

学位論文

ゲージ・ヒッグス統合モデルにおける  
ヒッグス・ポテンシャルの有限性と  
その予想に対する反証

名古屋大学大学院 理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻

山田 篤幸

2023年2月

## 概要

素粒子物理学における標準理論 (SM) はおよそ 100 GeV のエネルギー・スケールまでの物理現象を正確に説明および予言し、成功を収めている。素粒子は 4 次元ミンコフスキー時空  $M^4$  上の局所的な場として記述され、素粒子間の相互作用はゲージ原理からラグランジアン密度の対称性 (ゲージ対称性) によって規定される。ただし、ゲージ対称性は同時に、フェルミオンおよび力の媒介粒子であるゲージ・ボソンが質量をもつことを禁止し、このことは現在の宇宙において種々の粒子が非零の質量を持っているという事実に反する。SM ではヒッグス・ボソンを導入してこの問題を解決している。すなわちヒッグス・ボソンが非零の真空期待値を持つことによって系の対称性が自発的に破れ、対称性により禁止されていた質量項は許されるようになる (ヒッグス機構)。ヒッグス・ボソンは 2012 年に実験で発見されている。しかしながら、ヒッグス・ボソンの相互作用にはゲージ原理のような基本原理が欠落している。フェルミオンとの相互作用はヒッグス機構による質量生成のためだけに導入される。

ゲージ・ヒッグス統合模型 (GHU) はヒッグス・ボソンの相互作用をゲージ原理から説明する、SM を超える模型の 1 つである。GHU ではヒッグス・ボソンはゲージ・ボソンの余剰次元成分として導入され、よって、ヒッグス・ボソンとの相互作用はゲージ原理で与えられる。一方で、5 次元時空上で定義した GHU において、ヒッグス・ボソンはゲージ対称性によりツリー・レベルでポテンシャル (ヒッグス・ポテンシャル) を持たず、このレベルでは SM のときのような非零の真空期待値を持たない。しかし、ヒッグス・ポテンシャルは量子補正によって生成され、ヒッグス・ボソンは非零の真空期待値を得て対称性の破れが起き、素粒子が質量を獲得する (細谷機構)。

GHU におけるヒッグス・ポテンシャルは実際に摂動計算されてきた。このとき、1 ループ・レベルでの結果が有限であると分かり、その後、GHU においてヒッグス・ポテンシャルは全ての摂動の次数で有限になると予想された。さらにその後には、2 ループ・レベルでヒッグス・ポテンシャルが計算され、やはり有限であった。ただし、計算の複雑さから、2 ループ・レベルでの計算はアーベリアン・ゲージ理論での計算を最後にして、非可換ゲージ理論で計算されていなかった。

本博士論文では、この困難を克服しながら非可換ゲージ理論でヒッグス・ポテンシャルを 2 ループ・レベルまで計算した。このとき我々は「重ね合わせコンパクト化」という手法を用いる。この方法では、余剰次元である円周 ( $S^1$ ) への異なる巻き付き数を持つ場の重ね合わせとしてループ積分を計算する。これにより、離散化された運動量に関する和を連続的な運動量変数の積分として計算できる。 $SU(N)$  ゲージ理論で量子補正を計算し、我々は  $M^4 \times S^1$  時空上の GHU において 2 ループ・レベルまでヒッグス・ポテンシャルが有限であることを示した。この結果は先行研究の結果が非可換ゲージ理論でも成り立つことを表し、発散による不定性が 2 ループ・レベルまでは物理量に現れないことになる。さらに、 $M^4 \times S^1$  時空上のアーベリアン GHU において、4 ループ・レベルでヒッグス・ポテンシャルが対数で発散することを示した。この結果は上述の予想の反例となり、物理量には少なくともカット・オフの対数で不定性が現れる。

# 目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	素粒子標準理論	5
2.1	構造: 対称性とゲージ原理	5
2.2	ヒッグス機構	7
2.3	標準理論の未解決問題: ゲージ階層性問題	9
第 3 章	ゲージ・ヒッグス統合模型	10
3.1	ゲージ・ヒッグス統合	10
3.2	カルツァ・クライン展開	10
3.3	細谷機構	13
3.4	現実的な模型の構築	18
3.4.1	カイラリティ問題とオービフォールド	18
3.4.2	$SU(3)$ 電弱統一模型	20
3.4.3	湯川相互作用の再現	22
3.5	ヒッグス・ポテンシャルの有限性予想	25
第 4 章	ヒッグス・ポテンシャル	27
4.1	セットアップ: $M^4 \times S^1$ 上の $SU(N)$ ゲージ・ヒッグス統合模型	27
4.2	重ね合わせコンパクト化	30
4.3	ヒッグス・ポテンシャルの摂動評価	31
4.3.1	1 ループ・レベル	31
4.3.2	2 ループ・レベル	33
4.4	高次ループ補正の発散	36

4.4.1	$M^5 \times S^1$ 時空上における 3 ループ・レベルでの発散 . . . . .	37
4.4.2	$M^4 \times S^1$ 時空上における 4 ループ・レベルでの発散 . . . . .	39
第 5 章	結論	45
付録 A	公式の証明	48
A.1	重ね合わせコンパクト化 . . . . .	48
A.2	行列関数と表現行列の順序交換 . . . . .	49
A.3	$G_{\text{adj}}$ および $G_\ell$ の対称性 . . . . .	49
付録 B	ループ積分	51
B.1	並進演算子を含むループ積分 . . . . .	51
B.2	運動量逆二乗積分の正則化 . . . . .	52
B.3	2 ループ積分 . . . . .	54
付録 C	紫外発散およびヒッグス・ポテンシャルへの寄与	58
参考文献		63

# 第 1 章

## 序論

複雑な自然現象をより単純で統一的な視点から理解することが物理学の目標の 1 つである。その中で、素粒子物理学は宇宙の構成要素の最小単位とそれらが従う法則の解明を目指す学問である。

素粒子物理学の大きな発見の 1 つに、ゲージ原理がある。ゲージ原理とは素粒子の力学がラグランジアンに対称性 (ゲージ対称性) により決定されるという原理であり、この原理に従う理論をゲージ理論と呼ぶ。例えば、量子電磁気学 (QED) は  $U(1)$  ゲージ対称性、素粒子標準理論 (SM) は  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  ゲージ対称性を持つゲージ理論である。ゲージ理論では、ゲージ対称性を保証するために導入されるベクトル場 (ゲージ場) が粒子間に働く力 (ゲージ相互作用) を司る。

ゲージ原理は、素粒子間の相互作用を対称性として表し、既知の力をより大きな対称性に埋め込む「力の統一」を可能にした。SM における電荷の量子化を説明し、さらに SM のゲージ相互作用を統一できる魅力的なモデルとして大統一理論 (GUT) が提唱された。フェルミオンとボソンの間の対称性である超対称性を課した GUT ではゲージ結合定数の統一がさらに改善される。さらに、超弦理論は宇宙に存在する基本的な相互作用である電磁気力、弱い力、強い力、重力を全て統一する究極の統一理論として期待されている。

高エネルギーの初期宇宙において、上記のような統一理論が実現していたと仮定すると、もともと統一されていた力が現在のように分化するためには、対称性の破れが起きなければならない。ゲージ対称性の自発的破れの画期的なメカニズムとして、ヒッグス機構が提唱された。ラグランジアンに対称性は保たれているが、一方で、真空に住む我々からは対称性が破れているように見える。ヒッグス機構は SM に導入され、SM は大きな成功を収めた。

ヒッグス・ボソンは 2012 年に LHC 実験で発見されている [1,2].

SM は 100 GeV 以下のエネルギー・スケールにおける実験結果を良く説明する優れた理論モデルである。しかしながら、ヒッグス・ボソンに関連する、ゲージ階層性問題と呼ばれる、SM では説明できない未解決問題がある。

ヒッグス機構を実現するために必要不可欠であるヒッグス・ボソンはスピンを持たないスカラー場である。スカラー場の二乗質量に対する量子補正は理論のカット・オフ・スケール  $\Lambda$  の二乗で表され、SM の典型的なエネルギー・スケールである 100 GeV に比べて大きな量子補正を受けることが知られている。仮に  $\Lambda$  を GUT スケール ( $10^{16}$  GeV) やプランク・スケール ( $10^{19}$  GeV) とおくと、観測されたヒッグス・ボソンの質量である 125 GeV を説明するためには、ヒッグス・ボソンの裸の二乗質量と量子補正の間に 30 桁前後の微調整が必要になる。このようなパラメータ間の奇跡的な打ち消しあいを SM は合理的に説明することはできず、このことをゲージ階層性問題と呼ぶ。

ゲージ階層性問題の代表的な解決策は超対称性である [3-7]。超対称な理論にはフェルミオンとボソンに超対称パートナーが導入され、これら 2 つの粒子からヒッグス質量への量子補正が互いに打ち消しあう。これにより、微調整が解消される。

他にも、ヒッグス・ボソンが 2 つのフェルミオンの複合状態であるとして、質量補正の 2 次発散を抑制する解決策もある [8-14].

余剰次元を導入し、ゲージ対称性によりゲージ階層性問題を解決できる理論モデルも存在する。余剰次元が小さい極限において、ゲージ場の余剰次元成分は 4 次元時空理論のスカラー場として振る舞う。ゲージ場の余剰次元成分 ( $A_5$  や  $A_6$ ) をヒッグス場と同一視した理論モデルをゲージ・ヒッグス統合モデル (GHU) と呼ぶ [15-20]。GHU におけるヒッグス場はゲージ場であるため、その相互作用はゲージ原理で説明される。そのため、5 次元時空上ではヒッグス場のポテンシャルが古典レベルで存在せず<sup>1)</sup>、古典レベルでヒッグス機構は働かない。代わりに、GHU は量子効果による対称性の破れのメカニズムを持つ。余剰次元が単連結でない空間にコンパクト化されているとき、アハラノフ・ボーム (AB) 効果と同様にして、ゲージ場の余剰次元成分は量子補正から有効ポテンシャル (ヒッグス・ポテンシャル)

---

<sup>1)</sup> コンパクトな余剰次元が 2 次元以上の場合には古典レベルでもヒッグス・ポテンシャルが存在する。例として 6 次元時空上の GHU を考えると、ゲージ場の余剰次元成分  $A_5$  と  $A_6$  に対して  $\phi = (A_5 - iA_6)/\sqrt{2}$  が 4 次元の複素スカラー場として振る舞う。したがって、ゲージ場の運動項から  $\phi$  の 4 次の項が古典レベルで現れる [21,22].

を与えられる。このとき、ヒッグス・ポテンシャルが最小値をとる点における  $A_5$  (真空期待値, VEV) が非零になることにより、対称性は自発的に破れ得る。この対称性の自発的破れのメカニズムを細谷機構と呼ぶ [18,20]。細谷機構により、ヒッグス場の質量は量子補正によって生成され、SM におけるようなパラメータ間の微調整は存在せず、ゲージ階層性問題は解消される。

さらに、GHU は SM のスカラー場の自由度をゲージ場に統合し、SM の相互作用を全てゲージ原理で説明する。このような統一論的側面が GHU には存在する。

GHU は高次元のゲージ理論であるため、繰り込み不可能な理論である。しかしながら、GHU ではヒッグス・ポテンシャルが摂動の全次数で有限になると予想されている [21,23,24]。これまでに、1 ループおよび 2 ループ・レベルでのヒッグス・ポテンシャルは有限であることがいくつかの模型で示された [18,20,25–30]。

ヒッグス場の質量などのパラメータはヒッグス・ポテンシャルの微分として与えられる。仮に上記の予想が正しければ、GHU は繰り込み不可能な理論にもかかわらず、発散による不定性なしにそれらを予言できる。このような性質は他の繰り込み不可能な理論に比べて大きな利点となる。

本博士論文では、GHU におけるヒッグス・ポテンシャルの有限性を検証する。簡単のため、余剰次元は円周  $S^1$  であるとし、5 次元時空  $\mathbf{M}^4 \times S^1$  ( $\mathbf{M}^4$  は 4 次元ミンコフスキー時空) 上の  $U(1)$  および  $SU(N)$  ゲージ理論を考える。ヒッグス・ポテンシャルを評価する際、我々は重ね合わせコンパクト化と呼ぶ計算手法を導入する。本手法と本質的に同等な手法が文献 [31] で導入され、文献 [32–35] ではアーベリアン・ゲージ理論で使用され、文献 [18,20,25] では非可換ゲージ理論で使用されている。本博士論文において、我々は 4 次元時空に渡る運動量積分をノン・コンパクトな 5 次元時空に渡る運動量積分に変換するために本手法を導入する。本手法により、AB 位相の周期性を陽に残してループ積分を評価できる。

以降の構成は以下のとおりである。まず、第 2 章において SM の概要を記す。第 3 章では GHU についてレビューする。細谷機構について具体例を示しながら解説する。さらに、GHU の模型構築における課題を示す。第 4 章ではヒッグス・ポテンシャルの有限性に関して調査する。まず、 $\mathbf{M}^4 \times S^1$  上の  $SU(N)$  ゲージ理論で 1 ループおよび 2 ループ・レベルの有限性を確認する。その後、 $\mathbf{M}^5 \times S^1$  ( $\mathbf{M}^5$  は 5 次元ミンコフスキー時空) 上の  $SU(N)$

ゲージ理論において、ヒッグス・ポテンシャルが発散することを示す。ここで、時空の次元を上げるのはより低次のループ補正で発散が現れるようにするためである。最終的には、 $\mathbf{M}^4 \times S^1$  上の  $U(1)$  ゲージ理論で少なくとも 4 ループ・レベルではヒッグス・ポテンシャルが発散することを示し、これをヒッグス・ポテンシャルの有限性の予想への反例とする。第 5 章において調査結果をまとめる。



## 第 2 章

# 素粒子標準理論

本章では, SM の基本的な枠組みと SM が抱える問題, 特にゲージ階層性問題について概観する.

### 2.1 構造: 対称性とゲージ原理

SM は現在知られている素粒子とそれらの間に働く相互作用を精密に記述する理論的枠組みである. ラグランジアンに許される場と相互作用項は対称性によって決まる. ここで, 対称性とはポアンカレ対称性と  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  ゲージ対称性である.

SM のラグランジアン  $\mathcal{L}_{\text{SM}}$  は以下で与えられる:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{yukawa}} + \mathcal{L}_{\text{higgs}}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{q}_L^i i\not{D}q_L^i + \bar{u}_R^i i\not{D}u_R^i + \bar{d}_R^i i\not{D}d_R^i + \bar{l}_L^i i\not{D}l_L^i + \bar{e}_R^i i\not{D}e_R^i, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{yukawa}} = -Y_{ij}^\mu \bar{q}_L^i \tilde{\Phi} u_R^j - Y_{ij}^d \bar{q}_L^i \Phi d_R^j - Y_{ij}^e \bar{l}_L^i \Phi e_R^j + h.c., \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (2.5)$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.6)$$

ここに,

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a - ig W_\mu^a \tau^a - ig' B_\mu Y, \quad (2.7)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (2.8)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (2.9)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (2.10)$$

$$\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*. \quad (2.11)$$

共変微分  $D_\mu$  に現れる行列  $t^a$  および  $\tau^a$  は,

$$t^a = \frac{\lambda^a}{2}, \quad \tau^a = \frac{\sigma^a}{2}, \quad (2.12)$$

ここに,  $\lambda^a$  および  $\sigma^a$  はそれぞれゲル・マン行列およびパウリ行列である:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

それぞれの場が持つ量子数を表 2.1 にまとめる.

$\mathcal{L}_{\text{SM}}$  はゲージ変換に対して不変である:

$$SU(3)_c : G_\mu \rightarrow g_c G_\mu g_c^\dagger + \frac{i}{g_s} g_c \partial_\mu g_c^\dagger, \quad (2.15)$$

$$\phi \rightarrow g_c \phi \quad (\phi = q_L^i, u_R^i, d_R^i), \quad (2.16)$$

$$SU(2)_L : W_\mu \rightarrow g_L W_\mu g_L^\dagger + \frac{i}{g} g_L \partial_\mu g_L^\dagger, \quad (2.17)$$

$$\phi \rightarrow g_L \phi \quad (\phi = \Phi, q_L^i, l_L^i), \quad (2.18)$$

$$U(1)_Y : B_\mu \rightarrow g_Y B_\mu g_Y^\dagger + \frac{i}{g'} g_Y \partial_\mu g_Y^\dagger, \quad (2.19)$$

$$\phi \rightarrow g_Y \phi \quad (\phi = \Phi, q_L^i, u_R^i, d_R^i, l_L^i, e_R^i), \quad (2.20)$$

ここに,

$$G_\mu \equiv G_\mu^a t^a, \quad W_\mu \equiv W_\mu^a \tau^a, \quad (2.21)$$

$$g_c \equiv \exp(i\theta_c^a t^a), \quad g_L \equiv \exp(i\theta_L^a \tau^a), \quad g_Y \equiv \exp(i\theta_Y Y). \quad (2.22)$$

ゲージ変換のパラメータ  $\theta_c^a$ ,  $\theta_L^a$ ,  $\theta_Y$  は 4 次元ミンコフスキー時空上の実関数である.

このように, ゲージ対称性により素粒子の相互作用が決まり, ラグランジアンに許される項が決まることをゲージ原理と呼ぶ.

## 2.2 ヒッグス機構

ヒッグス機構はスカラー場の VEV によって対称性の自発的破れを引き起こす. SM では, ヒッグス機構により  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  から  $U(1)_{\text{em}}$  へ対称性の自発的破れが起きる. ここで,  $U(1)_{\text{em}}$  は光子との電磁氣的相互作用を司るゲージ対称性に対応する. 本節では, SM においてヒッグス機構がどのように働くのか具体的に議論する.

SM には, ラグランジアン・レベルでヒッグス場のポテンシャルが存在する:

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (2.23)$$

これは  $\Phi^\dagger \Phi$  に関する 2 次関数であり,  $\Phi^\dagger \Phi = \mu^2/2\lambda$  において最小となる. これより,  $\Phi$  の

表 2.1 標準理論の素粒子. 太字の数字は場が属する表現. フェルミオン場の添字  $i \in \{1, 2, 3\}$  は世代を表す.

field	spin	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\Phi = (\phi^+, \phi^0)$	0	<b>1</b>	<b>2</b>	$\frac{1}{2}$
$q_L^i = (u_L^i, d_L^i)$		<b>3</b>	<b>2</b>	$\frac{1}{6}$
$u_R^i$		<b>3</b>	<b>1</b>	$\frac{2}{3}$
$d_R^i$	$\frac{1}{2}$	<b>3</b>	<b>1</b>	$-\frac{1}{3}$
$l_L^i = (\nu_L^i, e_L^i)$		<b>1</b>	<b>2</b>	$-\frac{1}{2}$
$e_R^i$		<b>1</b>	<b>1</b>	-1
$G_\mu$		<b>8</b>	<b>1</b>	0
$W_\mu$	1	<b>1</b>	<b>3</b>	0
$B_\mu$		<b>1</b>	<b>1</b>	0

真空期待値の 1 つは以下で与えられる:

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

ここに,

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (2.25)$$

この VEV まわりにおけるヒッグス場の展開を考える:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

ただし,  $\Phi$  の 4 つの自由度のうち,  $SU(2)_L$  変換で消せる 3 つの非物理的自由度は除いた.

このとき, ゲージ場の質量項がヒッグス場の運動項より得られる:

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) \supset m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (2.27)$$

ここに,  $W_\mu^\pm$  および  $Z_\mu$  は質量固有状態,

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad Z_\mu \equiv \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (2.28)$$

また, それぞれの質量は以下で定められる:

$$m_W \equiv \frac{g}{2}v, \quad m_Z \equiv \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}v. \quad (2.29)$$

$Z_\mu$  に直交する光子  $A_\mu$  は質量項を持たない:

$$A_\mu \equiv \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (2.30)$$

光子  $A_\mu$  のゲージ対称性の生成子は,  $T^a$  を  $SU(2)_L$  の表現,  $Y$  を  $U(1)_Y$  のチャージとして,

$$Q \equiv T^3 + Y. \quad (2.31)$$

系に残ったゲージ対称性は  $U(1)$  である.

このように, 古典レベルで導入されたヒッグス場の VEV によりゲージ場の質量項が現れ, 真空から見ると対称性が破れているように見える.

## 2.3 標準理論の未解決問題: ゲージ階層性問題

上述の通り, ヒッグス・ボソンは SM の対称性の破れにおいて極めて重要な役割を果たす. 一方で, ヒッグス・ボソンの存在は SM に理論的問題を提起することが知られている.

ヒッグス機構によって, ゲージ・ボソンだけでなく, ヒッグス・ボソンも質量を獲得する:

$$V \supset \frac{1}{2} m_h^2 h^2, \quad (2.32)$$

ここに,

$$m_h \equiv \sqrt{2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}. \quad (2.33)$$

量子効果より, ヒッグス・ボソンの二乗質量  $m_h^2$  は量子補正  $\Delta m_h^2$  を受ける. 量子補正の 1 次で, ヒッグス・ボソン, フェルミオン, ゲージ・ボソンのループが  $m_h^2$  に寄与する:

$$\Delta m_h^2 = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \quad (2.34)$$

$$= \mathcal{O}(\Lambda^2) \quad (2.35)$$

ここで,  $\Lambda$  は SM のカット・オフ・スケールである. 観測される  $m_h^2$  は裸の二乗質量  $m_{h0}^2$  と  $\Delta m_h^2$  との和として表される.

カット・オフ・スケール  $\Lambda$  は SM が有効であるエネルギー・スケールの上限を与える.  $\Lambda$  を GUT スケール ( $10^{16}$  GeV) あるいはプランク・スケール ( $10^{19}$  GeV) とおくと, 観測された  $m_h = 125$  GeV を得るために  $m_{h0}^2$  と  $\Delta m_h^2$  との間で 28 桁あるいは 34 桁の微調整がなされているということになる. このような膨大な桁数に渡るパラメータ間の相殺を SM は合理的に説明できない.

## 第3章

# ゲージ・ヒッグス統合模型

### 3.1 ゲージ・ヒッグス統合

フェルミオンとヒッグス・ボソンの相互作用はその存在に必然性はなく、ただ質量項を書き下すためだけに導入される。この相互作用もゲージ原理から導出する模型がゲージ・ヒッグス統合模型 (GHU) である [15–20]。GHU は高次元のゲージ理論であり、4次元ミンコフスキー時空  $\mathbf{M}^4$  に円周  $S^1$  などのコンパクトな空間を余剰次元として与えた時空上で定義される。そして、ゲージ・ボソンの余剰次元成分がヒッグス・ボソンと同一視される。このとき、ヒッグス・ボソンはゲージ原理からフェルミオンとの相互作用を得る。

### 3.2 カルツァ・クライン展開

4次元より高い時空を考えると、理論を我々の直感と整合的にするために、余剰次元としてコンパクトで小さな空間を採用する。コンパクトな空間の例は、線分や  $n$ 次元球面  $S^n$ 、 $n$ 次元トーラス  $T^n$  である。

余剰次元がコンパクトであるとき、場には境界条件が課せられる。例えば、余剰次元が  $S^1$  だとする。 $S^1$  方向の座標を  $y \in [0, 2\pi R)$  として、適当な場  $A(x, y)$  と  $\psi(x, y)$  に境界条件を以下のように与える：

$$A(x, y + 2\pi R) = A(x, y), \quad (3.1)$$

$$\psi(x, y + 2\pi R) = e^{i\beta} \psi(x, y), \quad \beta \in [0, 2\pi). \quad (3.2)$$

このとき、フーリエ級数展開より、

$$A(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^{(n)}(x) e^{iny/R}, \quad (3.3)$$

$$A^{(n)}(x) \equiv \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy A(x, y) e^{-iny/R}, \quad (3.4)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi^{(n)}(x) e^{i(n/R+\beta/2\pi R)y}, \quad (3.5)$$

$$\psi^{(n)}(x) \equiv \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \psi(x, y) e^{-i(n/R+\beta/2\pi R)y}, \quad (3.6)$$

ここに、 $R$  は  $S^1$  の半径である。これをカルツァ・クライン展開 (KK 展開) と呼ぶ。フーリエ係数は 4 次元ミンコフスキー時空の座標  $x^\mu$  のみに依存する 4 次元の場であり、 $n$  でラベルされている場を KK モードと呼ぶ。 $n=0$  に対する KK モードは特にゼロ・モードと呼ばれる。

いま、5 次元理論の作用、

$$S = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \mathcal{L}(x, y) \quad (3.7)$$

に対して 5 次元方向を積分し、4 次元理論の有効作用を考える：

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}(x), \quad \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \int_0^{2\pi R} dy \mathcal{L}(x, y). \quad (3.8)$$

このとき、KK ゼロ・モードと  $n \neq 0$  の KK モードの力学的な振る舞いは異なる。例として、フェルミオンの無い (ピュアな) アーベリアン・ゲージ理論を考える：

$$\mathcal{L}(x, y) = -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN}, \quad (3.9)$$

$$F_{MN} \equiv \partial_M A_N - \partial_N A_M, \quad (3.10)$$

ここに、 $A_M = A_M(x, y)$  は 5 次元アーベリアン・ゲージ理論のゲージ場で、 $M, N \in \{0, 1, 2, 3, 5\}$  は 5 次元のローレンツ・ベクトルの添字である。5 次元目の空間を  $S^1$  として、ゲージ場に周期的境界条件を課すことで、ゲージ場の各成分の KK 展開を得る：

$$A_M(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_M^{(n)}(x) e^{iny/R}, \quad (3.11)$$

$$A_M^{(n)}(x) \equiv \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy A_M(x, y) e^{-iny/R}. \quad (3.12)$$

ここで、ゲージ場は実なので、

$$A_M^{(-n)}(x) = [A_M^{(n)}(x)]^*. \quad (3.13)$$

KK 展開の表式 (3.11) をラグランジアン (3.9) に代入して  $y$  積分を実行する。5 次元方向の運動量の離散化、

$$i\partial^5 A_M(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\partial^5 A_M^{(n)}(x) e^{iny/R} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{R} A_M^{(n)}(x) e^{iny/R} \quad (3.14)$$

と、指数関数の直交性、

$$\int_0^{2\pi R} dy e^{i(n-m)y/R} = 2\pi R \delta_{nm} \quad (3.15)$$

に注意して、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \int_0^{2\pi R} dy \left( -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi R} dy (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 5} F^{\mu 5}) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 2\pi R \left[ (\partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)})^2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\partial_\mu A_\nu^{(n)} - \partial_\nu A_\mu^{(n)}|^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(\partial_\mu A_5^{(0)})^2 - 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{n^2}{R^2} \left| A_\mu^{(n)} + i \frac{R}{n} \partial_\mu A_5^{(n)} \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$A_5(x, y) = A_5^{(0)}(x)$  となるゲージをとると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= 2\pi R \left[ -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)})^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_5^{(0)})^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left( -\frac{1}{4} |\partial_\mu A_\nu^{(n)} - \partial_\nu A_\mu^{(n)}|^2 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{R^2} |A_\mu^{(n)}|^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

したがって、 $n$  番目の KK モードは二乗質量が  $n^2/R^2$  の粒子を表し、KK ゼロ・モードは質量を持たない。

このような質量の違いは現実的な模型を探索するときに注意しなければならない。 $R \rightarrow 0$  の極限をとるときに  $n \neq 0$  の KK モードは励起されなくなり、有効的な 4 次元理論には KK ゼロ・モードだけが残る。これら KK ゼロ・モードが SM の素粒子にちょうど一致しなければ、すでに観測されている素粒子を再現できなかつたり、現実の宇宙には存在しない軽い粒子を有効理論が予言して矛盾を生じてしまう。



### 3.3 細谷機構

ゲージ変換に対して不変なゲージ・ボソンのラグランジアンは、4次元で繰り込み可能な範囲では、

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (3.18)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.19)$$

ここに、 $g$  はゲージ結合定数である。つまり、運動項のみが許され、ゲージ・ボソンはツリー・レベルでポテンシャルを持ってない。したがって、余剰次元が1次元のGHUではヒッグス・ボソンはラグランジアンにポテンシャル項を持ってない。しかしながら、ヒッグス・ボソンは量子補正から有効ポテンシャル(ヒッグス・ポテンシャル,  $V_{\text{eff}}(\theta)$ )を得て、非零のVEVを持つことができる。このVEVによる対称性の破れの機構を細谷機構と呼ぶ[18,20]。5次元GHUにおけるヒッグス・ボソン  $A_5$  のVEVは、アハラノフ・ボーム効果との類似でアハラノフ・ボーム位相(AB位相)  $\theta$  と呼ばれる:

$$\theta = g \oint_{S^1} dy A_5 = 2\pi R g \langle A_5 \rangle, \quad (3.20)$$

ここで  $\langle \dots \rangle$  は平均を表す。

ゲージ・ボソンの余剰次元成分がVEVを持ったとき、ゲージ・ボソン  $A_\mu^a$  の質量項について考える。ゲージ・ボソンの4点相互作用より、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4G} &= -\frac{1}{4}g^2 (f^{abc} A_M^b A_N^c) (f^{ade} A^{dM} A^{eN}) \\ &= -\frac{1}{4}g^2 (f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) (f^{ade} A^{d\mu} A^{e\nu}) + \frac{1}{2}g^2 (f^{abc} A_5^b A_\mu^c) (f^{ade} A_5^d A^{e\mu}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

第2項は  $A_5$  がVEVを持ったときに  $A_\mu$  の質量項となる:

$$\Delta\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}g^2 (f^{abc} A_5^b A_\mu^c) (f^{ade} A_5^d A^{e\mu}). \quad (3.22)$$

ここで、 $t^a$  を  $SU(N)$  の生成子とおき、

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c, \quad \text{tr}[t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (3.23)$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= g^2 \text{tr}[(t^a f^{acd} A_5^c A_\mu^d)(t^b f^{bef} A_5^e A^{f\mu})] \\ &= -g^2 \text{tr}[[t^a, A_5^c t^c][t^b, A_5^d t^d]] A_\mu^a A^{b\mu}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

したがって,  $A_5^a$  に  $\text{VEV}\langle A_5^a \rangle$  を持たせることでゲージ・ボソンの 4 次元部分  $A_\mu$  は質量を持つことができる. 式 (3.24) は質量を獲得するゲージ・ボソンが分かりやすくなるように表してある. どのゲージ・ボソンがどのような質量を持つかは  $\text{VEV}\langle A_5^a \rangle$  の与え方による. 細谷機構では物質場と境界条件を指定すると  $\text{VEV}$  が決まる.

以下では, 細谷機構によるポテンシャルの生成と対称性の破れを具体的に示す.

基本表現に属する  $N_F$  個のディラック・フェルミオン  $\psi_\ell$  ( $\ell = 1, \dots, N_F$ ) が存在する  $\mathbf{M}^3 \times S^1$  上の  $SU(N)$  ゲージ理論を考える<sup>1)</sup>:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{\ell=1}^{N_F} \bar{\psi}_\ell i \gamma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu^a t^a) \psi_\ell. \quad (3.25)$$

境界条件は,

$$A_\mu^a(x, y + 2\pi R) = A_\mu^a(x, y), \quad (3.26)$$

$$\psi_\ell(x, y + 2\pi R) = e^{i\beta} \psi_\ell(x, y), \quad \beta \in [0, 2\pi). \quad (3.27)$$

このとき, 1 ループ・レベルのヒッグス・ポテンシャルとして以下の表式を得る [18]:

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(\theta) &= -\frac{1}{8\pi^6 R^4} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos n(\theta_j - \theta_k) \\ &\quad + \frac{N_F}{4\pi^6 R^4} \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos n(\theta_j - \beta),\end{aligned}\quad (3.28)$$

ここに,  $\text{AB}$  位相  $\theta_j$  は,  $\text{VEV}$  が対角的になるように,

$$\langle A_y \rangle = \langle A_y^a \rangle t^a = \frac{1}{2\pi R g} \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_N \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^N \theta_j = 0 \quad (3.29)$$

で与えられる.

<sup>1)</sup> 簡単のため, 繰り込み可能な理論を考える. 高次元ゲージ理論でも本質的に同じ原理で細谷機構が働く.

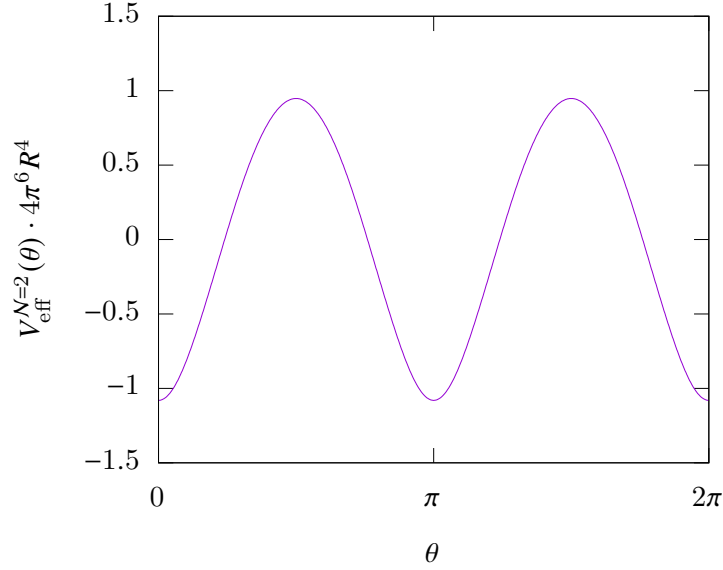


図 3.1  $\mathbf{M}^3 \times S^1$  上のフェルミオンが無い  $SU(2)$  ゲージ理論におけるヒッグス・ポテンシャル. AB 位相  $\theta$  を用いて, ヒッグス・ボソンの VEV は  $\langle A_y \rangle = \frac{1}{2\pi Rg} \text{diag}(\theta, -\theta)$  と表される. 余剰次元が 1 次元の場合, ツリー・レベルではヒッグス・ポテンシャルは存在しない. しかし, 非単連結な時空上でヒッグス・ポテンシャルが量子効果により生成される. しかし, フェルミオンが無いときはヒッグス・ボソンは非零の VEV を持たず, 対称性の破れは起きない.

フェルミオンが無い,  $N_F = 0$  の場合,  $V_{\text{eff}}(\theta)$  は  $\cos n(\theta_j - \theta_k)$  が最大になる  $\theta_j = \theta_k$  のときに最小値をとり,  $\theta_1 + \dots + \theta_N = 0$  から,  $\theta_j = 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ) である. したがって, フェルミオンが無い  $SU(N)$  ゲージ理論では, 量子補正によってポテンシャルが生成されるが, 非零の VEV は得られず, 対称性の破れは起きない.  $N = 2$  の場合のヒッグス・ポテンシャルのグラフを図 3.1 に示す.

$N_F > 0$  のとき,  $N = 2$  とすると,

$$\langle A_y \rangle = \frac{1}{2\pi Rg} \begin{pmatrix} \theta_1 & \\ & \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \theta_1 = -\theta_2 \equiv \theta \quad (3.30)$$

と書けるので, ヒッグス・ポテンシャルは,

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{N=2}(\theta) &= -\frac{1}{4\pi^6 R^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos 2n\theta \\ &\quad + \frac{N_F}{4\pi^6 R^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} [\cos n(\theta - \beta) + \cos n(\theta + \beta)] + \text{const.} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$N_F = 1$  とおいて,  $\beta = 0, \pi$  のときの  $V_{\text{eff}}^{N=2}(\theta)$  を図 3.2 に示す.  $\beta = 0$  のとき, ヒッグス・ポ

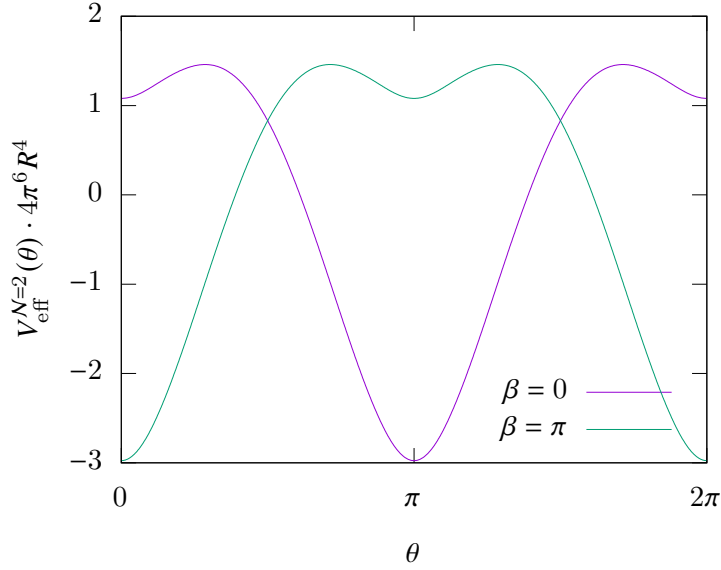


図 3.2  $\mathbf{M}^3 \times S^1$  上の  $SU(2)$  ゲージ理論におけるヒッグス・ポテンシャル. 余剰次元が 1 次元の場合, ツリー・レベルではヒッグス・ポテンシャルは存在しない. しかし, 非単連結な時空上でヒッグス・ポテンシャルが量子効果により生成される.  $\theta$  は AB 位相. フェルミオンからの寄与によりヒッグス・ボソンは非零の VEV を持つことができる. このとき, 場の境界条件によって生成するポテンシャルは変化する.  $\beta = 0, \pi$  はフェルミオンが余剰次元  $S^1$  のまわりで周期的, 反周期的であるときにそれぞれ対応する.

ポテンシャルは  $\theta = \pi$  で最小となる. フェルミオンが存在すると, ヒッグス・ボソンは非零の VEV を持つことができる.

式 (3.24) からゲージ・ボソンの質量を評価すると,  $SU(2)$  の生成子,

$$t^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

のうち,  $\langle A_y \rangle$  と可換なものは  $t^3$  だけなので,  $A_\mu^1$  と  $A_\mu^2$  が質量を持つ. その質量は  $\frac{1}{2R}$  である.  $A_\mu^3$  に対応して  $U(1)$  対称性が系に残る. 一方で,  $\beta = \pi$  のときはヒッグス・ポテンシャルは  $\theta = 0$  のときに最小で, ヒッグス・ボソンの VEV は零である. したがって, 対称性の破れは起きず,  $SU(N)$  対称性は保たれる. このように, 細谷機構では境界条件によって対称性の破れ方が変わる.

本節の最後に, ヒッグス・ポテンシャルのゲージ不変性について述べる. まず, 境界条件がある場合のゲージ変換を考える. フェルミオンは 1 種類とし,  $\mathbf{M}^4 \times S^1$  時空上において,

ゲージ変換は,

$$A_M \rightarrow A'_M = g_N A_M g_N^\dagger + \frac{i}{g} g_N \partial_M g_N^\dagger, \quad (3.33)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = g_N \psi. \quad (3.34)$$

ここに,

$$g_N = \exp(i\alpha^a t^a), \quad t^a \in SU(N). \quad (3.35)$$

このとき, 境界条件,

$$A_M^a(x, y + 2\pi R) = A_M^a(x, y), \quad (3.36)$$

$$\psi(x, y + 2\pi R) = e^{i\beta} \psi(x, y), \quad \beta \in [0, 2\pi) \quad (3.37)$$

は以下のように変換される:

$$A'_M(x, y + 2\pi R) = U A'_M(x, y) U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_M U^\dagger, \quad (3.38)$$

$$\psi'(x, y + 2\pi R) = e^{i\beta} \psi'(x, y), \quad (3.39)$$

$$U = g_N(x, y + 2\pi R) g_N^\dagger(x, y). \quad (3.40)$$

ゲージ変換で境界条件が変わらないことを課すと,

$$g_N(x, y + 2\pi R) = g_N(x, y). \quad (3.41)$$

よって, ゲージ変換は周期的である. この条件を満たすゲージ変換は,

$$g_N(y) = \text{diag}(e^{in_1 y/R}, e^{in_2 y/R}, \dots, e^{in_N y/R}), \quad (3.42)$$

ここに,  $n_i$  は整数であり,

$$\sum_{i=1}^N n_i = 0. \quad (3.43)$$

このとき, ヒッグス・ボソンの VEV (AB 位相) (3.29) のゲージ変換は,

$$\langle A'_5 \rangle = g_N \langle A_5 \rangle g_N^\dagger + \frac{i}{g} g_N \partial_5 g_N^\dagger = \frac{1}{2\pi R g} \begin{pmatrix} \theta_1 + 2\pi n_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_N + 2\pi n_N \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2\pi R g} \begin{pmatrix} \theta'_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta'_N \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

したがって、ゲージ変換により、AB 位相が  $2\pi$  の整数倍だけシフトする。ゆえに、AB 位相の関数であるヒッグス・ポテンシャルはゲージ変換に対して不変である：

$$V_{\text{eff}}(\theta') = V_{\text{eff}}(\theta). \quad (3.45)$$

### 3.4 現実的なモデルの構築

第 3.2 節では、5 次元の理論から KK 展開を通して 4 次元の場の理論を得た。これを KK 分解と呼ぶ。GHU を用いて現実的なモデルを構築する場合、KK 分解におけるゼロ・モードが SM の場にちょうど対応するように 5 次元の場を導入しなければならない。加えて、GHU では湯川相互作用がゲージ相互作用で与えられるので、現実の湯川相互作用が自然に導出されることが一般に要請される。

本節では、 $\mathbf{M}^4 \times S^1$  上のゲージ理論で KK 分解をおこなうときに一般に起こる問題である「カイラリティ問題」について述べ、実際のモデル構築においてカイラリティ問題をどのように回避するのか、 $SU(3)$  ゲージ理論の例を用いて考察する。さらに、GHU における現実的な湯川相互作用の再現に関する研究報告をレビューする。

#### 3.4.1 カイラリティ問題とオービフォールド

$\mathbf{M}^4 \times S^1$  時空上の自由なディラック場の理論を KK 分解することを考える。質量  $m$  のディラック・フェルミオンを  $\psi$  とおいたとき、ラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^M \partial_M - m)\psi, \quad (3.46)$$

ここに、ディラックのガンマ行列は、以下のような 4 次正方行列とする：

$$\{\gamma^M, \gamma^N\} = 2\eta^{MN}, \quad (\eta^{MN} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)) \quad (3.47)$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma^\mu = (1, \sigma^i), \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)) \quad (3.48)$$

$$\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -i \begin{pmatrix} -1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

4次元理論の左巻きと右巻きの意味で、5次元のディラック場を

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

と書くことにする．ここで、 $\psi_L, \psi_R$  は5次元4成分ディラック・スピノールのそれぞれ上, 下半分の2成分を表す．境界条件を式(3.2)で与えると、KK展開から、

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \psi_L^{(n)}(x) \\ \psi_R^{(n)}(x) \end{pmatrix} e^{i(n/R + \beta/2\pi R)y}. \quad (3.51)$$

このとき、ディラック方程式

$$(i\gamma^M \partial_M - m)\psi = 0 \quad (3.52)$$

から、各KKモードに対して、

$$\begin{pmatrix} -i\left(\frac{n}{R} + \frac{\beta}{2\pi R}\right) - m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & i\left(\frac{n}{R} + \frac{\beta}{2\pi R}\right) - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L^{(n)} \\ \psi_R^{(n)} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.53)$$

$n$ 番目のKKモードの質量は、

$$m_n = \sqrt{\left(\frac{n}{R} + \frac{\beta}{2\pi R}\right)^2 + m^2}. \quad (3.54)$$

したがって、 $m = \beta = 0$ のとき、ゼロ・モードは4次元でのワイル表現をとれそうである．しかしながら、5次元時空上ではカイラリティを選ぶ自由度は無く、実際に、 $\psi_R = 0$  ( $\psi_L = 0$ )とおいても、ディラック方程式(3.53)から  $\psi_L^{(n \neq 0)} = 0$  ( $\psi_R^{(n \neq 0)} = 0$ )が導かれ、5次元の局所的な場として左巻き(右巻き)のフェルミオンを導入できない．

このように、高次元の場の理論から素直にKK分解をおこなうだけでは、4次元の有効理論はカイラルな理論にならず、SMのような左右非対称な理論を構築できない．このことを「カイラリティ問題」と呼ぶ．

カイラリティ問題の最も簡単な解決策の1つは5次元方向のパリティを5次元の場に課すことである．例として円周  $S^1$  の余剰次元を考える． $SU(N)$ の基本表現に属すディラック・フェルミオンに対して、この円周の対称軸に関するパリティ  $P$  を与える:

$$Pi\gamma^5\psi(x, y) = \psi(x, -y), \quad (3.55)$$

ここに,

$$P \in SU(N), \quad P^2 = 1, \quad i\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

このとき, 周期的境界条件に加えて 5 次元方向のパリティの偶奇性 (オービフォルド境界条件) を場に課すと, KK 展開より, パリティが偶の場合は  $\cos$  関数で展開され, 奇の場合は  $\sin$  関数で展開される:

- $\psi_L$ : パリティ奇;  $\psi_R$ : パリティ偶

$$\psi_L(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_L^{(n)} \sin \frac{ny}{R}, \quad (3.57)$$

$$\psi_R(x, y) = \psi_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_R^{(n)} \cos \frac{ny}{R}. \quad (3.58)$$

- $\psi_L$ : パリティ偶;  $\psi_R$ : パリティ奇

$$\psi_L(x, y) = \psi_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_L^{(n)} \cos \frac{ny}{R}, \quad (3.59)$$

$$\psi_R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_R^{(n)} \sin \frac{ny}{R}. \quad (3.60)$$

したがって, 場にオービフォルド境界条件を課すことによって, ゼロ・モードに関してカイラルになるような KK 分解を施すことができる.

場にパリティ  $P$  に関する条件を課すことは多様体の一部を他の部分と同一視することに等しく, 同一視したのちの多様体をオービフォルドと呼ぶ. 上記の例では  $S^1$  に対して巡回群  $Z_2$  に関するパリティ変換を考えるので, オービフォルドを  $S^1/Z_2$  と記す. パリティ変換で不変な座標をオービフォルドの固定点と呼ぶ.  $S^1/Z_2$  では  $y = 0, \pi R$  が固定点である.

### 3.4.2 $SU(3)$ 電弱統一模型

4 次元有効理論においてカイラルな理論を得ることはオービフォルドを用いることで可能であることを我々は見た. では,  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ゲージ理論を  $\mathbf{M}^4 \times S^1/Z_2$  上で定義することで SM と整合的な有効理論を導けるかということ, そうではない. これはヒッグス・ボ



ソンがゲージ群の随伴表現に属しているためである。GHU では、ヒッグス・ボソンが VEV を持つと、式 (3.24) に従ってゲージ対称性が破れる。ゆえに、細谷機構だけでは、ゲージ群のランク (互いに交換する生成子の数) を減らすような対称性の破れは起きない。

SM では、ヒッグス・ボソンは  $SU(2)$  の 2 重項として導入されるため、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$  から  $U(1)_{\text{em}}$  へのゲージ対称性の破れが起きる。GHU においても、オービフォールド境界条件を適切に与えれば、 $SU(3)$  ゲージ理論から  $SU(2)$  の 2 重項部分にだけヒッグス・ボソンのゼロ・モードが現れ、さらに、 $SU(3)$  対称性が  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  対称性に破れる [36]。実際、ゲージ・ボソンに対するパリティ変換を次のように与える：

$$A_\mu(x, -y) = PA_\mu(x, y)P^\dagger, \quad A_5(x, -y) = -PA_5(x, y)P^\dagger, \quad (3.61)$$

ここに、

$$P = \text{diag}(-1, -1, +1). \quad (3.62)$$

このとき、偶関数となるゲージ場は、

$$A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3, A_\mu^8, A_5^4, A_5^5, A_5^6, A_5^7. \quad (3.63)$$

他のゲージ場は奇関数となる。4 次元有効理論に現れるゲージ場のゼロ・モードは、

$$A_\mu^{(0)}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^{3(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^{8(0)} & A_\mu^{1(0)} - iA_\mu^{2(0)} & 0 \\ A_\mu^{1(0)} + iA_\mu^{2(0)} & -A_\mu^{3(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^{8(0)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}A_\mu^{8(0)} \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

$$A_5^{(0)}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_5^{4(0)} - iA_5^{5(0)} \\ 0 & 0 & A_5^{6(0)} - iA_5^{7(0)} \\ A_5^{4(0)} + iA_5^{5(0)} & A_5^{6(0)} + iA_5^{7(0)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

よって、ヒッグス・ボソンのゼロ・モードのうち、

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_5^{4(0)} - iA_5^{5(0)} \\ A_5^{6(0)} - iA_5^{7(0)} \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

が  $SU(2)$  の 2 重項となっている。加えて、 $A_\mu$  のゼロ・モードは  $SU(2) \times U(1)$  の生成子で表されており、4 次元の有効理論では  $SU(3)$  対称性は  $SU(2) \times U(1)$  対称性に破れる。

### 3.4.3 湯川相互作用の再現

SMにはゲージ対称性  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  の同じ表現に属するフェルミオンが3つずつ存在し、この重複のことを「世代」と呼んでいる。いくつかの物理量について、世代間でスケールの大きな違い(階層性)があることが測定から分かっている。例えば、クォークの質量には表 3.1 に示すような質量のスケールの違いが存在する。

しかしながら、GHUではゲージ相互作用として湯川相互作用が与えられるので、ゲージ相互作用の普遍性の結果として、それぞれの世代で同じ大きさの質量を得ることになる。実際、フェルミオンとヒッグス・ボソンの相互作用は、

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g A_5 \bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad (3.67)$$

で表されるので、ヒッグス・ボソンが  $\langle A_5 \rangle = \frac{\theta}{2\pi R g}$  の VEV を持つと、フェルミオンの質量  $m_f$  は、

$$m_f \sim g \cdot \frac{\theta}{2\pi R g} = \frac{\theta}{2\pi R}. \quad (3.68)$$

ゲージ相互作用は世代によらず同じ結合定数  $g$  を用いるので、上記の結果は世代によらず成り立ち、よって GHU でフェルミオンの質量階層性を説明するには何らかのメカニズムが必要である。

さらに、前節で求めたゲージ・ボソンの質量項 (3.24) から分かるように、ヒッグス・ボソンが VEV を持つことにより、

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= -g^2 \text{tr}[[t^a, A_5^c t^c][t^b, A_5^d t^d]] A_\mu^a A^{b\mu} \\ &\sim -g^2 \times \frac{\theta^2}{(2\pi R g)^2} A_\mu^a A^{a\mu} \\ &= -\frac{\theta^2}{(2\pi R)^2} A_\mu^a A^{a\mu}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

表 3.1 6種類のクォークの質量 [37]. SMには6種類のクォークが存在する。それらの質量には大きなスケールの差(質量階層性)が存在していることが測定から分かっている。

種類	アップ (u)	ダウン (d)	チャーム (c)	ストレンジ (s)	トップ (t)	ボトム (b)
質量 (MeV)	2.16	4.67	$1.27 \times 10^3$	93.4	$172.69 \times 10^3$	$4.18 \times 10^3$

すなわち、ゲージ・ボソンの質量は、

$$m_A^2 \sim \frac{1}{R^2}. \quad (3.70)$$

よって、フェルミオンとゲージ・ボソンの質量は同じスケールになる。しかし、現実の宇宙では  $W$  や  $Z$  ボソンの質量はおよそ  $100 \text{ GeV}$  であり、トップ・クォークを除くフェルミオンより重い。このことも、GHU で現実的なモデルを考えるうえで一般に問題になる。

オービフォールド上で一方の境界にフェルミオンを局在化させることで質量の階層性を説明する方法は「キंक質量」の導入である [38]。この方法では、パリティが奇であるような因子、

$$\epsilon(y) = \begin{cases} 1 & (y > 0) \\ -1 & (y < 0) \end{cases} \quad (3.71)$$

を用いて、次のキंक質量項を導入する:

$$\mathcal{L}_{\text{kink}} = -M\epsilon(y)\bar{\psi}\psi, \quad (3.72)$$

ここに、 $M > 0$  は定数である。フェルミオンのパリティは式 (3.55) のように  $\gamma^5$  を含めて表されるので、 $\bar{\psi}\psi$  はパリティ変換に対して奇となる:

$$\bar{\psi}\psi \longrightarrow (Pi\gamma^5\psi)^\dagger \gamma^0 (Pi\gamma^5\psi) = -\bar{\psi}\psi. \quad (3.73)$$

よって、 $\epsilon(y)$  と合わせれば、キंक質量項はパリティ偶となり、ラグランジアンに導入することができる。

いま、 $SU(3)$  の電弱統一モデルを考える。パリティ  $P$  を式 (3.62) で与えたとき、 $SU(3)$  の基本表現に属す  $\psi$  のゼロ・モードは、

$$\psi^{(0)} = \begin{pmatrix} \psi_L^{1(0)} \\ \psi_L^{2(0)} \\ \psi_R^{3(0)} \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

このとき、ゼロ・モードは  $y$  に依存し、変数分離をして次式で書ける [39]:

$$\psi_L^{(0)}(x, y) = \psi_L^{(0)}(x) f_L^{(0)}(y), \quad \psi_R^{(0)}(x, y) = \psi_R^{(0)}(x) f_R^{(0)}(y), \quad (3.75)$$

$$f_L^{(0)}(y) = \sqrt{\frac{M}{1 - e^{-2\pi RM}}} e^{-M|y|}, \quad f_R^{(0)}(y) = \sqrt{\frac{M}{e^{2\pi RM} - 1}} e^{+M|y|}. \quad (3.76)$$

4次元有効理論におけるフェルミオンの質量項について考える。フェルミオンの KK ゼロ・モードの微分項およびキルク質量項はパリティが奇であるために零になる:

微分項:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \bar{\psi}_{R,L}^{(0)}(x,y) \gamma^5 i \partial_5 \psi_{L,R}^{(0)}(x,y) \\ &= i \bar{\psi}_{R,L}^{(0)}(x) \gamma^5 \psi_{L,R}^{(0)}(x) \int_{-\pi R}^{\pi R} dy f_{R,L}^{(0)}(y) M \epsilon_{L,R}(y) f_{L,R}^{(0)}(y) = 0, \end{aligned} \quad (3.77)$$

ここに、右辺の  $\epsilon_{L,R}(y)$  は以下で定義されている:

$$\epsilon_L(y) = -\epsilon_R(y) \equiv -\epsilon(y). \quad (3.78)$$

キルク質量項:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \bar{\psi}_{L,R}^{(0)}(x,y) M \epsilon(y) \psi_{R,L}^{(0)}(x,y) \\ &= \bar{\psi}_{L,R}^{(0)}(x) \psi_{R,L}^{(0)}(x) \int_{-\pi R}^{\pi R} dy f_{L,R}^{(0)}(y) M \epsilon(y) f_{R,L}^{(0)}(y) = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

したがって、4次元のフェルミオンの質量項は湯川相互作用から得られる。いまのパリティでは、ヒッグス・ボソンの KK ゼロ・モードは式 (3.65) で与えられる。ヒッグス・ボソンの VEV を,

$$\langle A_5^{(0)} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{2\pi R g} \\ 0 & \frac{\theta}{2\pi R g} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

とにおいてフェルミオンの質量項を求めると,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \bar{\psi}^{(0)}(x,y) \gamma^5 g \langle A_5^{(0)} \rangle \psi^{(0)}(x,y) \\ &= [\bar{\psi}_L^{2(0)}(x) \gamma^5 \psi_R^{3(0)}(x) + \bar{\psi}_R^{3(0)}(x) \gamma^5 \psi_L^{2(0)}(x)] \frac{\theta}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy f_L^{(0)}(y) f_R^{(0)}(y) \\ &= [\bar{\psi}_L^{2(0)}(x) \gamma^5 \psi_R^{3(0)}(x) + \bar{\psi}_R^{3(0)}(x) \gamma^5 \psi_L^{2(0)}(x)] \frac{\theta M e^{-\pi R M}}{1 - e^{-2\pi R M}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

したがって、 $RM \gg 1$  のとき、フェルミオンの質量は,

$$m_f \sim M e^{-\pi R M}. \quad (3.82)$$

よって、キルク質量項の導入により階層的な質量を説明することができる。フェルミオンの波動関数が  $f_{L,R}(y)$  のためにそれぞれ反対側の固定点に偏在することにより、左右のカイラリティの重ね合わせが小さくなることで指数因子が現れる。

ただし、式 (3.82) のフェルミオンの質量には上限があり、

$$m_f < \frac{1}{R} \sim m_A. \quad (3.83)$$

ゆえに、キルク質量の導入だけではトップ・クォークの質量は説明できない。他の方法によりゲージ・ボソンより重い質量を導出しなければならない。

### 3.5 ヒッグス・ポテンシャルの有限性予想

GHU においてヒッグス・ボソンのポテンシャルは細谷機構によって量子補正を受ける。これまでに、いくつかの先行研究でヒッグス・ポテンシャルの摂動計算がおこなわれてきた。まず、非可換ゲージ理論において 1 ループ・レベルでの計算がなされた [18, 20, 25, 26]。このとき、ヒッグス・ポテンシャルが 1 ループ・レベルで有限になることが分かった。その後、GHU では摂動の任意の次数でヒッグス・ポテンシャルが有限になるという予想がなされた [21, 23, 24]。この予想は文献 [24] に以下のように記されている：

*[Conjecture] In non-Abelian gauge theory defined in  $M^4 \times S^1$ ,  $M^4 \times (S^1/Z_2)$ , and the Randall-Sundrum warped spacetime, the  $\theta_H$ -dependent part of  $V_{\text{eff}}(\theta_H)$  is finite in each gauge invariant subset of diagrams, except at a discrete set of values of  $\theta_H$ .*

ループ・レベルを上げてヒッグス・ポテンシャルの評価がアーベリアン・ゲージ理論でおこなわれたが [27, 28]、非可換ゲージ理論では 2 ループ・レベル以上の計算はおこなわれていなかった。

一般に、GHU のような高次元のゲージ理論は繰り込み不可能である — 理論の紫外発散を取り除くために無限個の相殺項と繰り込み条件が必要であり、ラグランジアンの高次元演算子からの寄与は予言値の不定性となる。一方で、繰り込み可能な理論では高次元演算子は必要なく、質量次元が 0 以上の有限個のパラメータに関する繰り込み条件によって紫外発散を予言値から全て取り除くことができる。上記の予想が正しく、ヒッグス・ポテンシャルが有限である場合、高次元演算子を導入せずに定義したラグランジアンを用いてヒッグス・ポ

テンシャルを評価したとしても、ヒッグス・ポテンシャルに発散するサブ・ダイアグラムからの寄与が現れないと言える。このとき、ヒッグスの質量などのヒッグス・ポテンシャルの微分から得られる物理量は高次元演算子による不定性を持たない。

本博士論文では  $SU(N)$  ゲージ理論でヒッグス・ポテンシャルの有限性について調査する。このとき、我々は次のようにしてヒッグス・ポテンシャルの発散を定義する: ゲージ結合定数  $g$  以外のパラメータの繰り込みにヒッグス・ポテンシャルが依存するとき、ヒッグス・ポテンシャルが発散するということにする。

## 第 4 章

# ヒッグス・ポテンシャル

本章では、ラグランジアンを具体的に与えたとき、ヒッグス・ポテンシャル  $V_{\text{eff}}(\theta)$  を 2 ループ補正まで評価する。さらに、より高次のループ補正まで考えると、ヒッグス・ポテンシャルが発散することを示す。このとき、ループ積分を簡単にするために「重ね合わせコンパクト化」という手法を用いるので、この計算手法について同時に説明する。

### 4.1 セットアップ: $M^4 \times S^1$ 上の $SU(N)$ ゲージ・ヒッグス統合模型

余剰次元が円周  $S^1$  でコンパクト化されている 5 次元の  $SU(N)$  ゲージ理論を考える。このとき、5 次元目には空間がコンパクトであることから場に境界条件が課せられる。我々はゲージ・ボソン  $A_M^a$ 、フェルミオン  $\psi_\ell$  ( $\ell$  はフレーバの添字) に次の境界条件を与える:

$$A_M^a(x, y + 2\pi R) = A_M^a(x, y), \quad \psi_\ell(x, y + 2\pi R) = e^{i\beta_\ell} \psi_\ell(x, y), \quad (4.1)$$

ここに、 $y \in [0, 2\pi R)$  は  $S^1$  方向の座標で、 $\beta_\ell \in [0, 2\pi)$  は任意の位相である。

量子場について積分を実行し、ヒッグス・ポテンシャルを評価する際に、我々はゲージ場の余剰次元成分  $A_5^a$  をその VEV だけ予めシフトさせる:

$$A_5^a \rightarrow A_5^a + \frac{\theta^a}{2\pi R g}. \quad (4.2)$$

ここで、シフト後の  $A_5^a$  はヒッグス場の VEV 周りの量子揺らぎに対応する。

このとき、以下のラグランジアンで与えられる系を考える:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{MN}^a F^{aMN} + \sum_\ell \bar{\psi}_\ell i\gamma^M D_M \psi_\ell + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}}, \quad (4.3)$$

ここに,

$$F_{MN}^a = \partial_M A_N^a - \partial_N A_M^a + g f^{abc} A_M^b A_N^c + \frac{f^{abc}}{2\pi R} (A_M^b \theta^c \delta_N^5 + A_N^c \theta^b \delta_M^5), \quad (4.4)$$

および,

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^a \mathcal{F}^a, \quad \mathcal{F}^a = \partial^M A_M^a + \frac{f^{abc}}{2\pi R} A_5^b \theta^c, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = -\bar{c}^a \left[ \partial^M D_M^{ab} - \frac{f^{ace} f^{bed}}{2\pi R} \theta^c \left( \frac{\theta^d}{2\pi R} + g A_5^d \right) \right] c^b. \quad (4.6)$$

ただし, ディラック・フェルミオン  $\psi_\ell$  とゴースト場  $c$  に対する共変微分は次式で定められる:

$$D_M \psi_\ell \equiv \left( \partial_M - ig A_M^a \tau_\ell^a - i \frac{\theta^a \tau_\ell^a}{2\pi R} \delta_M^5 \right) \psi_\ell, \quad (4.7)$$

$$D_M c \equiv \left( \partial_M - ig A_M^a T^a - i \frac{\theta^a T^a}{2\pi R} \delta_M^5 \right) c, \quad (4.8)$$

ここで,  $\tau_\ell^a$  は  $\psi_\ell$  が属する  $SU(N)$  の表現空間の表現行列であり,  $T^a$  は  $SU(N)$  の随伴表現に属す行列である.

ラグランジアン  $\mathcal{L}$  を場の 2 次の項  $\mathcal{L}_0$  と 3 次以上の項  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  に分けると,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (4.9)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{2} A^{aM} \left[ -\partial^2 - \left( i\partial_5 + \frac{\theta^c T^c}{2\pi R} \right)^2 \right]_{ab} A_M^b \\ & + \bar{\psi}_\ell^a \left[ i\not{\partial} - \gamma_5 \left( i\partial_5 + \frac{\theta^c \tau_\ell^c}{2\pi R} \right) \right]_{ab} \psi_\ell^b + \bar{c}^a \left[ -\partial^2 - \left( i\partial_5 + \frac{\theta^c T^c}{2\pi R} \right)^2 \right]_{ab} c^b, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & ig f^{abc} \left\{ (i\partial^\mu A^{aM}) A_\mu^b A_M^c - \left[ \left( i\partial_5 + \frac{\theta^d T^d}{2\pi R} \right) A^\mu \right]^a A_5^b A_\mu^c \right\} \\ & - \frac{g^2}{4} f^{abe} f^{cde} A^{aM} A^{bN} A_M^c A_N^d + g \bar{\psi}_\ell \gamma^M \tau_\ell^a \psi_\ell A_M^a \\ & - ig f^{abc} \left\{ (i\partial^\mu \bar{c}^a) A_\mu^b c^c - \left[ \left( i\partial_5 + \frac{\theta^d T^d}{2\pi R} \right) \bar{c} \right]^a A_5^b c^c \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

ただし,  $a, b, \dots$  はリー群の添字である.

プロパゲータおよび相互作用に対するファインマン・ルールは以下の通り:



• プロパゲータ

運動量は左向きとする.

ゲージ場:  $b \rightsquigarrow a = \left( \frac{-i\eta^{MN}}{p^2 - \left(\frac{n}{R} + \frac{\theta^c T^c}{2\pi R}\right)^2} \right)_{ba},$  (4.12)

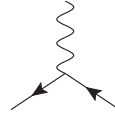
フェルミオン場:  $b \longleftarrow a = \left( \frac{i}{\not{p} - \gamma_5 \left(\frac{n}{R} + \frac{\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right)} \right)_{ba},$  (4.13)

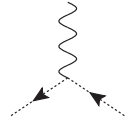
ゴースト場:  $b \cdots\cdots\cdots\longleftarrow a = \left( \frac{i}{p^2 - \left(\frac{n}{R} + \frac{\theta^c T^c}{2\pi R}\right)^2} \right)_{ba},$  (4.14)

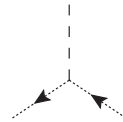
• 3点バーテックス


(ゲージ群の添字, 4元運動量, KKモード) は左下から反時計回りに  $(a, k, n), (b, p, m), (c, q, j).$

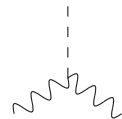
運動量は全て内側に向いている. 破線は  $A_5$  の線を表す.


  $= ig\gamma^K (\tau_\ell^c)_{ab},$  (4.15)

  $= -igk^\mu (T^c)_{ab},$  (4.16)

  $= ig \left( \frac{n}{R} + \frac{\theta^e T^e}{2\pi R} \right)_{da} (T^c)_{db},$  (4.17)

  $= gf^{abc} [\eta^{\mu\nu} (k-p)^\rho + \eta^{\nu\rho} (p-q)^\nu + \eta^{\rho\mu} (q-k)^\nu],$  (4.18)

  $= g\eta^{\mu\nu} \left[ f^{cbd} \left( \frac{n}{R} + \frac{\theta^e T^e}{2\pi R} \right)_{da} + f^{cad} \left( \frac{n}{R} + \frac{\theta^e T^e}{2\pi R} \right)_{db} \right],$  (4.19)

  $= -gf^{abc} (k-p)^\rho,$  (4.20)

• 4点バーテックス

(ゲージ群の添字, ローレンツ群の添字) は反時計回りに  $(a, M), (b, N), (c, K), (d, L).$

運動量は全て内側に向いている。

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (\eta^{MK} \eta^{NL} - \eta^{ML} \eta^{NK}) \\
 &\quad + f^{ace} f^{bde} (\eta^{MN} \eta^{KL} - \eta^{ML} \eta^{NK}) \\
 &\quad + f^{ade} f^{bce} (\eta^{MN} \eta^{KL} - \eta^{MK} \eta^{NL})]. \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

## 4.2 重ね合わせコンパクト化

前節で求めたルールに従ってファインマン・ダイアグラムを原理的には計算できる。しかしながら、一般的な方法 — プロパゲータを対角的にするようにゲージ場の線形結合をとって計算する方法 — では計算量が多くなってしまふ。さらに、対角化する際に  $T^a$  の成分をあらわに用いるので計算は非常に煩雑になると推測される。

上記の困難を克服する計算手法が「重ね合わせコンパクト化」(compactification by superposition) である。この方法では、ループ積分に対して次の公式を適用することで右辺にあるような行列を含まない積分を得る<sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\Theta m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_5}{2\pi} e^{-i2\pi R k_5 m} S(k_5), \quad (4.22)$$

ここに、 $S(\cdot)$  は解析的な関数で、 $\Theta$  は任意のエルミート行列である。左辺において被積分関数に含まれている行列  $\Theta$  が右辺では被積分関数に含まれていない。左辺の  $S$  の引数はプロパゲータにある行列部分と同じ構造をしており、式 (4.22) を用いて左辺の形の積分を右辺の積分へ変換することにより、プロパゲータの対角化をせずにダイアグラムの計算が可能になる。付録 A.1 で上式を証明する。

本論文では全てのループ積分をこの手法を用いて計算する。

<sup>1)</sup> 本手法と本質的に同等な手法が文献 [31] で導入され、この計算手法はアーベリアン・ゲージ理論において文献 [32–35] で用いられており、文献 [18, 20, 25] では非可換ゲージ理論で使用されている。本博士論文では、4次元時空に渡る運動量積分をノン・コンパクトな5次元時空に渡る運動量積分に変換し、AB位相の周期性を陽に残してループ積分を評価できる。

### 4.3 ヒッグス・ポテンシャルの摂動評価

本節ではヒッグスの有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}(\theta)$  に寄与するファインマン・ダイアグラムの計算結果を示す。特に、2 ループ・レベルまでは  $V_{\text{eff}}(\theta)$  が有限であることを示す。

#### 4.3.1 1 ループ・レベル

ゲージ・ボソン、フェルミオン、FP ゴーストからの  $V_{\text{eff}}(\theta)$  への寄与は、

$$V_{A,\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta) = i \text{ (sun diagram) } = -\frac{5i}{2} \frac{1}{2\pi R} \sum_n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left[ k^2 - \left( \frac{n}{R} + \frac{\theta^a T^a}{2\pi R} \right)^2 \right], \quad (4.23)$$

$$V_{F,\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta) = i \text{ (fermion loop) } = \sum_\ell 2i \frac{1}{2\pi R} \sum_n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left[ k^2 - \left( \frac{n}{R} + \frac{\theta^a \tau_\ell^a - \beta_\ell}{2\pi R} \right)^2 \right], \quad (4.24)$$

$$V_{c,\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta) = i \text{ (ghost loop) } = i \frac{1}{2\pi R} \sum_n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left[ k^2 - \left( \frac{n}{R} + \frac{\theta^a T^a}{2\pi R} \right)^2 \right]. \quad (4.25)$$

ここで、 $n$  (あるいは  $m$ ) に渡る総和は  $-\infty$  から  $\infty$  までとる (以降の総和記号も同じ)。 $\ell$  の総和はフェルミオンの全てのフレーバに渡ってとる。 $\Theta = \theta^a T^a, \theta^a \tau_\ell^a - \beta_\ell$  として、式 (4.22) を使ってループ積分を変形すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi R} \sum_n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left[ k^2 - \left( \frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R} \right)^2 \right] \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{1}{2\pi R} \sum_n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ k^2 - \left( \frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R} \right)^2 \right]^{-s} \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \sum_m \text{tr} e^{i\theta m} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R m k_5} (k^M k_M)^{-s}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

$m \neq 0$  のとき、 $0 < \text{Re}(s) < \frac{5}{2}$  ならば、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R m k_5} (k^M k_M)^{-s} &= \frac{i}{32\pi^{5/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} - s\right)}{\Gamma(s)} e^{i\pi s} (\pi R |m|)^{2s-5} \\ &= \frac{3i}{128\pi^7 R^5 |m|^5} s + O(s^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

上式の積分公式は付録 B.1 で導く。よって、式 (4.26) より、

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left[ k^2 - \left( \frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R} \right)^2 \right] = -\frac{3i}{128\pi^7 R^5} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|m|^5} \text{tr} e^{i\theta m} + C, \quad (4.28)$$

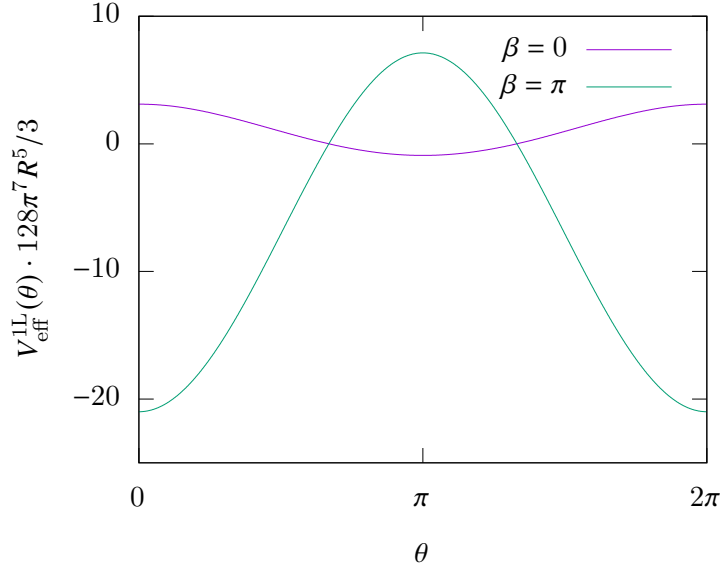


図 4.1 随伴表現のフェルミオンが 1 種類だけある  $\mathbf{M}^4 \times S^1$  上の  $SU(2)$  ゲージ理論におけるヒッグス・ポテンシャルの 1 ループ・レベルでの評価. フェルミオンが周期的 ( $\beta = 0$ ) の場合は AB 位相  $\theta = \pi$  で  $V_{\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta)$  が最小となり,  $SU(2)$  対称性は  $U(1)$  に自発的に破れる. フェルミオンが  $S^1$  上で反周期的 ( $\beta = \pi$ ) であるときは  $\theta = 0$  であり,  $SU(2)$  対称性は保たれる.


ここで,  $C$  は  $m = 0$  の寄与で,  $\theta$  に非依存な定数である. 以上より,  $V_{\text{eff}}(\theta)$  の 1 ループ・レベルでの表式は次のとおり:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta) &= V_{A,\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta) + V_{F,\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta) + V_{c,\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta) \\
 &= -\frac{9}{256\pi^7 R^5} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|m|^5} \text{tr} e^{i\theta^a T^a m} + \frac{3}{64\pi^7 R^5} \sum_{\ell} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|m|^5} \text{tr} e^{i(\theta^a \tau_{\ell}^a - \beta_{\ell})m} + C. \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

それぞれの級数は収束するので, 1 ループ・レベルでヒッグス場の有効ポテンシャルの  $\theta$  依存部分は有限である. この結果は先行研究 [18, 20, 25] の結果と一致している.  $\mathcal{N} = 2$  の場合に随伴表現のフェルミオンが 1 種類のときの  $V_{\text{eff}}^{\text{1L}}(\theta)$  のプロットを図 4.1 に示す.

### 4.3.2 2ループ・レベル

2ループ・レベルで有効ポテンシャルに寄与するダイアグラムは次の4つである<sup>2)</sup>:



$$(4.30)$$

ただし、ゲージ・ボソンの波線は余剰次元成分  $A_5$  も表す。

重ね合わせコンパクト化を用いて各ダイアグラムを計算する。

まず、フェルミオンのループについて、ファインマン・ルールより、

$$i \text{ (fermion loop) } = \frac{i}{2} \frac{1}{2\pi R} \sum_{n_1} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi R} \sum_{n_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{-i\eta_{MN}}{p^2 - \left(\frac{n_1}{R} + \frac{\theta^c T^c}{2\pi R}\right)^2} \right]_{ab} \\ \times (-1) \text{tr} \left[ \frac{i}{\not{p} + \not{K} - \gamma_5 \left(\frac{n_1+n_2}{R} + \frac{\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right)} i g \gamma^M \tau_\ell^a \right. \\ \left. \times \frac{i}{\not{K} - \gamma_5 \left(\frac{n_2}{R} + \frac{\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right)} i g \gamma^N \tau_\ell^b \right]. \quad (4.31)$$

ここで、トレースは  $\gamma^M$  と  $\tau_\ell^a$  の両方についてとる。トレース中の行列について、以下の公式(付録 A.2 で証明する),

$$S(\theta^a \tau^a) \tau^b = \tau^c [S(\theta^a \tau^a + \theta^a T^a)]_{cb} \quad (4.32)$$

(ここに、 $S(\cdot)$  は任意の解析的な関数) を用いて  $\left(\frac{n_1}{R} + \frac{\theta^c T^c}{2\pi R}\right)$  と  $\left(\frac{n_2}{R} + \frac{\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right)$  の関数を得ると、 $\text{tr}[\dots]$  は、

$$g^2 \text{tr} \left[ \tau_\ell^e \left( \frac{1}{\not{p} + \not{K} - \gamma_5 \left(\frac{n_1+n_2}{R} + \frac{\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell + \theta^c T^c}{2\pi R}\right)} \right)_{ea} \gamma^M \frac{1}{\not{K} - \gamma_5 \left(\frac{n_2}{R} + \frac{\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right)} \gamma^N \tau_\ell^b \right], \quad (4.33)$$

<sup>2)</sup> フェルミオンの波動関数繰り込みからの寄与はない。これは、波動関数繰り込みがプロパゲータの逆行列になり、 $\theta$  依存性を打ち消し合うからである:

$$\leftarrow = \frac{i}{\not{p} - \gamma_5 \left(\frac{n}{R} + \frac{\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right)}, \quad \leftarrow \otimes = i \delta_2 \left[ \not{p} - \gamma_5 \left(\frac{n}{R} + \frac{\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right) \right].$$

ここで、 $ea$  は  $T^c$  の成分の添字である。重ね合わせコンパクト化 (4.22) を用いて、

$$i \text{ (loop with wavy line and arrow) } = \frac{i}{2} \sum_{m_1} \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \sum_{m_2} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R(p_5 m_1 + k_5 m_2)} [e^{i\theta^c T^c m_1}]_{ab} \frac{-i\eta^{MN}}{p^L p_L} \\ \times (-g^2) \text{tr} \left[ e^{i(\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell) m_2} \frac{1}{\gamma^J (p+k)_J} \gamma^M \frac{1}{\gamma^I k_I} \gamma^N \tau_\ell^b \tau_\ell^a \right]. \quad (4.34)$$

最後に、ガンマ行列のトレースが、

$$\text{tr}[\gamma^M \gamma^L \gamma_M \gamma^K] = -12\eta^{LK} \quad (4.35)$$

だから、

$$i \text{ (loop with wavy line and arrow) } = 6g^2 \sum_{m_1, m_2} G_\ell(m_1, m_2) \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R(p_5 m_1 + k_5 m_2)} \\ \times \frac{(k+p)^M k_M}{p^N p_N (k+p)^L (k+p)_L k^K k_K}, \quad (4.36)$$

ここに、

$$G_\ell(m_1, m_2) \equiv [e^{i\theta^c T^c m_1}]_{ba} \text{tr}[e^{i(\theta^c \tau_\ell^c - \beta_\ell) m_2} \tau_\ell^a \tau_\ell^b]. \quad (4.37)$$

他のダイアグラムも同様に計算して、

$$i \text{ (loop with wavy line and dashed arrow) } = -\frac{1}{2} g^2 \sum_{m_1, m_2} G_{\text{adj}}(m_1, m_2) \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R(p_5 m_1 + k_5 m_2)} \\ \times \frac{(k+p)^M k_M}{p^N p_N (k+p)^L (k+p)_L k^K k_K}, \quad (4.38)$$

$$i \text{ (loop with wavy line and star) } = 2g^2 \sum_{m_1, m_2} G_{\text{adj}}(m_1, m_2) \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R(p_5 m_1 + k_5 m_2)} \\ \times \frac{k^M k_M + k^M p_M + p^M p_M}{p^N p_N (k+p)^L (k+p)_L k^K k_K}, \quad (4.39)$$

$$i \text{ (loop with two stars) } = -5g^2 \sum_{m_1, m_2} G_{\text{adj}}(m_1, m_2) \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R(p_5 m_1 + k_5 m_2)} \\ \times \frac{1}{k^M k_M p^N p_N}, \quad (4.40)$$

ここに、

$$G_{\text{adj}}(m_1, m_2) \equiv [e^{i\theta^c T^c m_1}]_{ba} \text{tr}[e^{i\theta^c T^c m_2} T^a T^b]. \quad (4.41)$$

ダイアグラム (4.36), (4.38), (4.39), (4.40) のループ積分は次の公式を用いると 1 つの積分に帰着できる:

$$\int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R(p_5 m_1 + k_5 m_2)} \frac{a k^M k_M + 2b k^M p_M + c p^M p_M}{p^N p_N (k+p)^L (k+p)_L k^K k_K} \\ = -b F(m_1) F(m_2) - (a-b) F(m_1 - m_2) F(m_2) - (c-b) F(m_1) F(m_2 - m_1), \quad (4.42)$$

ここに,

$$F(m) \equiv i \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{e^{-i2\pi R k_5 m}}{k^K k_K}. \quad (4.43)$$

$m \neq 0$  に対して,  $F(m)$  は次式で評価できる (付録 B.1 で証明する):

$$F(m) = \frac{1}{64\pi^5 |m|^3 R^3}, \quad m \neq 0. \quad (4.44)$$

$F(0)$  は質量次元 3 で発散する積分である. 我々は以下の条件を満たす正則化で  $F(0) = 0$  となることを示した (付録 B.2 で証明する):

- 積分を有限にする.
- 運動量のシフトに対して積分が不変.
- 運動量の反転に対しても不変.
- ゲージ対称性の保持:  $p_M \Pi^{MN}(p) = 0$ . ただし,  $\Pi^{MN}(p)$  はゲージ場の伝搬関数.

次の恒等式,

$$G_\ell(m_1, m_2) = G_\ell(m_2 - m_1, m_2), \quad (4.45)$$

$$G_{\text{adj}}(m_1, m_2) = G_{\text{adj}}(m_2 - m_1, m_2) = G_{\text{adj}}(-m_2, -m_1) \quad (4.46)$$

が成り立ち (付録 A.3 で証明する), これを用いると 2 ループ・レベルでの  $V_{\text{eff}}(\theta)$  の表式を以下の形にまとめることができる:

$$V_{\text{eff}}^{2L}(\theta) = -3g^2 \sum_\ell \sum_{m_1, m_2} G_\ell(m_1, m_2) [2F(m_1)F(m_2) - F(m_1)F(m_2 - m_1)] \\ + \frac{9}{4}g^2 \sum_{m_1, m_2} G_{\text{adj}}(m_1, m_2) F(m_1)F(m_2). \quad (4.47)$$

$F(m) \sim |m|^{-3}$  であり,  $G_\ell(m_1, m_2)$  および  $G_{\text{adj}}(m_1, m_2)$  は式 (4.37) および (4.41) から指数関数的な依存性を持ち,  $O(1)$  で振動する. したがって, 2 ループ・レベルでもヒッグス

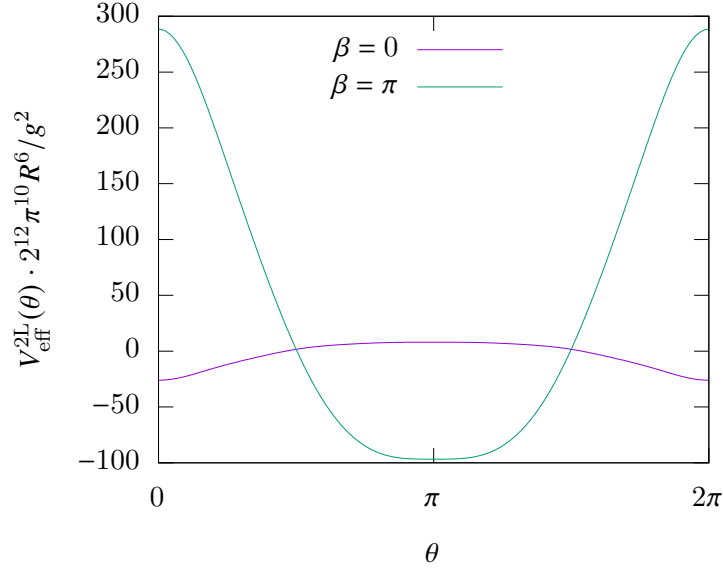


図 4.2  $\mathbf{M}^4 \times S^1$  上で定義された  $SU(2)$  ゲージ理論におけるヒッグス・ポテンシャルへの 2 ループ・ダイアグラムからの寄与。フェルミオンは 1 種類のみで、随伴表現に属しているとする。  $\beta = 0, \pi$  はフェルミオンが周期的、反周期的な境界条件を満たすことに対応する。一般に、空間が単連結でないときに AB 位相  $\theta$  のポテンシャルはループ補正を受け、ポテンシャルの  $\theta$  依存性は物質場の境界条件によって異なる。

の有効ポテンシャルは有限である。随伴表現のフェルミオンが 1 種類だけ存在する  $SU(2)$  ゲージ理論でのヒッグス・ポテンシャルの概形を図 4.2 に示す。

先行研究 [27, 28] では  $U(1)$  ゲージ理論で  $V_{\text{eff}}(\theta)$  を計算している。上記の結果において  $T^a \rightarrow 0$ ,  $\tau_\ell^a \rightarrow Q_\ell$  ( $Q_\ell$  は  $\psi_\ell$  の  $U(1)$  チャージ) と置き換えて  $U(1)$  理論での結果を得る。このときの結果は先行研究の結果と  $\theta$  に依存しない定数の差を除いて一致する。

#### 4.4 高次ループ補正の発散

ここまで、2 ループ・レベルまでのヒッグス・ポテンシャルの有限性を示した。本節では 3 ループ・レベル以上におけるヒッグス・ポテンシャルの有限性について議論する。そして実際にヒッグス・ポテンシャルが発散することを示す。この際、より低次のループ・レベルから発散が現れるようにするため、 $\mathbf{M}^5 \times S^1$  上の  $SU(N)$  ゲージ理論をまず考える ( $\mathbf{M}^5$  は 5 次元ミンコフスキー時空)。この 6 次元理論において、ヒッグス・ポテンシャルが 3 ループ・レベルで対数発散することを示す。その後、 $\mathbf{M}^4 \times S^1$  上の  $U(1)$  ゲージ理論において、ヒッグス・ポテンシャルが少なくとも 4 ループ・レベルで対数発散することを示す。



#### 4.4.1 $M^5 \times S^1$ 時空上における 3 ループ・レベルでの発散

まず, 2 ループ・レベルまででヒッグス・ポテンシャルが有限になった理由について考察する. 1 ループ・レベルでは, 巻き付き数  $m$  が零でないときだけループ積分が  $\theta$  に依存し, 並進演算子  $e^{-i2\pi Rk_5 m}$  によって積分は有限になる. 2 ループ・レベルが有限になる理由は, 伝搬関数と波動関数繰り込みが互いに  $\theta$  依存性を打ち消しあうためと, ループ積分が 2 つの 1 ループ積分  $F(m)$  に分割され, ゲージ対称性によって  $F(0)$  が有限になるためである.

しかしながら, これらの特徴はダイアグラムのトポロジーが複雑になる高次のループ・レベルで必ずしも現れるわけではない. したがって, 3 ループ・レベル以上ではヒッグス・ポテンシャルが有限になる保証はないと言える. 我々はゲージ結合の相殺項は許しているので, ラグランジアン (4.3) に存在しない高次元項で相殺するような発散を見つけなければならぬ. 実際, 見かけ上発散するループ積分は存在し, 例えば, 1 ループ・レベルで 4 フェルミ相互作用を表すダイアグラムがある:

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}, \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}, \quad (\text{crossed}), \quad (4.48)$$

ここに, (crossed) は, はじめの 2 つのダイアグラムに対して 2 つのフェルミオンの外線を最後に交差させるダイアグラムを表す.  $d$  次元ミンコフスキー時空上でのこれらのダイアグラムの見かけ上の発散の次数を計算すると, ループにゲージ・ボソンとフェルミオンのプロパゲータが 2 つずつ含まれているから,

$$(\text{見かけの発散次数}) = d - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = d - 6. \quad (4.49)$$

すなわち, 4 フェルミ相互作用は 1 ループ・レベルにおいて 5 次元以下では収束し, 6 次元以上で見かけ上は発散する.  $d = 6$  のとき, ループ積分は対数発散すると推測される.

そこで,  $M^5 \times S^1$  時空上で 4 フェルミ相互作用のダイアグラムが発散するかどうか実際に確認する. このとき, ラグランジアンとして式 (4.3) を 6 次元に拡張したものを採用する<sup>3)</sup>. ただし, フェルミオンは 1 種類を仮定し, フレーバの添字  $l$  を以降では用いない.

ダイアグラムの発散部分はループ積分において, 外線の運動量や  $\theta$  が無視できるほど小さいと言えるぐらいに十分に大きな運動量の積分領域である. 外線の運動量と  $\theta$  を全て零

<sup>3)</sup> ディラック代数が 6 次元であることに対応して, フェルミオンが 8 成分ディラック・スピノールになることに注意する.

にとってダイアグラムを計算すると、

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \end{array} \right]_{\text{div}} \\
& = g^4 \sum_m \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{k^I k^J}{(k^K k_K)^4} e^{-i2\pi R k_5 m} [\gamma^L \gamma_I \gamma^M \tau^c \tau^a]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_J \gamma_L \tau^a \tau^c - \gamma_L \gamma_J \gamma_M \tau^c \tau^a]_{\gamma\delta} \\
& \quad - (\alpha \leftrightarrow \gamma), \quad (4.50)
\end{aligned}$$

ここに、 $\alpha, \gamma$  は  $\bar{\psi}$  に対するスピノールの添字で、 $\beta, \delta$  は  $\psi$  に対するスピノールの添字である。  $m \neq 0$  のときは位相因子のために積分は収束する。  $m = 0$  の場合に積分は発散し、  $D = 6 - 2\epsilon$  として次元正則化して評価すると、

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^I k^J}{(k^K k_K)^4} &= -\frac{1}{4} \left[ \partial^M \partial^N \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^K k_K)^4} e^{-i2k^L x_L} \right]_{x=0} \\
&\sim \frac{-i\eta^{MN}}{768\pi^3 \epsilon}. \quad (4.51)
\end{aligned}$$

ただし、  $\text{Re}(s) > 0$  のとき、

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^K k_K)^{-s} e^{-i2k^L x_L} = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - s)}{\Gamma(s)} e^{i\pi s} (-x^M x_M)^{s-D/2} \quad (4.52)$$

であることを用いた (付録 B.1 に証明がある)。したがって、4 フェルミ相互作用のダイアグラム (4.50) はエネルギーのカット・オフ  $\Lambda$  に対して  $\log \Lambda$  で発散する。これは上述の見かけの発散次数の評価において予測した通りである。

この発散を打ち消すためにラグランジアンに加える相殺項は次式で与えられる:

$$\mathcal{L}_{\text{CT}} = \frac{\delta_{4F}}{2} [\bar{\psi} \gamma^M \gamma^N \gamma^L \tau^a \tau^b \psi] \left[ \bar{\psi} \left( \gamma_M \gamma_N \gamma_L \tau^a \tau^b - \gamma_L \gamma_N \gamma_M \tau^b \tau^a \right) \psi \right], \quad (4.53)$$

ここに、

$$\delta_{4F} = \frac{g^4}{768\pi^3 \epsilon} + \delta_{4F}^{\text{fin}}. \quad (4.54)$$

式 (4.54) の右辺第 1 項がダイアグラムの発散を打ち消す。  $\delta_{4F}^{\text{fin}}$  は任意定数である。

$\mathcal{L}_{\text{CT}}$  からヒッグス・ポテンシャルへの寄与  $V_{\text{CT}}(\theta)$  を求める。  $1/\epsilon$  に比例する項は打ち消し合うので、  $\delta_{4F}^{\text{fin}}$  に比例する項からの寄与を求めると、

$$\begin{aligned}
V_{\text{CT}}(\theta) &= \sum_{m_1 \neq 0} \sum_{m_2 \neq 0} \frac{\delta_{4F}^{\text{fin}} \mathcal{N}}{8\pi^{16} R^{10} m_1^5 m_2^5} \left\{ 2 \text{tr} \left[ \tau^a e^{i(\theta^b \tau^b - \beta)m_1} \right] \text{tr} \left[ \tau^a e^{i(\theta^b \tau^b - \beta)m_2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \text{tr} \left[ \tau^a e^{i(\theta^b \tau^b - \beta)m_1} \tau^a e^{i(\theta^b \tau^b - \beta)m_2} \right] \right\}. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

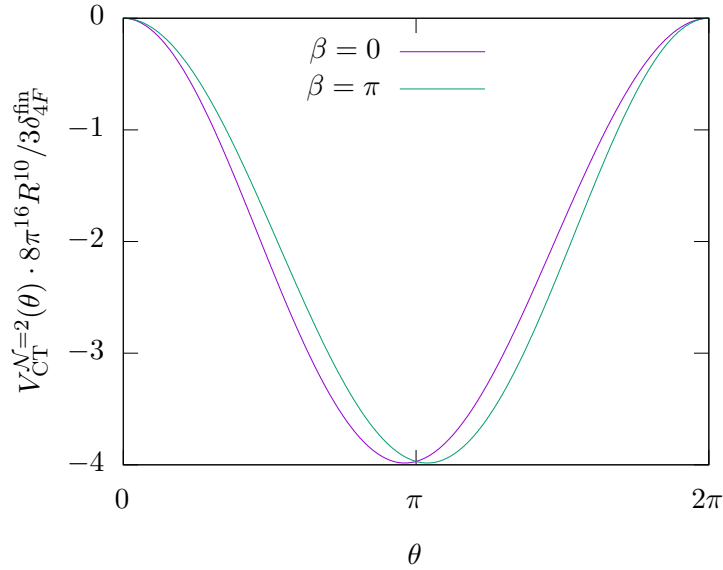


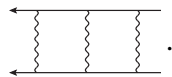
図 4.3 4 フェルミ相互作用の繰り込みからのヒッグス・ポテンシャルへの寄与. 時空は  $\mathbf{M}^5 \times S^1$  とする. フェルミオンとして 1 種類の基本表現だけを仮定する. ゲージ結合以外の相互作用の繰り込みからの寄与は, 我々の基準においてヒッグス・ポテンシャルが発散することを示す.

この寄与は非零であり, したがって, ヒッグス・ポテンシャルは 4 フェルミ相互作用の発散の寄与を受ける. これは我々が採用する基準によりヒッグス・ポテンシャルが発散することを意味する. ゲージ対称性が  $SU(2)$  のとき,  $V_{CT}(\theta)$  のグラフを図 4.3 に示す.

#### 4.4.2 $\mathbf{M}^4 \times S^1$ 時空上における 4 ループ・レベルでの発散

本小節では, 前小節での議論をさらに進め, より現実的な時空である  $\mathbf{M}^4 \times S^1$  上で 4 フェルミ・ダイアグラムの発散を評価する. 計算を簡単にするため, 本小節ではアーベリアン・ゲージ理論で調査する<sup>4)</sup>. このとき,  $T^a \rightarrow 0$ ,  $\tau^a \rightarrow Q$  ( $Q$  は  $\psi$  の  $U(1)$  チャージ) と置き換えられる.

まず, 以下の対数発散するダイアグラムを考える:



<sup>4)</sup> ヒッグス・ポテンシャルの有限性の予想は非可換ゲージ理論における有限性であるが,  $SU(N)$  ゲージ理論で有限ならば  $T^a \rightarrow 0$ ,  $\tau^a \rightarrow Q$  ( $Q$  は  $\psi$  の  $U(1)$  チャージ) の置き換えにより可換ゲージ理論でも有限であるので, 対偶を考えることにより可換ゲージ理論での発散の存在は  $SU(N)$  ゲージ理論における発散を示したことになる.

この図の発散部分を評価するため、外線の運動量を無視すると、

$$\begin{aligned}
\left. \text{---} \right|_{\text{div}} &= \frac{1}{2\pi R} \sum_{n_1} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi R} \sum_{n_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\
&\times \left[ iQg\gamma^M \frac{i}{-(\gamma^\mu p_\mu - \gamma_5 \frac{n_1}{R})} iQg\gamma^N \frac{i}{\gamma^\mu k_\mu - \gamma_5 \frac{n_2}{R}} iQg\gamma^L \right]_{\alpha\beta} \\
&\times \frac{-i}{p^\mu p_\mu - (\frac{n_1}{R})^2} \frac{-i}{(p+k)^\mu (p+k)_\mu - (\frac{n_1+n_2}{R})^2} \frac{-i}{k^\mu k_\mu - (\frac{n_2}{R})^2} \\
&\times \left[ iQg\gamma_M \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - \gamma_5 \frac{n_1}{R}} iQg\gamma_N \frac{i}{-(\gamma^\mu k_\mu - \gamma_5 \frac{n_2}{R})} iQg\gamma_L \right]_{\gamma\delta}, \quad (4.56)
\end{aligned}$$

ここに、 $\alpha$  および  $\gamma$  は  $\bar{\psi}$  のスピンの添字であり、 $\beta$  および  $\delta$  は  $\psi$  のスピンの添字である。総和の記号は全ての整数に渡り和をとる。付録 A.1 で示すように、我々は以下の公式を用いる:

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_n S\left(\frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R}\right) = \sum_m e^{i\Theta m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_5}{2\pi} e^{-i2\pi R k_5 m} S(k_5), \quad (4.57)$$

ここに、 $\Theta$  は任意のエルミート行列である。 $S(\cdot)$  は任意の解析的関数またはその行列関数への拡張である。 $\Theta = 0$  について式 (4.57) を適用すると、

$$\begin{aligned}
\left. \text{---} \right|_{\text{div}} &= -iQ^6 g^6 \sum_{m_1, m_2} \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R(m_1 p_5 + m_2 k_5)} \\
&\times \frac{p^P k^Q p^R k^S}{(p^2)^3 (p+k)^2 (k^2)^3} \\
&\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_R \gamma_N \gamma_S \gamma_L]_{\gamma\delta}. \quad (4.58)
\end{aligned}$$

ここで  $I$  を次式で定義する:

$$I = I(x, y) \equiv - \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(p^2)^3 (p+k)^2 (k^2)^3} e^{-i2(p \cdot x + k \cdot y)}, \quad (4.59)$$

ここで  $x$  と  $y$  は空間的ベクトルである。 $I$  の定義を用いると、式 (4.58) は  $I$  の微分で表せる:

$$\int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{p^P k^Q p^R k^S}{(p^2)^3 (p+k)^2 (k^2)^3} e^{-i2\pi R(m_1 p_5 + m_2 k_5)} = -2^{-4} \partial_x^P \partial_y^Q \partial_x^R \partial_y^S I \Big|_{\substack{x^M = \delta_5^M m_1 \pi R \\ y^M = \delta_5^M m_2 \pi R}}. \quad (4.60)$$

$k$  および  $p$  空間の角度について積分すると、

$$I \propto \int_0^\infty d|p_E| |p_E|^{a-1} K_r(2b\sqrt{-y^2}|p_E|) {}_0F_1\left(\frac{a+r}{2}; (x-\beta y)^2 |p_E|^2\right), \quad (4.61)$$

ここで、 $a, b, r$  および  $\beta$  は  $x$  および  $y$  と独立な定数であり、 $K_r(z)$  は修正第2種ベッセル関数、 ${}_0F_1(a; z)$  は一般化された超幾何関数である。 ${}_0F_1(a; z)$  は第1種ベッセル関数  $J_\alpha(z)$  と以下の関係にある：

$$J_\alpha(2z) = \frac{(z)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_0F_1(\alpha+1; -z^2). \quad (4.62)$$

式(4.62)を式(4.61)へ代入すると、非積分関数が  $J_\alpha, K_r$  および  $|p_E|$  の冪の積で表せる。したがって、 $I$  の紫外発散は  $y^M = \delta_5^M m_2 \pi R \neq 0$  の場合における  $K_r$  の指数的振る舞いにより抑制される。 $I(x, y) = I(y, x)$  ゆえに、 $x^M = \delta_5^M m_1 \pi R \neq 0$  の場合も  $I$  の紫外発散は無い。

$I$  の紫外発散を評価するため、 $m_1 = m_2 = 0$  とおく。式(B.40)を式(4.60)へ代入して、

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{p^P k^Q p^R k^S}{(p^2)^3 (p+k)^2 (k^2)^3} \Big|_{\text{div}} \\ &= -\frac{1}{2^4} \frac{1}{(4\pi)^5 \cdot 16\epsilon} \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \alpha^2 (1-\alpha)^{-4} (1-\beta)^2 \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right]^{-\frac{9}{2}} \\ & \quad \times \partial_x^P \partial_y^Q \partial_x^R \partial_y^S \left[ -(x-\beta y)^2 - y^2 \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right) \right]^2 \Big|_{x=y=0}. \quad (4.63) \end{aligned}$$

上式の微分は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} & \partial_x^P \partial_y^Q \partial_x^R \partial_y^S \left[ -(x-\beta y)^2 - y^2 \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right) \right]^2 \\ &= 8\beta^2 (\eta^{PQ} \eta^{RS} + \eta^{PS} \eta^{QR}) + 8\eta^{PR} \eta^{QS} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta \right). \quad (4.64) \end{aligned}$$

付録B.3で示すように、

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \alpha^{s-1} (1-\alpha)^{-s-1} \beta^{t-1} (1-\beta)^{u-1} \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right]^v \\ &= B(s, -s-v) B(s+t+v, s+u+v) \quad (4.65) \end{aligned}$$

ここに、

$$B(x, y) \equiv \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (4.66)$$

この公式を用いると、

$$\begin{aligned} & \left[ \text{diagram} \right]_{\text{div}} = \frac{iQ^6 g^6}{2^{14} \cdot 105 \pi^4 \epsilon} (\eta^{PQ} \eta^{RS} + \eta^{PS} \eta^{QR} + 22\eta^{PR} \eta^{QS}) \\ & \quad \times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_R \gamma_N \gamma_S \gamma_L]_{\gamma\delta}. \quad (4.67) \end{aligned}$$



上式では  $\gamma^M$  についてトレースをとってある。式 (4.57) を用いると、

$$V_{\text{CT}}(\theta) = \frac{\delta_{4\text{F}}^{\text{fin}}}{2} \sum_{m_1, m_2} \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \frac{p^A}{p^2} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k^B}{k^2} e^{-i2\pi R(m_1 p_5 + m_2 k_5)} \\ \times \sum_{\mathcal{X}} C_{\mathcal{X}} \left\{ \text{tr} \left[ G_{\mathcal{X}}^{(1)} \gamma_A e^{i(Q\theta - \beta)m_1} \right] \text{tr} \left[ G_{\mathcal{X}}^{(2)} \gamma_B e^{i(Q\theta - \beta)m_2} \right] \right. \\ \left. - \text{tr} \left[ G_{\mathcal{X}}^{(1)} \gamma_A e^{i(Q\theta - \beta)m_1} G_{\mathcal{X}}^{(2)} \gamma_B e^{i(Q\theta - \beta)m_2} \right] \right\}. \quad (4.77)$$

先行研究 [29] において以下を示した:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-k^2 - i\epsilon)^{-s} e^{-i2k \cdot x} = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - s)}{\Gamma(s)} (-x^2)^{s-D/2}. \quad (4.78)$$

この公式より、以下を得る:

$$V_{\text{CT}}(\theta) = \frac{9\delta_{4\text{F}}^{\text{fin}}}{2^{15}\pi^{12}R^8} \sum_{m_1 \neq 0} \sum_{m_2 \neq 0} \frac{m_1 m_2}{|m_1|^5 |m_2|^5} e^{i(Q\theta - \beta)(m_1 + m_2)} \\ \times \sum_{\mathcal{X}} C_{\mathcal{X}} \left\{ \text{tr} \left[ G_{\mathcal{X}}^{(1)} \gamma_5 \right] \text{tr} \left[ G_{\mathcal{X}}^{(2)} \gamma_5 \right] - \text{tr} \left[ G_{\mathcal{X}}^{(1)} \gamma_5 G_{\mathcal{X}}^{(2)} \gamma_5 \right] \right\}. \quad (4.79)$$

各 4 フェルミ・ダイアグラムからの寄与は付録 C に示した。  $Q = 1$  のチャージを持つフェルミオン 1 種が存在するアーベリアン・ゲージ理論において、  $V_{\text{CT}}(\theta)$  が 1 ループ・レベルのヒッグス・ポテンシャル  $V_{\text{eff}}^{\text{1L}}$  に与える不定性を図 4.4 に示す。したがって、ヒッグス・ポテンシャルの  $\theta$  依存部分は高次元演算子の繰り込み条件に依存し、本理論においてヒッグス・ポテンシャルは少なくとも 4 ループ・レベルから対数発散の補正を受ける。

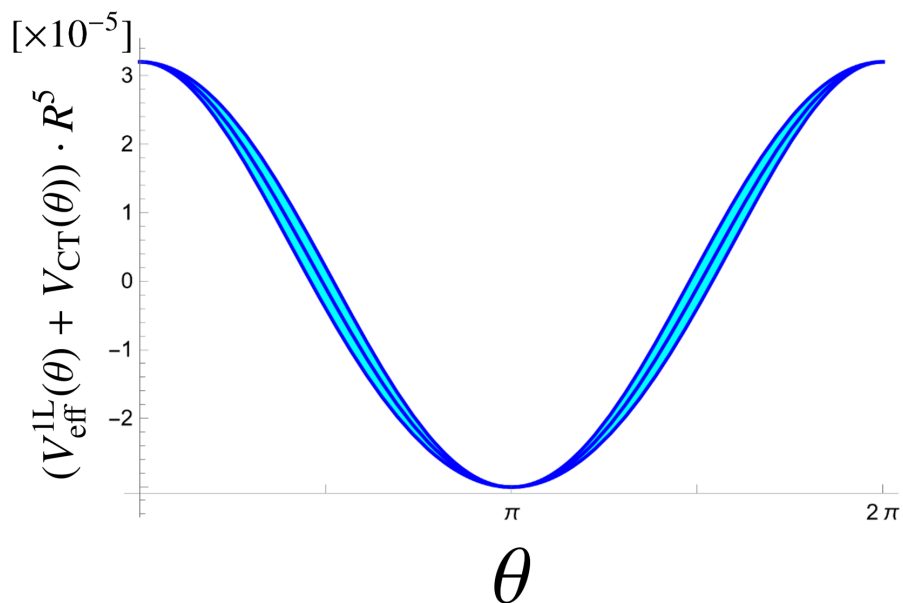


図 4.4 アーベリアン・ゲージ理論における 1 ループ・レベルでのヒッグス・ポテンシャル  $V_{\text{eff}}^{1L}$  と  $V_{\text{CT}}(\theta)$  から与えられる不定性。フェルミオンは 1 種であり、その  $U(1)$  チャージ  $Q$  は 1 である。質量次元パラメータ  $\Lambda$  は  $2/R$ ,  $\beta$  は 0 とする。  $V_{\text{CT}}$  の  $\theta$  依存性はヒッグス・ポテンシャルが他の繰り込み不可能な理論と同様に高次元演算子の繰り込み条件による不定性を受けることを示す。したがって、ヒッグス・ポテンシャルは高次元演算子の無いラグランジアンだけでは有限とならず、発散を相殺するためにはゲージ結合定数以外のパラメータの繰り込みが必要である。この結果は、ヒッグス・ポテンシャルが有限になるという予想への反例となっている。



## 第 5 章

### 結論

我々は、 $\mathbf{M}^4 \times S^1$  時空上で定義された  $SU(N)$  GHU を考え、この模型におけるヒッグス・ポテンシャルの有限性について議論した。

GHU は高次元時空上で定義されるゲージ理論であり、ヒッグス・ボソンをゲージ・ボソンの余剰次元成分と同定する。5 次元 GHU においてヒッグス・ボソンのポテンシャルはツリー・レベルで零だが、余剰次元が  $S^1$  のような非単連結な空間の場合、ヒッグス・ポテンシャルは量子補正を受け、ヒッグス・ボソンが非零の真空期待値を持つことにより、自発的な対称性の破れが起きる。

高次元のゲージ理論は繰り込み不可能であるにもかかわらず、1 ループ・レベルにおいてヒッグス・ポテンシャルが有限になることが示され、摂動の任意の次数においてヒッグス・ポテンシャルが有限になると予想された。この予想が正しければ、ヒッグス・ポテンシャルはゲージ結合定数以外のパラメータで繰り込むような発散を持たず、GHU には高い予言能力があると期待される。しかしながら、非可換ゲージ理論においてヒッグス・ポテンシャルを 2 ループ・レベル以上で計算するには技術的な困難があり、アーベリアン・ゲージ理論でのみ 2 ループ計算がされていただけだった。

我々は非可換ゲージ理論の GHU においてヒッグス・ポテンシャルを 2 ループ・レベルで評価することを目標とし、ヒッグス・ポテンシャルを計算した。ループ積分を評価するにあたり、我々は重ね合わせコンパクト化という計算手法を用いた。この手法は  $S^1$  方向の不連続な運動量に関する和を連続な運動量積分に書き換え、 $\mathbf{M}^4 \times S^1$  上の積分と和を  $\mathbf{M}^5$  上の積分で表す。これにより、我々はループ積分中の行列要素を積分の外に取り出すことができる。

結果として、我々は  $SU(N)$  GHU でヒッグス・ポテンシャルが 1 ループおよび 2 ループ・レベルで有限になることを示した。1 ループ・レベルでの有限性は並進演算子  $e^{-i2\pi Rmk_5}$  によって非零の巻き付き数のときに積分が収束するためである。2 ループ・レベルでは 2 つのループの片方で巻き付き数が零である場合にループ積分の発散がヒッグス・ポテンシャルに寄与する可能性がある。しかしながら、発散するループ積分  $F(0)$  はゲージ対称性により有限になり、AB 位相  $\theta$  に依存する発散は無かった。このことと、プロパゲータと波動関数繰り込みが互いに  $\theta$  依存性を打ち消しあうことが 2 ループ・レベルでの有限性の原因である。この結果は、例えばヒッグス・ボソンの質量のようなヒッグス・ポテンシャルの  $\theta^a$  による微分から得られる物理量に関して、2 ループ・レベルまでは理論のカット・オフ依存性が存在しないことを意味する。

さらに、我々は 3 ループ・レベル以上でのヒッグス・ポテンシャルの有限性について議論した。4 フェルミ相互作用のダイアグラムを計算した結果、2 ループ・レベルでダイアグラムが対数で発散した。対応する相殺項からのヒッグス・ポテンシャルへの寄与は零ではなく、ヒッグス・ポテンシャルはカット・オフ  $\Lambda$  の対数だけの不定性を少なくとも含むことが分かった。したがって、ヒッグス・ポテンシャルは GHU においても有限ではなく、高次元演算子の繰り込み条件が必要であるとわかった。この結果は GHU でヒッグス・ポテンシャルが有限であることへの反例である。

## 謝辞

共同研究者である久野純治教授と庄司裕太郎特任助教(当時)には、本研究への参加を提案して頂き、大変感謝しております。久野純治教授には、ご多忙にもかかわらず、辛抱強く指導して頂きました。研究発表の練習にお付き合い頂いたり、発表資料作成におけるご助言を頂き、大変お世話になりました。重ねて深く感謝申し上げます。庄司裕太郎特任助教(当時)には、研究内容について非常に多くの質問にお答えして頂きました。どのような質問であっても丁寧にお答えいただき、学ぶことが多かったです。また、研究の進み具合や体調まで気にかけて頂き、つらいときにも支えて頂きました。ここに深く感謝致します。名古屋大学素粒子論研究室の他の教員の方々にも、研究室における生活を通して多くのご助言をして頂きました。ここに感謝の意を表します。研究室の先輩方、同期、後輩たちには議論の相手をしてもらったり、ともに楽しい時間を過ごさせてもらい、とても感謝しています。最後に、育ててくれた父と母に深く感謝致します。父は私が勉強したいと言えばいつでも応援し、支えてくれました。母は私が好きなことをして育つことを一番に考えてくれました。良き両親に恵まれたことを誇りに思います。

## 付録 A

# 公式の証明

### A.1 重ね合わせコンパクト化

まず,  $\Theta$  をユニタリ行列  $U$  で対角化して,

$$U^{-1}\Theta U = \text{diag}(v_1, v_2, \dots). \quad (\text{A.1})$$

$S(\cdot)$  は解析的な関数だから,

$$\left[ S\left(\frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R}\right) \right]_{ab} = U_{ac} S\left(\frac{n}{R} + \frac{v_c}{2\pi R}\right) U_{cb}^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

デルタ関数を用いると,

$$\left[ S\left(\frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R}\right) \right]_{ab} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_5}{2\pi} S(k_5) U_{ac} 2\pi \delta\left(k_5 - \frac{n}{R} - \frac{v_c}{2\pi R}\right) U_{cb}^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

ポアソンの和公式より,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta\left(p - \frac{n}{R}\right) = 2\pi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi Rpn} \quad (\text{A.4})$$

だから,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ S\left(\frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R}\right) \right]_{ab} = 2\pi R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_5}{2\pi} S(k_5) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{ac} e^{-i2\pi R\left(k_5 - \frac{v_c}{2\pi R}\right)n} U_{cb}^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

次の恒等式,

$$e^{-i2\pi R\left(k_5 - \frac{v_c}{2\pi R}\right)n} \delta_{cd} = \left[ e^{-i2\pi R\left(k_5 - \frac{\text{diag}(v_1, v_2, \dots)}{2\pi R}\right)n} \right]_{cd} \quad (\text{A.6})$$

より, 式 (A.5) から,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{n}{R} + \frac{\Theta}{2\pi R}\right) = 2\pi R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_5}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi R\left(k_5 - \frac{\Theta}{2\pi R}\right)n} S(k_5). \quad (\text{A.7})$$

## A.2 行列関数と表現行列の順序交換

$\tau^a$  を  $SU(N)$  の任意の表現,  $T^a$  を随伴表現とする.  $\lambda^a$  を複素数として, 交換関係より,

$$\begin{aligned} [\lambda^a \tau^a, \tau^b] &= \lambda^a i f^{abc} \tau^c \\ &= -\lambda^a T_{bc}^a \tau^c \\ &= \tau^c (\lambda^a T^a)_{cb}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

これを用いると,  $n$  を自然数として,

$$\begin{aligned} (\lambda^a \tau^a)^n \tau^b &= (\lambda^a \tau^a)^{n-1} \tau^c [\delta^{cb} \lambda^a \tau^a + \lambda^a T_{cb}^a 1_\tau] \\ &= (\lambda^a \tau^a)^{n-2} \tau^d [\delta^{dc} \lambda^a \tau^a + \lambda^a T_{dc}^a 1_\tau] [\delta^{cb} \lambda^a \tau^a + \lambda^a T_{cb}^a 1_\tau] \\ &= \dots \\ &= \tau^c [(1_{\text{adj}} \otimes \lambda^a \tau^a + \lambda^a T^a \otimes 1_\tau)^n]_{cb}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ここに,  $1_{\text{adj}}$ ,  $1_\tau$  はそれぞれ随伴表現,  $\tau^a$  が属す表現の単位行列である.  $S(\cdot)$  が解析的な関数のとき,  $S(\lambda^a \tau^a)$  はテイラー展開から  $\lambda^a \tau^a$  の冪級数としてあらわされる. したがって,

$$S(\lambda^a \tau^a) \tau^b = \tau^c [S(1_{\text{adj}} \otimes \lambda^a \tau^a + \lambda^a T^a \otimes 1_\tau)]_{cb}. \quad (\text{A.10})$$

## A.3 $G_{\text{adj}}$ および $G_\ell$ の対称性

2式 (4.45) および (4.46) を示すには次式を示せば十分である:

$$[e^{i\lambda^c T^c}]_{ba} \text{tr} [e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} \tau^a \tau^b] = [e^{i(\bar{\lambda}^c - \lambda^c) T^c}]_{ba} \text{tr} [e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} \tau^a \tau^b], \quad (\text{A.11})$$

$$[e^{i\lambda^c T^c}]_{ba} \text{tr} [e^{i\bar{\lambda}^c T^c} T^a T^b] = [e^{-i\bar{\lambda}^c T^c}]_{ba} \text{tr} [e^{-i\lambda^c T^c} T^a T^b], \quad (\text{A.12})$$

ここに,  $\bar{\lambda}^a$  は任意の複素数である.

証明

付録 A.2 で示した式 (A.10) より,  $\tau^a$  に関してトレースをとっていることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr} \left[ e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} \tau^a \tau^b \right] &= \mathrm{tr} \left[ \tau^d (e^{i1_{\mathrm{adj}} \otimes \bar{\lambda}^c \tau^c + i\bar{\lambda}^c T^c \otimes 1_\tau})_{da} \tau^b \right] \\
&= \mathrm{tr} \left[ \tau^d e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} (e^{i\bar{\lambda}^c T^c})_{da} \tau^b \right] \\
&= (e^{i\bar{\lambda}^c T^c})_{da} \mathrm{tr} \left[ \tau^d e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} \tau^b \right].
\end{aligned} \tag{A.13}$$

よって,

$$\begin{aligned}
[e^{i\lambda^c T^c}]_{ba} \mathrm{tr} \left[ e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} \tau^a \tau^b \right] &= [e^{i\lambda^c T^c}]_{ba} [e^{i\bar{\lambda}^c T^c}]_{da} \mathrm{tr} \left[ \tau^d e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} \tau^b \right] \\
&= [e^{i\lambda^c T^c}]_{ba} [e^{-i\bar{\lambda}^c T^c}]_{ad} \mathrm{tr} \left[ \tau^d e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} \tau^b \right] \\
&= [e^{i(\lambda^c - \bar{\lambda}^c) T^c}]_{db} \mathrm{tr} \left[ e^{i\bar{\lambda}^c \tau^c} \tau^b \tau^d \right].
\end{aligned} \tag{A.14}$$

これは式 (A.11) を示したことになる.

成分を用いてトレースを表すことで式 (A.12) は証明できる:

$$\begin{aligned}
[e^{i\lambda^c T^c}]_{ba} \mathrm{tr} \left[ e^{i\bar{\lambda}^c T^c} T^a T^b \right] &= [e^{i\lambda^c T^c}]_{ba} [e^{i\bar{\lambda}^c T^c}]_{cd} T_{de}^a T_{ec}^b \\
&= [e^{-i\lambda^c T^c}]_{ab} [e^{-i\bar{\lambda}^c T^c}]_{dc} T_{be}^c T_{ea}^d \\
&= [e^{-i\bar{\lambda}^c T^c}]_{dc} \mathrm{tr} \left[ e^{-i\lambda^c T^c} T^c T^d \right].
\end{aligned} \tag{A.15}$$

式 (A.11) で  $\lambda^c = m_1 \theta^c$ ,  $\bar{\lambda}^c = m_2 \theta^c$  とおいて, さらに両辺に  $e^{-i\beta_\ell m_2}$  を掛ければ式 (4.45) になる. 式 (4.46) の第 1 等号は式 (A.11) において  $\tau^a \rightarrow T^a$  とすれば  $G_\ell$  のときと同様に示せる. 第 2 等号は式 (A.12) において  $\lambda^c = m_1 \theta^c$ ,  $\bar{\lambda}^c = m_2 \theta^c$  として示される.

## 付録 B

# ループ積分

### B.1 並進演算子を含むループ積分

次の積分を考える:

$$I = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-k^M k_M + 2p^M k_M + m^2 - i\epsilon)^{-s} e^{-i2k^M x_M}. \quad (\text{B.1})$$

ガンマ関数の定義より,  $\text{Im}(W) < 0$  かつ  $\text{Re}(s) > 0$  のとき,

$$W^{-s} = \frac{i^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt e^{-iWt} t^{s-1}. \quad (\text{B.2})$$

上式を用いて  $I$  を変形すると,

$$\begin{aligned} I &= \frac{i^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{i(k^M k_M - 2p^M k_M - m^2 + i\epsilon)t - i2k^M x_M} \\ &= \frac{i^s}{\Gamma(s)} e^{-i2p^M x_M} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-i\frac{x^M x_M}{t} - i(p^M p_M + m^2)t - \epsilon t} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik^M k_M t} \\ &= \frac{i^{s-D/2+1}}{\Gamma(s)(4\pi)^{D/2}} e^{-i2p^M x_M} \int_0^\infty dt t^{s-D/2-1} e^{-i\frac{x^M x_M}{t} - i(p^M p_M + m^2)t - \epsilon t}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

この積分は修正第 2 種ベッセル関数  $K_n(z)$  で表される:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^\infty dt t^{r-1} e^{-iBt + i\frac{C}{t} - \epsilon t - \frac{\delta}{t}} = 2(-i)^{r/2} \frac{C^{r/2}}{[i(B - i\epsilon)]^{r/2}} K_r \left( -2i^{3/2} \sqrt{iC(B - i\epsilon)} \right), \quad (\text{B.4})$$

ここに,  $\epsilon > 0$ ,  $C > 0$  であり,  $\delta > 0$  は正則化因子である.

以上より,  $0 < \text{Re}(s)$  かつ  $p^M p_M + m^2 \neq 0$  のときに  $I$  は収束し,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2i^{s/2-D/4+1}}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(s)} \frac{e^{-i2p^M x_M} (-x^M x_M)^{s/2-D/4}}{[i(p^M p_M + m^2 - i\epsilon)]^{s/2-D/4}} \\ &\quad \times K_{s-D/2} \left( -2i^{3/2} \sqrt{i(p^M p_M + m^2 - i\epsilon)(-x^M x_M)} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$n$  が自然数のとき,

$$K_{n+1/2}(x) = K_{-n-1/2}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r!(n-r)!} (2x)^{-r}. \quad (\text{B.6})$$

さらに,  $p^M p_M + m^2 = 0$  のとき,  $B \rightarrow 0$  ととれば,

$$\lim_{B \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^\infty dt t^{r-1} e^{-iBt + i\frac{C}{t} - \epsilon t - \frac{\delta}{t}} = C^r (-i)^r \Gamma(-r) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{B.7})$$

$0 < \text{Re}(s) < \frac{D}{2}$  かつ  $p^M p_M + m^2 = 0$  のときは,

$$\mathcal{I} = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - s)}{\Gamma(s)} e^{-i2p^M x_M} (-x^M x_M)^{s-D/2}. \quad (\text{B.8})$$

## B.2 運動量逆二乗積分の正則化

2ループのバブル・ダイアグラムで現れる以下の積分,

$$F(0) = i \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{k^M k_M}, \quad (\text{B.9})$$

この積分の収束性について議論する代わりに, 公理的に要請する次の条件を満たす正則化が存在することを示す:

- 積分を有限にする.
- 運動量のシフトに対して積分が不変.
- 運動量の反転に対しても不変.
- ゲージ対称性の保持:  $p_M \Pi^{MN}(p) = 0$ .

次の積分を定義する:

$$\Lambda^3 \equiv -iF(0) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{k^M k_M}, \quad (\text{B.10})$$

$$\Xi(p) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k+p/2)^M (k+p/2)_M (k-p/2)^N (k-p/2)_N}. \quad (\text{B.11})$$



このとき,

$$\int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \Xi(p) = (\Lambda^3)^2, \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k^M k^N}{(k+p/2)^L (k+p/2)_L (k-p/2)^K (k-p/2)_K} \\ &= \left( \frac{1+x}{5} \eta^{MN} - x \frac{p^M p^N}{p^L p_L} \right) \left[ \Lambda^3 - \frac{p^L p_L}{4} \Xi(p) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$x$  は積分のトレース・レス部分の係数である.

1 ループ・レベルで, ゲージ・ボソンの自己エネルギー・ダイアグラムの発散部分は,

$$\begin{aligned} & \left[ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \right] \Big|_{\text{div}} \\ &= \frac{g^2}{2} \Xi(p) \text{tr} [T^a T^d] \left[ -3 \left( \frac{1+x}{5} p^L p_L \eta^{MN} - x p^M p^N \right) + 4 \left( p^L p_L \eta^{MN} - p^M p^N \right) \right]_{db} \\ & \quad + 3g^2 \Lambda^3 \text{tr} [T^a T^d] \left[ 2 \left( \frac{1+x}{5} \eta^{MN} - x \frac{p^M p^N}{p^L p_L} \right) - \eta^{MN} \right]_{db}, \\ & \left[ \text{Diagram 4} \right] \Big|_{\text{div}} \\ &= -2g^2 \Xi(p) \text{tr} [\tau_\ell^a \tau_\ell^d] \left[ - \left( \frac{1+x}{5} p^L p_L \eta^{MN} - x p^M p^N \right) + p^L p_L \eta^{MN} - p^M p^N \right]_{db} \\ & \quad - 4g^2 \Lambda^3 \text{tr} [\tau_\ell^a \tau_\ell^d] \left[ 2 \left( \frac{1+x}{5} \eta^{MN} - x \frac{p^M p^N}{p^L p_L} \right) - \eta^{MN} \right]_{db}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

ここで, 外線の添字は  $(M, a)$  と  $(N, b)$  であり, 外線の運動量は  $p_M = \left( p_\mu, p_5 + \frac{\theta^a T^a}{2\pi R} \right)$  と定義している.

ゲージ不変性の条件から,

$$p^M p_M \Xi(p) (4x - 1) - 2(3 + 8x) \Lambda^3 = 0. \quad (\text{B.15})$$

上式の解のうち, 式 (B.12) と矛盾しない解は,

$$\Lambda^3 = 0, \quad x = \frac{1}{4}, \quad (\text{B.16})$$

$$\Xi(p) = \frac{\Lambda^3}{p^M p_M}, \quad x = -\frac{7}{12}, \quad (\text{B.17})$$

$$\Xi(p) = 0, \quad \Lambda^3 = 0. \quad (\text{B.18})$$

2 番目の解は  $p = 0$  で発散するので不適である.

以上より,

$$\Lambda^3 = 0. \quad (\text{B.19})$$

実際, 次元正則化をすると,

$$\Lambda^3 = 0, \quad x = \frac{1}{4}, \quad \Xi(p) = -\frac{i}{128\pi} \sqrt{-p^M p_M}. \quad (\text{B.20})$$

### B.3 2ループ積分

以下の積分について考える:

$$\mathcal{I} \equiv \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-p^2 - i\epsilon]^{-s} [-(p+k)^2 - i\epsilon]^{-t} [-k^2 - i\epsilon]^{-u} e^{-i2(p \cdot x + k \cdot y)}, \quad (\text{B.21})$$

ここに,  $s, t, u$  は  $s+t+u > D$  を満たす正の定数であり,  $x, y$  は  $p$  および  $k$  に依存しない空間的ベクトルである.

まず, ファインマン・パラメータの方法により,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \\ &\quad \times \frac{\alpha^{s-1} \beta^{t-1} (1-\alpha-\beta)^{u-1}}{[-\alpha p^2 - \beta(p+k)^2 - (1-\alpha-\beta)k^2 - i\epsilon]^{s+t+u}} \frac{\Gamma(s+t+u)}{\Gamma(s)\Gamma(t)\Gamma(u)} e^{-i2(p \cdot x + k \cdot y)}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

先行研究 [29] において以下を示した:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-k^2 + 2p \cdot k + m^2 - i\epsilon)^{-s} e^{-i2k \cdot x} \\ &= \frac{2i}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(s)} \frac{e^{-i2p \cdot x} (-x^2)^{s/2-D/4}}{(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{s/2-D/4}} K_{s-D/2} \left( 2\sqrt{(-x^2)(p^2 + m^2 - i\epsilon)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

ここで  $\text{Re}(s) > 0$ ,  $p^2 + m^2 \neq 0$ .  $K_r(z)$  は修正第 2 種ベッセル関数である. この公式を用いて,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{2i(-y^2)^{\frac{s+t+u}{2}-\frac{D}{4}}}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(s)\Gamma(t)\Gamma(u)} \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \\ &\quad \times \alpha^{s-1} (1-\alpha)^{-s-1} \beta^{t-1} (1-\beta)^{u-1} e^{-i2p \cdot (x-\beta y)} \\ &\quad \times \left\{ -\left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right] p^2 - \frac{i\epsilon}{1-\alpha} \right\}^{-\frac{s+t+u}{2} + \frac{D}{4}} \\ &\quad \times K_{s+t+u-\frac{D}{2}} \left( 2\sqrt{(-y^2) \left\{ -\left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right] p^2 - \frac{i\epsilon}{1-\alpha} \right\}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

ただし,  $\beta$  を  $(1-\alpha)\beta$  に変換している.

2 次方程式  $(x-\beta y)^2 = 0$  には  $\beta \in (0, 1)$  の範囲で互いに異なる解が存在し得る. その数を  $n$  と表すとき,  $\beta$  に渡る積分を  $(x-\beta y)^2$  の符号に応じて  $n+1$  個に分けることができる:

$$\int_0^1 d\beta \beta^{t-1} (1-\beta)^{u-1} \mathcal{F} = \sum_{i=0}^n \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} d\beta \beta^{t-1} (1-\beta)^{u-1} \mathcal{F}, \quad (\text{B.25})$$

ここに  $\beta_0 \equiv 0$  および  $\beta_{n+1} \equiv 1$  であり,  $\beta_i \in (0, 1)$  は  $0 < i < n+1$  に対して  $(x-\beta_i y)^2 = 0$  を満たす.  $\mathcal{F}$  は次式で定義される:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \equiv & \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-i2p \cdot (x-\beta y)} \left\{ - \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right] p^2 - \frac{i\epsilon}{1-\alpha} \right\}^{-\frac{s+t+u}{2} + \frac{D}{4}} \\ & \times K_{s+t+u-\frac{D}{2}} \left( 2\sqrt{(-y^2)} \left\{ - \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right] p^2 - \frac{i\epsilon}{1-\alpha} \right\} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$x-\beta y$  が空間的ベクトルのとき, その時間成分  $x^0 - \beta y^0$  が零になるようにローレンツ変換することができる. 以下のウィック回転,

$$p^0 \rightarrow ip_E^0, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_E, \quad (\text{B.27})$$

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_E, \quad \mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_E, \quad (\text{B.28})$$

により, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{i}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d|p_E| |p_E|^{D-1} \left\{ \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right] p_E^2 \right\}^{-\frac{s+t+u}{2} + \frac{D}{4}} \\ & \times K_{s+t+u-\frac{D}{2}} \left( 2|y_E| \sqrt{\left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right] p_E^2} \right) \int d\Omega_D e^{i2\mathbf{p}_E \cdot (\mathbf{x}_E - \beta \mathbf{y}_E)}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$p_E = (p_E^0, \mathbf{p}_E)$  と  $x_E - \beta y_E = (0, \mathbf{x}_E - \beta \mathbf{y}_E)$  の間の角  $\theta$  以外の角度について積分を実行すると,

$$\int d\Omega_D e^{i2\mathbf{p}_E \cdot (\mathbf{x}_E - \beta \mathbf{y}_E)} = \Omega_{D-1} \int_0^\pi d\theta \sin^{D-2} \theta e^{i2|p_E| |x_E - \beta y_E| \cos \theta}, \quad (\text{B.30})$$

ここに  $\Omega_D$  は  $D$  次元単位球の表面積である:

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}. \quad (\text{B.31})$$

$\theta$  積分は以下で評価できる:

$$\int_0^\pi d\theta \sin^{a-1} \theta e^{i2b \cos \theta} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} {}_0F_1\left(\frac{a+1}{2}; -b^2\right) \quad (\text{B.32})$$

ここに,  $\text{Re}(a) > 0$  および  $b \in \mathbf{R}$ .  ${}_0F_1(a; z)$  は一般化された超幾何級数である:

$${}_0F_1(a; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_n n!} z^n, \quad (\text{B.33})$$

各記号の定義は,

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = \prod_{m=0}^{n-1} (a+m), \quad n \in \mathbf{Z}^+. \quad (\text{B.34})$$

一方で,  $x - \beta y$  が時間的ベクトルのとき, その空間成分  $\mathbf{x} - \beta \mathbf{y}$  が零になるようにローレンツ変換することができる. ウィック回転により,  $\mathcal{F}$  は次式で表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{i}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d|p_E| |p_E|^{D-1} \left\{ \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right] p_E^2 \right\}^{-\frac{s+t+u}{2} + \frac{D}{4}} \\ & \times K_{s+t+u-\frac{D}{2}} \left( 2|y_E| \sqrt{\left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right] p_E^2} \right) \int d\Omega_D e^{2p_E^0(x_E^0 - \beta y_E^0)}, \quad (\text{B.35}) \end{aligned}$$

ここに,  $x_E^0 \equiv x^0$  および  $y_E^0 \equiv y^0$ . 角度積分に関して, 式 (B.30) および (B.32) と同様に評価する:

$$\int d\Omega_D e^{2p_E^0(x_E^0 - \beta y_E^0)} = \Omega_{D-1} \int_0^\pi d\theta \sin^{D-2} \theta e^{2|p_E| |x_E - \beta y_E| \cos \theta}, \quad (\text{B.36})$$

$$\int_0^\pi d\theta \sin^{a-1} \theta e^{2b \cos \theta} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} {}_0F_1\left(\frac{a+1}{2}; b^2\right) \quad (\text{B.37})$$

ここに,  $\text{Re}(a) > 0$  および  $b \in \mathbf{R}$ .

$|p_E|$  積分は以下で与えられる:

$$\int_0^\infty d|p_E| |p_E|^{a-1} K_r(2b|p_E|) {}_0F_1\left(\frac{a+r}{2}; c|p_E|^2\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{a-r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+r}{2}\right) b^{-r} (b^2 - c)^{-\frac{a-r}{2}} \quad (\text{B.38})$$

ただし,  $b > 0$ ,  $c < 0$ ,  $\text{Re}(a-r) > 0$ ,  $\text{Re}(a+r) > 0$ .

これらの公式を  $\mathcal{F}$  へ適用すれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{i}{2} \frac{\Gamma(D-s-t-u)}{(4\pi)^{D/2}} \left( \sqrt{-y^2} \right)^{\frac{D}{2}-s-t-u} \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right]^{\frac{D}{2}-s-t-u} \\ & \times \left[ -(x-\beta y)^2 - y^2 \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right) \right]^{s+t+u-D}. \quad (\text{B.39}) \end{aligned}$$

したがって、 $k$  および  $p$  積分を実行すると、以下を得ることになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & -\frac{\Gamma(D-s-t-u)}{(4\pi)^D \Gamma(s)\Gamma(t)\Gamma(u)} \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \alpha^{s-1} (1-\alpha)^{-s-1} \beta^{t-1} (1-\beta)^{u-1} \\ & \times \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right]^{\frac{D}{2}-s-t-u} \left[ -(x-\beta y)^2 - y^2 \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right) \right]^{s+t+u-D}. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$\mathcal{I}$  の  $\epsilon$ -pole は上式の最後の因子を展開することで得られる:

$$\mathcal{J} \equiv \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \alpha^{\sigma-1} (1-\alpha)^{-\sigma-1} \beta^{\tau-1} (1-\beta)^{\kappa-1} \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta(1-\beta) \right]^\lambda, \quad (\text{B.41})$$

ここに、 $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\kappa$  および  $\lambda$  は任意の定数.

$$\gamma \equiv \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad (\text{B.42})$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^\infty d\gamma \int_0^1 d\beta \gamma^{\sigma-1} \beta^{\tau-1} (1-\beta)^{\kappa-1} [\gamma + \beta(1-\beta)]^\lambda \\ &= B(\sigma, -\sigma - \lambda) \int_0^1 d\beta \beta^{\sigma+\tau+\lambda-1} (1-\beta)^{\sigma+\kappa+\lambda-1} \\ &= B(\sigma, -\sigma - \lambda) B(\sigma + \tau + \lambda, \sigma + \kappa + \lambda), \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

ここに、 $B(x, y)$  はベータ関数である:

$$B(x, y) \equiv \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (\text{B.44})$$

## 付録 C

# 紫外発散およびヒッグス・ポテンシャルへの寄与

第 4.4.2 小節で示した通り，4 フェルミ・ダイアグラムの発散は 2 ループ・レベルでは以下の形式で表される：

$$-\frac{iQ^6 g^6}{\epsilon} C_X [G_X^{(1)}]_{\alpha\beta} [G_X^{(2)}]_{\gamma\delta} - (\alpha \leftrightarrow \gamma), \quad (\text{C.1})$$

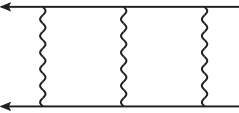
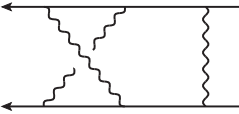
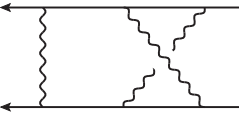
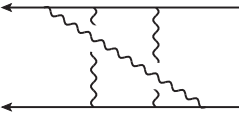
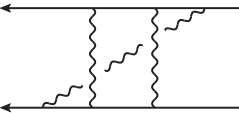
ここで， $G_X^{(1,2)}$  は  $\gamma^M$  の積である． $C_X$  は定数であり， $X$  は発散する 4 フェルミ・ダイアグラムのうち，フェルミオンの線が交差しないものを表す．上式の第 2 項は  $X$  のフェルミオンの線が 1 度だけ交差するものを表す．

本付録では，ダイアグラム  $X$  およびそのヒッグス・ポテンシャルへの寄与を表にまとめる．表記の簡略化のため，以下の因子のみを掲載する：

$$-64(4\pi)^5 C_X [G_X^{(1)}]_{\alpha\beta} [G_X^{(2)}]_{\gamma\delta}, \quad (\text{C.2})$$

$$-64(4\pi)^5 C_X \left\{ \text{tr} \left[ G_X^{(1)} \gamma_5 \right] \text{tr} \left[ G_X^{(2)} \gamma_5 \right] - \text{tr} \left[ G_X^{(1)} \gamma_5 G_X^{(2)} \gamma_5 \right] \right\}. \quad (\text{C.3})$$

表 C.1: 2 ループ・レベルでの 4 フェルミ・ダイアグラムの発散部分およびヒッグス・ポテンシャルへの寄与. ダイアグラムは  $\chi$  で表される.  $G_\chi^{(1)}$  および  $G_\chi^{(2)}$  はそれぞれ図の上側および下側のフェルミオンの線の  $\gamma^M$  の積である.  $C_\chi$  は他の因子のうち,  $-iQ^6 g^6/\epsilon$  以外をまとめたものである ( $D = 5 - 2\epsilon$ ).

$\chi$	$-64(4\pi)^5 C_\chi [G_\chi^{(1)}]_{\alpha\beta} [G_\chi^{(2)}]_{\gamma\delta},$
	$-64(4\pi)^5 C_\chi \left\{ \text{tr} \left[ G_\chi^{(1)} \gamma_5 \right] \text{tr} \left[ G_\chi^{(2)} \gamma_5 \right] - \text{tr} \left[ G_\chi^{(1)} \gamma_5 G_\chi^{(2)} \gamma_5 \right] \right\}$
	$\frac{4}{105} \pi (\eta^{PS} \eta^{QR} + 22\eta^{PR} \eta^{QS} + \eta^{PQ} \eta^{RS})$
	$\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_R \gamma_N \gamma_S \gamma_L]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{100736}{15} \pi$
	$\frac{8}{105} \pi (\eta^{PS} \eta^{QR} - 6\eta^{PR} \eta^{QS} + \eta^{PQ} \eta^{RS})$
	$\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_N \gamma_R \gamma_M \gamma_S \gamma_L]_{\gamma\delta},$
	$\frac{20608}{15} \pi$
	$\frac{8}{105} \pi (\eta^{PS} \eta^{QR} - 6\eta^{PR} \eta^{QS} + \eta^{PQ} \eta^{RS})$
	$\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_R \gamma_L \gamma_S \gamma_N]_{\gamma\delta},$
	$\frac{20608}{15} \pi$
	$-\frac{8}{105} \pi (6\eta^{PS} \eta^{QR} - \eta^{PR} \eta^{QS} - \eta^{PQ} \eta^{RS})$
	$\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_N \gamma_R \gamma_L \gamma_S \gamma_M]_{\gamma\delta},$
	$\frac{22912}{15} \pi$
	$-\frac{8}{105} \pi (6\eta^{PS} \eta^{QR} - \eta^{PR} \eta^{QS} - \eta^{PQ} \eta^{RS})$
	$\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_L \gamma_R \gamma_M \gamma_S \gamma_N]_{\gamma\delta},$
	$\frac{22912}{15} \pi$

	$\frac{4}{105}\pi (22\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_L \gamma_R \gamma_N \gamma_S \gamma_M]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{64256}{15}\pi$
	$\frac{4}{35}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} - 6\eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R \gamma_M]_{\alpha\beta} [\gamma_N \gamma_S \gamma_L]_{\gamma\delta},$
	$\frac{12096}{5}\pi$
	$\frac{4}{35}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} - 6\eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^N \gamma_S \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma^M \gamma_P \gamma_N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R \gamma_M]_{\gamma\delta},$
	$\frac{12096}{5}\pi$
	$-\frac{4}{35}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} - 6\eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R \gamma_M]_{\alpha\beta} [\gamma_L \gamma_S \gamma_N]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{12096}{5}\pi$
	$-\frac{4}{35}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} - 6\eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^L \gamma_S \gamma^N]_{\alpha\beta} [\gamma^M \gamma_P \gamma_N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R \gamma_M]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{12096}{5}\pi$
	$\frac{8}{105}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + 8\eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_M \gamma_R \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_N \gamma_S \gamma_L]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{10944}{5}\pi$
	$\frac{8}{105}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + 8\eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^N \gamma_S \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma^M \gamma_P \gamma_N \gamma_Q \gamma^L \gamma_M \gamma_R \gamma^L]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{10944}{5}\pi$



	$-\frac{8}{105}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + 8\eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma_M \gamma_R \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_L \gamma_S \gamma_N]_{\gamma\delta},$
$\frac{7872}{5}\pi$	
	$-\frac{8}{105}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + 8\eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^L \gamma_S \gamma^N]_{\alpha\beta} [\gamma^M \gamma_P \gamma_N \gamma_Q \gamma_M \gamma_R \gamma^L]_{\gamma\delta},$
$\frac{7872}{5}\pi$	
	$\frac{8}{105}\pi (8\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R \gamma_N]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_S \gamma^L]_{\gamma\delta},$
$-\frac{10944}{5}\pi$	
	$\frac{8}{105}\pi (8\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_S \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R \gamma_N]_{\gamma\delta},$
$-\frac{10944}{5}\pi$	
	$-\frac{8}{105}\pi (8\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R \gamma_N]_{\alpha\beta} [\gamma_L \gamma_S \gamma^M]_{\gamma\delta},$
$\frac{7872}{5}\pi$	
	$-\frac{8}{105}\pi (8\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^L \gamma_S \gamma^M]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R \gamma_N]_{\gamma\delta},$
$\frac{7872}{5}\pi$	
	$\frac{16}{105}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma_N \gamma_R \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_S \gamma^L]_{\gamma\delta},$
$\frac{6592}{5}\pi$	

	$\frac{16}{105}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_S \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma_N \gamma_R \gamma_L]_{\gamma\delta},$
	$\frac{6592}{5}\pi$
	$-\frac{16}{105}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma_N \gamma_R \gamma^L]_{\alpha\beta} [\gamma_L \gamma_S \gamma_M]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{5056}{5}\pi$
	$-\frac{16}{105}\pi (\eta^{PS}\eta^{QR} + \eta^{PR}\eta^{QS} + \eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times [\gamma^L \gamma_S \gamma^M]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_P \gamma^N \gamma_Q \gamma_N \gamma_R \gamma_L]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{5056}{5}\pi$
	$\frac{2}{105}\pi (10\eta^{PS}\eta^{QR} + 3\eta^{PR}\eta^{QS} + 3\eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times \text{tr} [\gamma^M \gamma_Q \gamma^L \gamma_R] [\gamma_M \gamma_P \gamma^N]_{\alpha\beta} [\gamma_L \gamma_S \gamma_N]_{\gamma\delta},$
	$\frac{4352}{5}\pi$
	$-\frac{2}{105}\pi (10\eta^{PS}\eta^{QR} + 3\eta^{PR}\eta^{QS} + 3\eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times \text{tr} [\gamma^M \gamma_Q \gamma^L \gamma_R] [\gamma_M \gamma_P \gamma^N]_{\alpha\beta} [\gamma_N \gamma_S \gamma_L]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{2816}{5}\pi$
	$\frac{2}{105}\pi (10\eta^{PS}\eta^{QR} + 3\eta^{PR}\eta^{QS} + 3\eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times \text{tr} [\gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R] [\gamma^M \gamma_P \gamma_N]_{\alpha\beta} [\gamma_M \gamma_S \gamma_L]_{\gamma\delta},$
	$\frac{4352}{5}\pi$
	$-\frac{2}{105}\pi (10\eta^{PS}\eta^{QR} + 3\eta^{PR}\eta^{QS} + 3\eta^{PQ}\eta^{RS})$ $\times \text{tr} [\gamma^N \gamma_Q \gamma^L \gamma_R] [\gamma^M \gamma_P \gamma_N]_{\alpha\beta} [\gamma_L \gamma_S \gamma_M]_{\gamma\delta},$
	$-\frac{2816}{5}\pi$

## 参考文献

- [1] Georges Aad, et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, Vol. 716, pp. 1–29, 2012.
- [2] Serguei Chatrchyan, et al. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC. *Phys. Lett. B*, Vol. 716, pp. 30–61, 2012.
- [3] M. J. G. Veltman. The Infrared - Ultraviolet Connection. *Acta Phys. Polon.*, Vol. B12, p. 437, 1981.
- [4] M. Davier, L. Maiani, Carlos A. Savoy, and Joel Scherk. Vector bosons and Higgs bosons in the Weinberg-Salam theory of weak and electromagnetic interactions. In *Proceedings: Summer School on Particle Physics, Gif-sur-Yvette, 3-7 Sep 1979*, 1979.
- [5] Savas Dimopoulos and Stuart Raby. Supercolor. *Nucl. Phys.*, Vol. B192, pp. 353–368, 1981.
- [6] Edward Witten. Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys.*, Vol. B188, p. 513, 1981.
- [7] Michael Dine, Willy Fischler, and Mark Srednicki. Supersymmetric Technicolor. *Nucl. Phys.*, Vol. B189, pp. 575–593, 1981.
- [8] David B. Kaplan and Howard Georgi. SU(2) x U(1) Breaking by Vacuum Misalignment. *Phys. Lett.*, Vol. 136B, pp. 183–186, 1984.
- [9] David B. Kaplan, Howard Georgi, and Savas Dimopoulos. Composite Higgs Scalars. *Phys. Lett.*, Vol. 136B, pp. 187–190, 1984.
- [10] Howard Georgi, David B. Kaplan, and Peter Galison. Calculation of the Composite Higgs Mass. *Phys. Lett.*, Vol. 143B, pp. 152–154, 1984.
- [11] Tom Banks. CONSTRAINTS ON SU(2) x U(1) BREAKING BY VACUUM MISALIGN-

- MENT. *Nucl. Phys.*, Vol. B243, pp. 125–130, 1984.
- [12] Howard Georgi and David B. Kaplan. Composite Higgs and Custodial SU(2). *Phys. Lett.*, Vol. 145B, pp. 216–220, 1984.
- [13] Michael J. Dugan, Howard Georgi, and David B. Kaplan. Anatomy of a Composite Higgs Model. *Nucl. Phys.*, Vol. B254, pp. 299–326, 1985.
- [14] Howard Georgi. A Tool Kit for Builders of Composite Models. *Nucl. Phys.*, Vol. B266, pp. 274–284, 1986.
- [15] D. B. Fairlie. Two Consistent Calculations of the Weinberg Angle. *J. Phys.*, Vol. G5, p. L55, 1979.
- [16] N. S. Manton. A New Six-Dimensional Approach to the Weinberg-Salam Model. *Nucl. Phys.*, Vol. B158, pp. 141–153, 1979.
- [17] P. Forgacs and N. S. Manton. Space-Time Symmetries in Gauge Theories. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 72, p. 15, 1980.
- [18] Yutaka Hosotani. Dynamical Mass Generation by Compact Extra Dimensions. *Phys. Lett.*, Vol. 126B, pp. 309–313, 1983.
- [19] Yutaka Hosotani. Dynamical Gauge Symmetry Breaking as the Casimir Effect. *Phys. Lett.*, Vol. 129B, pp. 193–197, 1983.
- [20] Yutaka Hosotani. Dynamics of Nonintegrable Phases and Gauge Symmetry Breaking. *Annals Phys.*, Vol. 190, p. 233, 1989.
- [21] Yutaka Hosotani. Dynamical gauge symmetry breaking by Wilson lines in the electroweak theory. In *Dynamical symmetry breaking. Proceedings, International Workshop, DSB'04, Nagoya, Japan, December 21-22, 2004*, pp. 17–34, 2005.
- [22] Yoshio Matsumoto and Yutaka Sakamura. 6D gauge-Higgs unification on  $T^2/Z_N$  with custodial symmetry. *JHEP*, Vol. 08, p. 175, 2014.
- [23] G. von Gersdorff, N. Irges, and M. Quiros. Finite mass corrections in orbifold gauge theories. In *Proceedings, 37th Rencontres de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories: Les Arcs, France, March 9-16, 2002*, pp. 169–176, 2002.
- [24] Yutaka Hosotani. All-order Finiteness of the Higgs Boson Mass in the Dynamical Gauge-Higgs Unification. 2006.

- [25] A. T. Davies and A. McLachlan. Congruency Class Effects in the Hosotani Model. *Nucl. Phys.*, Vol. B317, p. 237, 1989.
- [26] Ignatios Antoniadis, K. Benakli, and M. Quiros. Finite Higgs mass without supersymmetry. *New J. Phys.*, Vol. 3, p. 20, 2001.
- [27] Nobuhito Maru and Toshifumi Yamashita. Two-loop Calculation of Higgs Mass in Gauge-Higgs Unification: 5D Massless QED Compactified on  $S^1$ . *Nucl. Phys.*, Vol. B754, pp. 127–145, 2006.
- [28] Y. Hosotani, N. Maru, K. Takenaga, and Toshifumi Yamashita. Two Loop finiteness of Higgs mass and potential in the gauge-Higgs unification. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 118, pp. 1053–1068, 2007.
- [29] Junji Hisano, Yutaro Shoji, and Atsuyuki Yamada. To be, or not to be finite? The Higgs potential in Gauge-Higgs Unification. *JHEP*, Vol. 02, p. 193, 2020.
- [30] Yasunari Nishikawa. Graviton loop contribution to Higgs potential in gauge-Higgs unification. *PTEP*, Vol. 2021, No. 1, p. 013B07, 2021.
- [31] Leandro Da Rold. Radiative corrections in 5D and 6D expanding in winding modes. *Phys. Rev. D*, Vol. 69, p. 105015, 2004.
- [32] J. Heffner and H. Reinhardt. Finite-temperature Yang-Mills theory in the Hamiltonian approach in Coulomb gauge from a compactified spatial dimension. *Phys. Rev.*, Vol. D91, No. 8, p. 085022, 2015.
- [33] Hugo Reinhardt. Hamiltonian finite-temperature quantum field theory from its vacuum on partially compactified space. *Phys. Rev.*, Vol. D94, No. 4, p. 045016, 2016.
- [34] Mohamed M. Anber and Tin Sulejmanpasic. The renormalon diagram in gauge theories on  $\mathbb{R}^3 \times S^1$ . *JHEP*, Vol. 01, p. 139, 2015.
- [35] Kosuke Ishikawa, Okuto Morikawa, Akira Nakayama, Kazuya Shibata, Hiroshi Suzuki, and Hiromasa Takaura. Infrared renormalon in the supersymmetric  $\mathbb{C}P^{N-1}$  model on  $\mathbb{R} \times S^1$ . *PTEP*, Vol. 2020, No. 2, p. 023B10, 2020.
- [36] Masahiro Kubo, C.S. Lim, and Hiroyuki Yamashita. The Hosotani mechanism in bulk gauge theories with an orbifold extra space  $S^1 / Z(2)$ . *Mod.Phys.Lett.A*, Vol. 17, pp. 2249–2264, 2002.

- [37] R. L. Workman, et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, Vol. 2022, p. 083C01, 2022.
- [38] Nima Arkani-Hamed and Martin Schmaltz. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. *Phys. Rev.*, Vol. D61, p. 033005, 2000.
- [39] Yuki Adachi, C. S. Lim, and Nobuhito Maru. Neutron Electric Dipole Moment in the Gauge-Higgs Unification. *Phys. Rev.*, Vol. D80, p. 055025, 2009.