_0]^{\mu\nu} := g^{\mu\nu}, [(\delta g)_1]^{\mu\nu} := (\delta g)^{\mu\nu} \quad (\text{G.2-4})$$

と定めれば、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$\delta^{(n)}g^{\mu\nu} = (-1)^n n! [(\delta g)_n]^{\mu\nu} \quad (\text{G.2-5})$$

が得られる。したがって逆計量の摂動展開は

$$g^{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(h)_n]^{\mu\nu}, [(h)_n]^{\mu\nu} := \begin{cases} h^{\mu\nu} & n=1 \\ h^\mu_{\alpha} h^{\alpha\nu} & n=2 \\ h^\mu_{\alpha_1} h^{\alpha_1}_{\alpha_2} \cdots h^{\alpha_{n-2}}_{\alpha_{n-1}} h^{\alpha_{n-1}\nu} & n \geq 3 \end{cases} \quad (\text{G.2-6})$$

と求まる。 $h_{\mu\nu}$ の添字は $\overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu}, \overset{\circ}{g}{}_{\mu\nu}$ によって上げ下げした。以降の計算で多用するので、上で行った計算を略記を用いてまとめる。

$$\mathbf{a}_n := [(\delta g)_n]^{\mu\nu} \quad (\text{G.2-7})$$

と書くと、

$$\delta \mathbf{a}_n = -(n+1) \mathbf{a}_{n+1} \quad (\text{G.2-8})$$

が成り立つから、

$$\delta^{(n)}g^{\mu\nu} = \delta^{(n)}\mathbf{a}_0 = (-1)^n n! \mathbf{a}_n \quad (\text{G.2-9})$$

となる。

G.3 行列式

計量の行列式

$$\det[g] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_D} \text{sgn}\sigma g_{\mu_1\nu_{\sigma_1}} g_{\mu_2\nu_{\sigma_2}} \cdots g_{\mu_D\nu_{\sigma_D}} \quad (\text{G.3-1})$$

の摂動展開を求める。 $\text{sgn}\sigma$ は $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_D)$ が $(1, 2, \dots, D)$ の偶置換で $+1$ をとり、奇置換で -1 をとる符号関数である。 $\delta_{\mu_m}^\alpha = g_{\mu_m}^\alpha$ に注意して変分を取ると

$$\delta \det[g] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_D} \text{sgn}\sigma \sum_{m=1}^D g_{\mu_1\nu_{\sigma_1}} \cdots g_{\mu_m\alpha} \cdots g_{\mu_D\nu_{\sigma_D}} g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\nu_{\sigma_m}} \quad (\text{G.3-2})$$

となる。対称性から $\alpha = \nu_{\sigma_m}$ の場合のみが残るので、

$$\delta \det[\mathbf{g}] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_D} \text{sgn} \sigma g_{\mu_1 \nu_{\sigma_1}} g_{\mu_2 \nu_{\sigma_2}} \cdots g_{\mu_D \nu_{\sigma_D}} g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\alpha} = \det[\mathbf{g}] g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \quad (\text{G.3-3})$$

が得られる。最後の表式では逆計量が対称テンソルであることを使った。再度変分を取ると

$$\delta^{(2)} \det[\mathbf{g}] = \delta \det[\mathbf{g}] g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \det[\mathbf{g}] \delta g^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\nu} = \det[\mathbf{g}] [g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}] \delta g_{\mu\nu} \delta g_{\alpha\beta} \quad (\text{G.3-4})$$

となる。繰り返し行えば、

$$\delta^{(n)} \det[\mathbf{g}] = \det[\mathbf{g}] \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn} \sigma g^{\mu_1 \nu_{\sigma_1}} g^{\mu_2 \nu_{\sigma_2}} \cdots g^{\mu_n \nu_{\sigma_n}} \delta g_{\mu_1 \nu_1} \delta g_{\mu_2 \nu_2} \cdots \delta g_{\mu_n \nu_n} \quad (\text{G.3-5})$$

となる。式 (B.1-11) の記法を使えばこれは、

$$\delta^{(n)} \det[\mathbf{g}] = n! \det[\mathbf{g}] g^{\mu_n [\nu_n]} \delta g_{\mu_1 \nu_1} \delta g_{\mu_2 \nu_2} \cdots \delta g_{\mu_n \nu_n} \quad (\text{G.3-6})$$

とかける。したがって行列式の摂動展開は

$$\det[\mathbf{g}] = \det[\overset{\circ}{\mathbf{g}}] + \det[\overset{\circ}{\mathbf{g}}] \sum_{n=1}^D \overset{\circ}{g}^{\mu_n [\nu_n]} h_{\mu_1 \nu_1} h_{\mu_2 \nu_2} \cdots h_{\mu_n \nu_n} \quad (\text{G.3-7})$$

と求まる。完全反対称化の性質により、和は D までとなる。

G.4 Christoffel 記号

(第 2 種) Christoffel 記号

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}) \quad (\text{G.4-1})$$

の摂動展開を求める。これを求めるためには、第 1 種 Christoffel 記号

$$\Gamma_{\sigma\mu\nu} := g_{\sigma\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} [\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}] \quad (\text{G.4-2})$$

を用いるのが 2 階以上の変分が 0 となるために便利だ。変分を取ると、

$$\delta \Gamma_{\sigma\mu\nu} = \delta g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + g_{\alpha\sigma} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \delta g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} \delta g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} \delta g_{\mu\nu}] \quad (\text{G.4-3})$$

となる。 $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = g^{\alpha\sigma} \Gamma_{\sigma\mu\nu}$ より、

$$\begin{aligned} \delta^{(n)} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \sum_{m=0}^n {}_n C_m [\delta^{(n-m)} g^{\alpha\sigma}] \delta^{(m)} \Gamma_{\sigma\mu\nu} \\ &= (-1)^n n! [(\delta g)_n]^{\alpha\sigma} \Gamma_{\sigma\mu\nu} + n(-1)^{n-1} (n-1)! [(\delta g)_{n-1}]^{\alpha\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu\nu} \\ &= (-1)^n n! [(\delta g)_{n-1}]^{\alpha\beta} [(\delta g)_{\beta}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu\nu} - \delta \Gamma_{\beta\mu\nu}] \end{aligned} \quad (\text{G.4-4})$$

が得られる。ここで、式 (G.2-9) の関係を使った。1 階変分は

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Big|_{(g, \delta g) = (\overset{\circ}{g}, \overset{\circ}{h})} &= \overset{\circ}{g}^{\alpha\sigma} \left[\delta \Gamma_{\sigma\mu\nu} \Big|_{\delta g = \overset{\circ}{h}} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} h_{\lambda\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}^{\alpha\sigma} \left[\partial_{\mu} h_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} h_{\mu\nu} - 2 \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} h_{\lambda\sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.4-5})$$

$$= \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}^{\alpha\sigma} \left[\overset{\circ}{\nabla}_{\mu} h_{\sigma\nu} + \overset{\circ}{\nabla}_{\nu} h_{\mu\sigma} - \overset{\circ}{\nabla}_{\sigma} h_{\mu\nu} \right] \quad (\text{G.4-6})$$

となるから、

$$\Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\mu\nu} := \frac{1}{2} \left[\overset{\circ}{\nabla}_{\mu} h_{\sigma\nu} + \overset{\circ}{\nabla}_{\nu} h_{\mu\sigma} - \overset{\circ}{\nabla}_{\sigma} h_{\mu\nu} \right] \quad (\text{G.4-7})$$

を定めて Christoffel 記号の摂動展開は

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [(h)_{n-1}]^{\alpha\sigma} \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\mu\nu} \quad (\text{G.4-8})$$

と求まる。

G.5 Riemann 曲率・Ricci 曲率・Ricci スカラー

G.5.1 接続に対する変分

種々の幾何学量の摂動展開を求めるために、Riemann 曲率

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = 2\partial_{[\nu}\Gamma_{\mu]\rho}^{\alpha} + 2\Gamma_{\lambda[\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} \quad (\text{G.5-1})$$

の摂動展開を求めたい。Palatini 形式 (metric-affine 形式) では計量の他に接続も力学変数に含まれる。Christoffel 記号は Levi-Civita 接続の局所座標表示だから、 $\{\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\}$ の変分を考えたい場面もあるだろう。そこでまずは接続 $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ が、ある背景接続 $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ からの摂動として、

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + C_{\mu\nu}^{\alpha} \quad (\text{G.5-2})$$

と書かれる場合について考える。 $R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha}[\{\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\}]$ について $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ の変分 $\tilde{\delta}$ を取ると

$$\tilde{\delta} R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = 2\partial_{[\nu}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\alpha} + 2\tilde{\delta}\Gamma_{\lambda[\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} + 2\Gamma_{\lambda[\nu}^{\alpha}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} \quad (\text{G.5-3})$$

となる。 (n, m) テンソル $T_{\nu_m}^{\mu_n}$ に対する共変微分と変分の関係

$$\delta [\nabla_{\alpha} T_{\nu_m}^{\mu_n}] = \nabla_{\alpha} \delta T_{\nu_m}^{\mu_n} + \sum_{i=1}^n T_{\nu_m}^{\mu_n \lambda} \delta \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu_i} - \sum_{j=1}^m T_{\nu_m^j}^{\mu_n} \delta \Gamma_{\alpha\nu_j}^{\lambda} \quad (\text{G.5-4})$$

を用いると、

$$2\partial_{[\nu}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\alpha} = 2\nabla_{[\nu}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\alpha} + 2\cancel{\Gamma_{[\nu\mu]}^{\lambda}} \overset{0}{\delta}\Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha} + 2\Gamma_{\rho[\nu}^{\lambda}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\alpha} - 2\Gamma_{\lambda[\nu}^{\alpha}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} \quad (\text{G.5-5})$$

なので、

$$\tilde{\delta} R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = 2\nabla_{[\nu}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\alpha} \quad (\text{G.5-6})$$

が得られる。再度変分を取ると、

$$\tilde{\delta} [\nabla_{[\nu}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\alpha}] = \nabla_{[\nu} \underbrace{\{\tilde{\delta}(\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\alpha})\}}_{=0} - \cancel{\Gamma_{[\nu\mu]}^{\lambda}} \overset{0}{\delta}\Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha} + \tilde{\delta}\Gamma_{\lambda[\nu}^{\alpha}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} - \tilde{\delta}\Gamma_{[\nu|\rho]}^{\lambda}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\alpha} = 2\tilde{\delta}\Gamma_{\lambda[\nu}^{\alpha}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} \quad (\text{G.5-7})$$

となるから、

$$\tilde{\delta}^{(2)} R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = 4\tilde{\delta}\Gamma_{\lambda[\nu}^{\alpha}\tilde{\delta}\Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} \quad (\text{G.5-8})$$

となる。求めたい摂動展開は

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad \tilde{\delta}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = C_{\mu\nu}^{\alpha} \quad (\text{G.5-9})$$

のものだったので、

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} + 2\overset{\circ}{\nabla}_{[\nu} C_{\mu]\rho}^{\alpha} + 2C_{\lambda[\nu}^{\alpha} C_{\mu]\rho}^{\lambda} \quad (\text{G.5-10})$$

が得られる。Einstein 重力では式 (G.4-8) から

$$C_{\mu\nu}^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [(h)_{n-1}]^{\alpha\sigma} \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\mu\nu} \quad (\text{G.5-11})$$

である。これを代入して Riemann 曲率の摂動展開を求めてもいいが、 h の 2 次以上の項をまとめるのは骨が折れる。そこで次に共変 Riemann 曲率について考え、その摂動展開を考える。

G.5.2 共変 Riemann 曲率

共変 Riemann 曲率は

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\alpha\sigma} R_{\mu\nu\rho}^{\alpha} = 2g_{\alpha\sigma} \left[\partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]\rho}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda[\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} \right] \quad (\text{G.5-12})$$

で与えられる。

$$\partial_{\nu} g^{\alpha\beta} = \nabla_{\nu} g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} g^{\lambda\beta} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} g^{\lambda\alpha} = -\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} g^{\lambda\beta} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} g^{\lambda\alpha} \quad (\text{G.5-13})$$

を使うと、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -2g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\beta\rho[\mu} \left[\Gamma_{\nu]\lambda}^{\alpha} g^{\lambda\beta} + \Gamma_{\nu]\lambda}^{\beta} g^{\lambda\alpha} \right] + \partial_{[\nu} \left[\cancel{\partial_{\mu]} g_{\sigma\rho} + \partial_{|\rho|} g_{\mu]\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu]\rho} \right] + 2\Gamma_{\sigma\lambda[\nu} \Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} \\ &= 2\delta_{[\rho\sigma]}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{[\nu} g_{\mu]\beta} - 2\Gamma_{\sigma[\nu}^{\beta} \Gamma_{|\beta|\mu]\rho} - 2g^{\lambda\beta} \Gamma_{\beta\rho[\mu} \Gamma_{|\sigma|\nu]\lambda} + 2\Gamma_{\sigma\lambda[\nu} \Gamma_{\mu]\rho}^{\lambda} \\ &= 2\delta_{[\rho\sigma]}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{[\nu} g_{\mu]\beta} + 2g_{\alpha\beta} \Gamma_{\rho[\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu]\sigma}^{\beta} \end{aligned} \quad (\text{G.5-14})$$

が得られる。第 1 項、第 2 項について

$$r_{\mu\nu\rho\sigma} := \frac{1}{2} [\partial_{\rho} \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} g_{\nu\sigma}], \quad (\text{G.5-15})$$

$$s_{\mu\nu\rho\sigma} := g_{\alpha\beta} [\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\beta} - \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta}] \quad (\text{G.5-16})$$

を定めれば、共変 Riemann 曲率は

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = r_{\mu\nu\rho\sigma} + s_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{G.5-17})$$

と分解される。 $r_{\mu\nu\rho\sigma}$ の 1 階変分は

$$\delta r_{\mu\nu\rho\sigma} = 2\delta_{[\rho\sigma]}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{[\nu} \delta g_{\mu]\beta} \quad (\text{G.5-18})$$

である。 $r_{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\{g_{\mu\nu}\}$ による 2 階変分が 0 なので、 $n \geq 2$ 階以上の変分を知りたい場合、 $s_{\mu\nu\rho\sigma}$ の n 階変分を求めればよい。さらに、

$$A_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} := \Gamma_{\lambda\rho[\nu} \Gamma_{|\kappa|\mu]\sigma} \quad (\text{G.5-19})$$

を定める。 $\delta^{(n \geq 3)} A_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} = 0$ となるので、 $s_{\mu\nu\rho\sigma}$ の変分を $A_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma}$, $\delta A_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma}$, $\delta^{(2)} A_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma}$ を基底のようにして表すことを考えよう。

$$\frac{1}{2} s_{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\lambda\kappa} A_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{G.5-20})$$

とかける。逆行列の小節の最後で用いた記法 (G.2-7) を使うと、 $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^{(n)} s &= \left[\delta^{(n)} \mathbf{a}_0 \right] \mathbf{A} + n \left[\delta^{(n-1)} \mathbf{a}_0 \right] \delta \mathbf{A} + {}_n C_2 \left[\delta^{(n-2)} \mathbf{a}_0 \right] \delta^{(2)} \mathbf{A} + \sum_{m \geq 3}^n \left[\delta^{(n-m)} \mathbf{a}_0 \right] \delta^{(m)} \mathbf{A} \\ &= (-1)^n n! \left[\mathbf{a}_n \mathbf{A} - \mathbf{a}_{n-1} \delta \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{a}_{n-2} \delta^{(2)} \mathbf{A} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.5-21})$$

となる。

$$\mathbf{a}_{m < 0} := 0 \quad (\text{G.5-22})$$

とすれば、式 (G.5-21) は $n = 0, 1, 2, \dots$ で成り立つ。

さて、

$$\mathbf{B}_n := \left[2\mathbf{a}_n \mathbf{A} - 2\mathbf{a}_{n-1} \delta \mathbf{A} + \mathbf{a}_{n-2} \delta^{(2)} \mathbf{A} \right] \quad (\text{G.5-23})$$

について考えよう。

$$\delta \Gamma_{\sigma\mu\nu} \Big|_{(g, \delta g) = (\dot{g}, \dot{h})} = \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\mu\nu} + h^\alpha{}_\sigma \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\mu\nu} \quad (\text{G.5-24})$$

を使うと、 $(g, \delta g) = (\dot{g}, \dot{h})$ のときに

$$\begin{aligned} \delta A_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} &= h^\alpha{}_\lambda A_{\alpha\kappa\mu\nu\rho\sigma} + h^\alpha{}_\kappa A_{\alpha\lambda\mu\nu\rho\sigma} + \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\rho[\nu} \overset{\circ}{\Gamma}_{|\kappa|\mu]\sigma} + \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\rho[\mu} \overset{\circ}{\Gamma}_{|\lambda|\nu]\sigma}, \\ \frac{1}{2} \delta^{(2)} A_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} &= h^\alpha{}_\lambda h^\beta{}_\kappa A_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma} + h^\alpha{}_\kappa \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\rho[\nu} \overset{\circ}{\Gamma}_{|\kappa|\mu]\sigma} + h^\alpha{}_\lambda \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\rho[\mu} \overset{\circ}{\Gamma}_{|\lambda|\nu]\sigma} + \frac{1}{2} \Delta^2 \overset{\circ}{A}_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma}, \\ \Delta^2 \overset{\circ}{A}_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} &:= \left[\Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\rho\nu} \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\mu\sigma} - \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\rho\mu} \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\nu\sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.5-25})$$

となる。定義式 (G.5-23) に代入すると $n \geq 2$ のとき

$$[(B_n)_{\mu\nu\rho\sigma}] \Big|_{(g, \delta g) = (\dot{g}, \dot{h})} = [(h_{n-2})^{\lambda\kappa}] \Delta^2 \overset{\circ}{A}_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{G.5-26})$$

とまとまる。

次に、1 階変分について計算する。一階変分は式 (G.5-10) で与えられる Riemann 曲率の接続に対する 1 階変分の式に

$$\Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha := \dot{g}^{\alpha\sigma} \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\mu\nu} \quad (\text{G.5-27})$$

を代入し、

$$\delta R_{\mu\nu\rho}{}^\alpha = g^{\alpha\sigma} \left[\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\mu\nu\rho\lambda} (\delta g)^\lambda{}_\sigma \right] \iff \delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\lambda} (\delta g)^\lambda{}_\sigma + g_{\alpha\sigma} \delta R_{\mu\nu\rho}{}^\alpha \quad (\text{G.5-28})$$

の関係を用いることで求めることにしよう。このようにした h の 1 次の項を

$$\Delta \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} := \delta R_{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(g, \delta g) = (\dot{g}, \dot{h})} = \tilde{\delta} R_{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(g, \delta g) = (\dot{g}, \dot{h})} \quad (\text{G.5-29})$$

と書くことにする。共変 Riemann 曲率の対称性

$$R_{a_1 a_2 a_3 a_4} = -R_{a_2 a_1 a_3 a_4} = -R_{a_1 a_2 a_4 a_3}, \quad R_{[a_1 a_2 a_3] a_4} = 0 \quad (\text{G.5-30})$$

を使いながら計算を行うと、

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[\nu} \delta \Gamma_{\mu]\rho}^\alpha \Big|_{\substack{g=\dot{g} \\ \delta g=\dot{h}}} &= \dot{g}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\nabla}_{[\nu} \Delta \overset{\circ}{\Gamma}_{|\sigma|\mu]\rho} = \dot{g}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\nabla}_{[\nu} \left[\overset{\circ}{\nabla}_{\mu]} h_{\sigma\rho} + \overset{\circ}{\nabla}_{|\rho]} h_{\mu]\sigma} - \overset{\circ}{\nabla}_{|\sigma]} h_{\mu]\rho} \right] \\ &= \dot{g}^{\alpha\sigma} \left[\overset{\circ}{R}_{[\nu\mu]\sigma\lambda} h^\lambda{}_\rho + \overset{\circ}{R}_{[\nu\mu]\rho\lambda} h^\lambda{}_\sigma + 2\delta_{[\rho\sigma]}^{\beta\gamma} \left(\overset{\circ}{R}_{[\nu|\beta|\mu]\lambda} h^\lambda{}_\gamma + \overset{\circ}{R}_{[\nu|\beta|\gamma\lambda]} h^\lambda{}_\mu + \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{\nabla}_{[\nu} h_{\mu]\gamma} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \dot{g}^{\alpha\sigma} \left[\left(2 \overset{\circ}{R}_{\nu\mu\sigma\lambda} - \overset{\circ}{R}_{\nu\sigma\mu\lambda} + \overset{\circ}{R}_{\mu\sigma\nu\lambda} \right) h^\lambda{}_\rho + \left(2 \overset{\circ}{R}_{\nu\mu\rho\lambda} + \overset{\circ}{R}_{\nu\rho\mu\lambda} - \overset{\circ}{R}_{\mu\rho\nu\lambda} \right) h^\lambda{}_\sigma \right. \\ &\quad \left. + \left(\overset{\circ}{R}_{\nu\rho\sigma\lambda} - \overset{\circ}{R}_{\nu\sigma\rho\lambda} \right) h^\lambda{}_\mu + \left(\overset{\circ}{R}_{\mu\rho\sigma\lambda} - \overset{\circ}{R}_{\mu\sigma\rho\lambda} \right) h^\lambda{}_\nu + 4\delta_{[\rho\sigma]}^{\beta\gamma} \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{\nabla}_{[\nu} h_{\mu]\gamma} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \dot{g}^{\alpha\sigma} \left[\overset{\circ}{R}_{\rho\sigma\nu\lambda} h^\lambda{}_\mu - \overset{\circ}{R}_{\rho\sigma\mu\lambda} h^\lambda{}_\nu + \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\sigma\lambda} h^\lambda{}_\rho + \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\lambda} h^\lambda{}_\sigma \right] + 2 \dot{g}^{\alpha\sigma} \delta_{[\rho\sigma]}^{\beta\gamma} \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{\nabla}_{[\nu} h_{\mu]\gamma} \end{aligned} \quad (\text{G.5-31})$$

が成り立つことがわかる。したがって、

$$\Delta \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \left[\overset{\circ}{R}_{\rho\sigma\nu\lambda} h^\lambda{}_\mu - \overset{\circ}{R}_{\rho\sigma\mu\lambda} h^\lambda{}_\nu + \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\sigma\lambda} h^\lambda{}_\rho - \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\lambda} h^\lambda{}_\sigma \right] + 2\delta_{[\rho\sigma]}^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{\nabla}_{[\nu} h_{\mu]\beta} \quad (\text{G.5-32})$$

となる。

以上の結果をまとめると、共変 Riemann 曲率の摂動展開が

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \Delta \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n [(h_{n-2})]^{\lambda\kappa} \Delta^2 \overset{\circ}{A}_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{G.5-33})$$

として得られる。 $R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = g^{\alpha\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ より、

$$\begin{aligned} \delta^{(n)} R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} \Big|_{(g,\delta g)=(\overset{\circ}{g},h)} &= \sum_{m=0}^n {}_n C_m \left[\delta^{(m)} g^{\alpha\sigma} \right] \Big|_{(g,\delta g)=(\overset{\circ}{g},h)} \delta^{(n-m)} R_{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(g,\delta g)=(\overset{\circ}{g},h)} \\ &= (-1)^n n! \left[[(h)_n]^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} - [(h)_{n-1}]^{\alpha\sigma} \Delta \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \sum_{m=2}^n [(h)_{m-2}]^{\alpha\sigma} [(h)_{n-m}]^{\lambda\kappa} \Delta^2 \overset{\circ}{A}_{\lambda\kappa\mu\nu\rho\sigma} \right] \\ &=: (-1)^n n! \Delta^n \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{G.5-34})$$

となるから、 $[(h)_{m<0}] \equiv 0$ として、Riemann 曲率は

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Delta^n \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} \quad (\text{G.5-35})$$

と摂動展開できる。

G.5.3 Ricci 曲率

Ricci テンソル

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (\text{G.5-36})$$

の摂動展開を求める。Riemann 曲率と全く同様にして、

$$\Delta^n \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} := \left[[(h)_n]^{\alpha\beta} \overset{\circ}{R}_{\mu\alpha\nu\beta} - [(h)_{n-1}]^{\alpha\beta} \Delta \overset{\circ}{R}_{\mu\alpha\nu\beta} + \sum_{m=2}^n [(h)_{m-2}]^{\alpha\beta} [(h)_{n-m}]^{\lambda\kappa} \Delta^2 \overset{\circ}{A}_{\lambda\kappa\mu\alpha\nu\beta} \right] \quad (\text{G.5-37})$$

と定めれば、Ricci 曲率の摂動展開は

$$R_{\mu\nu} = \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Delta^n \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} \quad (\text{G.5-38})$$

と求まる。

G.5.4 Ricci スカラー

Ricci スカラー

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{G.5-39})$$

の摂動展開を求める。

$$\Delta^n \overset{\circ}{R} := \sum_{m=0}^n [(h)_{n-m}]^{\mu\nu} \Delta^m \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} \quad (\text{G.5-40})$$

を定めれば Ricci スカラーの摂動展開は

$$R = \overset{\circ}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Delta^n \overset{\circ}{R} \quad (\text{G.5-41})$$

と求まる。

G.6 平坦時空周りでの摂動展開

平坦時空周り、すなわち、 $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ における諸量の摂動展開をここに記す。

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(h)_n]^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^\mu{}_\alpha h^{\alpha\nu} - h^\mu{}_\alpha h^\alpha{}_\beta h^{\beta\nu} + \dots \quad (\text{G.6-1})$$

$$\begin{aligned} \det[g] &= -1 - \sum_{n=1}^D \eta^{\mu_1 \nu_1} h_{\mu_1 \nu_1} h_{\mu_2 \nu_2} \cdots h_{\mu_n \nu_n} \\ &= -1 - h - \frac{1}{2} (h^2 - h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}) - \frac{1}{6} (h^3 - 3h h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + 2h^\mu{}_\alpha h^\alpha{}_\beta h^\beta{}_\mu) + \dots \end{aligned} \quad (\text{G.6-2})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [(h)_n]^\alpha{}_\sigma \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma, \quad \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} [\partial_\mu h^\sigma{}_\nu + \partial_\nu h^\sigma{}_\mu - \partial^\sigma h_{\mu\nu}] \\ &= \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - h^\alpha{}_\sigma \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + h^\alpha{}_\beta h^\beta{}_\sigma \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \dots \end{aligned} \quad (\text{G.6-3})$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Delta r_{\mu\nu\rho\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [(h)_n]_{\lambda\kappa} \Delta^2 S_{\mu\nu\rho\sigma}^{\lambda\kappa}, \\ \Delta r_{\mu\nu\rho\sigma} &:= 2\delta_{[\rho\sigma]}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_{[\nu} h_{\mu]\beta}, \quad \Delta^2 S_{\mu\nu\rho\sigma}^{\lambda\kappa} := \Delta \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Delta \Gamma_{\mu\sigma}^\kappa - \Delta \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \Delta \Gamma_{\nu\sigma}^\kappa \end{aligned} \quad (\text{G.6-4})$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[[(h)_n]^{\alpha\beta} \Delta r_{\mu\alpha\nu\beta} - \sum_{m=1}^n [(h)_{m-1}]^{\alpha\beta} [(h_{n-m})]_{\lambda\kappa} \Delta^2 S_{\mu\alpha\nu\beta}^{\lambda\kappa} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h] \quad (f_\mu := \partial_\alpha h^\alpha{}_\mu \text{ とした。}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\nu h_{\mu\beta} + \partial_\beta \partial_\mu h_{\nu\alpha} - \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} [(\partial_\lambda h - 2f_\lambda) \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \partial_\mu h^{\alpha\lambda} \Delta \Gamma_{\lambda\alpha\nu}] \right] \\ &\quad + h^\alpha{}_\lambda h^{\lambda\beta} \Delta r_{\mu\alpha\nu\beta} - (h^{\alpha\beta} \eta_{\lambda\kappa} + \eta^{\alpha\beta} h_{\lambda\kappa}) \Delta^2 S_{\mu\alpha\nu\beta}^{\lambda\kappa} + \dots \\ &=: \Delta r_{\mu\nu} + (\Delta_{(2)} r_{\mu\nu} + \Delta^2 S_{\mu\nu}) + (\Delta_{(3)} r_{\mu\nu} + \Delta_{(3/2)}^2 S_{\mu\nu}) + \dots \end{aligned} \quad (\text{G.6-5})$$

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^n [(h)_{n-m}]^{\mu\nu} \left[[(h)_m]^{\alpha\beta} \Delta r_{\mu\alpha\nu\beta} - \sum_{k=1}^m [(h)_{k-1}]^{\alpha\beta} [(h)_{m-k}]_{\lambda\kappa} \Delta^2 S_{\mu\alpha\nu\beta}^{\lambda\kappa} \right] \\ &= -\square h + \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha f_\beta + \partial_\beta f_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta h - \square h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} (\partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} - \partial_\mu h \partial^\mu h + 4f^\mu \partial_\mu h - 4f^\mu f_\mu) \right] \\ &\quad + h^\mu{}_\alpha h^{\alpha\nu} \Delta r_{\mu\nu} - (h^{\alpha\beta} \eta_{\lambda\kappa} + \eta^{\alpha\beta} g_{\lambda\kappa}) \eta^{\mu\nu} \Delta^2 S_{\mu\alpha\nu\beta}^{\lambda\kappa} + \dots \\ &=: \Delta r + (\Delta_{(2)} r + \Delta^2 S) + (\Delta_{(3)} r + \Delta_{(3/2)}^2 S) + \dots \end{aligned} \quad (\text{G.6-6})$$

謝辞

本研究を遂行し学位論文をまとめることができたのは、多くの方々から賜った御指導及び御支援のおかげです。そこでここに感謝の意を申し上げます。

名古屋大学理学研究科素粒子宇宙物理学専攻博士課程での指導教員である野尻伸一博士には、理学部物理学科の学部4年生の時代から大変お世話になりました。学部の卒業研究の主題として、Stromingerのレクチャーノートを提示していただいたことは、私の博士課程での研究の方向を決める上での大きな指針となりました。このときに破れた対称性が私に非摂動的な影響を与え、本研究へと繋がりました。何かしらの締め切りがある度に、夜も朝もなく私を見守り、励まして下さったことを忘れません。さまざまな苦勞をかけてしまったと思いますが、自由に研究を行うことができたのは野尻さんの力添えが不可欠でした。

同研究室の南部保貞博士・柳哲文博士の両氏からは、専門でないからこそその多角的な視点から、有益で刺激的な質問・意見を多数いただきました。研究や発表に広がりや深みを加えて下さったことを感謝いたします。特に柳さんのコロキウムやセミナーに対する真剣な姿勢からは学ぶことが多く、また、きちんと説明できれば理解してもらえるとという安心がありました。そのため柳さんの質問や理解度を発表の指標として精進することができました。

QG研のプチコロ参加者にも大変お世話になりました。特に私が修士1年次での参加者である、赤木聡博士、松村央博士、中村智広博士からは大いに刺激を受けました。先輩方がリアルタイムで独自の研究を進めていく様子や、疑問を追求する姿勢を間近で見られたことは貴重な経験となりました。毎年の参加者にも恵まれ、今日まで続けられたことを嬉しく思います。

EHQG研の同期諸氏とは輪講や議論を通して互いに切磋琢磨することができました。深夜の3時のお茶会や、同期での研究発表会などができたことも貴重な経験だったと思います。卓球などのレクリエーションも貴重な息抜きとなりました。

また、杉下宗太郎博士とのドレス状態形式についての議論は、研究に対する理解の涵養や、新たな研究の種となるような豊かな疑問へと繋がりました。泉圭介博士からドレス状態形式に関わる発表のある研究会を教わり、研究の可能性を広げていただいたこともありました。このようにQG研外部の方々からも多くの御支援・御指導を賜りました。研究会などで出会い、議論して下さった方々や、交流した方々のおかげで楽しく物理をすることができたことも重ねて感謝いたします。

精神的な面では、多くの友人・知人に支えられてきました。経済的な面では、学部までは両親に、修士から博士2年の後期までは祖母に、博士2年の後期から現在までは日本学術振興会に支援していただきました¹。本研究を遂行するためにはこれらの御支援も欠かせないものでした。深く感謝を申し上げます。

私の大学院進学は、祖母による学費と生活費の援助によって可能になりました。昨年3月に帰天した祖母、須賀とみに感謝を込めて学位論文を捧げ、結びといたします。

1

参考文献

- [1] Temple He, Prahar Mitra, Achilleas P. Porfyriadis, and Andrew Strominger. New symmetries of massless QED. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2014, No. 10, 2014.
- [2] Andrew Strominger. Asymptotic symmetries of Yang-Mills theory. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2014, No. 7, 2014.
- [3] Temple He, Vyacheslav Lysov, Prahar Mitra, and Andrew Strominger. BMS supertranslations and Weinberg's soft graviton theorem. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2015, No. 5, 2015.
- [4] Andrew Strominger and Alexander Zhiboedov. Gravitational memory, BMS supertranslations and soft theorems. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2016, No. 1, pp. 1–15, 2016.
- [5] Temple He, Prahar Mitra, and Andrew Strominger. 2D Kac-Moody Symmetry of 4D Yang-Mills Theory. *JHEP*, Vol. 10, p. 137, 2016.
- [6] Pujian Mao and Jun-Bao Wu. Note on asymptotic symmetries and soft gluon theorems. *Phys. Rev. D*, Vol. 96, No. 6, p. 065023, 2017.
- [7] Thomas T. Dumitrescu, Temple He, Prahar Mitra, and Andrew Strominger. Infinite-dimensional fermionic symmetry in supersymmetric gauge theories. *JHEP*, Vol. 08, p. 051, 2021.
- [8] Steven G. Avery and Burkhard U. W. Schwab. Residual Local Supersymmetry and the Soft Gravitino. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, No. 17, p. 171601, 2016.
- [9] Wei-Ming Chen, Yu-tin Huang, and Congkao Wen. New Fermionic Soft Theorems for Supergravity Amplitudes. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 115, No. 2, p. 021603, 2015.
- [10] Daniel Kapec, Vyacheslav Lysov, and Andrew Strominger. Asymptotic Symmetries of Massless QED in Even Dimensions. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 21, pp. 1747–1767, 2017.
- [11] Daniel Kapec, Vyacheslav Lysov, Sabrina Pasterski, and Andrew Strominger. Higher-dimensional supertranslations and Weinberg's soft graviton theorem. *Ann. Math. Sci. Appl.*, Vol. 02, pp. 69–94, 2017.
- [12] Alex Kehagias and Antonio Riotto. BMS in Cosmology. *JCAP*, Vol. 05, p. 059, 2016.
- [13] Yuta Hamada, Min-Seok Seo, and Gary Shiu. Memory in de Sitter space and Bondi-Metzner-Sachs-like supertranslations. *Phys. Rev. D*, Vol. 96, No. 2, p. 023509, 2017.
- [14] Paolo Di Vecchia, Raffaele Marotta, and Matin Mojaza. Soft theorem for the graviton, dilaton and the Kalb-Ramond field in the bosonic string. *JHEP*, Vol. 05, p. 137, 2015.
- [15] Steven G. Avery and Burkhard U. W. Schwab. Burg-Metzner-Sachs symmetry, string theory, and soft theorems. *Phys. Rev. D*, Vol. 93, p. 026003, 2016.
- [16] Andrew Strominger. Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory. mar 2017.
- [17] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 43, pp. 199–220, 1975. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)].
- [18] Stephen W. Hawking, Malcolm J. Perry, and Andrew Strominger. Soft Hair on Black Holes. *Physical Review Letters*, Vol. 116, No. 23, pp. 1–9, 2016.

-
- [19] Stephen W. Hawking, Malcolm J. Perry, and Andrew Strominger. Superrotation Charge and Supertranslation Hair on Black Holes. *JHEP*, Vol. 05, p. 161, 2017.
- [20] Victor Chung. Infrared divergence in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, Vol. 140, pp. B1110–B1122, Nov 1965.
- [21] T. W.B. Kibble. Coherent soft-photon states and infrared divergences. I. Classical currents. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 9, No. 2, pp. 315–324, 1968.
- [22] T. W.B. Kibble. Coherent soft-photon states and infrared divergences. II. Mass-shell singularities of green’s functions. *Physical Review*, Vol. 173, No. 5, pp. 1527–1535, 1968.
- [23] T. W B Kibble. Coherent soft-photon states and infrared divergences. III. Asymptotic states and reduction formulas. *Physical Review*, Vol. 174, No. 5, pp. 1882–1901, 1968.
- [24] T. W.B. Kibble. Coherent soft-photon states and infrared divergences. IV. The scattering operator. *Physical Review*, Vol. 175, No. 5, pp. 1624–1640, 1968.
- [25] P. P. Kulish and L. D. Faddeev. Asymptotic conditions and infrared divergences in quantum electrodynamics. *Theoretical and Mathematical Physics*, Vol. 4, No. 2, pp. 745–757, 1970.
- [26] J. Frohlich, G. Morchio, and F. Strocchi. INFRARED PROBLEM AND SPONTANEOUS BREAKING OF THE LORENTZ GROUP IN QED. *Phys. Lett. B*, Vol. 89, pp. 61–64, 1979.
- [27] John Ware, Ryo Saotome, and Ratindranath Akhoury. Construction of an asymptotic S matrix for perturbative quantum gravity. *JHEP*, Vol. 10, p. 159, 2013.
- [28] A. P. Balachandran, S. Kürkçüoğlu, A. R. de Queiroz, and S. Vaidya. Spontaneous Lorentz Violation: The Case of Infrared QED. *Eur. Phys. J. C*, Vol. 75, No. 2, p. 89, 2015.
- [29] Barak Gabai and Amit Sever. Large gauge symmetries and asymptotic states in QED. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2016, No. 12, 2016.
- [30] Mehrdad Mirbabayi and Massimo Porrati. Dressed hard states and black hole soft hair. *Physical Review Letters*, Vol. 117, No. 21, pp. 1–5, 2016.
- [31] Sangmin Choi and Ratindranath Akhoury. BMS Supertranslation Symmetry Implies Faddeev-Kulish Amplitudes. *JHEP*, Vol. 02, p. 171, 2018.
- [32] César Gómez, Raoul Letschka, and Sebastian Zell. The Scales of the Infrared. *JHEP*, Vol. 09, p. 115, 2018.
- [33] Daniel Carney, Laurent Chaurette, Dominik Neuenfeld, and Gordon Semenoff. On the need for soft dressing. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2018, No. 9, p. 121, 2018.
- [34] Dominik Neuenfeld. Infrared-safe scattering without photon vacuum transitions and time-dependent decoherence. *JHEP*, Vol. 11, p. 189, 2021.
- [35] Hayato Hirai and Sotaro Sugishita. Dressed states from gauge invariance. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2019, No. 6, 2019.
- [36] Sangmin Choi and Ratindranath Akhoury. Subleading soft dressings of asymptotic states in QED and perturbative quantum gravity. *JHEP*, Vol. 09, p. 031, 2019.
- [37] Hideo Furugori and Shin’ichi Nojiri. Dressed asymptotic states and QED infrared physics. *Phys. Rev. D*, Vol. 104, No. 12, p. 125004, 2021.
- [38] Hayato Hirai and Sotaro Sugishita. IR finite S-matrix by gauge invariant dressed states. *JHEP*, Vol. 02, p. 025, 2021.
- [39] Holmfridur Hannesdottir and Matthew D. Schwartz. S -Matrix for massless particles. *Phys. Rev. D*, Vol. 101, No. 10, p. 105001, 2020.
- [40] Steven Weinberg. Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell’s and

- Einstein's equations. *Phys. Rev.*, Vol. 138, pp. B988–B1002, 1965.
- [41] Furugori. Hideo. 準備中.
- [42] Sougato Bose, Anupam Mazumdar, Gavin W. Morley, Hendrik Ulbricht, Marko Toroš, Mauro Paternostro, Andrew Geraci, Peter Barker, M. S. Kim, and Gerard Milburn. Spin Entanglement Witness for Quantum Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, No. 24, p. 240401, 2017.
- [43] Alessio Belenchia, Robert M. Wald, Flaminia Giacomini, Esteban Castro-Ruiz, Časlav Brukner, and Markus Aspelmeyer. Quantum Superposition of Massive Objects and the Quantization of Gravity. *Phys. Rev. D*, Vol. 98, No. 12, p. 126009, 2018.
- [44] Marios Christodoulou and Carlo Rovelli. On the possibility of laboratory evidence for quantum superposition of geometries. *Phys. Lett. B*, Vol. 792, pp. 64–68, 2019.
- [45] Hayato Hirai and Sotaro Sugishita. Dress code for infrared safe scattering in qed. 9 2022.
- [46] J. Frohlich, G. Morchio, and F. Strocchi. Charged Sectors and Scattering States in Quantum Electrodynamics. *Annals Phys.*, Vol. 119, pp. 241–248, 1979.
- [47] Miguel Campiglia and Alok Laddha. Asymptotic symmetries and subleading soft graviton theorem. *Phys. Rev. D*, Vol. 90, No. 12, p. 124028, 2014.
- [48] Miguel Campiglia and Alok Laddha. Subleading soft photons and large gauge transformations. *JHEP*, Vol. 11, p. 012, 2016.
- [49] Miguel Campiglia and Alok Laddha. Sub-subleading soft gravitons and large diffeomorphisms. *JHEP*, Vol. 01, p. 036, 2017.
- [50] Stefan Hollands, Akihiro Ishibashi, and Robert M. Wald. BMS Supertranslations and Memory in Four and Higher Dimensions. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 34, No. 15, p. 155005, 2017.
- [51] Ankit Aggarwal. Supertranslations in Higher Dimensions Revisited. *Phys. Rev. D*, Vol. 99, No. 2, p. 026015, 2019.
- [52] Marc Henneaux and Cédric Troessaert. Asymptotic structure of electromagnetism in higher space-time dimensions. *Phys. Rev. D*, Vol. 99, No. 12, p. 125006, 2019.
- [53] Oscar Fuentealba, Marc Henneaux, Javier Matulich, and Cédric Troessaert. Asymptotic structure of the gravitational field in five spacetime dimensions: Hamiltonian analysis. *JHEP*, Vol. 07, p. 149, 2022.
- [54] Christian W. Bauer, Sean Fleming, Dan Pirjol, and Iain W. Stewart. An Effective field theory for collinear and soft gluons: Heavy to light decays. *Phys. Rev. D*, Vol. 63, p. 114020, 2001.
- [55] Thomas Becher, Alessandro Broggio, and Andrea Ferroglia. *Introduction to Soft-Collinear Effective Theory*, Vol. 896. Springer, 2015.
- [56] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 2. Cambridge University Press, 1995.
- [57] F. Bloch and A. Nordsieck. Note on the radiation field of the electron. *Physical Review*, Vol. 52, No. 2, pp. 54–59, 1937.
- [58] D. R. Yennie, S. C. Frautschi, and H. Suura. The infrared divergence phenomena and high-energy processes. *Annals of Physics*, 1961.
- [59] Steven Weinberg. Infrared photons and gravitons. *Phys. Rev.*, Vol. 140, pp. B516–B524, 1965.
- [60] Steven Weinberg. Photons and Gravitons in *S*-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass. *Phys. Rev.*, Vol. 135, pp. B1049–B1056, 1964.
- [61] T. Kinoshita. Mass singularities of Feynman amplitudes. *J. Math. Phys.*, Vol. 3, pp. 650–677, 1962.
- [62] T. D. Lee and M. Nauenberg. Degenerate Systems and Mass Singularities. *Phys. Rev.*, Vol. 133,

pp. B1549–B1562, 1964.

- [63] Christopher Frye, Holmfridur Hannesdottir, Nisarga Paul, Matthew D. Schwartz, and Kai Yan. Infrared Finiteness and Forward Scattering. *Phys. Rev. D*, Vol. 99, No. 5, p. 056015, 2019.
- [64] H Bondi. Gravitational Waves in General Relativity. Vol. 269, No. 1336, pp. 21–52, 1960.
- [65] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, and A. W. K. Metzner. Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, Vol. 269, pp. 21–52, 1962.
- [66] R K Sachs and Proc R Soc Lond A. Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 270, No. 1340, pp. 103–126, 1962.
- [67] Thomas Mädler and Jeffrey Winicour. Bondi-Sachs Formalism. *Scholarpedia*, Vol. 11, p. 33528, 2016.
- [68] Geoffrey Compère and Adrien Fiorucci. Advanced Lectures on General Relativity. 1 2018.
- [69] Geoffrey Compère. *Advanced Lectures on General Relativity*. Springer Cham, 2019.
- [70] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [71] Wolfgang Rindler Roger Penrose. *Spinors and Space-Time*, Vol. 2. Cambridge University Press, 1986.
- [72] Roger Penrose. Asymptotic properties of fields and space-times. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 10, pp. 66–68, 1963.
- [73] Demetrios Christodoulou and Sergiu Klainerman. *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space (PMS-41)*. Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [74] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity. *Phys. Rev.*, Vol. 116, pp. 1322–1330, 1959.
- [75] 江口徹, 菅原裕二. 共形場理論. 岩波書店, 2015.
- [76] Marc Favata. The gravitational-wave memory effect. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 27, p. 084036, 2010.
- [77] Y. B. Zel’dovich and A. G. Polnarev. Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars. *Sov. Astron.*, Vol. 18, p. 17, 1974.
- [78] Kip S. Thorne Vladimir B. Braginsky. Gravitational-wave bursts with memory and experimental prospects. *Nature*, Vol. 327, No. 6118, 1987.
- [79] D. Christodoulou. Nonlinear nature of gravitation and gravitational wave experiments. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 67, pp. 1486–1489, 1991.
- [80] B. P. Abbott, et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. *Phys. Rev. X*, Vol. 9, No. 3, p. 031040, 2019.
- [81] Moritz Hübner, Colm Talbot, Paul D. Lasky, and Eric Thrane. Measuring gravitational-wave memory in the first LIGO/Virgo gravitational-wave transient catalog. *Phys. Rev. D*, Vol. 101, No. 2, p. 023011, 2020.
- [82] R. Abbott, et al. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run. *Phys. Rev. X*, Vol. 11, p. 021053, 2021.
- [83] Moritz Hübner, Paul Lasky, and Eric Thrane. Memory remains undetected: Updates from the second LIGO/Virgo gravitational-wave transient catalog. *Phys. Rev. D*, Vol. 104, No. 2, p. 023004, 2021.
- [84] Kentaro Somiya. Detector configuration of KAGRA: The Japanese cryogenic gravitational-wave detector. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 29, p. 124007, 2012.

- [85] C. S. Unnikrishnan. IndIGO and LIGO-India: Scope and plans for gravitational wave research and precision metrology in India. *Int. J. Mod. Phys. D*, Vol. 22, p. 1341010, 2013.
- [86] Benjamin P Abbott, et al. Exploring the Sensitivity of Next Generation Gravitational Wave Detectors. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 34, No. 4, p. 044001, 2017.
- [87] Seiji Kawamura, et al. Current status of space gravitational wave antenna DECIGO and B-DECIGO. *PTEP*, Vol. 2021, No. 5, p. 05A105, 2021.
- [88] Lydia Bieri and David Garfinkle. An electromagnetic analogue of gravitational wave memory. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 30, p. 195009, 2013.
- [89] Alexander Tolish and Robert M. Wald. Retarded Fields of Null Particles and the Memory Effect. *Phys. Rev. D*, Vol. 89, No. 6, p. 064008, 2014.
- [90] David Garfinkle, Stefan Hollands, Akihiro Ishibashi, Alexander Tolish, and Robert M. Wald. The Memory Effect for Particle Scattering in Even Spacetime Dimensions. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 34, No. 14, p. 145015, 2017.
- [91] Yuta Hamada and Sotaro Sugishita. Soft pion theorem, asymptotic symmetry and new memory effect. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2017, No. 11, 2017.
- [92] Yuta Hamada and Sotaro Sugishita. Notes on the gravitational, electromagnetic and axion memory effects. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2018, No. 7, Jul 2018.
- [93] Sabrina Pasterski, Andrew Strominger, and Alexander Zhiboedov. New Gravitational Memories. *JHEP*, Vol. 12, p. 053, 2016.
- [94] David A. Nichols. Spin memory effect for compact binaries in the post-Newtonian approximation. *Phys. Rev. D*, Vol. 95, No. 8, p. 084048, 2017.
- [95] Andrew Strominger. On BMS Invariance of Gravitational Scattering. *JHEP*, Vol. 07, p. 152, 2014.
- [96] Werner O. Amrein. *Hilbert Space Methods in Quantum Mechanics*. EPFL Press, 2009.
- [97] Barry Simon Micheal Reed. *Scattering Theory (Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 3)*. Academic Press, 1979.
- [98] Franco Strocchi. *An Introduction to the Non-Perturbative Foundations of Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2013.
- [99] Steven Weinberg. ワインバーグ量子力学講義. ちくま学芸文庫, 2021. 岡村 浩 (訳).
- [100] Isaac L. Chuang Michael A. Nielsen. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [101] 井田大輔. 現代量子力学入門. 朝倉書店, 2021.
- [102] J. Settino, N. W. Talarico, F. Cosco, F. Plastina, S. Maniscalco, and N. Lo Gullo. Emergence of anomalous dynamics from the underlying singular continuous spectrum in interacting many-body systems. *Phys. Rev. B*, Vol. 101, p. 144303, Apr 2020.
- [103] DB Pearson. An example in potential scattering illustrating the breakdown of asymptotic completeness. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 40, pp. 125–146, 1975.
- [104] John D. Dollard. Asymptotic convergence and the coulomb interaction. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 5, No. 6, pp. 729–738, 1964.
- [105] Anthony Duncan. *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2012.
- [106] 九後汰一郎. ゲージ場の量子論. 培風館, 1989.
- [107] 磯暁. 現代物理学の基礎としての場の量子論. 共立出版, 2015.
- [108] Daniel Kapec, Malcolm Perry, Ana Maria Raclariu, and Andrew Strominger. Infrared divergences

-
- in QED revisited. *Physical Review D*, Vol. 96, No. 8, pp. 1–9, 2017.
- [109] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, Vol. 115, pp. 485–491, Aug 1959.
- [110] Akira Tonomura, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, Junji Endo, Shinichiro Yano, and Hiroji Yamada. Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 56, pp. 792–795, Feb 1986.
- [111] John Ware, Ryo Saotome, and Ratindranath Akhoury. Construction of an asymptotic S matrix for perturbative quantum gravity. *JHEP*, Vol. 10, p. 159, 2013.
- [112] Sangmin Choi and Ratindranath Akhoury. BMS supertranslation symmetry implies Faddeev-Kulish amplitudes. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2018, No. 2, 2018.
- [113] Hayato Hirai and Sotaro Sugishita. Conservation laws from asymptotic symmetry and subleading charges in QED. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2018, No. 7, 2018.
- [114] Miguel Campiglia and Alok Laddha. Loop corrected soft photon theorem as a Ward identity. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2019, No. 10, 2019.
- [115] Miguel Campiglia, Leonardo Coito, and Sebastian Mizera. Can scalars have asymptotic symmetries? *Physical Review D*, Vol. 97, No. 4, p. 46002, 2018.
- [116] Kartik Prabhu, Gautam Satishchandran, and Robert M. Wald. Infrared finite scattering theory in quantum field theory and quantum gravity. *Phys. Rev. D*, Vol. 106, No. 6, p. 066005, 2022.
- [117] Daniel Boyanovsky. Threshold and infrared singularities: Time evolution, asymptotic state, and entanglement entropy. *Phys. Rev. D*, Vol. 105, No. 5, p. 056012, 2022.