

材料界面の強度を考慮した
マルチマテリアルトポロジー最適化に関する研究

渡邊 大貴

博士論文

材料界面の強度を考慮した
マルチマテリアルトポロジー最適化に関する研究

Study on Multi-material Topology Optimization
considering Strength of Material Interfaces

渡邊 大貴

名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻

指導教員: 加藤 準治 教授

2023 年

目次

1	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	界面を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化に関する先行研究	3
1.3	本研究の主題と位置付け	5
1.4	本論文の構成	6
2	トポロジー最適化の基礎理論	8
2.1	概要	8
2.2	材料表現法を用いたトポロジー最適化	8
2.3	最適化問題とその解法	11
2.4	チェッカーボードパターンおよびフィルタリング手法	14
2.5	Helmholtz 型偏微分方程式による密度フィルタ	16
2.6	最適化問題の計算フロー	19
3	界面の物性を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化	21
3.1	概要	21
3.2	マルチマテリアル材料モデル	22
3.3	仮想的な材料界面体積比率	26
3.4	最適化問題の設定	28
3.5	感度解析	28
3.6	最適化計算例	35
3.7	結論および今後の展望	45
4	強度を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化	47
4.1	概要	47
4.2	固体材料と界面の同時応力制約付きマルチマテリアルトポロジー最適化手法	47
4.3	界面剥離モデル	49
4.4	最適化問題の設定	51
4.5	感度解析	52
4.6	最適化計算例	56
4.7	結論および今後の展望	76
5	結論	79
付録 A	勾配法を用いた最適化アルゴリズム	81

A.1	Optimality criteria method (OC)	81
A.2	Method of moving asymptotes (MMA)	82
付録 B	graded interface の概要	83
参考文献		84
謝辞		92

図目次

1.1	マルチマテリアル化技術による軽量車体の開発 ¹⁾	1
1.2	マルチマテリアルトポロジー最適化を使った車体構造の試行検討 ¹⁾	2
1.3	上) WC-Cu-Mn 合金における WC 粒子濃度の顕微鏡写真 ⁶⁰⁾ , 下) 材料界面の遷移に関する模式図	4
2.1	構造最適化の分類	9
2.2	上) Michell ⁸⁶⁾ によって導かれた最適解の例, 下) Wu ら ⁸⁹⁾ によって再現されたトポロジー最適解	9
2.3	表現法によるトポロジー最適化の分類	11
2.4	材料表現法による 2 相および 3 相材料の概念図	12
2.5	チェッカーボードパターン ⁹¹⁾	14
2.6	フィルタの影響範囲	16
2.7	フィルタ半径 R とメッシュサイズを変更したときの最適化結果の比較	17
2.8	最適化問題の解法フロー	20
3.1	式 (3.3) を用いて Case1 と Case2 の場合で最適化計算を行った結果	24
3.2	式 (3.7) を用いて Case1 と Case2 の場合で最適化計算を行った結果	25
3.3	マルチマテリアル graded interface の概念図	29
3.4	2 段階の密度フィルタリングを用いた projection-mapping の手順	30
3.5	Case 1 の感度解析: 上) 初期設計変数の分布, 左) AVM と FDA の比較, 右) AVM と FDA の相対誤差	33
3.6	Case 2 の感度解析: 上) 初期設計変数の分布, 左) AVM と FDA の比較, 右) AVM と FDA の相対誤差	34
3.7	しきい値関数	35
3.8	構造モデル 1	36
3.9	目的関数と制約関数の履歴	36
3.10	提案手法における最適化結果: (a) $E^{(1)} = 100, E^{(2)} = 200$, (b) $E^{(1)} = 200, E^{(2)} = 100$	37
3.11	異なるフィルタ半径におけるトポロジーの比較: a) $R_1 = 3, R_2 = 3$, b) $R_1 = 6, R_2 = 3$, c) $R_1 = 3, R_2 = 6$, d) $R_1 = 6, R_2 = 6$	38
3.12	異なるフィルタ半径による界面体積比率 $v^{(1,2)}$ の比較: a) $R_1 = 3, R_2 = 3$, c) $R_1 = 3, R_2 = 6$	38
3.13	構造モデル 2	39

3.14	提案手法における最適化結果: (a) $E^{(1)} = 100, E^{(2)} = 200$, (b) $E^{(1)} = 200, E^{(2)} = 100$	39
3.15	異なる材料界面ヤング率に対する最適化結果の比較: (a) $E^{int} = 1$, (b) $E^{int} = 50$, (c) $E^{int} = 150$, (d) $E^{int} = 300$,, 上段) ヤング率の分布図, 下段) Mises の相当応力図	40
3.16	構造モデル 3	41
3.17	異なる材料界面ヤング率に対する最適化結果の比較: (a) $E^{int} = 1$, (b) $E^{int} = 50$, (c) $E^{int} = 150$, (d) $E^{int} = 300$, 上段) ヤング率の分布図, 下段) Mises の相当応力図	42
3.18	フィルタ半径 R_1 を変えた場合の最適化結果 (ヤング率の分布) の比較	45
4.1	強度を考慮するための固体材料と材料界面の 2 段階密度フィルタリングによる projection-mapping 法	50
4.2	座標変換と応力の図解	50
4.3	Case 1 の感度解析: 上) 初期設計変数分布, 左) AVM と FDA の比較, 右) AVM と FDA の相対誤差	56
4.4	Case 2 の感度解析: 上) 初期設計変数分布, 左) AVM と FDA の比較, 右) AVM と FDA の相対誤差	57
4.5	引張構造	58
4.6	$\beta = 2$ のときの引張構造におけるトポロジー最適化結果の比較	59
4.7	$\beta = 0.1$ のときの引張構造におけるトポロジー最適化結果の比較	60
4.8	片持ちはり構造	61
4.9	材料界面強度の異なる片持ちはり構造の最適化結果	61
4.10	メッシュ解像度の異なる片持ちはり構造の最適化結果	62
4.11	目的関数値と制約条件の推移: 左) 図-4.9(a), 右) 図-4.9(c)	63
4.12	L 字型ブラケット構造	65
4.13	様々な強度設定を行った L 字型ブラケット構造の最適化結果	66
4.14	様々な強度設定を行った L 字型ブラケット構造の最適化結果	67
4.15	L 字型ブラケット構造の各最適化結果に対する荷重-変位曲線	68
4.16	目的関数値と制約条件の推移: 左) 図-4.13(a), 右) 図-4.14(h)	68
4.17	逆 T 字型ブラケット構造	70
4.18	逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果	71
4.19	許容応力度を与えた場合の逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果	71
4.20	3 種類の固体材料を使用した逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果	72

4.21	材料 1, 2, 3 および材料界面に許容応力度を与えた場合の逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果	73
4.22	材料 2, 3 および材料界面に許容応力度を与えた逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果	74
4.23	3 次元持ち送り構造	75
4.24	3 次元持ち送り構造におけるトポロジー最適化結果	76
4.25	許容応力度を与えた場合の 3 次元持ち送り構造におけるトポロジー最適化結果	77
4.26	図-4.24 と図-4.25 の材料 1 の Mises の相当応力分布図を別視点から見た図 .	78
B.1	母材とコーティング材を表現するための 2 段階フィルタリングの手順 . . .	83

表目次

3.1	式 (3.3) における材料体積比率 $v_i^{(j)}$ と材料の相の関係	26
3.2	式 (3.7) における材料体積比率 $v_i^{(j)}$ と材料の相の関係	26
3.3	数値計算例で用いる固体材料の材料特性	32
3.4	しきい値パラメータ S の設定	34
3.5	固体材料と材料界面の特性	41
4.1	固体材料数 $m = 2$ を用いた数値計算例における固体材料の材料特性	55
4.2	材料界面強度の異なる片持ちはり構造: 最適化結果の性能比較	63
4.3	メッシュ解像度の異なる片持ちはり構造: 最適化結果の性能比較	63
4.4	様々な強度設定を行った L 字型ブラケット構造: 最適化結果の性能比較	70
4.5	固体材料数 $m = 3$ を用いた数値計算例における固体材料の材料特性	70

1 序論

1.1 研究背景

航空宇宙および機械，建設，医工学など，工学分野全般において異種材料を組み合わせた構造 (マルチマテリアル化) によるものづくりは，構造のさらなる高強度化や軽量化を実現する技術として注目されている．例えば，自動車産業では，エネルギー使用量及び CO2 排出量削減を図るため，**図-1.1** のように，車体のボディ骨格構造を複数材料で作ることで，実用化に向けた研究開発が行われている¹⁾．また，土木工学分野では，従来の橋梁に異種材料である繊維強化プラスチック (FRP) を用いて，軽量化および強度と耐食性の改善を図った事例や，橋梁用高降伏点鋼板 (SBHS) と呼ばれる高性能鋼材と普通鋼の両方を用いることによって，全体鋼重と建設コストを大幅に削減したといった事例が存在する．それに加え，3D プリンタによる積層造形 (Additive Manufacturing: AM) 技術もまた，新しい製造・生産システムを担う革新的な基盤技術として注目されており，近年幅広い産業分野で導入が進んでいる^{2),3)}．3D プリンタの長所は，複雑形状でも容易に造形できるため，目的に見合った合理的な構造を造形できることにある．さらに，2 種類以上の材料を同時に用いるマルチマテリアル 3D プリンタの研究開発も進められている^{4),5)}．以上のようなマルチマテリアル化と 3D プリンタという 2 つの技術を用いることで，例えば「高剛性化」と「軽量化」のように，トレードオフの関係にあるような性能要求を満たすとともに，これまでの経験や常識にとらわれない斬新な構造を生み出す可能性を秘めている．

前述したマルチマテリアル化は，各々の材料の優れた物性 (重量，剛性，熱膨張率，強度など) を考慮して，材料を適材適所に配置することで構造軽量化を可能にする，先端的な設計によって達成される．しかし，ここでの最大の課題はその設計の難しさにある．つまり，「どの材料をどこに配置するか」という問題に対しては無限数の設計パターンがあるため，それを帰納的なアプローチで対処することは容易ではない．こうした作業を軽減する方法として，コンピュータを活用したものづくり (Computer Aided Engineering: CAE) が注目され

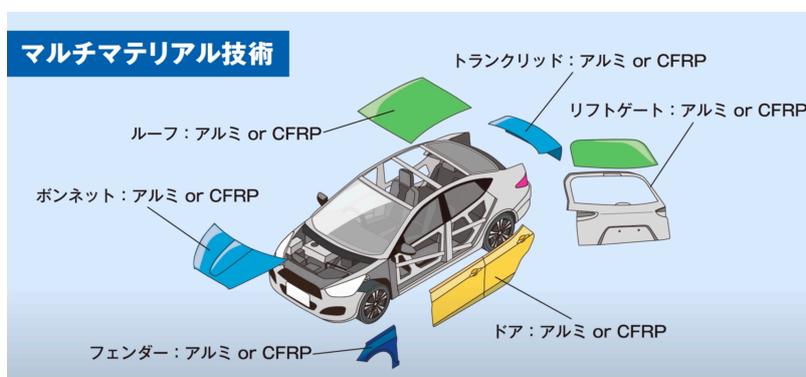


図-1.1 マルチマテリアル化技術による軽量車体の開発¹⁾

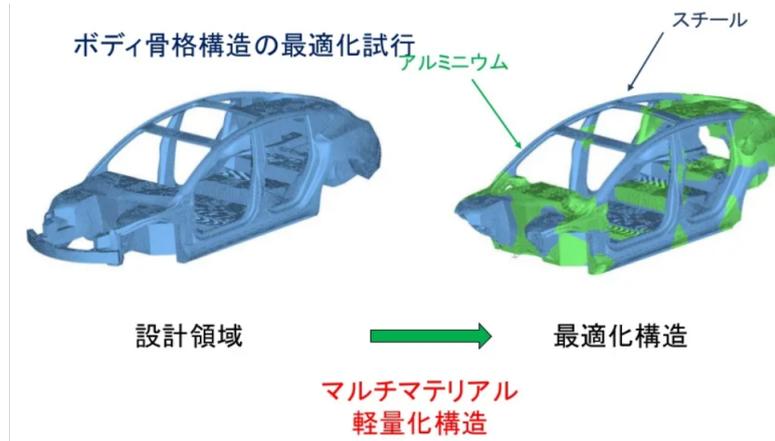


図-1.2 マルチマテリアルトポロジー最適化を使った車体構造の試行検討¹⁾

ている。特に、構造解析を応用した逆解析によるアプローチ，すなわち構造最適化をマルチマテリアル構造設計に適用することは工学的に有効である。

数ある構造最適化手法の中でも，最も高い自由度をもつ設計シミュレーション技術がトポロジー最適化⁶⁾である。トポロジー最適化とは，数理最適化理論によって材料の最適配置や構造の最適形状を物理・数学的根拠に基づいて決定する手法であり，構造の位相幾何(トポロジー)が変化するように設計変数を定義するのが特徴である。トポロジー最適化は過去約30年に渡って盛んに研究されており，これまでに level-set 法^{7)~13)}，MMC (Moving Morphable Components) 手法¹⁴⁾，フェーズフィールド手法を用いたトポロジー最適化^{15)~19)}，トポロジカルデリバティブ²⁰⁾，密度法^{21)~26)}といった手法が提案されている。また，トポロジー最適化は物理的に複雑な問題にも適用可能であり^{27)~32)}，その活用事例も多く報告されている^{33)~35)}。さらに近年では，トポロジー最適化を複数材料モデルに拡張したマルチマテリアルトポロジー最適化の研究が盛んに行われ，数多くの研究が報告されている^{36)~50)}。自動車産業では，図-1.2のような車体の開発で，複数の材料配置の検討を行うために活用されている¹⁾。

しかし，マルチマテリアルトポロジー最適化の理論は，未だに多くの課題を抱えている。その主たる要因は，複数材料を組み合わせることで生じる材料界面を数理的に取り扱うことが難しいという点にある。特に有限要素法に基づくトポロジー最適化では，基本的に固定の有限要素メッシュを用いるため，最適化計算の中で都度変化する界面形状を原理的にも表現しづらい方法だといえる。そのような扱いの特殊さが数理的扱いの困難さを助長していると考えられる。そのため，界面を実用的な範疇で表現するための手法の開発が望まれるが，著者らの知る限り，それを満足する，材料界面を考慮したトポロジー最適化手法の研究は数少ない。

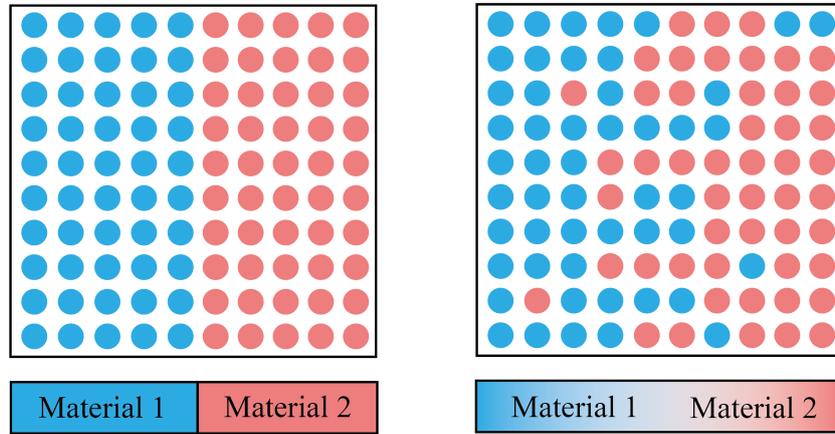
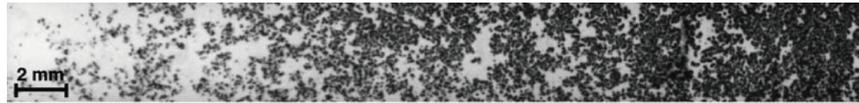
一方で，材料界面は熱破断，腐食など構造の弱点となりやすく，応力集中が発生し，それが原因で剥離が生じるなど力学的な問題を起こしやすいことから，これを考慮することは工

学的に有意義である。以上で挙げたような背景から、材料界面の物性および強度を考慮するためのマルチマテリアルトポロジー最適化手法が求められている。

1.2 界面を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化に関する先行研究

マルチマテリアルトポロジー最適化は、前述のトポロジー最適化と同様に level-set 法に基づく形状最適化^{36),37)}、MMC 手法³⁸⁾、密度法によって、その構造幾何が表示されている。中でも密度法は、有限要素法と相性が良いことから扱いやすく、数多くの手法が提案されており、拡張 SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法³⁹⁾⁻⁴³⁾ や ordered SIMP 法⁴⁴⁾、DMO (Discrete Material Optimization)⁴⁵⁾⁻⁴⁸⁾、BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) 法^{49),50)} などがこれまでに提案されている。対象としている性能・問題もまた、軽量化⁴³⁾、剛性最大化^{44),46)}、熱応力⁴⁷⁾、熱伝導⁴⁹⁾、動的問題⁵⁰⁾と多岐にわたる。その一方で、上述した手法では、異種材料間の界面は考慮されておらず、完全接着を仮定したモデルといえる。

材料界面の物性を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化に関する研究については、Liu ら^{51),52)} の XFEM⁵³⁾ を活用して凝集体モデルを材料界面に取り入れるといった、level-set 法ベースのマルチマテリアルトポロジー最適化手法が提案されている。Liu らの手法によって得られた最適構造は、材料界面の耐損傷性能に着目しているが、非線形材料構成則を用いていることから、非常に複雑な問題設定となっている。一方、密度法は本来材料界面を明示的に表現することができない手法であるが、最近では研究報告文⁵⁴⁾⁻⁵⁶⁾のように、密度法であっても界面を表現する手法が提案されている。このような表現法を用いて、例えば積層造形における幾何学的な製造制約を与える手法が Luo ら⁵⁷⁾によって提案されている。また、Luo ら⁵⁸⁾ や Hu ら⁵⁹⁾によって、周期境界条件におけるマイクロ構造の結合性を考慮したマイクロ-マクロ同時トポロジー最適化への展開がされている。さらには、Clausen ら⁵⁴⁾が示した“graded interface”と呼ばれる手法をマルチマテリアル材料モデルに拡張し、材料界面の特性を考慮できるようにしたマルチマテリアルトポロジー最適化手法も提案されている⁶¹⁾⁻⁶⁴⁾。Faure ら⁶¹⁾ や Bai ら⁶⁴⁾ は level-set 法に基づく形状最適化、Chu ら⁶²⁾ や Jung ら⁶³⁾ は密度法によるトポロジー最適化に、それぞれ graded interface の概念を取り入れている。これらの手法では、一般的に不連続で表現されることが多い材料界面を、一定の幅を持ち、滑らかな遷移的な界面として取り扱っている。このような材料界面が一定の幅を持つという仮定は、接着剤による異種材料の接着を想定した設計に対して有用であると考えられる。また、3D プリンタを使った製造や加工方法によっては、構造内における異種材料界面は突然変化するものではなく、 **図-1.3**に見受けられるような段階的な界面遷移であり、それに伴い物性遷移もまた非単調であるといった研究も Kieback ら⁶⁰⁾、Faure ら⁶¹⁾によって報告されている。よって、材料界面が一定の幅を持つといった仮定は、このような製造や加工方法に対しても有用なものであるといえる。トポロジー最適化の分野では、レベルセッ



(a) sharp transition

(b) graded transition

図-1.3 上) WC-Cu-Mn 合金における WC 粒子濃度の顕微鏡写真⁶⁰⁾, 下) 材料界面の遷移に関する模式図

ト関数の等高線によって不連続な材料界面を記述できるという利点から、材料界面に関係する問題の解決には、実際には level-set 法ベースの最適化手法が望ましい一方で、上述したような傾斜界面を考慮したトポロジー最適化手法に関する研究報告は、依然として少ないのが現状である。

他方で、材料界面の強度に関しては、発生応力を許容値以下に抑えることが重要であるため、応力制約を考慮した最適設計のアプローチが参考になる。応力制約付きトポロジー最適化に関する研究については、Duysinx らの論文⁶⁵⁾をはじめとして、様々な研究⁶⁶⁾⁻⁷⁵⁾が報告されている。Kirsch⁶⁶⁾, Rozvany ら⁶⁷⁾, Rozvany⁶⁸⁾ は、トラス部材を用いた応力制約付きトポロジー最適化において、解の特異性が原因で局所的最適解に陥ってしまうという問題を指摘している。このような問題は、連続体を仮定したトポロジー最適化でも同様に発生することが、Duysinx ら⁶⁵⁾の他に、Le ら⁶⁹⁾や Holmberg ら⁷⁰⁾によっても報告されている。また、応力制約は応力を算出した点と同じ数だけの制約条件式が必要になるため、最適化問題で扱うことが難しく、応力値の最大値を最小化するような目的関数が Kiyono ら⁷¹⁾によって提案されているほか、 p -mean と呼ばれる応力制約式の集約方法が Verbart ら⁷²⁾によって提案されている。近年では、応力制約をラティス構造⁷³⁾, コンプライアントメカニズム⁷⁴⁾, 動的問題⁷⁵⁾へ適用するといった、応用的な展開もされている。

上述した問題も含め、応力制約を与えた構造最適化問題では、(i) 解の特異性、(ii) 局所制約条件の数、(iii) 問題の非凸性という 3 つの大きな問題点があることが知られている。(i) は、構造最適化において、部材の断面積が 0 に近づくことで局所的に大きな応力が発生する特異点現象の問題である。トポロジー最適化では、それを緩和するために ϵ -relaxation⁷⁶⁾ や qp -relaxation⁷⁷⁾ といった手法が提案されている。(ii) は、応力制約付きトポロジー最適化問題を解く際、応力を算出した点と同じ数だけの制約条件式が必要になるため、膨大な数の制約条件式が必要となるという問題である。制約条件式が多い問題は数値最適化のアルゴリズムで解くことが難しいため、 p -norm 関数⁷⁸⁾ や KS (Kreisselmeier–Steinhauser) 関数⁷⁹⁾ といった集約関数を用いて制約条件式を 1 つにまとめるといった対処法が提案されている。(iii) の問題については、目的関数や制約条件式の非凸性が顕著となる場合に生じやすく、最適化数学共通の問題といえよう。

なお、上述した手法⁶⁵⁾⁻⁷⁹⁾ は、すべて空隙と 1 種類の固体材料という 2 相材料を対象としたものであるが、これを 3 相材料以上のマルチマテリアル材料モデルに展開した手法も提案されている⁸⁰⁾⁻⁸³⁾。しかし、これらの手法は母材である固体材料の強度のみを対象とし、材料界面の強度は考慮していない。それとは対照的に、Liu ら⁸⁴⁾ や Hu ら⁸⁵⁾ は、界面の強度のみを考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化手法を提案しているが、実設計においてそのような条件設定は現実的ではない。そのため、マルチマテリアル設計においては、固体材料および材料界面の両方の強度を考慮することが重要であるが、それに挑戦した研究報告は著者の知る限り見当たらない。

1.3 本研究の主題と位置付け

以上の背景から、本研究では各固体材料およびその界面の応力値が各々の材料強度および界面強度を満足するようなマルチマテリアルトポロジー最適化手法を開発する。具体的には、載荷点における剛性最大化問題を、荷重一定のもと平均コンプライアンス最小化問題として解く。したがって、得られる結果は、載荷点における変形量が小さい（剛性が高い）結果となる。さらに、固体材料と材料界面それぞれに応力制約を与えることで、構造の剛性は若干低下するものの、最大応力値を制御することが可能となる。このような設計条件下で得られる構造は、材料の使用量が制限された中で、ある荷重に対して固体材料の変形挙動が弾性域に留まり、界面の負荷も損傷・破壊に至らない程度に抑えられるような構造である。

本手法に関して検証すべき項目として、解析的に計算される感度の精度、顕著な非凸性を有する最適化問題に対する勾配法アルゴリズムの有用性、パラメータやメッシュ解像度、材料界面の物性の変化による最適計算結果の変化、得られた最適構造の性能比較などが挙げられる。よって本論文では、いくつかの典型的な数値計算例を用いて上述した項目について検証を行うことで、種々の設計問題に対する本手法の適用可能性を確かめるとともに、提案手法の妥当性および有用性、信頼性を示し、現状の問題点、克服すべき課題や今後の展望につ

いても明らかにする。

1.4 本論文の構成

本論文の以降の章立ては、以下に示す構成とする。

- 第2章 トポロジー最適化の基礎
- 第3章 固体材料および界面物性を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化
- 第4章 固体材料および材料界面の強度を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化
- 第5章 結論

第2章では、一般的なトポロジー最適化の基礎理論についてまとめ、後に続く応用的なマルチマテリアルトポロジー最適化理論を記述するための準備とする。具体的には、本研究の基盤となる密度法による材料表現法と設計空間の緩和法、最適化理論およびフィルタリング手法について簡単に説明する。

第3, 4章ではそれぞれ主題の異なる適用・検証例を扱う。これらの章に共通するのは、フィルタリング手法を応用した材料界面の表現法およびその適用である。また、適用対象にまつわる先行研究を整理し、使用する最適化材料モデル、材料界面の表現法、最適化問題の定義、感度解析と順に理論の構築を進め、解析的感度の妥当性検証を経て、最後に最適化計算例を紹介する。

第3章では、固体材料と界面の物理的特性を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化手法を開発する。ここでは、界面を密度法ベースの手法で表現するために、Helmholtz型偏微分方程式による密度フィルタリングを活用した2段階フィルタリング手法を導入し、仮想的な材料界面の界面体積比率を定義する。また、複数材料のトポロジー最適化に起因する問題の非凸性に対処するため、DMO⁴⁵⁾⁻⁴⁸⁾と呼ばれる材料体積比率に応じた材料内挿関数を用いることで、構成材料の可換性を保持できるように試みる。目的関数は、外荷重一定という条件下での剛性最大化であり、これを平均コンプライアンス最小化と等価な問題として扱う。この問題を解くために、目的関数と制約条件の設計変数に対する感度を導出する。提案手法の有用性は、いくつかの数値計算例を通じて検証し、得られた最適化計算結果について議論する。

第4章では、第3章の内容を拡張し、固体材料と界面の両方の強度を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化手法を提案する。ヤング率と強度の複数の因子を同時に考慮するために、第3章で示した、係数が等価に与えられるDMO型材料内挿関数を適用する。また、応力制約付き構造最適化問題で発生する解の特異点の問題を解決するために、DMO型材料内挿関数に適応した応力の定義式を提案する。さらに、引張/圧縮非対称界面強度規準を導入することにより、界面に負荷が掛かりにくい最適な構造が得られる。本論文で提案する手

法の妥当性および有用性は、5つの構造モデルを使った数値計算例で検証を行う。

第5章では、本研究で得られた結論および克服すべき課題や今後の展望について総括する。

2 トポロジー最適化の基礎理論

2.1 概要

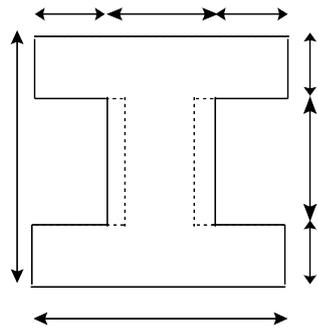
構造解析においては、与えられた構造幾何および荷重・拘束といった境界条件のもとで、力学の法則に従って変位やひずみ、応力などの構造挙動が計算される。ここで、未知量である変位やひずみ、応力を求めるために、構造幾何すなわち構造の形状は既知のものとして与えられる。この構造解析を応用すると、構造が満たすべき条件や目的のもと、自由に変化し得る設計領域を設定することで、未知の構造形状を逆解析的に決定することが可能になる。これを構造最適化といい、経験的に設計することが困難な構造物の設計に広く用いられている。

最適設計の理論は、構造力学の起源ともいえる、Galileo-Galilei (1564-1642) の著書“Discorsi”において初めて紹介され、そこでは片持ち梁の形状最適化問題について触れている。構造最適化に関する初期の成果には、Maxwell と Michell によるものがある。まず、Maxwell は 1872 年に、利用可能な弾性理論の概念を用いて橋梁構造の構造最適化を研究し、応力場とその方向を計算した。その後、1904 年に Michell が Maxwell の理論を用いて様々な研究事例に適用し、構造の最適解を求めた⁸⁶⁾。これらの研究成果は、その後の構造最適化の研究に大きな影響を与えるものとなった。その後、Prager⁸⁷⁾ や Rozvany と Prager⁸⁸⁾ の研究で解析的手法による最適性規準法 (Optimality Criteria method: OC 法) に基づく手法が紹介され、構造最適化がより一般的なものへと近づくこととなった。

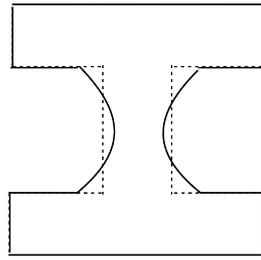
構造最適化の分類は、一般に図-2.1 に示す 3 つに大別することができる。寸法最適化は長さや厚さなどといった部材の寸法を、形状最適化は構造の境界部の形状を変化させることで構造幾何を改善する方法論であるが、これらはその設計範囲の制限のために、構造の基本形状を変更するまでには至らない。一方、これらのように幾何学的な制限を受けることなく、設計領域に穴を生じるなど構造の位相 (トポロジー) までも変化させ得るような構造最適化がトポロジー最適化⁶⁾ である。図-2.2 は、Michell structure と呼ばれ、Michell⁸⁶⁾ が力学原理に従い解析的に導いた最適構造と、Wu ら⁸⁹⁾ が同様な条件下でトポロジー最適化によって導いた最適構造である。この図から、トポロジー最適化計算が、解析解に対して高い再現度で最適解を導く信頼性の高い構造最適化手法であるといえよう。

2.2 材料表現法を用いたトポロジー最適化

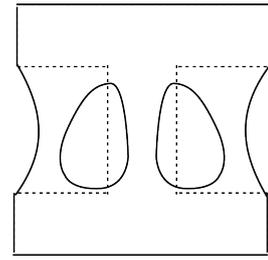
トポロジー最適化は、図-2.3 に示すように、幾何学的表現法と材料表現法に分類することができる。幾何学的表現法は、ある構造の内外境界部を変化させることで構造全体の最適な位相を決定するものである。この方法は、図-2.3(a) のように、構造境界部の滑らかな形状を明確に表わすことができるという長所がある。幾何学的表現法として、level-set 法^{7)~13)}、トポロジカルデリバティブ²⁰⁾、フェーズフィールド手法を用いたトポロジー最適化^{15)~19)}



(a) size optimization



(b) shape optimization



(c) topology optimization

図-2.1 構造最適化の分類

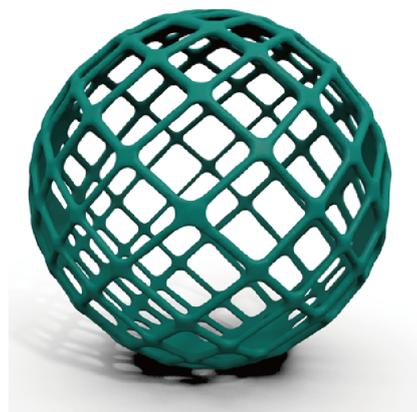
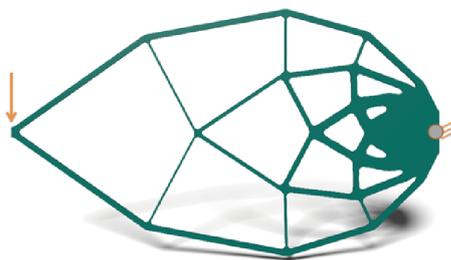
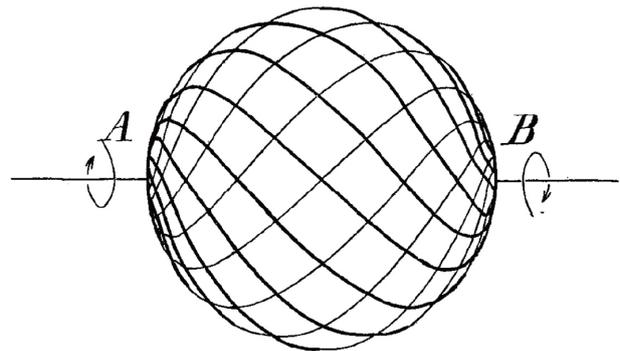
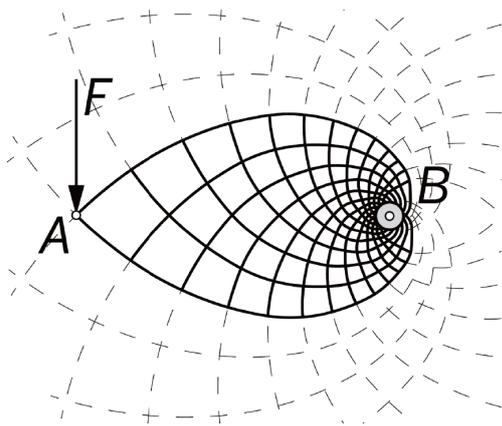


図-2.2 上) Michell⁸⁶⁾ によって導かれた最適解の例, 下) Wu ら⁸⁹⁾ によって再現されたトポロジー最適解

の研究が盛んである。一方、材料表現法は、設計空間 Ω_s において、任意の点 x が材料の存在する領域 Ω_m に位置するか否かでその位相を決定する方法である。材料表現法における材料の有無は、特性関数 $\chi(x)$ を導入して、以下のように表せる。

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{no material} & : \forall x \in \Omega_s \setminus \Omega_m \\ 1 & \rightarrow \text{material} & : \forall x \in \Omega_m \end{cases} \quad (2.1)$$

この方法は、**図-2.3** (b) に見られるように、一般的な有限要素メッシュで離散化すると境界部がジグザグ形状になるという問題がある。しかし、幾何学の特殊な知識を必要とする幾何学的表現法に対し、材料表現法は理論が単純で応用が比較的容易であることから、今日の汎用ソフトで最も一般的に用いられている。以上の特徴を踏まえて、本研究においては材料表現法を選択する。

材料表現法を用いたトポロジー最適化は、空隙 (void) と固体材料 (solid) の境界における不連続性から、いわゆる“0-1”整数値問題を伴う。このままでは解の一意性と安定性を損なうため、この不良設定問題 (ill-posedness) を良設定問題 (well-posedness) へ置き換える処置が行われる。これを正則化 (regularization) といい、これまで正則化のために、実用性や物理的整合性を考慮した様々な材料モデルが提案されてきた。その代表的なものとして、hole-in-cell microstructures⁶⁾ や the layered-microstructures^{21),90)} などが挙げられる。一方、簡易な方法として SIMP 法²²⁾ が知られており、これは連続的なべき関数によって不連続な 0-1 間を内挿する手法である。SIMP 法について、例えば、有効ヤング率 E_{eff} をある要素の密度 ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) を設計変数とみなして以下のように表せる。

$$E^{\text{eff}} = \rho^\gamma E^{\text{sld}} + (1 - \rho^\gamma) E^{\text{void}} \quad (2.2)$$

ここで、 E^{sld} と E^{void} は、それぞれ固体材料および仮想的な空隙のヤング率であり、 $E^{\text{sld}} \geq E^{\text{void}}$ の関係を満たすことが要請される。また、 γ は物理的意味を保証しないべき乗数であり、この γ を適切な値に設定することで最適解への収束を早めるとともに、最終的に明確な 0-1 配置を得ることができる。加えて、SIMP 法には少ない計算量で済むという利点もあり、その簡便さからトポロジー最適化の研究で広く用いられている。しかし、前述した微視的な特徴を持つ材料モデルを想定する場合と異なり、便宜的に適切なべき乗数を用いるために、SIMP 法により正則化された材料のうち 0-1 間の値、いわゆるグレースケールの状態においては物理的な解釈を求めることはできないことに注意しなければならない。

式 (2.2) で表した 2 相材料モデルにおける材料内挿関数は、設計変数の種類を増やすことで、3 相以上の材料モデルへ拡張することができる。例えば、DMO 型材料内挿関数⁴⁵⁾⁻⁴⁸⁾ を用いた場合の有効ヤング率 E^{eff} は次式のように表される。

$$E^{\text{eff}} = (s^{(1)})^\gamma (1 - (s^{(2)})^\gamma) E^{(1)} + (s^{(2)})^\gamma (1 - (s^{(1)})^\gamma) E^{(2)} + E^{\text{void}} \quad (2.3)$$

ここで、 $s^{(1)}$ 、 $s^{(2)}$ は設計変数を表し、 $E^{(1)}$ 、 $E^{(2)}$ は 2 種類の固体材料のヤング率を表す。**図-2.4** では、空隙および固体材料の 2 相からなる材料最適化と、空隙および 2 つの固体材料の

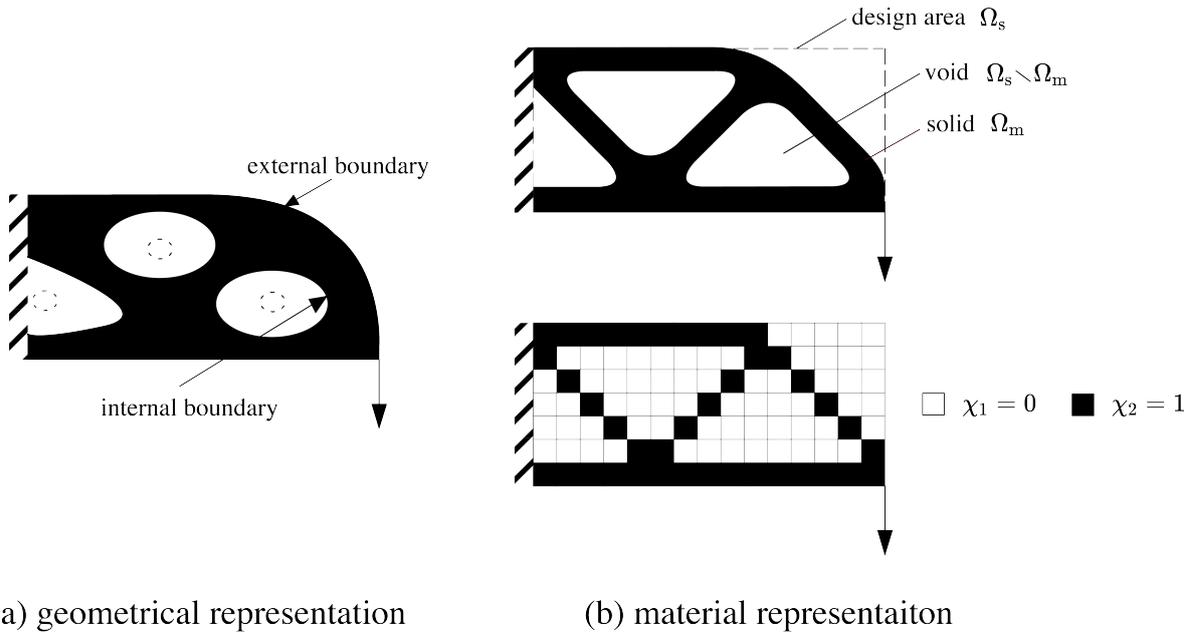


図-2.3 表現法によるトポロジー最適化の分類

3相からなる材料最適化の概念を比較して示している。なお、ここでは2次元の四辺形要素を想定している。図-2.4(a)より、式(2.2)のような空隙と固体材料の2相材料モデルでは、設計変数 ρ が各有限要素に1つずつ定義され、設計変数は正規化された材料密度とみなすことができる。一方で、図-2.4(b)より、式(2.3)のような3相材料モデルに拡張されることで、各有限要素に定義される設計変数が2つに増え、空隙の他に異なる2種類の固体材料を表現することが可能になる。

2.3 最適化問題とその解法

ここでは、トポロジー最適化問題を解く上で必要となる、最適化問題および感度の定式化について概説する。一般的な制約付き最適化問題は、以下のように定式化される。

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f(\mathbf{s}) && ; && f(\mathbf{s}) \in \mathbb{R} \\
 &\text{subject to} && \mathbf{h}(\mathbf{s}) = 0 && ; && \mathbf{h}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_h} \\
 &&& \mathbf{g}(\mathbf{s}) \leq 0 && ; && \mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_g} \\
 &&& \mathbf{s} = \{s_i \ (i = 1, \dots, n) \mid s_L \leq s_i \leq s_U\} && && (2.4)
 \end{aligned}$$

ここで、 $f(\mathbf{s})$ は目的関数、 $\mathbf{h}(\mathbf{s})$ は等式制約関数、 $\mathbf{g}(\mathbf{s})$ は不等式制約関数であり、これらはまとめて設計関数と呼ばれる。 \mathbb{R} は実数を意味し、 n_h および n_g はそれぞれ等式制約条件 $\mathbf{h}(\mathbf{s})$ と不等式制約条件 $\mathbf{g}(\mathbf{s})$ の個数を表す。また、 \mathbf{s} は設計変数であり、最適化問題はこの \mathbf{s} について解かれることになる。ここで n は設計変数の個数、 s_L および s_U は設計変数の下限値および上限値である。

トポロジー最適化において、設計変数 \mathbf{s} は設計領域内に分布する使用材料密度 (あるいは、

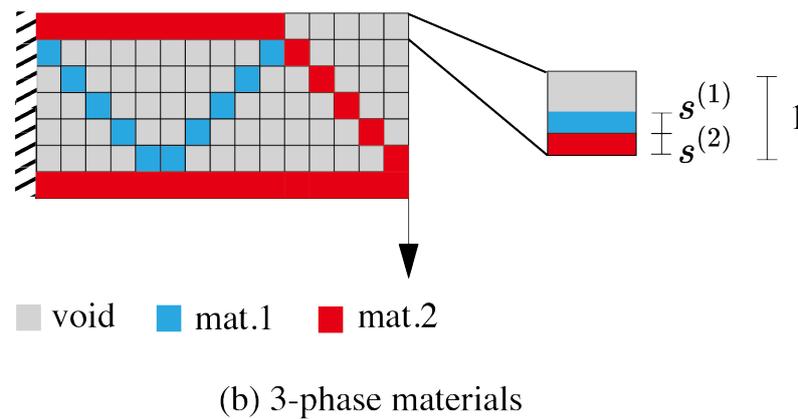
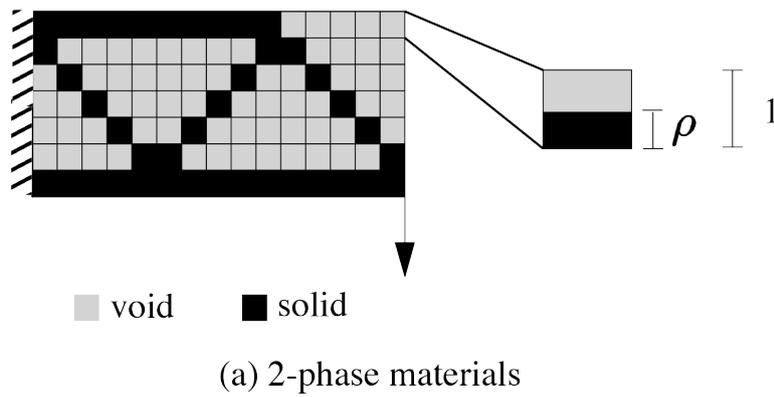


図-2.4 材料表現法による 2 相および 3 相材料の概念図

微視的な使用材料体積比率)として定義される。仮に s が整数値ベクトルで定義される場合、不連続で滑らかでない整数値問題となり、進化的戦略法や遺伝的アルゴリズムのような確率論的手法によって解かねばならず、この場合、一般に計算量が膨大となることがよく知られている。一方で、SIMP 法などが導入された滑らかな最適化問題では、式 (2.4) の全ての設計関数が設計変数 s に関して滑らか、すなわち微分可能となり、数理計画法や最適性規準法のような勾配基本法によって数理最適化問題を解くことができる。この方法を用いる場合、目的関数 $f(s)$ および制約条件 $h(s), g(s)$ について、設計変数 s に対する勾配 df/ds_i および $dh/ds_i, dg/ds_i$ を求める必要がある。この勾配を感度といい、感度を求める過程を感度解析 (sensitivity analysis) という。

構造最適化問題で設計関数として設定されるのは、設計目的や設計条件に相当する何らかの物理量である。本研究で扱う FEM を応用した構造最適化の場合、有限要素を用いて変位場を離散化した節点変位ベクトル u が、連立方程式の解として計算される。式 (2.4) の設計関数が、このような数値解 u の汎関数として与えられるとき、最適化問題は以下のように表される。

$$\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f(\mathbf{u}(s), s) & ; f(\mathbf{u}(s), s) \in \mathbb{R} \\
\text{subject to} & \mathbf{h}(\mathbf{u}(s), s) = \mathbf{0} & ; \mathbf{h}(\mathbf{u}(s), s) \in \mathbb{R}^{n_h} \\
& \mathbf{g}(\mathbf{u}(s), s) \leq \mathbf{0} & ; \mathbf{g}(\mathbf{u}(s), s) \in \mathbb{R}^{n_g} \\
& \mathbf{R}(\mathbf{u}(s), s) = \mathbf{0} & ; \mathbf{R}(\mathbf{u}(s), s) \in \mathbb{R}^{n_u}
\end{array} \quad (2.5)$$

ここで、 \mathbf{R} は有限要素解析における残差ベクトル関数であり、 $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ は釣り合い式や材料構成則から導かれた有限要素方程式である。この問題の目的関数 $f(\mathbf{u}(s), s)$ の設計変数感度の評価式は、連鎖律を用いて以下のように展開できる。

$$\frac{df}{ds_i} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} + \frac{\partial f}{\partial s_i} \quad (2.6)$$

ここで、 df/ds_i は i ($i = 1, 2, \dots, n$) 番目の有限要素における目的関数 $f(s)$ の感度である。節点変位 $\mathbf{u}(s)$ は設計変数 s に依存して変化する方程式 $\mathbf{R}(\mathbf{u}(s), s) = \mathbf{0}$ の解であり、設計変数に対し陰的に依存する関数と見なされる。ゆえに、節点変位感度 $\partial \mathbf{u} / \partial s_i$ の計算は代数計算のみで定式化できない陰的な微分項である。陰的な微分項を計算するためには、一般的に「設計変数の数」だけ構造解析を実施する必要がある、結果として膨大な計算量となる。これを回避するために、随伴変数法 (Adjoint Variable Method: AVM) に基づく感度解析によって、陰的な微分項 $\partial \mathbf{u} / \partial s_i$ を数学的操作によって消去するといった対策が講じられる。

次に、式 (2.4) を解くことを考える。Lagrange の未定乗数法より、次式のような Lagrangian を作る。

$$L = f(s) + \lambda_0 h(s) + \sum_{i=1}^n \{ \lambda_{-i} (-s_i + s_i^L) + \lambda_{+i} (s_i - s_i^U) \} \quad (2.7)$$

ここで、 λ_0 , λ_{-i} , λ_{+i} は Lagrange 未定乗数である。なお、ここでは簡単のため、制約条件式の数、等式制約関数式の数、不等式制約関数式の数、すなわち、 $n_h = 1$, $n_g = 0$ として考える。式 (2.7) から、非線形計画法において 1 階導関数が満たすべき最適条件、すなわち KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker condition) を次式のように得る。

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = \frac{\partial f(s)}{\partial s_i} + \lambda_0 \frac{\partial h(s)}{\partial s_i} - \lambda_{-i} + \lambda_{+i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = h(s) \leq 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{-i}} = -s_i + s_i^L \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{+i}} = s_i - s_i^U \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.11)$$

$$\lambda_0 h(s) = 0 \quad (2.12)$$

$$\lambda_{-i} (-s_i + s_i^L) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.13)$$

$$\lambda_{+i} (s_i - s_i^U) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.14)$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_{-i} \geq 0, \quad \lambda_{+i} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.15)$$

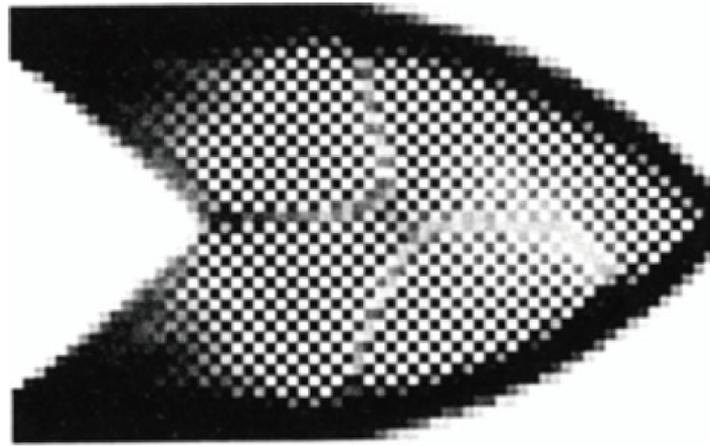


図-2.5 チェッカーボードパターン⁹¹⁾

上式のような KKT 条件を満たす最適解 s^* を得るための解法の中でも、トポロジー最適化で最も基本的なものが OC 法と MMA による最適化アルゴリズムである。

2.4 チェッカーボードパターンおよびフィルタリング手法

密度法によるトポロジー最適化計算には、チェッカーボードパターン⁹¹⁾ やグレースケールなどといった数値的な問題が存在する。チェッカーボードパターンとは、図-2.5に見られるような非常に複雑な形状パターンを指し、数値的に特異な状態が最適解として得られてしまう現象である。このような現象が起こるのは、有限要素法において 1 次要素を用いた際のチェッカーボードパターンの分布が、せん断方向に対して比較的高い剛性を有するためである。このようなチェッカーボードを避けるために、2 次要素といった高次要素を用いる、あるいは選択型低減積分要素を用いるなどといった対策が考えられる。しかし、これらの対処法では、せん断方向の剛性が 1 次要素を用いた場合より比較的小さくなるだけであり、チェッカーボード問題の解決を保証するものではない。以上のことから、後に説明するフィルタリングと呼ばれる設計空間の平滑化手法 (smoothing) によって、チェッカーボードの問題を回避することが効果的である。

フィルタリングとは、前節で示したようなチェッカーボードパターンを回避するために、隣接する設計変数間で不連続な値を取らない、すなわち、連続性が担保された仕組みを与える手法である。フィルタリングの操作には、大きく分けて感度フィルタと密度フィルタが存在する。まず、感度フィルタについては、目的関数 f の設計変数 s_i に対する真の感度 df/ds_i を平滑化し、その平滑化された感度 $d\tilde{f}/ds_i$ を用いて最適化計算を行う方法である。一般的

な感度フィルタは、次式のように定義される⁹²⁾。

$$\frac{d\tilde{f}}{ds_i} = \frac{\sum_{l \in \mathbb{M}_i} W(\mathbf{x}_l) s_l \frac{df}{ds_l} / V_l}{\frac{s_i}{V_i} \sum_{l \in \mathbb{M}_i} W(\mathbf{x}_l)} \quad (2.16)$$

ただし、 V_j は有限要素の体積である。 $W(\mathbf{x}_l)$ は重み関数であり、着目する要素中心の座標 \mathbf{x}_i と、周囲の要素中心の座標 \mathbf{x}_l の関数で表される。これは、フィルタ半径 R を用いて次式のように表される^{93),94)}。

$$W(\mathbf{x}_l) = R - \|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i\| \quad (2.17)$$

$W(\mathbf{x}_l)$ は、他に Gauss 分布を利用したものも存在する^{95),96)}。図-2.6 は、フィルタの影響範囲について示した概念図であり、ある要素 i を中心とした領域 \mathbb{M}_i の中に存在する要素 l との関係を示している。

一方で、密度フィルタは真の設計変数 s_i に対して行う方法であり、平滑化された設計変数 \tilde{s}_i は、次式のように表される^{93),94)}。

$$\tilde{s}_i = \frac{\sum_{l \in \mathbb{M}_i} W(\mathbf{x}_l) s_l V_l}{\sum_{l \in \mathbb{M}_i} W(\mathbf{x}_l) V_l} \quad (2.18)$$

感度フィルタは、目的関数の感度を計算した後にそれを平滑化するのに対し、密度フィルタは、構造解析を行う前に設計変数を平滑化することで、設計空間そのものの平滑化を行う。以上のようなフィルタリング操作を行うことで、チェッカーボードの問題を回避できるほか、メッシュ依存性を軽減できる。さらには、ヘヴィサイド関数を用いた写像 (projection) を行うことで、最適化結果におけるグレースケールの除去も可能となる⁹⁷⁾。

図-2.7 は、片持はりの構造モデルで密度フィルタのフィルタ半径 R とメッシュサイズを変更して平均コンプライアンス最小化の最適化結果を比較して示したものである。ここでは、空隙と固体材料の2相材料の SIMP 法を用い、ヤング率を $E^{\text{void}} = 10^{-4}$ 、 $E^{\text{slid}} = 10$ とし、設計領域に対して 35% の材料体積となるように等式制約条件を与えている。設計領域のスケールは横 150、縦 100 とした。なお、本論文では煩雑を避けるため、長さやヤング率、応力に関する単位は記載しない。実際には、本論文を通して応力とヤング率は GPa、長さは mm、荷重は kN として計算を行っている。図-2.7(a) は、フィルタ半径を $R = 0$ 、すなわち、フィルタリング操作を行っていない場合の結果である。図-2.7(b), (c) では、フィルタ半径にそれぞれ $R = 2$ 、 $R = 5$ を与え、図-2.7(d) ではメッシュの解像度を他3ケースより高くし、 $R = 2$ として計算を行っている。図-2.7(a) と (b) を比較して、フィルタを与えることで、チェッカーボードパターンのない結果が得られていることがわかる。図-2.7(c) では、フィルタ半径 R の値を大きくすることで、より単純なレイアウトが得られている。また、図-2.7(b) と (c) を比較して、メッシュの大きさに対して比較的大きいフィルタ半径を与えると、図-2.7(c) のようにグレースケールがやや多く残る結果が得られる。このグレースケール

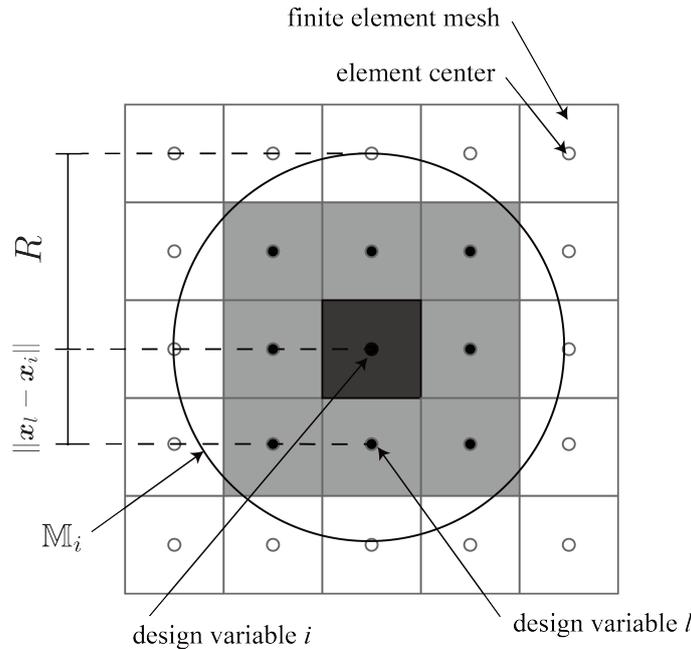


図-2.6 フィルタの影響範囲

ルは、先にも述べたしきい値関数を用いた projection によって、ある程度除去することができる。最後に、図-2.7(b)と(d)を比較して、異なるメッシュサイズでも、同じフィルタ半径 R の値を与えることで、ほとんど同じトポロジーが得られていることがわかる。以上のことから、密度フィルタによってチェッカボードが出現しない最適化結果を得ることができること、およびメッシュ依存性を軽減できることが確認できる。

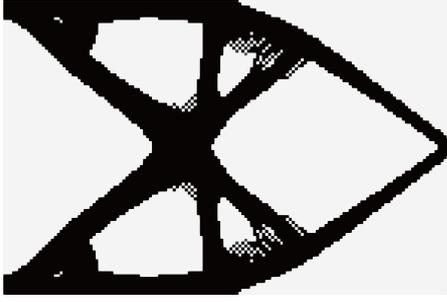
2.5 Helmholtz 型偏微分方程式による密度フィルタ

前節で説明したような密度フィルタに対して、Helmholtz 型偏微分方程式である変形 Helmholtz 方程式を解くことで、設計変数のフィルタリング操作を行うという手法が Lazarov ら⁹⁸⁾によって提案されている。この手法の長所は、一般的に用いられる密度フィルタに比べて分散メモリによる並列化を行いやすい、複雑形状に対してもフィルタリング操作を行うことができるといった点がある。さらに、次章で提案する界面表現法で、設計変数の空間勾配をとるという操作を行う必要があり、有限要素法で離散化が可能である本手法と相性が良い。以上のような点から、本研究でもこの Helmholtz 型偏微分方程式による密度フィルタによって設計変数の平滑化を行っている。

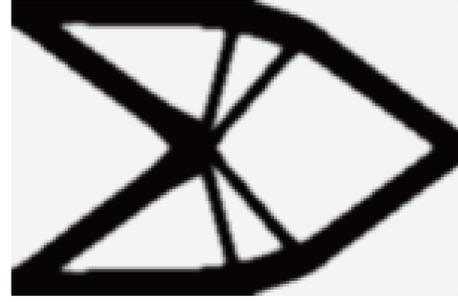
Helmholtz 型偏微分方程式による密度フィルタは、次の変形 Helmholtz 方程式を同次 Neumann 条件下で解くことで、陰的に設計変数をフィルタリングするという手法である。

$$-r^2 \nabla^2 \tilde{s} + \tilde{s} = s \quad \text{with} \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on the boundary} \quad (2.19)$$

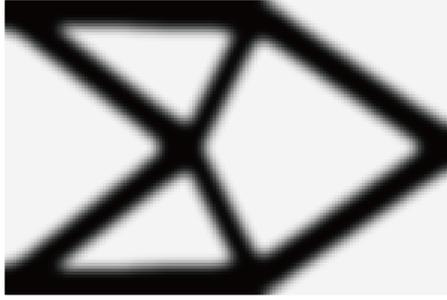
ここで、 s , \tilde{s} はそれぞれフィルタリングを受ける前および後の設計変数である。 r はフィル



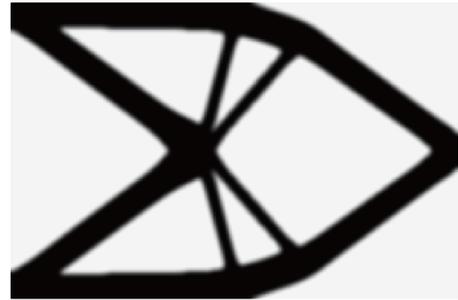
(a) $R = 0$, mesh size: 150×100



(b) $R = 2$, mesh size: 150×100



(c) $R = 5$, mesh size: 150×100



(d) $R = 2$, mesh size: 300×200

図-2.7 フィルタ半径 R とメッシュサイズを変更したときの最適化結果の比較

タ半径 R に関する係数で、次式の関係を持つ.

$$R = 2\sqrt{3}r \quad (2.20)$$

次に、式 (2.19) の弱形式化を行う. まず、式 (2.19) の両辺に $\delta\tilde{s}$ をかけて全領域 V で積分する.

$$\int_V \delta\tilde{s} \cdot (-r^2 \nabla \cdot (\nabla \tilde{s}) + \tilde{s}) dV = \int_V \delta\tilde{s} \cdot s dV \quad \forall \delta\tilde{s} \quad (2.21)$$

上式左辺第 1 項に Green-Gauss の定理を適応することで次式を得る.

$$r^2 \int_S -\delta\tilde{s} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{n}} dS + \int_V (r^2 \nabla \delta\tilde{s} \cdot \nabla \tilde{s} + \delta\tilde{s} \cdot \tilde{s}) dV = \int_V \delta\tilde{s} \cdot s dV \quad \forall \delta\tilde{s} \quad (2.22)$$

上式に同次 Neumann 境界条件 $\partial\tilde{s}/\partial\mathbf{n} = 0$ を代入することで、次式のような変形 Helmholtz 方程式に対する弱形式が得られる.

$$\int_V (r^2 \nabla \delta\tilde{s} \cdot \nabla \tilde{s} + \delta\tilde{s} \cdot \tilde{s}) dV = \int_V \delta\tilde{s} \cdot s dV \quad \forall \delta\tilde{s} \quad (2.23)$$

次に、有限要素法における離散化を行う. メッシュ分割されていると仮定すると、式 (2.23) の体積分は各要素の和で表すことができる.

$$\sum_i \int_{V_i} (r^2 \nabla \delta\tilde{s} \cdot \nabla \tilde{s} + \delta\tilde{s} \cdot \tilde{s}) dV = \sum_i \int_{V_i} \delta\tilde{s} \cdot s dV \quad \forall \delta\tilde{s} \quad (2.24)$$

要素内で, $\delta\tilde{s}$, \tilde{s} は形状関数 N を用いて次のように補間される.

$$\delta\tilde{s} = N_a\delta\tilde{s}_a, \quad \tilde{s} = N_b\tilde{s}_b \quad (2.25)$$

ただし, a, b はそれぞれ $\delta\tilde{s}$, \tilde{s} を補間する形状関数 N を区別するためのシンボルである. 式 (2.24) に内挿関数の補間式 (2.25) を代入して式変形を行う.

$$\sum_i \int_{V_i} (r^2 \nabla(N_a \delta\tilde{s}_a) \cdot \nabla(N_b \tilde{s}_b) + (N_a \delta\tilde{s}_a) \cdot (N_b \tilde{s}_b)) dV = \sum_i \int_{V_i} (N_a \delta\tilde{s}_a) \cdot s dV \quad \forall \delta\tilde{s}_a \quad (2.26)$$

$$\sum_i \delta\tilde{s}_a \cdot \left[\int_{V_i} r^2 \nabla N_a \cdot \nabla N_b + N_a N_b dV \right] \tilde{s}_b = \sum_i \delta\tilde{s}_a \cdot \int_{V_i} N_a s dV \quad \forall \delta\tilde{s}_a \quad (2.27)$$

$$\sum_i \left[\int_{V_i} r^2 \nabla N_a \cdot \nabla N_b + N_a N_b dV \right] \tilde{s}_b = \sum_i \int_{V_i} N_a s dV \quad (2.28)$$

式 (2.28) を連立 1 次方程式で表現すると, 次式のようになる.

$$\mathbf{K}_h(r)\tilde{\bar{s}} = \bar{s} \quad (2.29)$$

ただし,

$$\mathbf{K}_h(r) = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^T \mathbf{N} + \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{h,i}(r) \mathbf{B}) d\Omega \quad (2.30)$$

$$\mathbf{K}_{h,i}(r) = r^2 \mathbf{I} \quad (2.31)$$

ここで, \bar{s} , $\tilde{\bar{s}}$ はそれぞれフィルタリングを受ける前および後の設計変数の節点値ベクトルである. $\mathbf{K}_h(r)$ は全体行列, $\mathbf{K}_{h,i}(r)$ は要素行列, \mathbf{I} は単位行列である. また, \mathbf{N} および \mathbf{B} は, それぞれ有限要素法の一般的な形状関数と \mathbf{B} オペレータである. 式 (2.29) における \bar{s} , $\tilde{\bar{s}}$ は節点に割り振られた設計変数であるため, 要素ごとに定義されている s , \tilde{s} との関係を示す必要があり, それは \mathbf{T} , \mathbf{T}^* を用いることで次式のように表される⁹⁹⁾.

$$\bar{s} = \mathbf{T}s \quad (2.32)$$

$$\tilde{\bar{s}} = \mathbf{T}^* \tilde{s} \quad (2.33)$$

ただし,

$$\mathbf{T} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T d\Omega \quad (2.34)$$

$$\mathbf{T}^* = \int_{\Omega} \frac{N}{\int_{\Omega_i} d\Omega_i} d\Omega \quad (2.35)$$

以上の密度フィルタリングの操作をまとめると, s , \tilde{s} の関係は次式のようになる.

$$\tilde{s} = \mathbf{T}^* \mathbf{K}_h^{-1}(r) \mathbf{T}s \quad (2.36)$$

2.6 最適化問題の計算フロー

本研究においては、目的関数および等式制約条件からなる設計関数がすべて設計変数に関して滑らかであることを仮定し、感度解析に基づく勾配基本法を用いて最適化問題を解く。一般的に、設計変数に対する設計関数の単峰性が担保されている、単純な最適化問題の場合は OC 法による最適化アルゴリズムを用い、その限りでない場合は MMA と呼ばれるアルゴリズム^{100),101)}を用いることが多い。OC 法については付録 A.1 を、MMA については付録 A.2 をそれぞれ参照されたい。本研究の構造最適化問題の解法は以下のようにまとめられる。まず、構造解析を行った後、感度解析によって設計関数の感度を求める。次に、求めた感度を最適化アルゴリズムへ入力し、設計変数を更新する。この一連の計算を設計変数が 0 または 1 に 2 値化されて収束するまで繰り返し、最終的に収束したと判定されたステップの設計変数ベクトル s^* の分布によって、設計領域における最適なトポロジーが示される。以上の具体的なフローを図-2.8 に示す。

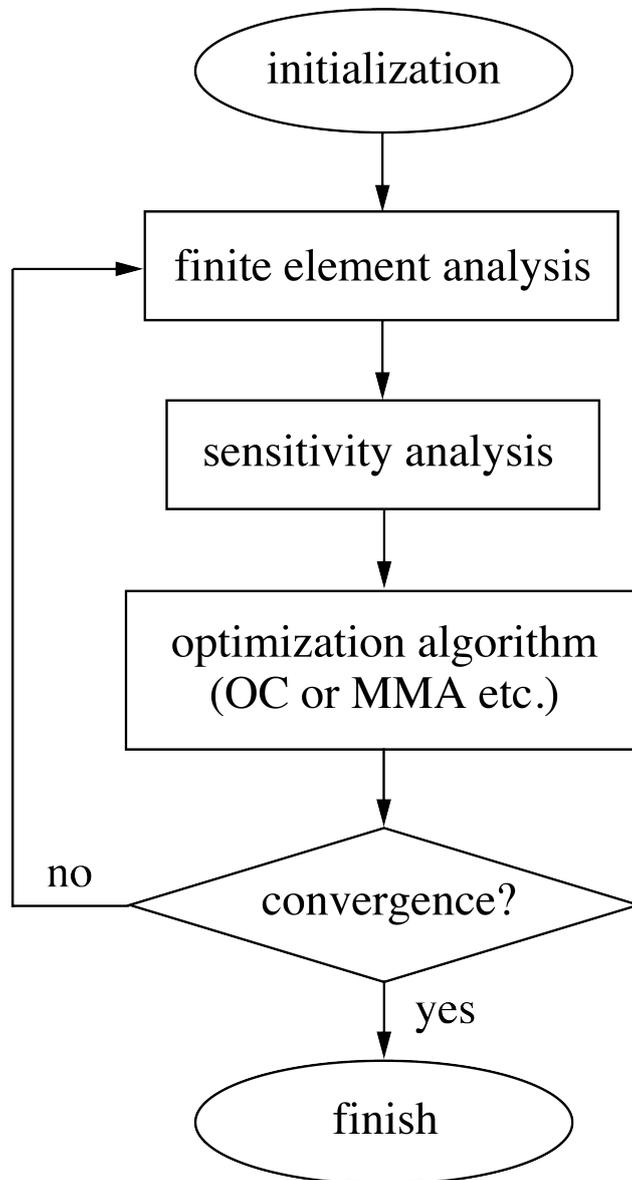


図-2.8 最適化問題の解法フロー

3 界面の物性を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化

3.1 概要

本章では、材料界面の強度を考慮するためのマルチマテリアルトポロジー最適化手法の開発に先立ち、界面の物性を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化手法の理論を構築し、その検証を行う。

マルチマテリアルトポロジー最適化には、単一材料の一般的なトポロジー最適化に比べ設計変数の数や種類が増えることで、最適化問題の性質として多峰性(あるいは非凸性)が顕著になり、その結果妥当な最適解を得にくくなるという問題がある。これを改善する方法として、各材料を定義する設計変数が互いに独立であること(独立性)、および各材料を定義する設計変数の順番(あるいは材料の順番)を任意に入れ換えても同じ最適化結果となること(可換性)を保証する材料モデルを構築することが挙げられる。この問題はマルチマテリアル最適化問題における共通の課題といえるが、level-set法に基づくトポロジー最適化においては、野田ら¹⁰³⁾が材料の可換性を保証するアルゴリズムを提案している。

一方、密度法に基づくマルチマテリアルトポロジー最適化については、先に紹介したDMO型材料内挿関数が、この可換性・独立性の要件を満たす手法である。このDMO型材料内挿関数の汎用性の高さや扱いやすさから、既に様々な研究が報告されている。例えば、Gaoら⁴⁶⁾は、各材料の使用体積量に自由度を持たせながら構造全体の重量制約を課す手法を提案し、Zhangら⁴⁸⁾は、超弾性材料を対象としたアダプティブメッシング付きの手法を提案している。

しかし、以上で紹介した先行研究では材料界面の物性は考慮されていない。複数材料を用いた設計では材料界面は必然的に発生する一方で、応力集中や熱破断、電蝕といった現象が発生しうる場所であり、構造の耐久性の観点で弱点となりやすい。よって、界面の物性を考慮することは設計上重要である。

以上の背景から、本章ではDMO型材料内挿関数をベースに、固体材料および界面の物性を考慮するためのマルチマテリアルトポロジー最適設計手法を開発する。その際、第1章でも言及した、Clausen⁵⁴⁾らのgraded interfaceと呼ばれる界面表現法の概念を発展させる。このgraded interfaceは数値計算上の汎用性が高く、既にメタマテリアルのマルチマテリアルトポロジー最適化⁶¹⁾や界面の体積制約を与えたマルチマテリアルトポロジー最適化⁶²⁾においても取り入れられている。特に、Chuらの手法⁶²⁾では、graded interfaceを応用し、最適化計算途中で発生する材料界面を滑らかに表現することに成功している。しかし、Chuらの手法では材料定義の可換性・独立性が保証されない材料モデルが用いられており、問題設定によっては合理性に欠いた局所的最適解に陥る可能性が高い。

そこで、本章ではDMO型材料内挿関数の特徴である材料定義の可換性・独立性を担保しつつ、材料界面の物性を考慮したマルチマテリアル材料モデルを新しく提案する。このよう

な材料モデルを用いることで、問題の非凸性に起因する合理性に欠く局所的最適解を避けつつ、材料界面を考慮した最適化計算が可能となる。なお、上で述べた材料界面の物性を考慮した材料モデルとは、微小体積を有する仮想的な材料が界面上に存在すると考え、その物性値によって材料界面の特性を表現するものである。本研究では、扱いやすさの観点から、Faureら⁶¹⁾やChuら⁶²⁾と同様に仮想的な界面の材料を等方性の線形弾性体として扱う。しかし、材料界面の挙動を等方性の線形弾性体を用いてモデル化することの妥当性については正しく検証されている訳ではない。材料界面の特性は、実際には加工条件をはじめ、固体材料の種類によっても大きく異なることが報告されている^{104),105)}。このような背景から、仮想的な界面の材料物性値を決定することは容易ではないため、本研究で扱う界面材料のヤング率の値は、対象とする母材のそれよりも大きい、小さい、さらにそれらの中間にあるという3つの場合を想定し、最適化計算を行っている。本章では、空隙を含む3相材料のマルチマテリアルを取り上げ、いくつかの最適化計算を通して、本提案手法の有用性を示す。

3.2 マルチマテリアル材料モデル

ここでは、まず具体の提案手法の説明に先立ち、本研究が参考とするDMO型材料内挿関数⁴⁵⁾および設計変数の独立性・可換性について概説する。

3.2.1 DMO型材料内挿関数の概要

ここでは、ヤング率の内挿関数として用いるDMO型材料内挿関数⁴⁵⁾について概説する。以降、有限要素の番号を i ($i = 1, 2, \dots, n$)、材料番号を j ($j = 1, 2, \dots, m$)とし、設計変数は、 i 番目の要素に存在する j 番目の材料の、その要素の体積に対する体積比として $s_i^{(j)}$ と表現する。まず、 m 相の固体材料と空隙の相からなる合計 $m + 1$ 相のマルチマテリアルを想定した場合、この複合材料の有効ヤング率 E_i^{sld} に関する内挿関数を次式のように定義する。

$$E_i^{\text{sld}} = \sum_j^m w_i^{(j)} E^{(j)} + E^{\text{void}} \quad (3.1)$$

ここで、 $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m)}$ は固体材料のヤング率である。 E^{void} は空隙に与える仮想的なヤング率であり、十分に小さい値が用いられる。式(3.1)における $w_i^{(j)}$ は各固体材料に内挿される重みパラメータであり、以下のように定義される。

$$w_i^{(j)} = (v_i^{(j)})^\gamma \prod_{k(k \neq j)}^m \{1 - (v_i^{(k)})^\gamma\} \quad (3.2)$$

ここで、 γ はペナルティパラメータであり、計算の収束性および物理的な根拠から $\gamma = 3$ が用いられることが多い^{106),107)}。本研究でもそれに倣って $\gamma = 3$ を用いる。 $v_i^{(j)} = \phi(\tilde{s}_i^{(j)})$ は固体材料の材料体積比率であり、次節で説明する式(3.10)のしきい値関数 $\phi(x)$ にフィルタリング操作を施した後の設計変数 $\tilde{s}_i^{(j)}$ を代入したものである。なお、本研究における材料体積

比率とは、 i 番目の要素に存在する固体材料 j が、その有限要素に占める体積割合を指す。本研究のフィルタリング操作については、第 2 章でも説明した Helmholtz 型偏微分方程式による密度フィルタ⁹⁸⁾を用いている。式 (3.2) について、本章では空隙を含む 3 相材料を仮定することから $m = 2$ であり、次式のように表すことができる。

$$E_i^{\text{sld}} = \underbrace{(v_i^{(1)})^\gamma (1 - (v_i^{(2)})^\gamma)}_{w_i^{(1)}} E^{(1)} + \underbrace{(v_i^{(2)})^\gamma (1 - (v_i^{(1)})^\gamma)}_{w_i^{(2)}} E^{(2)} + E^{\text{void}} \quad (3.3)$$

このように、DMO 型材料内挿関数では、固体材料の相で重みづけとなる係数 $w_i^{(j)}$ の式が等価な関数で与えられることがわかる。このような性質は強度、重量などといったヤング率以外の物性を同時に考慮する場合や、弾塑性材料などの材料パラメータが複数ある材料を用いる場合に重要となる。図-3.1 は、片持はりの構造モデルに式 (3.3) で示した 3 相材料 (空隙と 2 つの固体材料) を用いて平均コンプライアンス最小化の最適化計算を実施した結果を示している。ヤング率について、図-3.1(a) では $E^{(1)} = 100$, $E^{(2)} = 200$, 図-3.1(b) では、値を相互に入れ換えた $E^{(1)} = 200$, $E^{(2)} = 100$ を与えている。また、材料体積比率について材料 1, 2 ともに上限 25% の制約がそれぞれ与えられている。設計変数の初期値は一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.5$ が与えられている。なお、単位については第 2 章と同様に与えず、無次元化している。図-3.1(a), (b) を比較して、ヤング率による材料定義が入れ換わってもほとんど同様の結果が得られていることがわかる。これは、DMO 型材料内挿関数による材料定義が可換性・独立性を有していることを示唆している。

3.2.2 設計変数の独立性・可換性が最適解に与える影響

ここでは、DMO 型材料内挿関数の比較対象として、Chu ら⁶²⁾の手法でもベースとなっている拡張 SIMP 法の内挿関数を紹介する。 m 相の固体材料および空隙を含む $m + 1$ 相における拡張 SIMP 法の内挿関数を用いた場合の E_i^{sld} に関する内挿関数は次式のように表される⁴³⁾。

$$E_i^{\text{sld}} = \sum_{j=1}^m w_i^{(j)} E^{(j)} + (1 - (v_i^{(1)})^\gamma) E^{\text{void}} \quad (3.4)$$

ここで、

$$w_i^{(j)} = \left[1 - (v_i^{(j+1)} - v_i^{(j+1)} \delta_{j,m})^\gamma \right] \prod_{k=1}^j (v_i^{(k)})^\gamma \quad (3.5)$$

$$\delta_{j,m} = \begin{cases} 1, & j = m \\ 0, & j \neq m \end{cases} \quad (3.6)$$

前節と同様に、 $E^{(j)}$ は固体材料のヤング率、 $w_i^{(j)}$ は重み係数、 γ はペナルティ係数、 $v_i^{(j)}$ はしきい値関数を適用させた材料体積比率であり、 $\delta_{j,m}$ はクロネッカーのデルタである。式 (3.4)

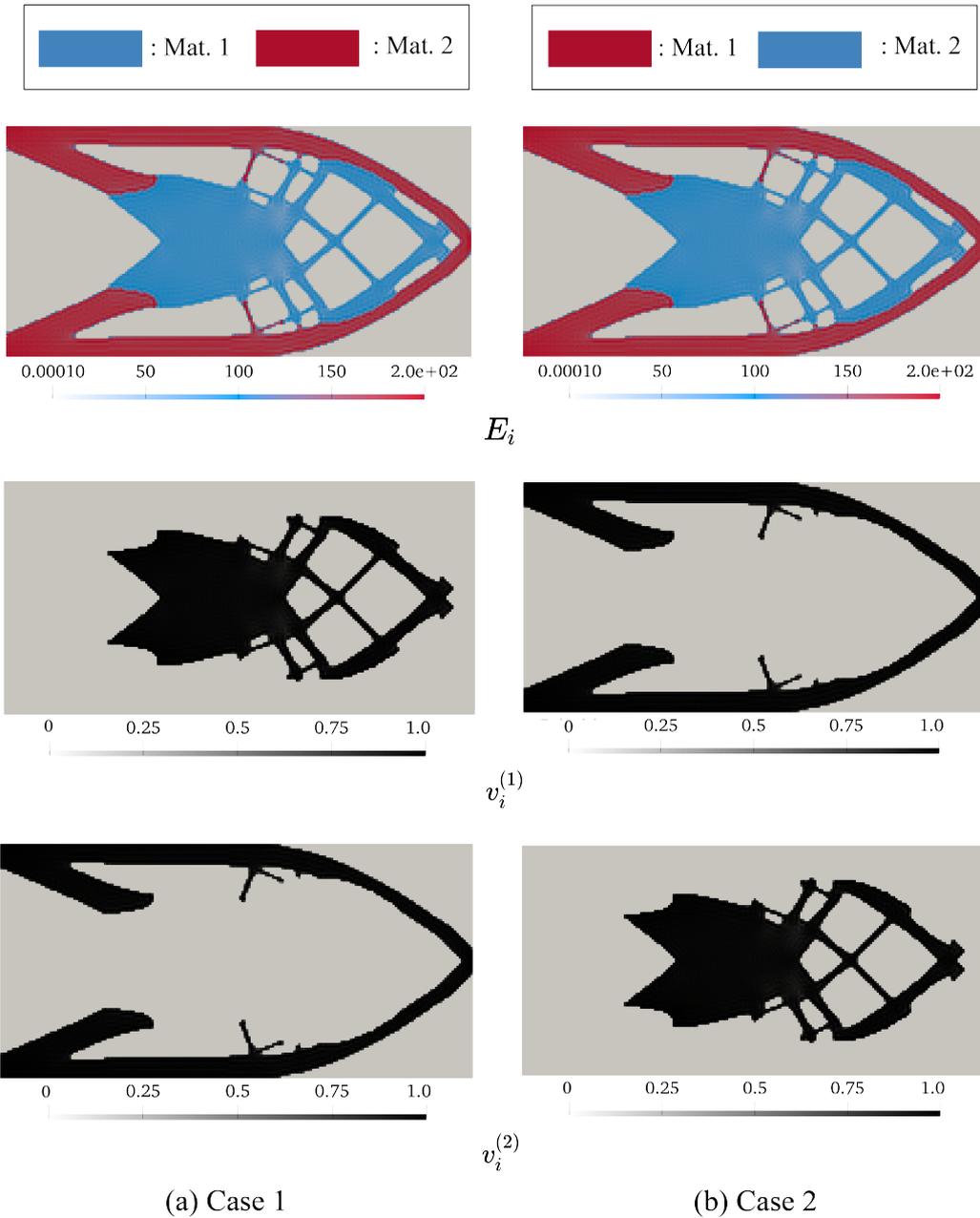


図-3.1 式 (3.3) を用いて Case1 と Case2 の場合で最適化計算を行った結果

において固体材料の数を $m = 2$ とした場合，次式のように書き下すことができる．

$$E_i^{\text{sld}} = \underbrace{(v_i^{(1)})^\gamma (1 - (v_i^{(2)})^\gamma)}_{w_i^{(1)}} E^{(1)} + \underbrace{(v_i^{(1)})^\gamma (v_i^{(2)})^\gamma}_{w_i^{(2)}} E^{(2)} + (1 - (v_i^{(1)})^\gamma) E^{\text{void}} \quad (3.7)$$

式 (3.7) より， $E^{(1)}$ ， $E^{(2)}$ の係数 $w_i^{(1)}$ ， $w_i^{(2)}$ が異なる関数となっていることから固体材料間の可換性は保証されないことが見受けられる．また，この材料モデルでは $E^{(1)} < E^{(2)}$ を保持する必要があり，仮に $E^{(1)} > E^{(2)}$ の関係を持つ値を入れた場合，関数の非凸性が顕著となる．

図-3.2 は，片持りの構造モデルに式 (3.7) で示した 3 相材料を用いて平均コンプライアンス最小化を実施した計算結果を示している．図中の Mat. 1，Mat. 2 はそれぞれ固体材料 1, 2

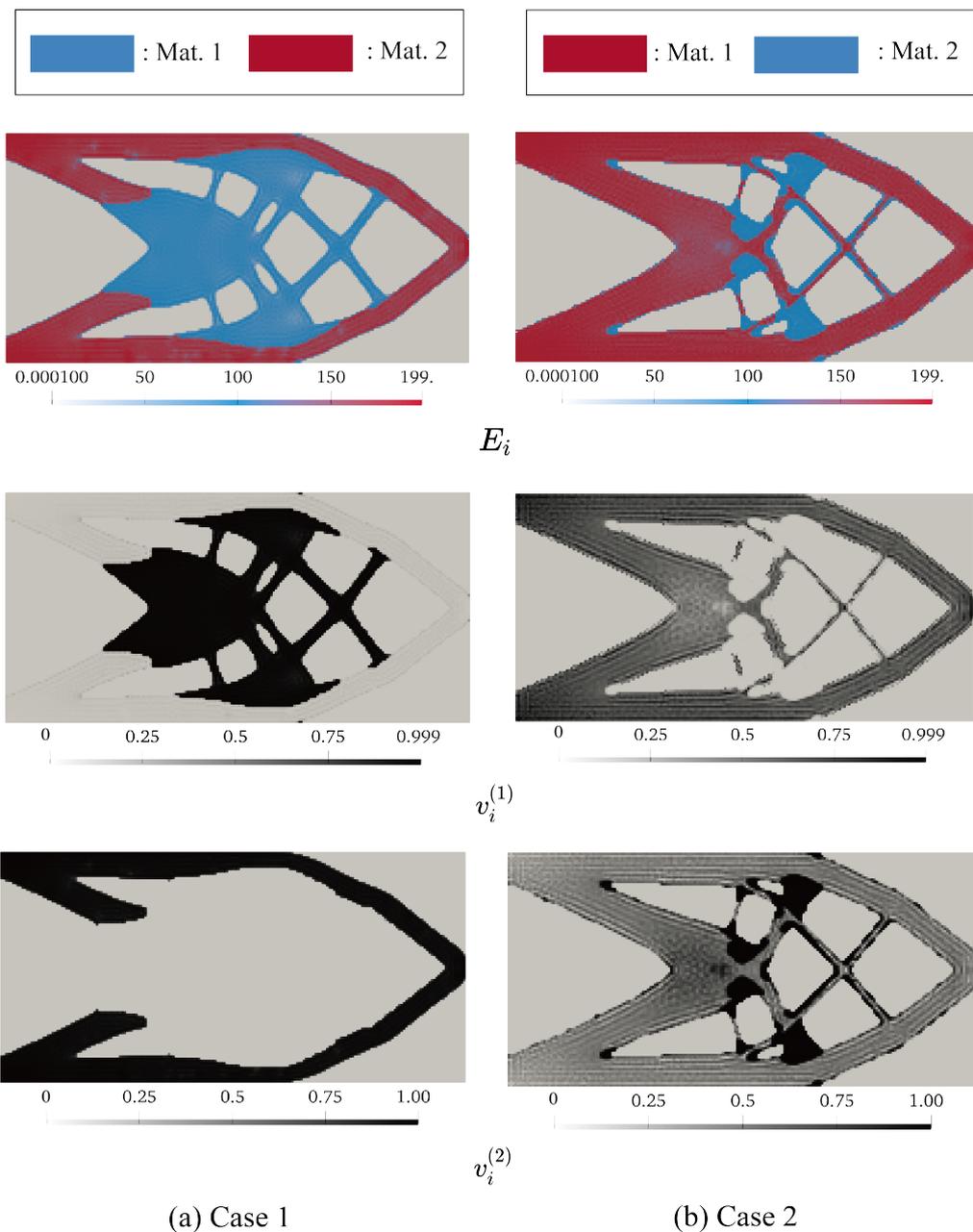


図-3.2 式 (3.7) を用いて Case1 と Case2 の場合で最適化計算を行った結果

を意味するものとする。ヤング率について、図-3.2(a) の Case1 では $E^{(1)} = 100$, $E^{(2)} = 200$, 図-3.2(b) の Case2 では, $E^{(1)} = 200$, $E^{(2)} = 100$ を与えている。また, 材料体積比率について材料 1, 2 ともに上限 25% の制約がそれぞれ与えられている。設計変数の初期値は一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.5$ が与えられている。図-3.2(a) の結果では, ヤング率の高い赤の材料が構造の枠を作るように配置されていることから, 妥当な結果が得られていることが分析できる。一方で, 図-3.2(b) の $E^{(2)} < E^{(1)}$ で与えた結果では, 多くの中間密度を残した状態で最適化計算が収束してしまうことが見受けられる。これは, 得られたトポロジーが異なることから, 材料の可換性が満たされていないことを示唆するものである。表-3.1 および表-3.2 は, 式 (3.3) および式 (3.7) の内挿関数を用いた場合に, それぞれの材料を表すために必要な設

表-3.1 式 (3.3) における材料体積比率 $v_i^{(j)}$ と材料の相の関係

	$v_i^{(1)}$	$v_i^{(2)}$
void	0	0
solid phase 1	1	0
solid phase 2	0	1

表-3.2 式 (3.7) における材料体積比率 $v_i^{(j)}$ と材料の相の関係

	$v_i^{(1)}$	$v_i^{(2)}$
void	0	0
solid phase 1	1	0
solid phase 2	1	1

計変数の値の組み合わせを示したものである。これらの表から、式 (3.3) の DMO 型材料内挿関数では、各固体材料の発現がそれぞれ 1 つの設計変数ごとに独立しているのに対し、式 (3.7) の拡張 SIMP 法では、材料 1 の発現のために設計変数 $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$ が両方 1 でなければならない。このことから、DMO 型材料内挿関数ではヤング率の大小関係によらず同様な計算結果を出すことが可能であると予想できる。このことは 3.6 節の数値計算例で詳細に示す。

3.3 仮想的な材料界面体積比率

本研究では、材料界面のヤング率を評価するために、仮想的な界面モデルを導入する。具体的な概念として、界面は微小な幅を有するものとして考え、その微小領域の界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ を定義する。図-3.3 は、提案するマルチマテリアル graded interface の概念図である。この図のように、青で表される材料 1 と、赤で表される材料 2 が連続して配置されている場合に、それらの材料体積比率 $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$ の空間勾配のノルムを利用することで界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ を表現する。なお、この界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ は、Chu ら⁶²⁾ の 2 段階密度フィルタを用いた graded interface をベースとしたモデルである。graded interface については付録 B にその概要を記した。 $v_i^{(j,k)}$ の計算手順はやや複雑となるため、図-3.4 に示すフローチャートに従ってその手順を説明する。なお、図-3.4 の色は、それぞれ材料体積比率 (青と赤)、界面体積比率 (緑) を表している。まず、1 回目のフィルタリング操作におけるフィルタ半径を R_1 とすると、式 (2.20) から r_1 が求まる。

$$r_1 = \frac{R_1}{2\sqrt{3}} \quad (3.8)$$

この r_1 は、第 2 章で説明した式 (2.19) の Helmholtz 型偏微分方程式を解く際の係数 r に該当する。次に、式 (2.36) に r_1 を代入して、フィルタリング操作を施した後の設計変数の配

列 $\tilde{\mathbf{s}}^{(j)}$ を次式から求める.

$$\tilde{\mathbf{s}}^{(j)} = \mathbf{T}^* \mathbf{K}_h^{-1}(r_1) \mathbf{T} \mathbf{s}^{(j)} \quad (3.9)$$

そのあと, 下式のようなしきい値関数 ϕ を用いて投影 (projection) を施した, 固体材料の材料体積比率 $v_i^{(j)} = \phi(\tilde{s}_i^{(j)})$ を得る.

$$\phi(x) = \frac{\tanh(ST) + \tanh(S(x-T))}{\tanh(ST) + \tanh(S(1-T))} \quad (3.10)$$

ここで, x は $0 \leq x \leq 1$ を満たす変数である. S, T は, それぞれしきい値関数の傾き, しきい値を制御するためのパラメータであり, $0 < S, 0 < T < 1$ を満たす必要がある. また, S の値が大きいほど階段関数に近づく. 次に, この $v_i^{(j)}$ の配列 $\mathbf{v}^{(j)}$ に, フィルタ半径 R_2 を用いて2回目のフィルタリング操作を施し, 節点値ベクトル $\bar{\mathbf{v}}^{(j)}$ を次式のように求める.

$$r_2 = \frac{R_2}{2\sqrt{3}} \quad (3.11)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{(j)} = \mathbf{K}_h^{-1}(r_2) \mathbf{T} \mathbf{v}^{(j)} \quad (3.12)$$

ここで, 式 (3.12) を見ると式 (2.36) や式 (3.9) には存在する \mathbf{T}^* が無いことに気付く. これは, $\bar{\mathbf{v}}^{(j)}$ を節点値ベクトルとして得るためである. さらに, 空間勾配 $\bar{\mathbf{v}}^{(j)}$ のノルム $\|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\|$ を次式より得る.

$$\|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\| = \int_{\Omega_i} \sqrt{(\mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)})^T (\mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}) + \epsilon} d\Omega \quad (3.13)$$

ただし, ϵ は感度解析で設計変数に対する微分をとる際に, 原点で微分係数が発散するのを防ぐためのパラメータであり, $\epsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ とした. \mathbf{B} は前述のとおり \mathbf{B} オペレータである. 最後に, 固体材料 j, k ($j, k = 1, 2, \dots, m, j \neq k$) 間の界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ を次式より得る.

$$v_i^{(j,k)} = \phi\left(\kappa \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\| \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}\|\right) \quad (3.14)$$

ここで, 式 (3.14) における空間勾配のノルムのかけ合わせ $\|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\| \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}\|$ は, 0 から 1 までの値をとることを保証しない. κ はそれを正規化するために導入された補正パラメータである.

これに関連して, Helmholtz 型偏微分方程式による密度フィルタで得られる設計変数の勾配 $\|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\|$ の最大値 $\|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\|_{\max}$ は数学的に次式のようになることが分かっている⁵⁴⁾.

$$\|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\|_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{R_2} \quad (3.15)$$

そのため, 式 (3.15) から, $\|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\| \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}\|$ について次の関係式が成り立つ.

$$\epsilon \leq \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\| \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}\| \leq \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\|_{\max} \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}\|_{\max} = \frac{3}{R_2^2} \quad (3.16)$$

したがって、本研究においては、 κ を次式のように設定することで、式 (3.14) に示す $v_i^{(j,k)}$ の正規化を可能にした。

$$\kappa = \frac{1}{\left\| \nabla \bar{v}_i^{(j)} \right\|_{\max} \left\| \nabla \bar{v}_i^{(k)} \right\|_{\max}} = \frac{R_2^2}{3} \quad (3.17)$$

最終的な有効ヤング率 E_i は、式 (3.14) で求めた界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ で、材料界面のヤング率 E^{int} と、式 (3.1) で求めた固体材料のヤング率 E_i^{slid} を線形補間することで得られる。固体材料数 $m = 2$ の場合、それは次式のように表される。

$$E_i = v_i^{(1,2)} E^{\text{int}} + (1 - v_i^{(1,2)}) E_i^{\text{slid}} \quad (3.18)$$

3.4 最適化問題の設定

本研究では、各固体材料の体積に制約条件を与えた平均コンプライアンス最小化問題を解く。そこで、以下のような目的関数 $f(\mathbf{s})$ および不等式制約条件式 $g^{(1)}(\mathbf{s})$, $g^{(2)}(\mathbf{s})$ を定義する。

$$\text{minimize : } f(\mathbf{s}) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (3.19)$$

$$\text{subject to : } \mathbf{K}(\mathbf{s}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.20)$$

$$g^{(1)}(\mathbf{s}) = \sum_i^{n_{\text{elm}}} v_i^{(1)} V_i - \chi^{(1)} \bar{V} \leq 0 \quad (3.21)$$

$$g^{(2)}(\mathbf{s}) = \sum_i^{n_{\text{elm}}} v_i^{(2)} V_i - \chi^{(2)} \bar{V} \leq 0 \quad (3.22)$$

$$0 < s_{\min} \leq s_i^{(j)} \leq s_{\max} \quad (3.23)$$

ここで、設計変数の下限値と上限値は、それぞれ $s_{\min} = 1 \times 10^{-4}$, $s_{\max} = 1$ とする。 $\mathbf{K}(\mathbf{s})$ は全体剛性行列、 \mathbf{u} は節点変位ベクトル、 \mathbf{f} は外荷重ベクトルである。固体材料数を $m = 2$ として計算を行うため、この 2 材料の使用体積量に対して上限の制約を与える。 $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ は、それぞれ固体材料 1, 2 の使用体積量の割合に対する制約条件である。 V_i は各要素の体積であり、 \bar{V} は設計領域の体積、係数 $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$ は、それぞれの材料の体積量の上限を制約するパラメータである。

3.5 感度解析

本研究では、MMA¹⁰⁰ を用いて最適化計算を行う。MMA では目的関数および制約関数の設計変数に対する勾配 (感度) が必要になるため、本章では随伴変数法 (Adjoint Variable Method: AVM) を用いた感度の導出を行ったあと、感度の差分近似による値 (Finite Difference Approximation: FDA) との精度比較を行い、当該感度解析法の妥当性を検証する。

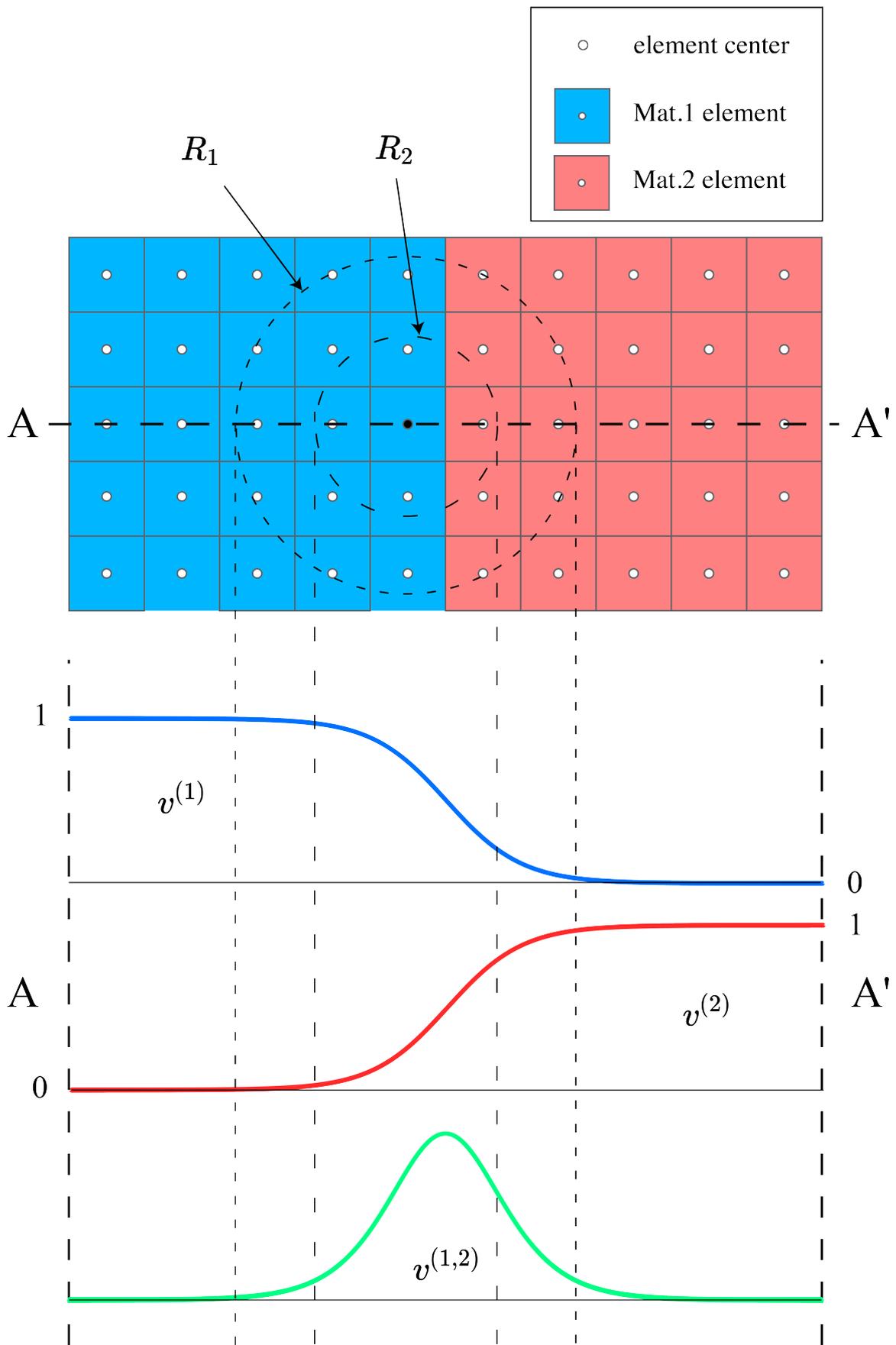


図-3.3 マルチマテリアル graded interface の概念図

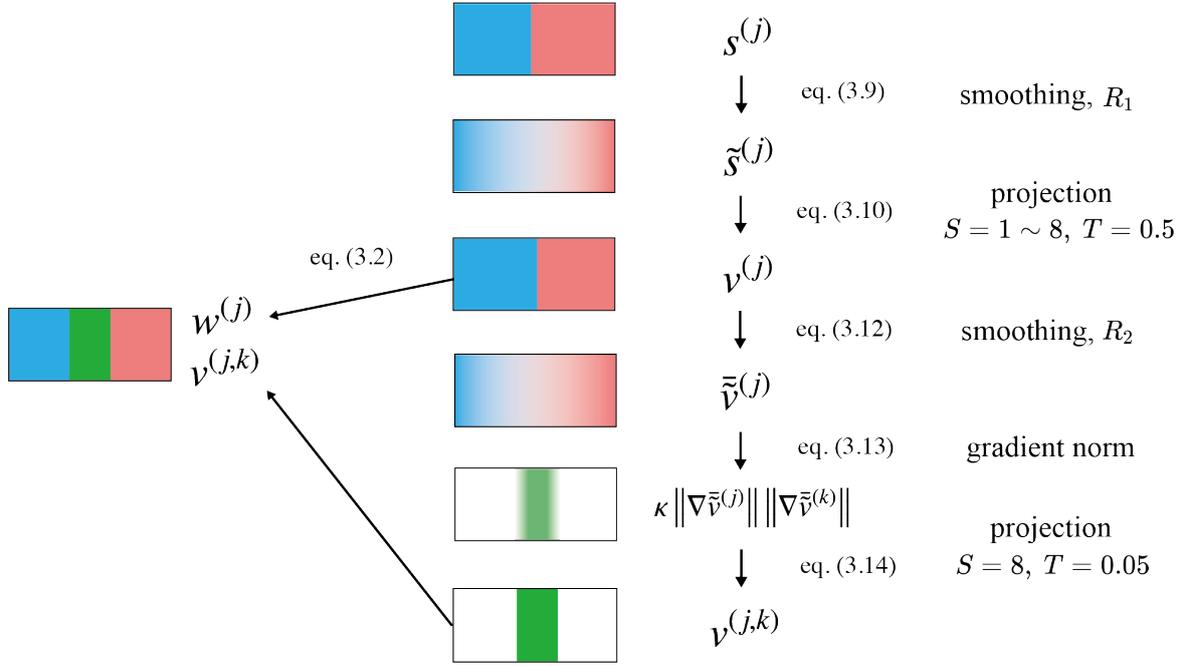


図-3.4 2段階の密度フィルタリングを用いた projection-mapping の手順

3.5.1 随伴変数法を用いた感度の導出

本節では随伴変数法による感度の導出を行う．まず，設計変数 $s_i^{(j)}$ ごとに得られる目的関数の感度の配列 $\partial f / \partial s^{(j)}$ は式 (2.36) を用いて次式のように表せる．

$$\frac{\partial f}{\partial s^{(j)}} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}^{(j)}} \mathbf{T}^* \mathbf{K}_h^{-1}(r_1) \mathbf{T} \quad (3.24)$$

$\mathbf{K}_h^{-1}(r_1)$ は，フィルタ半径 R_1 によって式 (2.20) および式 (2.29) から得られる行列である．式 (3.24) を求めるにあたっては，Helmholtz 型偏微分方程式の逆行列 $\mathbf{K}_h^{-1}(r_1)$ を直接求める必要はなく，次式を解くことで得られる $\mathbf{a}_1^{(j)}$ を用いれば良い．

$$\mathbf{K}_h(r_1) \mathbf{a}_1^{(j)} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}^{(j)}} \mathbf{T}^* \quad (3.25)$$

要素ごとの配列 $\partial f / \partial \tilde{s}^{(j)}$ の i 番目に着目した微分項 $\partial f / \partial \tilde{s}_i^{(j)}$ については，式 (3.18) から随伴変数法を用いると次式のように表せる．

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} = \int_{\Omega_i} -\mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_i \left\{ \frac{\partial v_i^{(1,2)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} (E^{\text{int}} - E_i^{\text{sld}}) + (1 - v^{(1,2)}) \frac{\partial E_i^{\text{sld}}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} \right\} d\Omega_i \quad (3.26)$$

ここで， $\mathbf{K}_{0,i}$ はヤング率を 1 とした場合の要素剛性行列である．また，式 (3.26) の各微分項については，以下のように整理できる．まず， $\partial E_i^{\text{sld}} / \partial \tilde{s}_i^{(j)}$ は，式 (3.2) を参照すると次式のようになる．

$$\frac{\partial E_i^{\text{sld}}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} = \sum_k^m \frac{\partial w_i^{(k)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} E^{(k)} \quad (3.27)$$

ここで,

$$\frac{\partial w_i^{(k)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} = \begin{cases} \gamma(v_i^{(j)})^{\gamma-1} \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} \prod_{l,l \neq j}^m (1 - (v_i^{(l)})^\gamma) & , \text{if } k = j \\ -v_i^{(k)} \gamma(v_i^{(j)})^{\gamma-1} \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} \prod_{l,l \neq j,k}^m (1 - (v_i^{(l)})^\gamma) & , \text{if } k \neq j \end{cases} \quad (3.28)$$

しきい値関数の式 (3.10) の微分項 $\partial\phi/\partial x$ は次式となる.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{S \operatorname{sech}^2(S(x-T))}{\tanh(ST) + \tanh(S(1-T))} \quad (3.29)$$

次に, $\partial v_i^{(1,2)}/\partial \tilde{s}_i^{(j)}$ を導出する. 簡単のため式 (3.26) の右辺の一部を次式における p_i と定義する.

$$p_i := \int_{\Omega_i} -(E^{\text{int}} - E_i^{\text{slid}}) \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_i d\Omega_i \quad (3.30)$$

仮に, 材料番号に $j = 1$ を代入すると, 式 (3.14) から $\partial v_i^{(1,2)}/\partial \tilde{s}_i^{(j)}$ の配列 $\partial v_i^{(1,2)}/\partial \tilde{s}^{(1)}$ は次式のように導出できる.

$$p_i \frac{\partial v_i^{(1,2)}}{\partial \tilde{s}^{(1)}} = \left(\int_{\Omega} \frac{p_i \kappa \mathbf{b}_i^{(1)}}{\int_{\Omega_i} d\Omega_i} d\Omega \right) \mathbf{K}_h^{-1}(r_2) \mathbf{T} \quad (3.31)$$

ここで,

$$\mathbf{b}_i^{(1)} = \frac{(\mathbf{B}\bar{\mathbf{v}}_i^{(1)})^T \mathbf{B}}{\sqrt{(\mathbf{B}\bar{\mathbf{v}}_i^{(1)})^T (\mathbf{B}\bar{\mathbf{v}}_i^{(1)}) + \epsilon}} \sqrt{(\mathbf{B}\bar{\mathbf{v}}_i^{(2)})^T (\mathbf{B}\bar{\mathbf{v}}_i^{(2)}) + \epsilon} \quad (3.32)$$

である. ここでの $\bar{\mathbf{v}}_i^{(1)}$, $\bar{\mathbf{v}}_i^{(2)}$ は要素ごとに与えられる節点値ベクトルである. また, $j = 2$ とすることで $p_i \partial v_i^{(1,2)}/\partial \tilde{s}^{(2)}$ も計算できる. 式 (3.24) 同様, 式 (3.31) も逆行列 $\mathbf{K}_h^{-1}(r_2)$ を直接求める必要はなく, 実装上では, 次式の連立 1 次方程式を解くことで得られる $\mathbf{a}_2^{(1)}$ を用いる.

$$\mathbf{K}_h(r_2) \mathbf{a}_2^{(1)} = \int_{\Omega} \frac{p_i \kappa \mathbf{b}_i^{(1)}}{\int_{\Omega_i} d\Omega_i} d\Omega \quad (3.33)$$

一方で, 制約条件式 $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ の感度の配列は, 次式のように陽に求まる.

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \mathbf{s}^{(1)}} = \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \tilde{s}^{(1)}} \mathbf{T}^* \mathbf{K}_h^{-1}(r_1) \mathbf{T} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \mathbf{s}^{(2)}} = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \mathbf{s}^{(1)}} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \mathbf{s}^{(2)}} = \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \tilde{s}^{(2)}} \mathbf{T}^* \mathbf{K}_h^{-1}(r_1) \mathbf{T} \quad (3.37)$$

表-3.3 数値計算例で用いる固体材料の材料特性

	Mat.1	Mat.2	Interface
Young's modulus	100	200	150
Poisson's ratio	0.3	0.3	0.3

ここで，配列 $\partial g^{(1)}/\partial \tilde{s}^{(1)}, \partial g^{(2)}/\partial \tilde{s}^{(2)}$ の i 番目の要素は次式のようなになる．

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \tilde{s}_i^{(1)}} = \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tilde{s}_i^{(1)}} V_i \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \tilde{s}_i^{(2)}} = \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \tilde{s}_i^{(2)}} V_i \quad (3.39)$$

3.5.2 感度の差分近似を用いた精度検証

ここでは，本研究で導出した随伴変数法による解析的感度の精度検証の方法について説明する．比較対象は次式のような FDA によって求められる感度である．

$$\frac{\partial f}{\partial s_i^{(j)}} \simeq \frac{f(s^{(j)} + \Delta s_i^{(j)}) - f(s^{(j)})}{\Delta s} \quad (3.40)$$

ここで， Δs は，設計変数の僅かな変動量を指し，ここでは $\Delta s = 1.0 \times 10^{-7}$ とする． $\Delta s_i^{(j)}$ は，着目する i 番目の成分のみ Δs を持ち，それ以外の成分はゼロを有するベクトルである．蛇足ではあるが，FDA による感度の計算は「設計変数の数」だけ構造解析を実施する必要がある．これは，一般に設計変数の多いトポロジー最適化問題では膨大な計算となるため，実設計に適用することは難しい．一方，随伴変数法は構造解析を何度も計算する必要がないことから，計算コストを大幅に削減できるため，実用的な方法といえる．その一方で，FDA による感度の計算は導関数を導く必要のない方法であるため，複雑な関数系を有する目的関数や制約条件式に対してもそのまま適用することができ，近似誤差を除けば精度も良いため，感度検証のベンチマークとして用いられることが多い．

この提案手法の検証では材料界面の物性値も加味するものであることから，その有用性を確認するために，明確な界面が存在していない初期状態，つまり，設計変数の分布が一様であるもの (Case 1) とそうでないもの (Case 2) の 2 ケースを考える．2 ケースともに，スケール $L = 100$ ，要素数は $20 \times 10 = 200$ とし，フィルタ半径は $R_1 = R_2 = 20$ とした．材料の物性値は表-3.3 のとおりである．固体材料の数は $m = 2$ としているため，各材料番号に対する感度である $\partial f/\partial s_i^{(1)}, \partial f/\partial s_i^{(2)}$ の 2 つについて比較を行う．図-3.5 および図-3.6 の左側のグラフは，目的関数 $f(s)$ の感度について随伴変数法 (AVM) と差分近似 (FDA) による感度を比較したものである．また，その相対誤差の絶対値を図-3.5 および図-3.6 の右側の緑色の

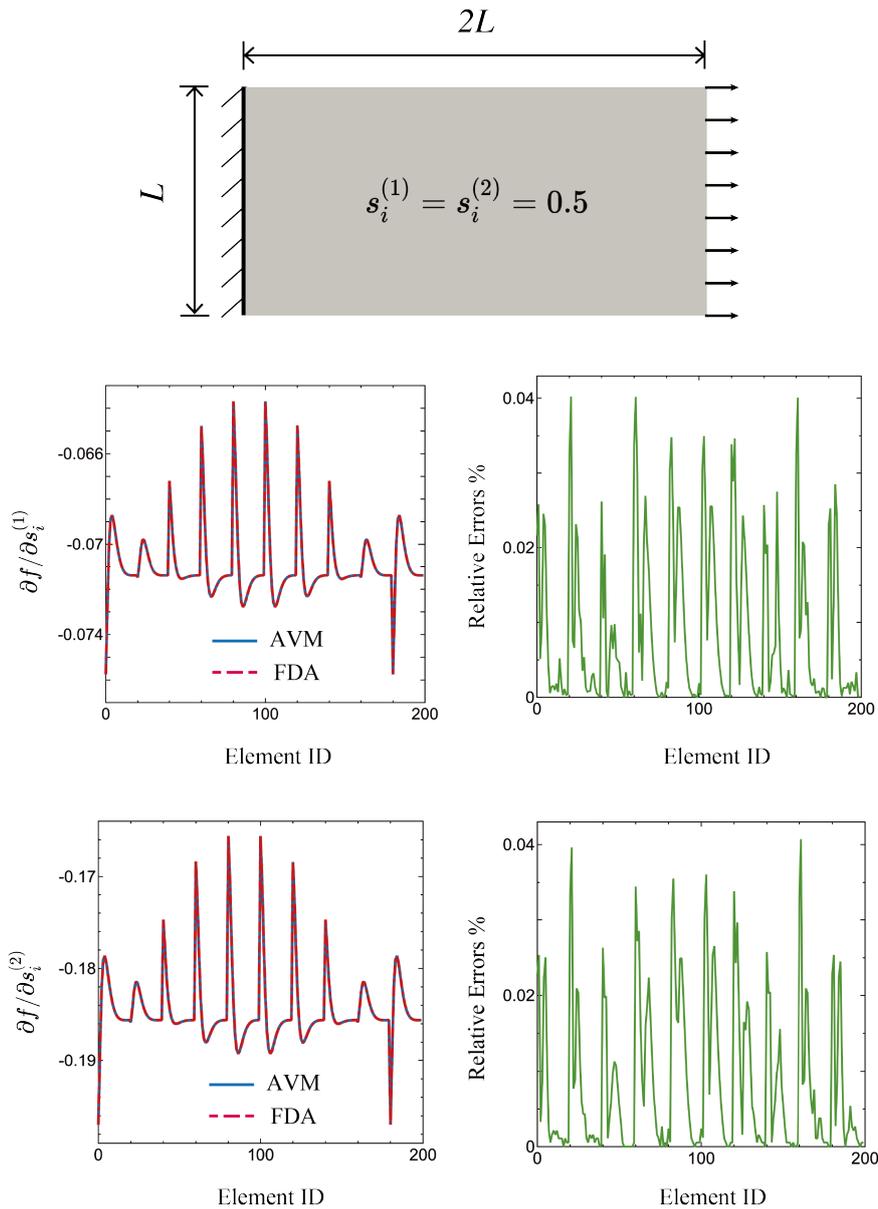


図-3.5 Case 1 の感度解析: 上) 初期設計変数の分布, 左) AVM と FDA の比較, 右) AVM と FDA の相対誤差

グラフで描画している。図-3.5 では、設計変数の初期値を全体に一様に与えて計算した結果を示している。この図から、相対誤差は最大でも 0.04% 程度であり、十分に高い精度を有していることが伺える。図-3.6 については、異なる設計変数の初期値を構造モデルの上側・下側に与えて同様の感度検証を行った結果である。このような初期値設定を行った理由は、明確な材料界面が存在する条件下においてどの程度の精度が保証されるかを確認するためである。図-3.6 を見ると、相対誤差の絶対値は最大で 5% 程度まで上昇していることが読み取れる。これは、式 (2.36) の Helmholtz 型偏微分方程式による密度フィルタの過程において、要素値である設計変数 $s^{(j)}$ を節点に割り振り、その勾配をとるという複雑な操作を行っていることによる数値誤差から発生するものだと考えられる。しかしながら、以上の検証より、

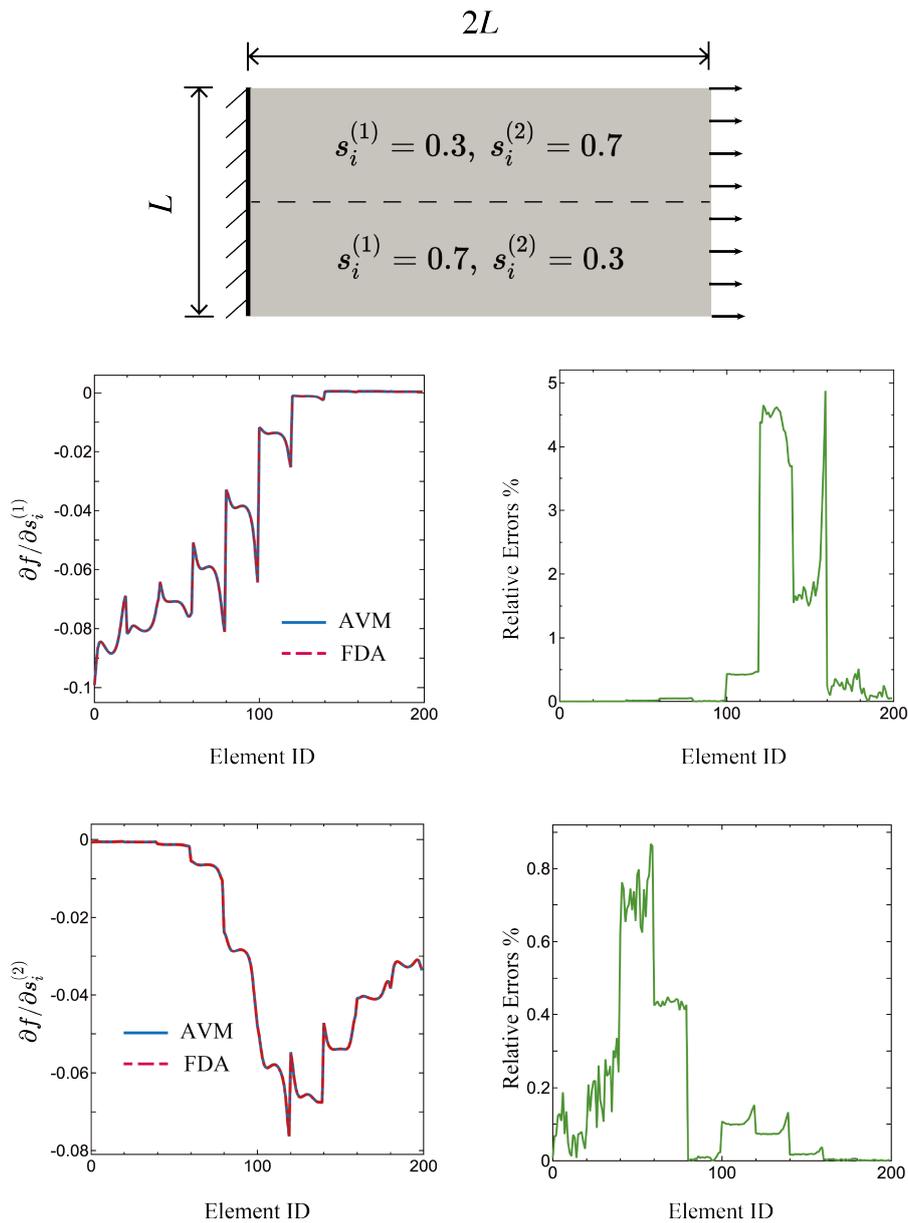


図-3.6 Case 2 の感度解析: 上) 初期設計変数の分布, 左) AVM と FDA の比較, 右) AVM と FDA の相対誤差

提案する手法の感度式が十分な精度を有していることが確認でき、この結果は次節で紹介する最適化結果の信頼性を保証するものであるといえる。

表-3.4 しきい値パラメータ S の設定

Optimization step	~150	~200	~250	251~
S	1	2	4	8

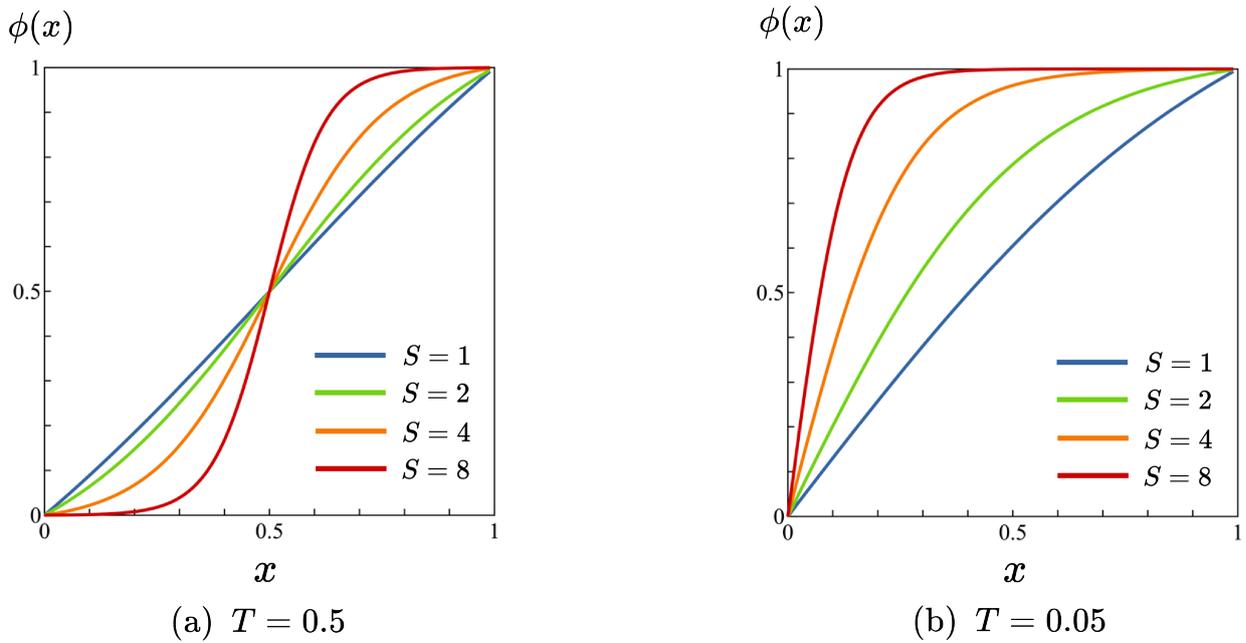


図-3.7 しきい値関数

3.6 最適化計算例

本章では、3つの単純な構造モデルを用いて提案手法の妥当性と性能に関する検証を行う。まず、片持ちりのモデルを用いて、異なるヤング率を有する材料の可換性と密度フィルタのフィルタ半径が計算結果に与える影響についての検証を行う。次に、2つの単純引張構造モデルを用いて、固体材料の可換性に関して片持ちりモデルと同様の検証を行うほか、界面のヤング率が与える物理的な影響についても検証を行う。いずれの計算例でも平面応力状態を仮定し、4節点四辺形要素を用いている。設計変数の初期値は一律に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.5$ とし、べき乗パラメータは $\gamma = 3$ を与えた。本研究では最適化計算途中で出現する材料界面のヤング率を考慮するため、最適化計算途中においては、ある程度大幅な界面の移動を許容しなければならない。その一方で、最適化計算の初期段階で界面体積比率がある程度存在しなければ界面のヤング率を考慮することが難しくなる。以上の点から、式(3.10)におけるしきい値パラメータの選定は慎重に行う必要がある。本研究の1回目の projection に用いるしきい値パラメータ S については、表-3.4のように150ステップまでは $S = 1$ とし、その後 $S = 8$ になるまで2倍ずつ値を増やしていく。このように最適化ステップ数に応じてしきい値パラメータを変更することによって、極端な局所的最適解への収束を避けつつ、設計変数の2値化を促すことができる。一方で、2回目の projection に用いる S は、最適化計算全体を通して $S = 8$ を与えた。また、しきい値パラメータ T は、1回目の projection では $T = 0.5$ 、2回目の projection では $T = 0.05$ を与えた。このときのしきい値関数の形を、それぞれ図-3.7 (a), (b) に示す。界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ は固体材料に比べ小さい値で停留しやすいため、2回目の projection における T の値も小さく設定している。収束判定は、最適化ス

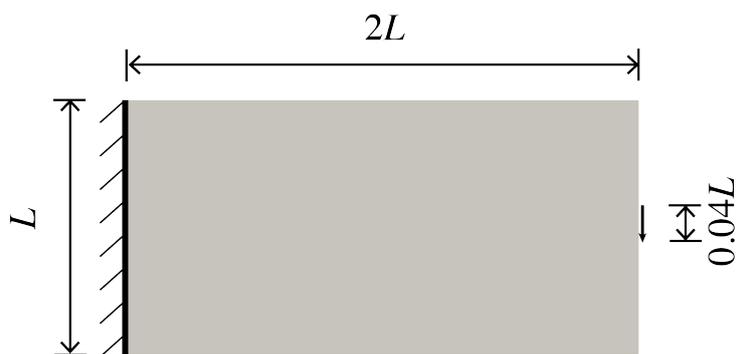


図-3.8 構造モデル 1

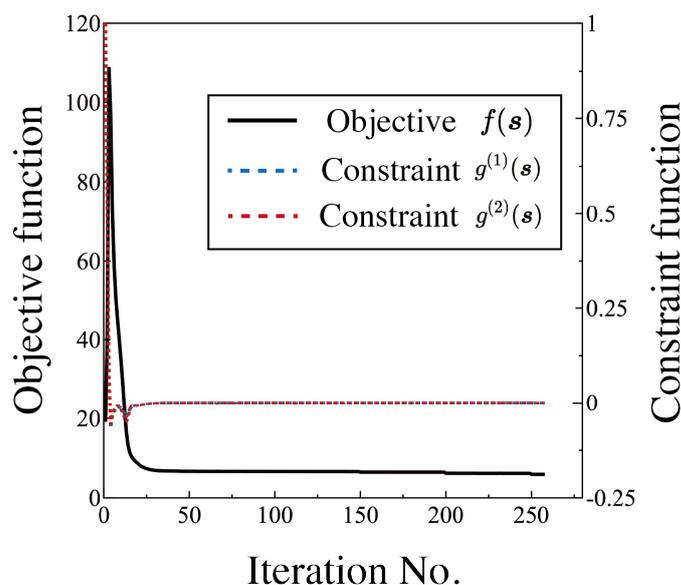


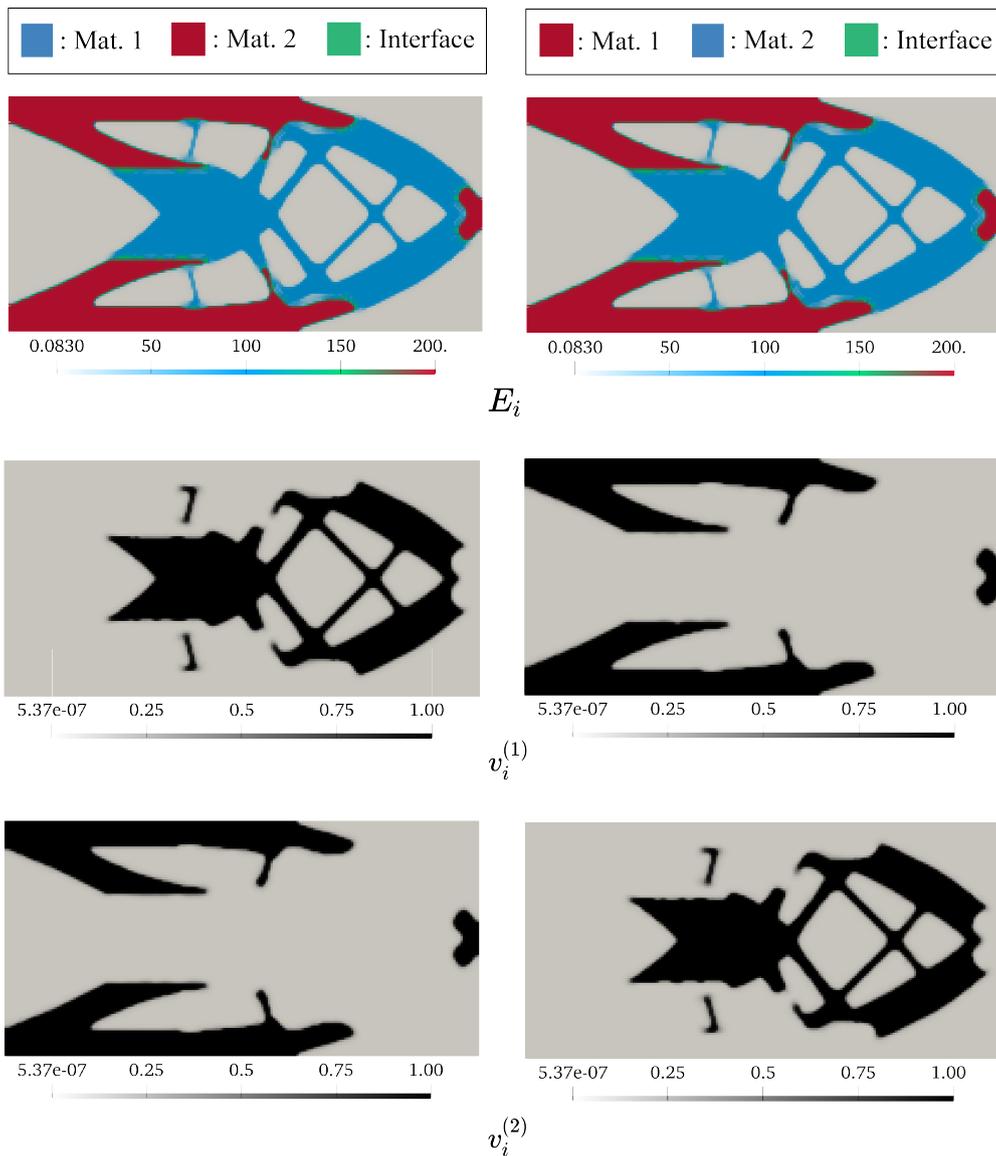
図-3.9 目的関数と制約関数の履歴

テップ数が 250 以上かつ前ステップとの設計変数の差の L2 ノルムが 5.0×10^{-5} 以下である場合とした。

3.6.1 片持はりモデル

ここでは、図-3.8 に示すような片持はりの 2 次元構造モデルを用いて最適化計算を行う。スケールは $L = 20$ とし、 $0.04L$ の分布荷重を載荷した。各固体材料の体積制約は、それぞれ $\chi^{(1)} = 0.25$, $\chi^{(2)} = 0.25$ とした。これは、設計領域に各固体材料が最大で 25 % ずつ使用でき、空隙が 50% となることを表している。

まず、フィルタ半径に $R_1 = 3$, $R_2 = 3$ を与え最適化計算を行った。その際の目的関数および材料体積制約関数の履歴を図-3.9 に示す。この図から、目的関数が十分に減少して収束しており、制約条件式の値もほぼ 0 に収束していることが読み取れる。これより、本研究で設定した最適化問題は妥当であると判断できる。次に、材料 1, 2 のヤング率の入れ換えを行



(a) Case 1

(b) Case 2

図-3.10 提案手法における最適化結果: (a) $E^{(1)} = 100, E^{(2)} = 200$, (b) $E^{(1)} = 200, E^{(2)} = 100$.

うことで、提案する材料モデルが固体材料間で可換性を有していることを示す。最適化結果を図-3.10に示す。Case 1は、第2章の表-3.3に示すような2つの固体材料および材料界面を用いて最適化計算を行った結果である。Case 2はCase 1の設定から $E^{(1)}, E^{(2)}$ の大小関係を入れ換えて $E^{(1)} = 200, E^{(2)} = 100$ として計算を行った結果である。この図から、固体材料のヤング率を入れ換えてもほぼ同じ計算結果が得られており、可換性を満足していることが確認できた。これは、3.2節の図-3.2で用いられた拡張SIMP法と比較して、提案する材料モデルの式(3.18)で実装したDMO型材料内挿関数の式(3.1)が独立性・可換性を有していることを示唆するものである。

次に、フィルタ半径 R_1, R_2 の違いが及ぼす最適化レイアウトへの影響に関して検証を行う。フィルタ半径 R_1, R_2 にそれぞれ異なる値を入れた4ケース(a)~(d)の結果を図-3.11に

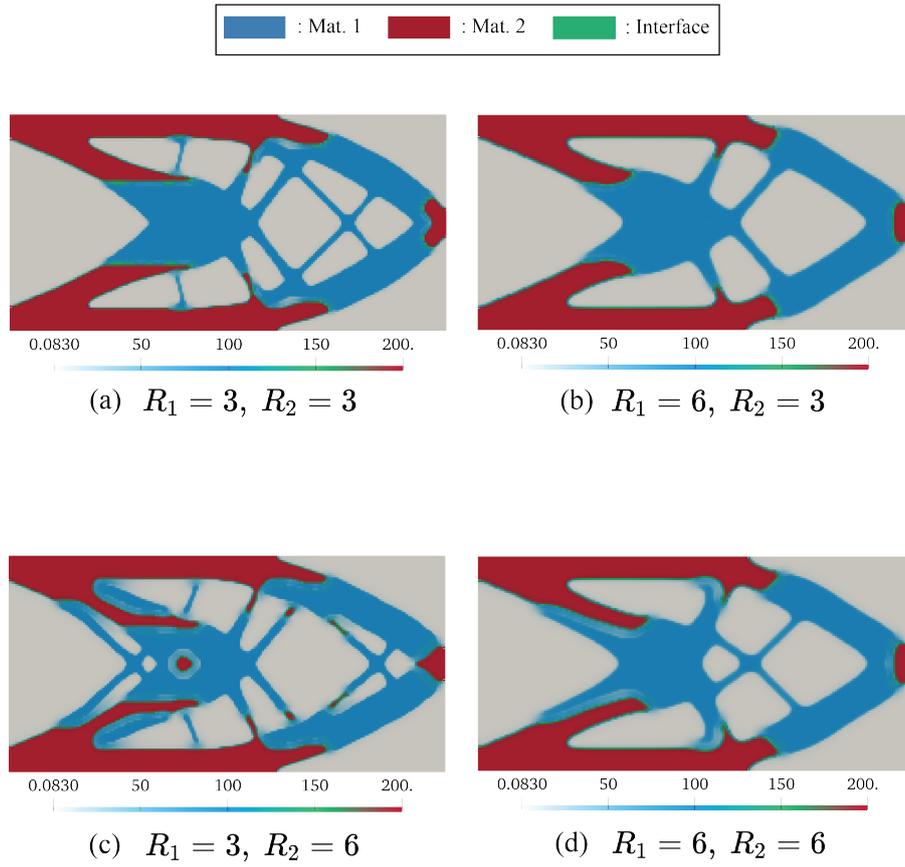


図-3.11 異なるフィルタ半径におけるトポロジーの比較: a) $R_1 = 3, R_2 = 3$, b) $R_1 = 6, R_2 = 3$, c) $R_1 = 3, R_2 = 6$, d) $R_1 = 6, R_2 = 6$.

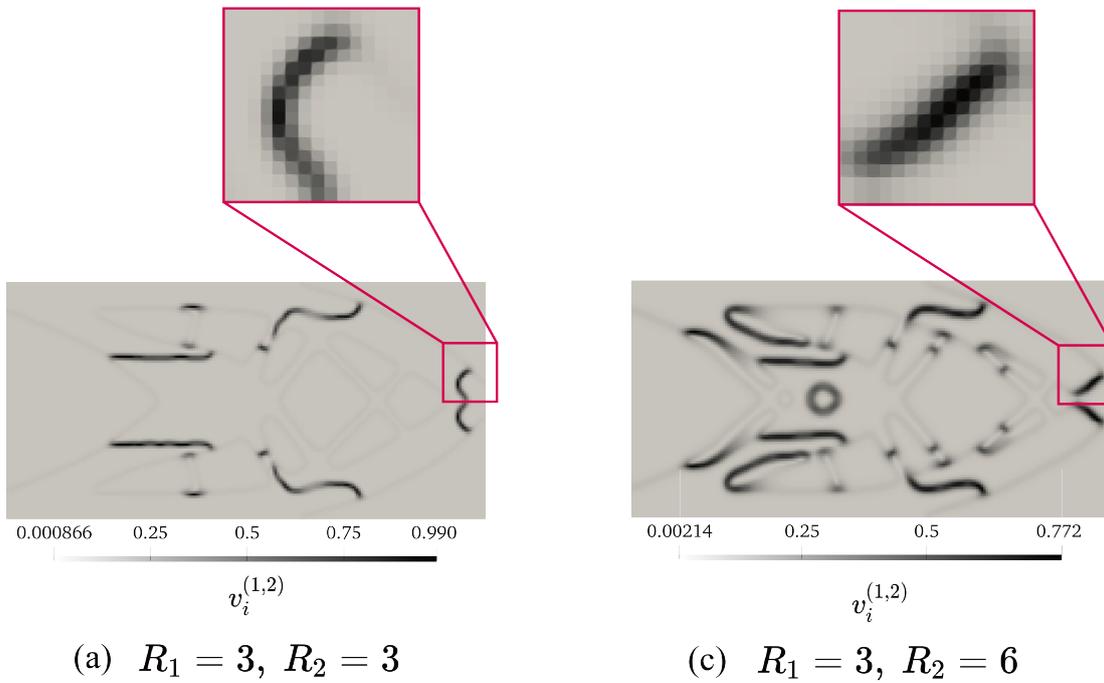


図-3.12 異なるフィルタ半径による界面体積比率 $v_i^{(1,2)}$ の比較: a) $R_1 = 3, R_2 = 3$, c) $R_1 = 3, R_2 = 6$.

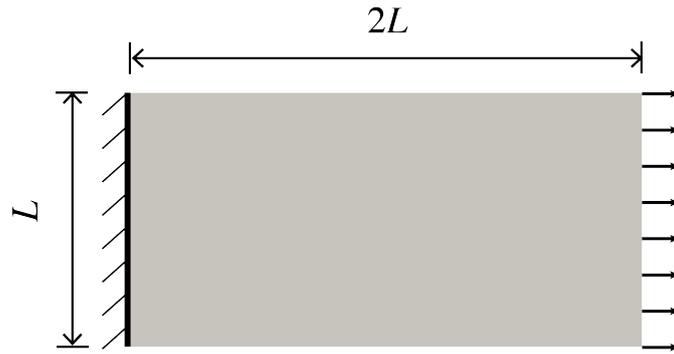


図-3.13 構造モデル 2

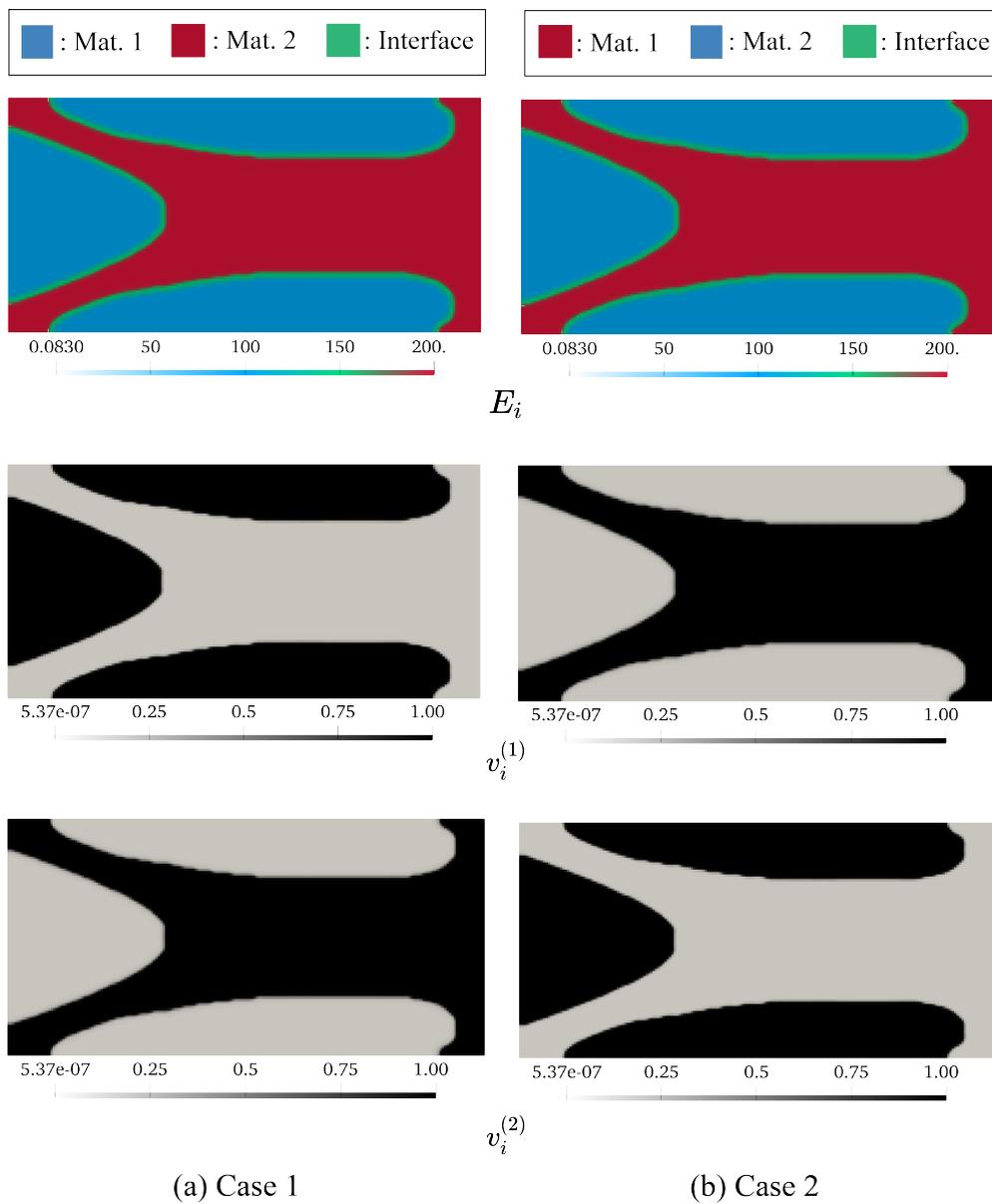
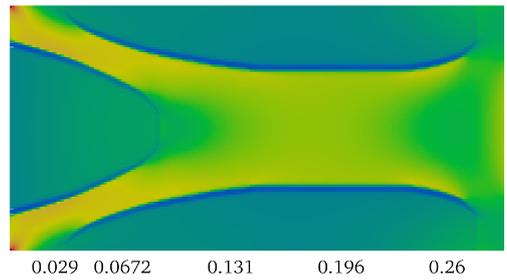
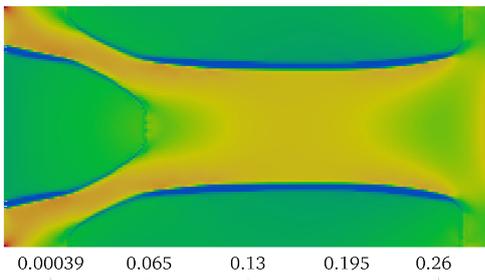
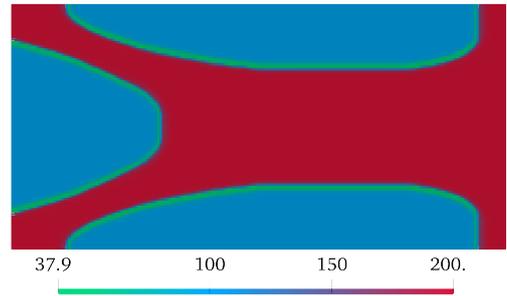
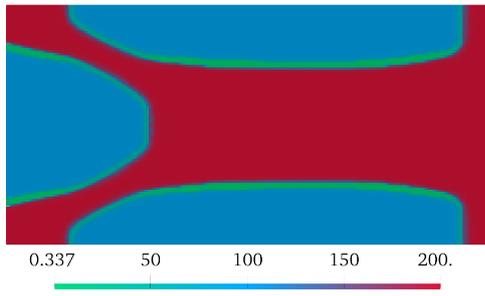
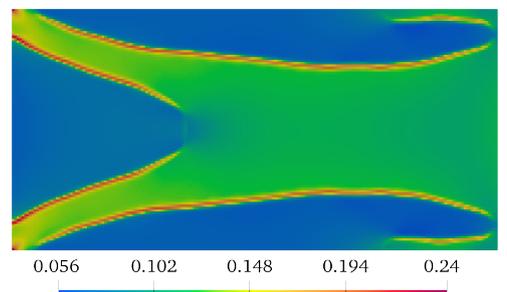
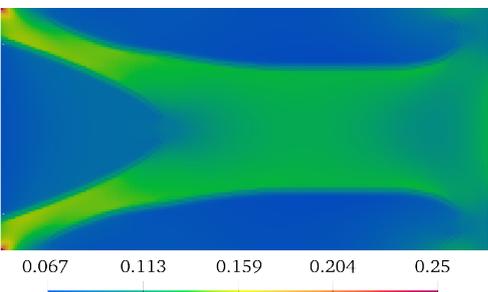
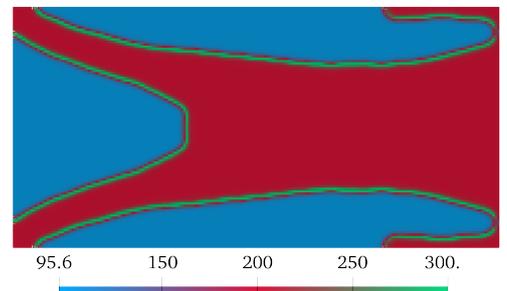
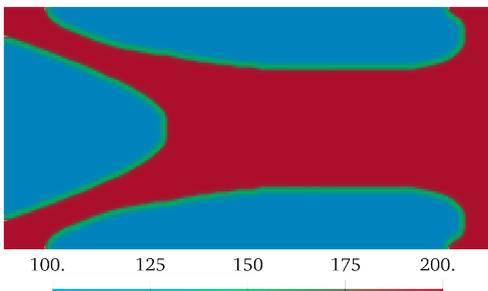


図-3.14 提案手法における最適化結果: (a) $E^{(1)} = 100, E^{(2)} = 200$, (b) $E^{(1)} = 200, E^{(2)} = 100$.



(a) mean compliance: 1.48757

(b) mean compliance: 1.43904



(c) mean compliance: 1.36624

(d) mean compliance: 1.26054

図-3.15 異なる材料界面ヤング率に対する最適化結果の比較: (a) $E^{\text{int}} = 1$, (b) $E^{\text{int}} = 50$, (c) $E^{\text{int}} = 150$, (d) $E^{\text{int}} = 300$, (上段) ヤング率の分布図, (下段) Mises の相当応力図

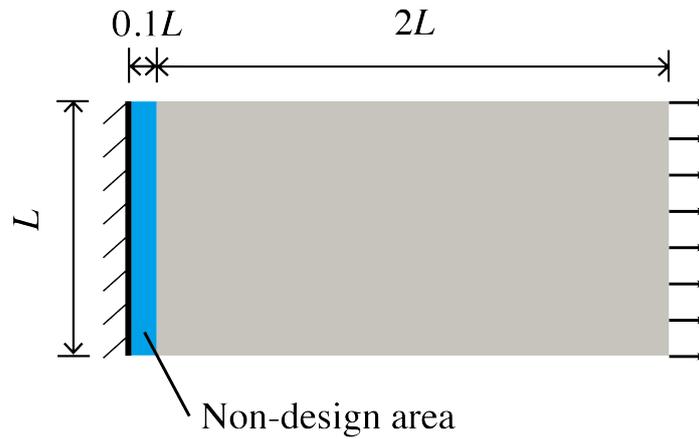


図-3.16 構造モデル 3

表-3.5 固体材料と材料界面の特性

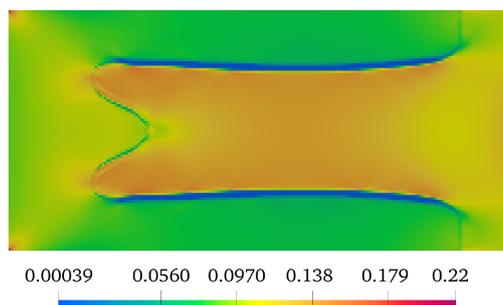
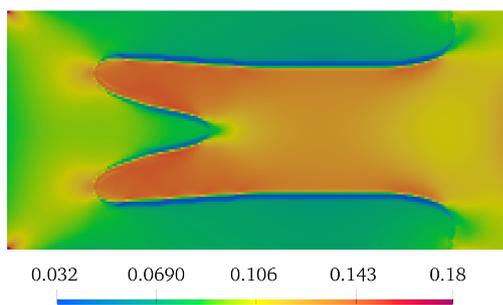
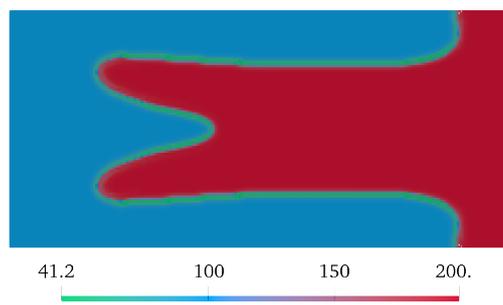
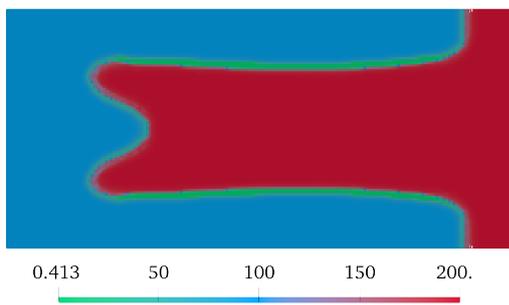
	Mat.1	Mat.2	Interface
Young's modulus	100	200	1, 50, 150, 300
Poisson's ratio	0.3	0.3	0.3

示す。(a)~(d) いずれの結果も、構造上重要な左側 2 隅に剛性の高い赤の材料 2 が配置されていることから、平均コンプライアンス最小化問題としては概ね妥当なレイアウトが得られていることが推察できる。図-3.11 の (a) と (b) を比較すると、 R_1 の値が大きくなるにしたがって、構造の複雑さが減っていることが明らかになった。その一方で、図-3.11(a) と (c) を比較すると、 R_2 の値が大きくなっても界面の幅が大きくなっていることは、見かけ上は分からない。そこで、図-3.11(a) と (c) の界面体積比率 $v_i^{(1,2)}$ のみを表した図を図-3.12 に示す。この図から、材料界面がある程度の幅を持った、連続的に遷移する材料として表現されていることが明らかとなった。また、図-3.12(a) から (c) へ R_2 の値が大きくなることに比例して、界面の幅も大きくなっていることが観察できる。

3.6.2 単純引張モデル

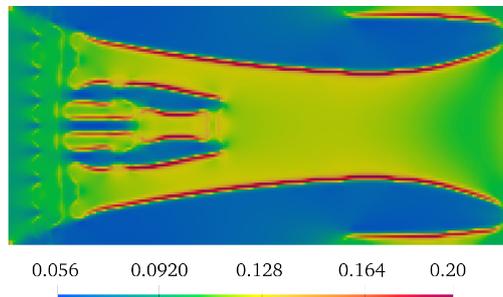
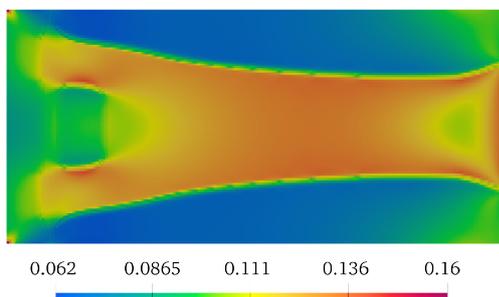
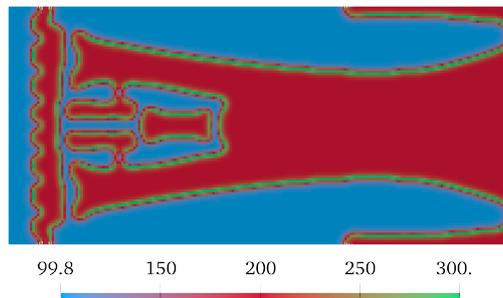
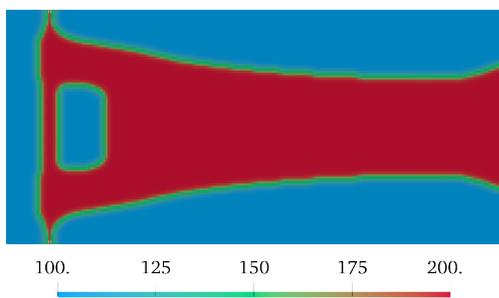
ここでは、図-3.13 のような単純引張構造モデルを用いて最適化計算を行う。スケールは $L = 20$ とし、構造の右側に分布荷重をかける。体積制約はそれぞれ $\chi^{(1)}(s) = 0.5$, $\chi^{(2)}(s) = 0.5$ とし、設計領域に各固体材料が 50 % ずつ配置され、空隙は存在しないという条件設定を行った。

まず、前節と同様に材料 1, 2 のヤング率の入れ換えを行い、固体材料間における可換性について確認する。ここでは、フィルタ半径は $R_1 = 4$, $R_2 = 4$ を与えて最適化計算を実施した。その最適化結果を図-3.14 に示す。Case 1 は、表-3.3 に示す 2 つの固体材料および材料界面を用いて最適化計算を行った結果である。Case 2 は Case 1 の設定からヤング率の値を



(a) mean compliance: 1.57358

(b) mean compliance: 1.54706



(c) mean compliance: 1.46509

(d) mean compliance: 1.30536

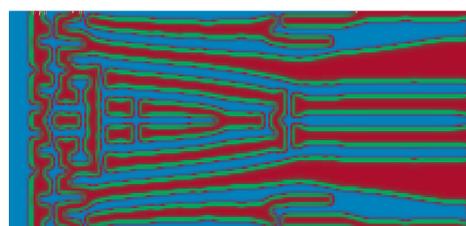
図-3.17 異なる材料界面ヤング率に対する最適化結果の比較: (a) $E^{\text{int}} = 1$, (b) $E^{\text{int}} = 50$, (c) $E^{\text{int}} = 150$, (d) $E^{\text{int}} = 300$, 上段) ヤング率の分布図, 下段) Mises の相当応力図

入れ換えた。この図から、前節同様に固体材料のヤング率を入れ換えてもほぼ同じ計算結果が得られており、可換性が満足していることが確認できた。

最後に、界面のヤング率の大きさが最適化結果に与える影響について検証を行う。まず、使用した固体材料と材料界面の特性を表-3.5に示す。各ケースでの界面のヤング率について、材料1よりも小さい値で2つ、材料1および2の中間値をとる値で1つ、そして実験的に材料1と2より大きいヤング率をとる値で1つの合計4つを仮定し、それぞれ(a)~(d)とした。その最適化結果を図-3.15に示す。同図の上段はヤング率で色分けした材料レイアウト、下段はMisesの相当応力を表している。図-3.13の構造モデルは、変位境界である左側固定端の上下隅近傍に比較的高い応力が発生する構造であるため、そこにヤング率の高い材料2(赤)が配置され、その応力を右端の荷重荷重部まで材料2が合理的に伝達するような構造レイアウトとなっている。Misesの相当応力分布図について(a)から(d)へと見ていくと、いずれの結果も固定端近傍の上下の隅に比較的高い応力が発生しており、いずれの結果も定性的ではあるが平均コンプライアンス最小化問題として妥当な結果が得られていると思われる。また、(a)~(d)へと界面のヤング率が増加するにしたがって、界面が水平方向に伸びながらその領域が増加し、界面の応力値も上昇していることがわかる。平均コンプライアンス値も小さくなっていることから、剛性が大きくなっていることを定量的に示した。これらの結果より、界面のヤング率が小さいうちは、材料界面の表面積は小さいままで、材料2(赤)が中心となって応力を伝達するようなトポロジーが得られているといえる。これについては、力学的に合理的な結果であると思われる。一方で、界面のヤング率が増加するにつれ、本来存在しない界面材料というものが線状の水平部材のように活用されている様子が見られる。工学的な観点で言えば、材料界面はそもそも構造上の弱点となりやすく、そこに応力集中が生じるようなレイアウトは好ましくない。材料界面に応力集中が生じにくいようなレイアウトを得るためには、本提案手法に加えて材料界面に応力の上限值、すなわち界面強度を考慮できるようにすることが有効であると思われる。これについては次章で実装および検証を行う。

さらに追加の検証として、図-3.16のような構造モデルを用いて検証を行った。この構造モデルは、図-3.13の構造モデルの変位境界近傍に材料1(青)による非設計領域を強制的に設けたモデルであり、それ以外は先の計算例と同じ条件とした。このような特殊な条件設定をした理由は、ヤング率の低い材料1(青)を強制的に変位境界近傍に配置することで、荷重の法線方向に繋がる材料界面を生じやすくするためである。つまり、先の計算例のように材料2の材料剛性が支配的となってレイアウトが決定されるような条件下では、材料界面の影響が見えにくくなるため、それを避けるための処置である。図-3.16の構造モデルを設定し、それぞれ異なる界面のヤング率を与えて最適化計算を行った場合の結果を図-3.17に示す。図-3.15と比較して、全体的に大きく異なる結果が得られていることがわかる。図-3.17(a)から(d)にかけて界面のヤング率が上昇するにしたがって、緑色の材料界面の表面積が増え

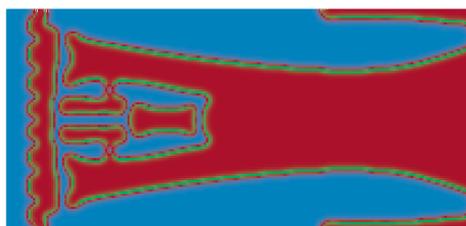
ていることがわかる。つまり、先の例と同様に界面のヤング率が低い場合は、界面の表面積が少なくなるような配置が得られているといえる。また、**図-3.17**の Mises の相当応力図を比較すると、(a) から (d) へ界面のヤング率が上昇するにつれて、界面の応力値が上昇し、さらに界面が水平方向に伸びながら表面積を増やしていると分析できる。これについても先の計算例と同様な傾向にあるといえる。**図-3.17(d)**のような、界面のヤング率が母材より高いという仮想的な条件における計算結果では、界面が波打った形状で表れていることがわかる。この結果から、ヤング率の高い界面を活かすために、表面積をできる限り大きくするような結果が得られていることが予想できる。理論上は、体積制約が与えられていない界面で設計領域が埋め尽くされるような形状が得られるはずだが、そのような結果は得られていない。それは、フィルタ半径 R_1 で形状の複雑さを制御しているためだと考えられる。**図-3.18**は、**図-3.17(d)**の結果で用いた材料パラメータ、すなわち $E^{(1)} = 100$, $E^{(2)} = 200$, $E^{\text{int}} = 300$ を用いて、フィルタ半径を変更した際の最適化結果をまとめたものである。ただし、**図-3.18(b)**は、**図-3.17(d)**の結果と同じものである。**図-3.18**から、フィルタ半径 R_1 が小さいほど界面の表面積が増え、より複雑な材料レイアウトを得ることができる。また、フィルタ半径 R_1 が小さくなることで、界面の表面積が増えて全体の剛性が上がった結果として、平均コンプライアンス値も減少していることが確認できた。



99.8 150 200 250 300.

mean compliance: 1.17059

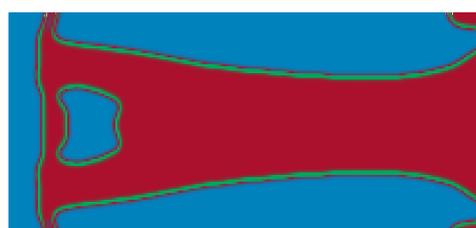
(a) $R_1 = 2, R_2 = 4$



99.8 150 200 250 300.

mean compliance: 1.30536

(b) $R_1 = 4, R_2 = 4$



99.8 150 200 250 300.

mean compliance: 1.43267

(c) $R_1 = 6, R_2 = 4$

図-3.18 フィルタ半径 R_1 を変えた場合の最適化結果 (ヤング率の分布) の比較

3.7 結論および今後の展望

本章では、固体材料および界面の物性を考慮するためのマルチマテリアルトポロジー最適手法を提案し、手法の妥当性および性能の検証を行った。提案手法は、材料界面の物性を考慮しながら個々の材料に等価な重みを与えることで固体材料間の可換性を完全に満足することができる手法である。また、本手法の独創性として、隣接する要素間に生じる設計変数の空間勾配を用いて、界面体積比率を表現した点にあり、これによって界面幅を制御しつつ、数値的に安定した手法を確立することができた。提案手法の計算結果から、提案する材料モデルが、材料定義の可換性・独立性を担保しつつ材料界面を考慮できることが明らかになった。

最適化計算例では、材料界面の剛性が小さいと仮定した場合は、材料界面の表面積が小さくなり、構造上の弱点を少すようなレイアウトが得られた。一方で、材料界面の剛性が母材よりも大きいという仮想的な条件下で計算を行うと、界面の表面積を大きくするようなレイアウトが得られることが分かった。これについては、現実的な問題設定ではないものの、数値上の力学計算としては正しい結果といえる。本提案手法は、フィルタリング操作を含め、やや複雑なステップを踏むが、コード実装自体は容易であることから材料界面を扱う工学的な問題全般への発展が可能であり、実設計への適用も期待できると考えている。

4 強度を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化

4.1 概要

本章では、第1章でも述べたとおり、本論文の主題である材料界面の強度を考慮するためのマルチマテリアルトポロジー最適化手法の開発のための理論を構築し、その定式化および検証を行う。具体的には、各固体材料およびその界面の応力値が各々の材料強度および界面強度を満足するようなマルチマテリアルトポロジー最適化手法を開発する。この目的を達成するために、本章では次の2つを提案している。それは(1) 応力特異点問題を緩和するための相当応力式の提案と、(2) 応力制約付き平均コンプライアンス最小化問題を解くための新たな目的関数の定式化である。これらは、いずれも本研究の骨格をなすものであると同時に本論文の新規性を表すものである。また、材料界面に生じる物理を考慮するために、本研究では界面剥離モデルを導入するとともに、その界面の応力制約を課す仕組みを考え、最適化問題に取り入れている。

4.2 固体材料と界面の同時応力制約付きマルチマテリアルトポロジー最適化手法

4.2.1 応力制約付きトポロジー最適化の特異点問題およびその緩和手法

ここでは、第1章でも述べた特異点問題およびその緩和手法について説明するために、典型的な応力制約付き重量最小化問題を例に取り上げる。まず、空隙-固体材料の2相材料モデルを仮定した SIMP 法²³⁾を採用した場合、以下のような問題設定となる。

$$\text{minimize : } f(s) = \sum_i^n s_i V_i \quad (4.1)$$

$$\text{subject to : } \mathbf{K}(s)\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.2)$$

$$\sigma_i^y = s_i^\gamma E_0 \sqrt{\sigma_i^T \mathbf{V} \sigma_i} \leq s_i^\eta \bar{\sigma} \quad (4.3)$$

$$0 \leq s_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

式(4.3)は応力制約条件式を意味しており、 σ_i^y は要素ごとに平均化された Mises の相当応力、 $\bar{\sigma}$ は材料固有の許容応力度、 γ, η はそれぞれのべき乗パラメータである。SIMP 法では、剛性行列 \mathbf{K} は弾性係数に依存するが、その有効ヤング率 E_i は次式のように表される。

$$E_i = s_i^\gamma E_0 \quad (4.5)$$

ただし、 E_0 は固体材料のヤング率である。上記の最適化問題について、物理との整合性を保つためには、有効ヤング率 E_i と許容応力度 $\bar{\sigma}$ に内挿されている設計変数 s_i に同じペナルティパラメータを与える、すなわち $\eta = \gamma$ である必要がある。しかし、このようなパラメータ設定をすると、応力制約付きトポロジー最適化問題は非常に解きづらくなることが知られている。これは、設計変数が0に漸近すると、荷重載荷状態にある部分において力を受け持たずの固体材料が消失し、結果として局所的な応力の値が無限大に発散するのが原因であ

る. Bruggi らは, qp -relaxation⁷⁷⁾ と呼ばれる緩和手法を SIMP 法に適用させることでこの特異点問題に対処した. すなわち, $\eta < \gamma$ となるような応力に関するべき乗パラメータ η を選択することにより, 局所的応力の発散の問題を改善した. それは次式のように表わすことができる.

$$\lim_{s_i \rightarrow 0} \frac{\sigma_i^\gamma}{s_i^\eta} = \lim_{s_i \rightarrow 0} \frac{s_i^\gamma}{s_i^\eta} E_0 \sqrt{\sigma_i^T \mathbf{V} \sigma_i} = 0 \quad (4.6)$$

ただし, \mathbf{V} は次式のように定義される.

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \text{for 2D,} \\ \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \text{for 3D.} \end{cases} \quad (4.7)$$

また, σ_i は Voigt 表記で示した Cauchy 応力であり, 各 Gauss 点ごとに算出された応力を有限要素ごとに平均化したものである.

$$\sigma_i = \int_{\Omega_i} \mathbf{D}_0 \mathbf{B} u_i d\Omega \quad (4.8)$$

ここで, \mathbf{D}_0 はヤング率を 1 としたときの弾性係数行列である. 以上のように, 式 (4.6) で適切な η を用いることによって, 特異点問題を緩和することができる. なお, このようにして与えられるパラメータ η は物理的な解釈が困難であり, あくまで数学的な措置であることに注意しなければならない.

4.2.2 特異点問題を緩和する固体材料の相当応力式の提案

本章で新たに提案する, 応力特異点問題を緩和する手法の概念は, 上述した単材料の qp -relaxation⁷⁷⁾ を DMO 型材料内挿関数を用いたマルチマテリアル材料モデルに取り入れるというものである. まず, 本研究では各固体材料が応力を分担するという仮定の下, i 番目の要素で平均化された各固体材料の Mises の相当応力 $\sigma_i^{(j),v}$ を次式のように定式化した.

$$\sigma_i^{(j),v} = \frac{w_i^{(j)}}{d} E^{(j)} \sqrt{\sigma_i^T \mathbf{V} \sigma_i} \quad (4.9)$$

ここで, $w_i^{(j)}$ は式 (3.2) で紹介した, 可換性を有する DMO 型材料内挿関数の重み係数である. 次に, 式 (4.6) と同様に, 式 (4.9) に示す固体材料の相当応力の極限を取ることを

考える．ここでは，DMO 型材料内挿関数式 (3.2) を代入し，以下の関係式が成り立つような d ，すなわち，固体材料 j の材料体積比率 $v_i^{(j)}$ が限りなく 0 に近づいても，その相当応力 $\sigma_i^{(j),v}$ が発散しないような d を分母に与えるという仕組みを考えた．

$$\begin{aligned}\lim_{v_i^{(j)} \rightarrow 0} \sigma_i^{(j),v} &= \lim_{v_i^{(j)} \rightarrow 0} \frac{w_i^{(j)}}{d} E^{(j)} \sqrt{\sigma_i^T \mathbf{V} \sigma_i} \\ &= \frac{(v_i^{(j)})^\gamma \prod_{k(k \neq j)}^m \{1 - (v_i^{(k)})^\gamma\}}{d} E^{(j)} \sqrt{\sigma_i^T \mathbf{V} \sigma_i} \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.10}$$

ここで，本研究では d を次式のようにおくことでそれを満足できるようにした．

$$d = (v_i^{(j)})^{\gamma-1} \prod_{k(k \neq j)}^m \{1 - (v_i^{(k)})^\gamma\}\tag{4.11}$$

その結果，最終的に式 (4.9) は次式のように表すことができる．

$$\sigma_i^{(j),v} = v_i^{(j)} E^{(j)} \sqrt{\sigma_i^T \mathbf{V} \sigma_i}\tag{4.12}$$

これが本研究で提案する，特異点問題を緩和する固体材料の相当応力の式である．この発散しない固体材料の相当応力の値が許容応力度以下となるように応力制約を課すことで，安定的に最適化問題を解くことができるようになる．ただし，本研究では後述の界面応力についても応力制約を課すことになるため，最適化問題は複雑化することが予想される．これを改善するための方法として，後の 4.4 節では目的関数を新たに提案する次第である．

4.3 界面剥離モデル

本節では，材料界面の応力規準について説明する．本研究では，Liu ら⁸⁴⁾ の手法に習い，Brewer ら¹⁰⁸⁾ の複合材料の層間剥離の発生に対する 2 次応力規準を，材料界面の相当応力として導入する．この相当応力を用いることで，引張応力とせん断応力を分けて評価することができ，より現実に近い界面を再現した状態で最適化計算を行うことができる．まず，3.3 節と同様に，2 段階密度フィルタリングを用いることで得られる仮想的な材料界面の界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ を得る． $v_i^{(j,k)}$ を得るためのフローチャートを図-4.1 に示す．基本的な考え方は第 3 章の図-3.4 と同じだが，本節で説明する材料界面の界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ は界面応力の評価のみに用いられ，界面のヤング率の評価は固体材料のヤング率のみから求められる点が異なる．次に，計算した界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ を用いて，2 種類の固体材料 j, k ($j, k = 1, 2, \dots, m, j \neq k$) の界面に対する応力規準を次式のように定義する．

$$\sigma_i^{(j,k),d} = v_i^{(j,k)} E^{(j)} \sqrt{(\sigma_{i,n}^{(j,k)})^2 + \frac{1}{\beta^2} (\sigma_{i,l}^{(j,k)})^2} \leq \bar{\sigma}^{(j,k)}\tag{4.13}$$

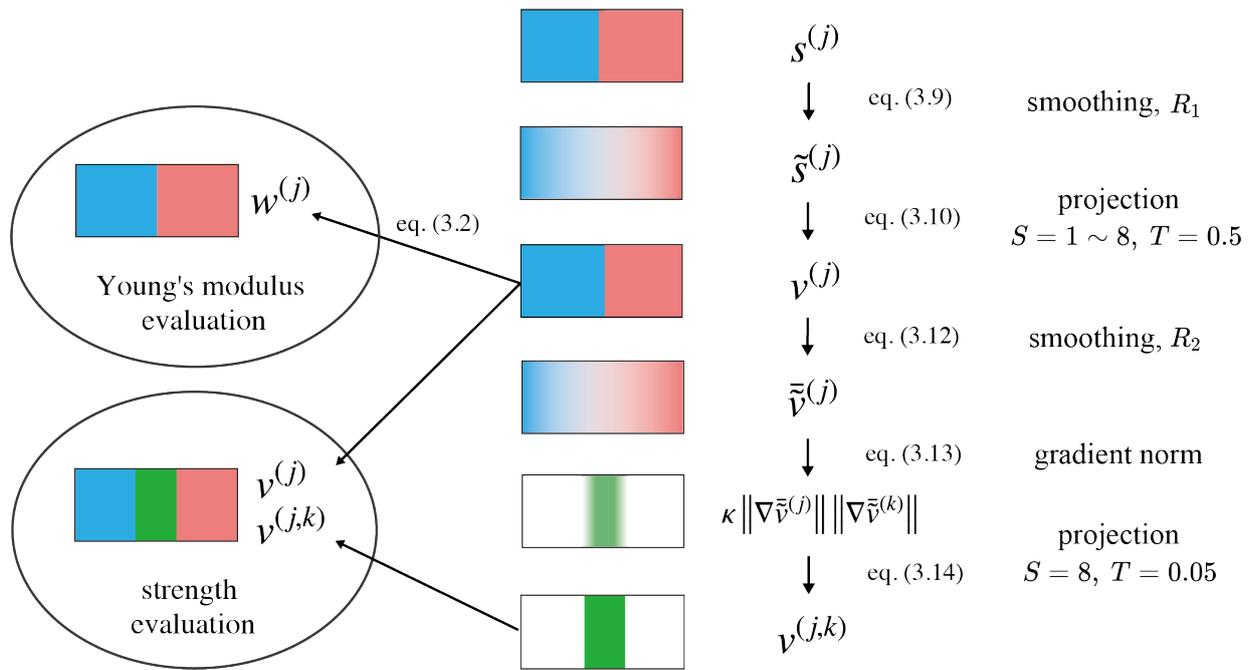


図-4.1 強度を考慮するための固体材料と材料界面の2段階密度フィルタリングによる projection-mapping 法

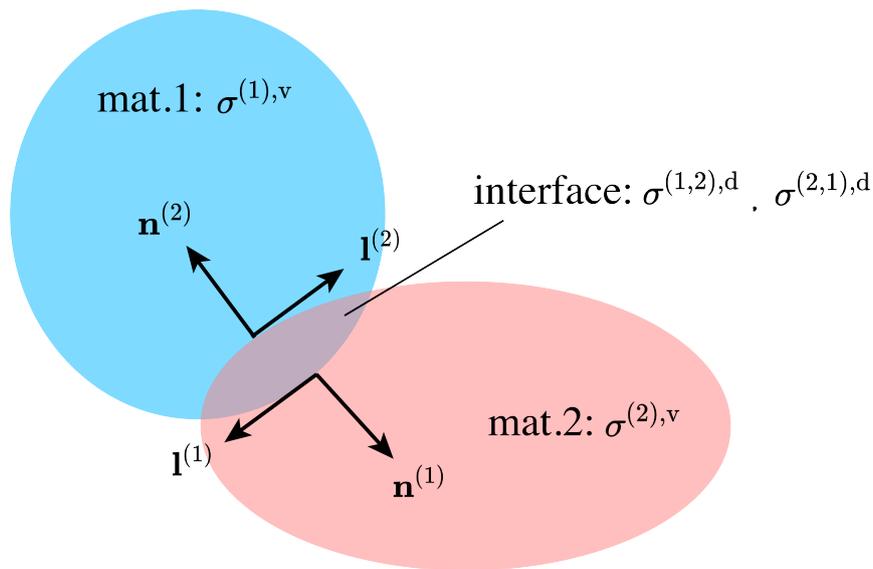


図-4.2 座標変換と応力の図解

ここで、 $\sigma_i^{(j,k),d}$ は界面の引張応力とせん断応力を結合した相当界面応力、 $\beta = c_s/c_n$ は界面せん断強度の最大許容値 c_s と界面法線引張強度 c_n の比である。 $\sigma_{i,n}^{(j,k)t}$ は界面における引張応力を表し、次式のようになる。

$$\sigma_{i,n}^{(j,k)t} = \begin{cases} \sigma_{i,n}^{(j,k)} & \text{if } \sigma_{i,n}^{(j,k)} \geq 0 \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (4.14)$$

式 (4.13) における $\sigma_{i,l}^{(j,k)}$ および式 (4.14) の $\sigma_{i,n}^{(j,k)}$ は、それぞれ界面の接線、法線方向に生じる応力を表しており、次式のように表される。

$$\sigma_{i,l}^{(j)} = \left(\mathbf{n}_i^{(j)} \right)^T \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{l}_i^{(j)} \quad (4.15)$$

$$\sigma_{i,n}^{(j)} = \left(\mathbf{n}_i^{(j)} \right)^T \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{n}_i^{(j)} \quad (4.16)$$

ただし、 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ は 2 階のテンソル表記にした Cauchy 応力である。また、 $\mathbf{n}_i^{(j)}$ 、 $\mathbf{l}_i^{(j)}$ は、それぞれ有限要素ごとに平均化された単位法線ベクトルと単位接線ベクトルを表す。 $\mathbf{n}_i^{(j)}$ は、 \mathbf{B} オペレータを用いることで次式から導出できる。

$$\mathbf{n}_i^{(j)} = \frac{\int_{\Omega_i} \mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)} d\Omega}{\left\| \int_{\Omega_i} \mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)} d\Omega \right\|} \quad (4.17)$$

なお、 $\mathbf{l}_i^{(j)}$ は得られた $\mathbf{n}_i^{(j)}$ から陽に求めることができる。図-4.2 は、本研究で定義される応力についてまとめた概念図である。この図より、固体材料の数を $m = 2$ と仮定した場合、固体材料 1, 2 に関する Mises の相当応力 $\sigma^{(1),v}$ 、 $\sigma^{(2),v}$ 、材料界面に生じる界面剥離に関する相当応力 $\sigma^{(1,2),d}$ 、 $\sigma^{(2,1),d}$ の 4 種類が考慮される。

ところで、4.2.1 節で言及したとおり、空隙と固体の 2 相材料を対象としたトポロジー最適化の応力特異点問題は、応力が作用する箇所設計変数が 0 に漸近したとき、応力を受け持たずの固体材料がなくなり、結果として応力値が無限大に発散するという数値的現象である^{76),77)}。一方で、材料界面については、界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ 自体が界面応力の評価にのみ用いる変数として定義されていることから、界面相当応力の式 (4.13) で示されるように、界面体積比率 $v_i^{(j,k)}$ が 0 へ漸近しても応力値の発散にはつながらず、固体材料側の緩和手法に依存する程度に収まる。したがって、材料界面の相当応力には緩和手法を与える必要はない。

4.4 最適化問題の設定

ここでは、本章で設定する最適化問題について説明する。本最適化問題では、各固体材料の使用体積量と強度、さらに界面強度を制約条件として課した上で、構造の剛性最大化を図るものである。なお、本研究では扱いやすさの観点から、剛性最大化問題を荷重一定の条件下における平均コンプライアンス最小化問題と等価な問題と考える。3.1 節でも述べたとおり、数値計算の観点で、本研究のような非凸性の高い問題を MMA¹⁰⁰⁾ といった数理計画法の最適化アルゴリズムを単に用いるだけでは安定的に最適解を得ることはできない。このことから、本研究では応力制約式をそのまま与えるのではなく、応力制約の役割を果たすペナルティ関数として目的関数に付加するように定式化を行った。具体的な方法は、まず平均コンプライアンスを正規化し、そこに制約条件である応力制約の項を、ペナルティとして扱うように足し合わせ、それら全体を最小化するというものである。以下に本研究で提案する目

的関数 $f(\mathbf{s})$ および不等式制約条件式 $g^{(j)}(\mathbf{s})$ を示す.

minimize :

$$f(\mathbf{s}) = \left\{ \underbrace{\frac{c}{\alpha}}_{\text{正規化した平均コンプライアンス}} + \underbrace{\sum_i^n \left[\sum_j^m \left(\frac{\sigma_i^{(j),v}}{\bar{\sigma}^{(j)}} \right)^p + \sum_j^m \sum_{k,k \neq j}^m \left(\frac{\sigma_i^{(j,k),d}}{\bar{\sigma}^{(j,k)}} \right)^p \right]}_{\text{応力制約に関する項}} \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (4.18)$$

subject to :

$$\mathbf{K}(\mathbf{s})\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.19)$$

$$g^{(j)}(\mathbf{s}) = \sum_i^n v_i^{(j)} V_i - \chi^{(j)} \bar{V} \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.20)$$

$$0 < s_{\min} \leq s_i^{(j)} \leq s_{\max}, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.21)$$

$$c = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (4.22)$$

ここで、設計変数の下限値と上限値を、それぞれ $s_{\min} = 1 \times 10^{-4}$, $s_{\max} = 1$ とする. $g^{(j)}$ は、それぞれの固体材料の使用体積量に対する制約条件である. c は平均コンプライアンス値であり、 α は c と同じ値をとるパラメータである. ただし、感度解析で α は定数として扱う. こうすることで、平均コンプライアンス c/α の項が常に 1 の値をとる.

なお、目的関数 (4.18) の第 1 項、第 2 項は次元の異なる量であり、定量的にこれらを公平に評価することは容易ではない. そのため、平均コンプライアンスに関する量に極力適切な重み付けを行うことを意図して、このような目的関数の定式化を行っている. 目的関数 (4.18) の応力制約に関する項は、固体材料の相当応力 $\sigma_i^{(j),v}$ および界面の相当応力 $\sigma_i^{(j,k),d}$ が、それぞれの固体材料の許容応力度 $\bar{\sigma}^{(j)}$ および界面の許容応力度 $\bar{\sigma}^{(j,k)}$ を超過した際に、その部分を p -norm で抽出し、超過した相当応力にペナルティを与えるような仕組みとなっている. このような応力制約に関する項を、目的関数の中に組み込んで最小化問題を解くことにより、各要素で算出される応力が許容応力度を超過しない材料レイアウトが得られるようになる. なお、 p -norm の凸性は Minkowski の不等式により保証されており、 p -norm を目的関数で扱うという試みは Le ら⁶⁹⁾ によっても行われているほか、Verbart ら⁷²⁾ は本研究に似た p -norm の式 (p -mean) を提案している. しかし、本研究のように α の値が最適化途中で変化する問題の場合は、解かれる最適化問題も計算途中で変化していくことに注意しなければならない. このことから、後に示す 4.6 節での数値計算例では、本最適化問題で得られた結果が力学的に妥当な最適構造が得られているかを確認する必要がある.

4.5 感度解析

ここでは、3.5 節と同様に随伴変数法 (AVM) を用いた感度の導出を行ったあと、感度の差分近似による値 (FDA) との精度比較を行い、当該感度解析法の妥当性を検証する.

4.5.1 随伴変数法を用いた感度の導出

ここでは、随伴変数法による感度の導出を行うが、3.5.1 節で示した最初の 2 式 (3.24), (3.25) までは同じである。念のため、以下にその 2 式を再掲する。

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}^{(j)}} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{s}}^{(j)}} \mathbf{T}^* \mathbf{K}_h^{-1}(r_1) \mathbf{T} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{K}_h(r_1) \mathbf{a}_1^{(j)} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{s}}^{(j)}} \mathbf{T}^* \quad (4.24)$$

要素ごとの配列 $\partial f / \partial \tilde{\mathbf{s}}^{(j)}$ の i 番目に着目した微分項 $\partial f / \partial \tilde{s}_i^{(j)}$ については、随伴変数法を用いて陰的な微分項 $\partial \mathbf{u} / \partial \tilde{s}_i^{(j)}$ を消去することで、次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} &= \left(\mathcal{A} \mathcal{B}_i^{(j)} \mathbf{D}^{(j)} \mathbf{B} \mathbf{u} \right) \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} - \frac{\mathcal{A}}{p\alpha} \mathbf{u}^\top \sum_k \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial w_i^{(k)}} \frac{\partial w_i^{(k)}}{\partial v_i^{(j)}} \right) \mathbf{u} \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} - \boldsymbol{\lambda}^\top \sum_k \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial w_i^{(k)}} \frac{\partial w_i^{(k)}}{\partial v_i^{(j)}} \right) \mathbf{u} \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} \\ &+ \sum_{k, k \neq j} \left(\mathcal{A} \mathcal{B}_i^{(j,k)} \mathbf{D}^{(j)} \mathbf{B} \mathbf{u} \frac{\partial v_i^{(j,k)}}{\partial v_i^{(j)}} \right) \frac{\partial v_i^{(j,k)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} + \sum_{k, k \neq j} \left(\mathcal{A} \mathcal{B}_i^{(k,j)} \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{B} \mathbf{u} \frac{\partial v_i^{(k,j)}}{\partial v_i^{(j)}} \right) \frac{\partial v_i^{(k,j)}}{\partial \tilde{s}_i^{(j)}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

式 (4.25) において、右辺の第 1 項から第 3 項が固体材料に関する微分項、第 4, 5 項が材料界面に関する微分項である。また、 $\boldsymbol{\lambda}$ は随伴ベクトルであり、以下の随伴方程式を解くことによって得られる。

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \int_{\Omega} \sum_i^n (\mathbf{f}_i^{\text{adj}})^\top d\Omega \quad (4.26)$$

ここで、 $\mathbf{f}_i^{\text{adj}}$ は次式のとおりである。

$$\mathbf{f}_i^{\text{adj}} = \mathcal{A} \left[\sum_j \left(\mathcal{B}_i^{(j)} v_i^{(j)} \mathbf{D}^{(j)} \mathbf{B} \right) + \sum_j \sum_{k, k \neq j} \left(\mathcal{B}_i^{(j,k)} w_i^{(j,k)} \mathbf{D}^{(j)} \mathbf{B} \right) \right] \quad (4.27)$$

また、 \mathcal{A} , $\mathcal{B}_i^{(j)}$, $\mathcal{B}_i^{(j,k)}$ についても以下のように記される。

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{c}{\alpha} + \sum_i^n \left[\sum_j \left(\frac{\sigma_i^{(j),v}}{\bar{\sigma}_j} \right)^p + \sum_j \sum_{k, k \neq j} \left(\frac{\sigma_i^{(j,k),d}}{\bar{\sigma}^{(j,k)}} \right)^p \right] \right\}^{\frac{1}{p}-1} \quad (4.28)$$

$$\mathcal{B}_i^{(j)} = \left(\frac{\sigma_i^{(j),v}}{\bar{\sigma}^{(j)}} \right)^{p-1} \frac{1}{\bar{\sigma}^{(j)}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{(j),v}}{\partial \sigma_i} \right)^\top \quad (4.29)$$

$$\mathcal{B}_i^{(j,k)} = \left(\frac{\sigma_i^{(j,k),d}}{\bar{\sigma}^{(j,k)}} \right)^{p-1} \frac{1}{\bar{\sigma}^{(j,k)}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{(j,k),d}}{\partial \sigma_i} \right)^\top \quad (4.30)$$

また、 $\partial \sigma_i^{(j),v} / \partial \sigma_i$ は以下で表される。

$$\frac{\partial \sigma_i^{(j),v}}{\partial \sigma_i} = \frac{\mathbf{V} \sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^\top \mathbf{V} \sigma_i}} \quad (4.31)$$

$\partial\sigma_i^{(j,k),d}/\partial\sigma_i$ については、例えば xx 成分に関する微分項 $\partial\sigma_i^{(j,k),d}/\partial\sigma_{i,xx}$ は次式のように表される。

$$\frac{\partial\sigma_i^{(j,k),d}}{\partial\sigma_{i,xx}} = \frac{\sigma_{i,n}^{(j,k)t}(\mathbf{n}_i^{(j)})^T \mathbf{I}_{xx} \mathbf{n}_i^{(j)} + \sigma_{i,l}^{(j,k)}(\mathbf{n}_i^{(j)})^T \mathbf{I}_{xx} \mathbf{l}_i^{(j)}}{\sqrt{(\sigma_{i,n}^{(j,k)t})^2 + \frac{1}{\beta^2} (\sigma_{i,l}^{(j,k)})^2}} \quad (4.32)$$

ただし、

$$\mathbf{I}_{xx} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for 2D,} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for 3D.} \end{cases} \quad (4.33)$$

他の成分についても、次式のような \mathbf{I}_{yy} , \mathbf{I}_{zz} , $\mathbf{I}_{xy} = \mathbf{I}_{yx}$, $\mathbf{I}_{yz} = \mathbf{I}_{zy}$, $\mathbf{I}_{zx} = \mathbf{I}_{xz}$ を用いることで、同様に導出が可能である。

$$\mathbf{I}_{yy} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{for 2D,} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for 3D.} \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{I}_{xy} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for 2D,} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for 3D.} \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{I}_{zz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{zx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

次に、微分項 $\partial v_i^{(j,k)}/\partial v_i^{(j)}$ を導出する。 $\partial v_i^{(j,k)}/\partial v_i^{(j)}$ の配列 $\partial v_i^{(j,k)}/\partial \mathbf{v}^{(j)}$ は次式のようになる。

$$\frac{\partial v_i^{(j,k)}}{\partial \mathbf{v}^{(j)}} = \frac{\partial\phi\left(\kappa \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\| \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}\|\right)}{\partial\left(\kappa \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}\| \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}\|\right)} \left(\int_{\Omega_i} \frac{\kappa \mathbf{b}_i^{(j,k)}}{\int_{\Omega_i} d\Omega} d\Omega \right) \mathbf{K}_h^{-1}(r_2) \mathbf{T} \quad (4.37)$$

ただし、 $\mathbf{b}_i^{(j,k)}$ は次式のようになる。

$$\mathbf{b}_i^{(j,k)} = \frac{(\mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)})^T \mathbf{B}}{\sqrt{(\mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)})^T (\mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}) + \epsilon}} \sqrt{(\mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)})^T (\mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}) + \epsilon} \quad (4.38)$$

表-4.1 固体材料数 $m = 2$ を用いた数値計算例における固体材料の材料特性

	Mat.1	Mat.2
Young's modulus	100	200
Poisson's ratio	0.3	0.3

ここでの $\bar{\mathbf{v}}_i^{(j)}$, $\bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}$ は要素節点値ベクトルである. 式 (4.23) 同様, 式 (4.37) も逆行列 $\mathbf{K}_h^{-1}(r_2)$ を直接求める必要はなく, 実装上では, 次式の連立 1 次方程式を解くことで得られる $\mathbf{a}_2^{(j,k)}$ を用いる.

$$\mathbf{K}_h(r_2)\mathbf{a}_2^{(j,k)} = \Lambda_i^{(j,k)} \left(\int_{\Omega_i} \frac{\kappa \mathbf{b}_i^{(j,k)}}{\int_{\Omega_i} d\Omega} d\Omega \right) \quad (4.39)$$

ただし, $\Lambda_i^{(j,k)}$ は, 式 (4.25) において微分項 $\partial v_i^{(j,k)} / \partial v_i^{(j)}$ がかかっている項の左側に存在する微分項である.

一方で, 制約条件式 $g^{(j)}$ の感度の配列は次式のように陽に求まる.

$$\frac{\partial g^{(j)}}{\partial \mathbf{s}^{(k)}} = \begin{cases} \frac{\partial g^{(j)}}{\partial \bar{\mathbf{s}}^{(k)}} \mathbf{T}^* \mathbf{K}_h^{-1}(r_1) \mathbf{T}, & j = k \\ \mathbf{0}, & j \neq k \end{cases} \quad (4.40)$$

ここで, 配列 $\partial g^{(j)} / \partial \bar{\mathbf{s}}^{(j)}$ の i 番目の要素は次式のようになる.

$$\frac{\partial g^{(j)}}{\partial \bar{\mathbf{s}}_i^{(j)}} = \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial \bar{\mathbf{s}}_i^{(j)}} V_i \quad (4.41)$$

4.5.2 感度の差分近似を用いた精度検証

本節では, 3.5 節と同様に, 前節で導出した提案手法の解析的感度 (AVM) を, 差分近似で計算した感度 (FDA) と比較することで, 精度に関する妥当性について検証を行う. この提案手法の検証では材料界面の感度も加味するものであることから, その有用性を確認するために, 明確な界面が存在していない初期状態, つまり, 設計変数の分布が一様であるものとそうでないものの 2 ケースを考える. 2 ケースともに, 式 (3.40) で与える変動量 Δs は $\Delta s = 1.0 \times 10^{-7}$ とした. また, スケール $L = 100$, 要素数は $20 \times 10 = 200$ とし, フィルタ半径は $R_1 = R_2 = 20$ とした. 界面の許容応力度については, $\bar{\sigma}^{\text{int}} = \bar{\sigma}^{(1,2)} = \bar{\sigma}^{(2,1)} = 0.01$ を与えた. 材料の物性値は表-4.1 のとおりである. 固体材料の数を $m = 2$ としたため, 各材料番号に対する感度である $\partial f / \partial s_i^{(1)}$, $\partial f / \partial s_i^{(2)}$ の 2 つについて比較を行う. 図-4.3 および図-4.4 の左側のグラフは, 目的関数 $f(\mathbf{s})$ の感度について解析的感度と差分近似による感度を比較したものである. また, その相対誤差の絶対値を右側の緑色のグラフで描画している. 図-4.3 では, 設計変数の初期値を全体に一様に与えて計算した結果を示している. この図

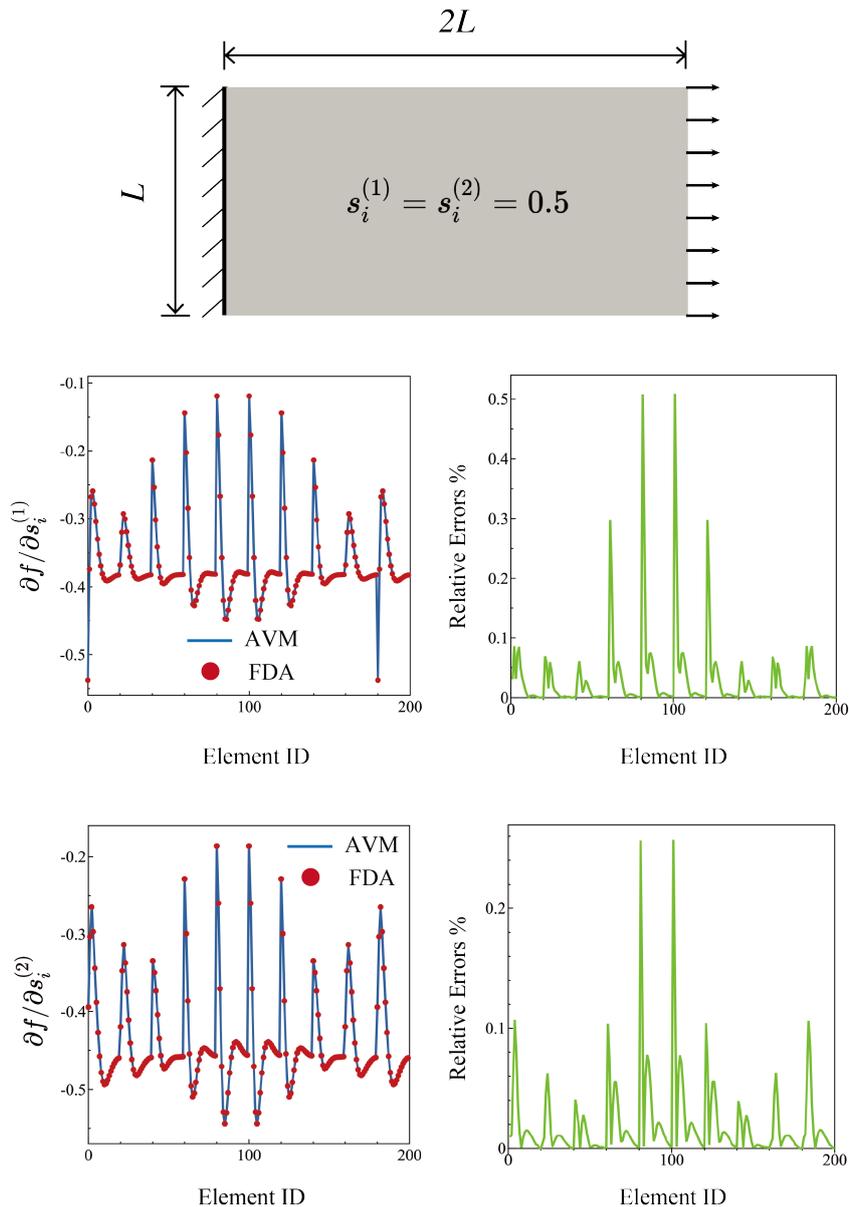


図-4.3 Case 1 の感度解析: 上) 初期設計変数分布, 左) AVM と FDA の比較, 右) AVM と FDA の相対誤差

から、相対誤差は最大でも 1% 未満であり、十分に高い精度を有していることが伺える。図-4.4 については、異なる設計変数の初期値を構造モデルの上側・下側に与えて同様の感度検証を行った結果である。図-4.4 を見ると、図-4.3 同様に相対誤差の絶対値は最大でも 1% 未満である。以上の検証より、提案する手法の感度式が十分な精度を有していることが確認でき、この結果は次節で紹介する最適化結果の信頼性を保証するものであるといえる。

4.6 最適化計算例

本節では、5つの単純な構造モデルを用いて提案手法の妥当性と性能に関する検証を行う。まず、引張り構造を用いて、層間剥離の2次応力規準を用いた界面の応力制約が最適化結果

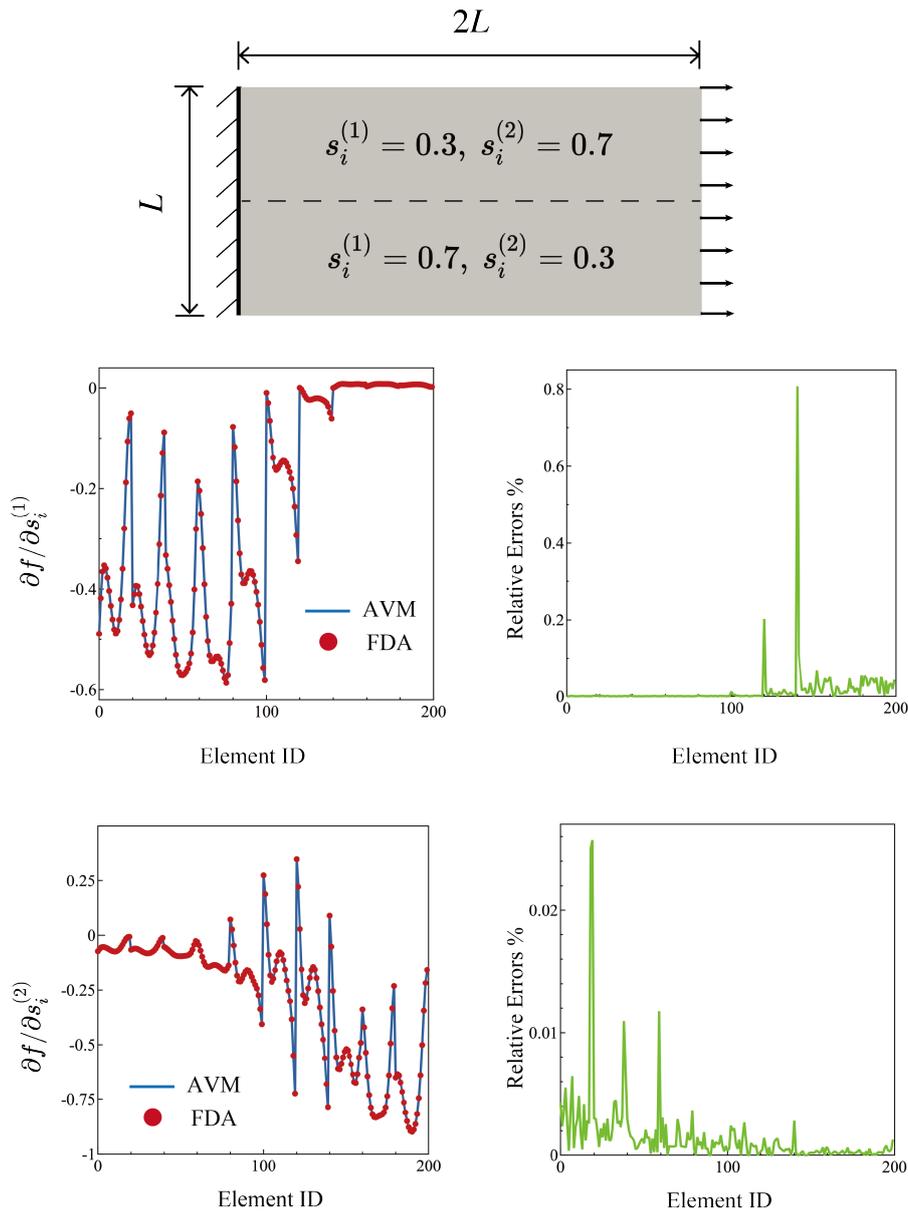


図-4.4 Case 2 の感度解析: 上) 初期設計変数分布, 左) AVM と FDA の比較, 右) AVM と FDA の相対誤差

にどのような影響を与えるかについて検証を行う。次に、片持ちはりモデルを用いて、界面の許容応力度 $\bar{\sigma}^{(j,k)}$ ($j, k = 1, 2, \dots, m, j \neq k$) の大きさを変化させた場合に得られる最適化結果が、力学的に合理的なものであることを確認する。3 番目に、2 次元の L 字型ブラケット構造を用いて、固体材料と材料界面の許容応力度を、それぞれ大きさを変化させた場合に得られる最適構造の性能比較を行う。4 番目に、2 次元の逆 T 字型ブラケット構造を用いて、荷重を 2 箇所を与えた場合の最適化結果から、数値安定性について検証を行う。さらに、固体材料数を $m = 3$ に増やした場合についても同様に検証を行う。最後に、3 次元の持ち送り構造を用いて、応力制約として許容応力度を与えた場合と与えなかった場合の計算結果について考察を行う。上記のケースに対して、2 次元のモデルでは平面応力状態を仮定し、4



図-4.5 引張構造

節点四辺形要素を用いた。3次元のモデルでは8節点六面体要素を用いた。また、簡単のため、界面に与える許容応力度については $\bar{\sigma}^{\text{int}} = \bar{\sigma}^{(1,2)} = \bar{\sigma}^{(2,1)}$ とした。 p -norm パラメータ p の値については、理論上は、 $p \rightarrow \infty$ とすることで相当応力の最大値を正確に抽出するような関数になるが、数値計算の観点から、実装上は適切な大きさの p を用いる必要がある。なお、Verbart ら⁷²⁾ の検証から、 p -mean において $p \leq 12$ を代入して計算を行った場合、計算結果の最大応力値が、許容応力度を大きく超過する結果が出る可能性があることが示されている。一方で、 $p > 28$ の値では、収束性が悪化することが示されている。以上のことから、本研究における p -norm パラメータは $p = 16$ を採用する。

数値計算例を示す前に、3.6節と同様、本研究で扱うしきい値パラメータ S, T の設定を行う。1回目の projection に用いるしきい値パラメータ S については、90ステップまでは $S = 1$ とし、その後30ステップごとに、 $S = 8$ になるまで1ずつ値を増やしていく。一方で、2回目の projection に用いる S は、最適化計算全体を通して $S = 8$ を与えた。また、しきい値パラメータ T は、1回目の projection では $T = 0.5$ 、2回目の projection では $T = 0.05$ を与えた。なお、ここで設定したしきい値パラメータは、問題の解像度や設計領域によって汎用性が失われる可能性がある。したがって、ここで挙げたパラメータ設定は最適化計算にあたって予備検討での試行錯誤が必要である。パラメータ設定に関する基本的な考え方は Hu ら⁸⁵⁾ によっても言及されているため、そちらも参照されたい。収束判定は、最適化ステップ数が350以上、かつ前ステップとの設計変数の差のL2ノルムが5回連続で 5.0×10^{-5} 以下になる場合とした。また、本章の数値計算例では、相当応力のコンター図の可視化にあたり、各要素に対して次のような規則に従い後処理を行った。

```

if       $v_i^{(1)} \geq 0.5$ , Mat.1
else if  $v_i^{(2)} \geq 0.5$ , Mat.2
else if  $v_i^{(2,1)} \geq 0.5$ , Interface

```

このような処理を行うことで、空隙部分の相当応力を表示せず、固体材料と材料界面をそれぞれ抽出して結果を表示している。

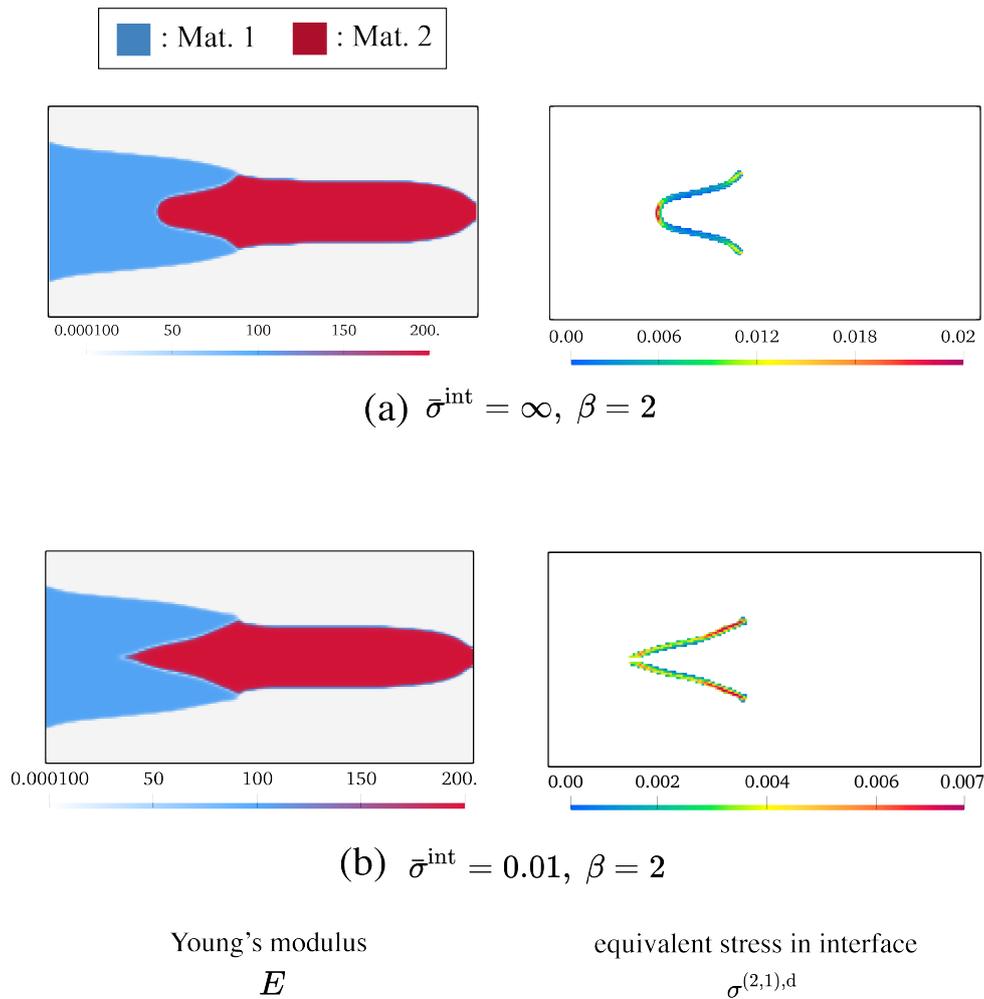


図-4.6 $\beta = 2$ のときの引張構造におけるトポロジー最適化結果の比較

4.6.1 引張り構造

ここでは、図-4.5 の引張り構造を用いて、界面の相当応力として与えた引張/圧縮非対称応力規準が最適化結果に与える影響について検証を行う。スケールは $L = 100$ とし、構造右端中心の $0.04L$ の領域に 0.1 の大きさの分布荷重を載荷した。要素数は $200 \times 100 = 20000$ とした。各固体材料の体積制約として、 $\chi^{(1)} = \chi^{(2)} = 0.2$ を与えた。これは、設計領域に各固体材料が最大で 20% ずつ使用でき、空隙が 60% となることを意味している。設計変数の初期値は一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.2$ を与えた。また、フィルタ半径には $R_1 = 6, R_2 = 4$ を与えた。なお、単位については第 2, 3 章と同様に与えず、無次元化している。まず、 $\beta = 2$ を与えたときの最適化結果を図-4.6 に示す。図-4.6(a) は、許容応力度 σ^{int} に十分大きい値を与えた際の計算結果である。これは、応力制約のない平均コンプライアンス最小化問題とみなせる。図-4.6(a) から、界面の相当応力値が、引張方向に対して垂直な方向の面に高い値をとることがわかる。このとき、界面の相当応力の最大値は $\sigma^{(2,1),d} = 0.02$ であった。この値を受けて、図-4.6(b) では、許容応力度を $\sigma^{\text{int}} = 0.01$ を設定して最適化計算を行った。図-4.6(b)

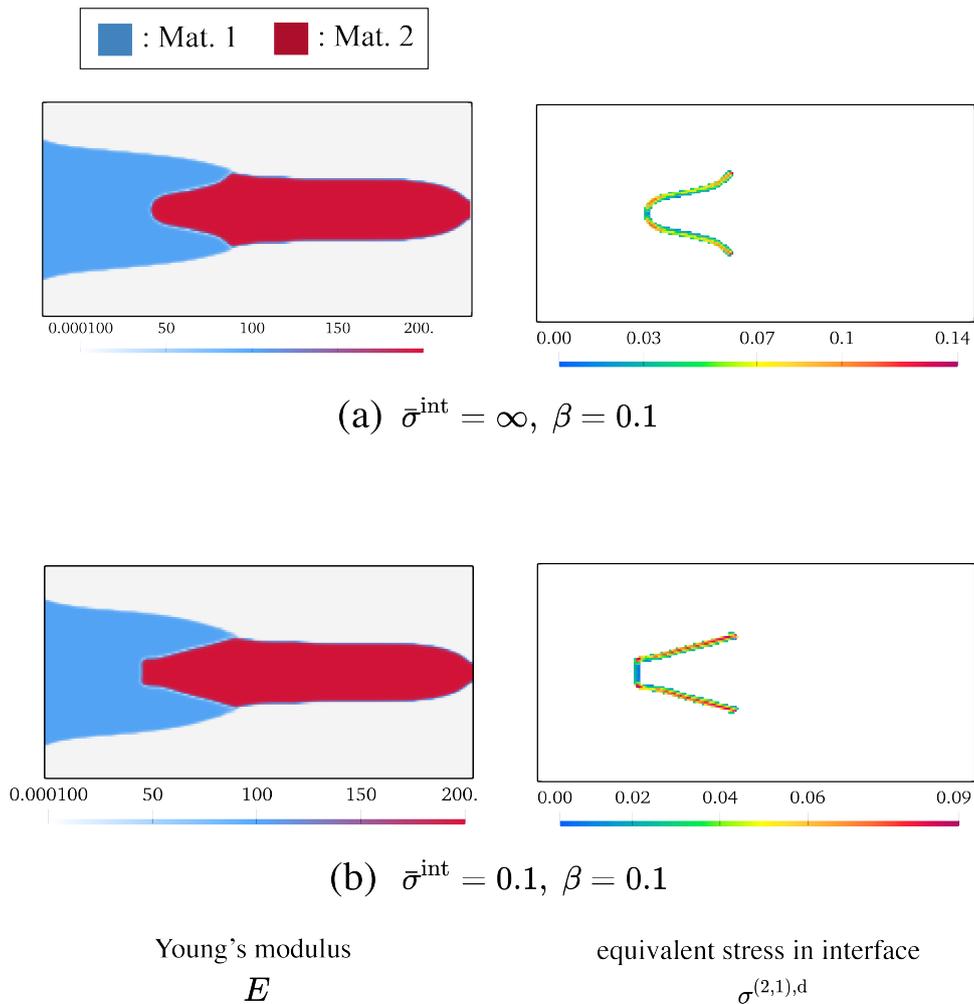


図-4.7 $\beta = 0.1$ のときの引張構造におけるトポロジー最適化結果の比較

から、定性的ではあるが、界面に小さい値の許容応力度を与えることで、界面がシャープな形で得られた。これは、引張方向に対して垂直な面がなくなり、せん断方向のみで力を受け持つような構造が得られたためだと考えられる。

次に、 $\beta = 0.1$ を与えたときの最適化結果を図-4.7 に示す。図-4.7(a) が、許容応力度 $\bar{\sigma}^{\text{int}}$ に十分大きい値を与えた際の計算結果である。このとき、界面の相当応力の最大値は $\sigma^{(2,1),d} = 0.14$ であった。この値を受けて、図-4.7(b) では、許容応力度を $\bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.1$ を設定して最適化計算を行った。この図から、先ほどの図-4.6(b) とは対照的に、引張方向に対して垂直な材料界面が現れている。これは、図-4.6 のときと比較して、式 (4.13) の重み係数 $1/\beta^2$ が大きくなり、せん断応力の代わりに引張で力を受け持つような作用が働いたためだと考えられる。

以上の検証から、 β は引張/せん断の重み付けを決定するようなパラメータであることが確認できた。Brewer ら¹⁰⁸⁾ の検証結果から、 $1.7 \leq \beta \leq 2.3$ 程度の値を与えるのが望ましいと考えられるため、本研究における以降の検証では $\beta = 2$ を用いる。

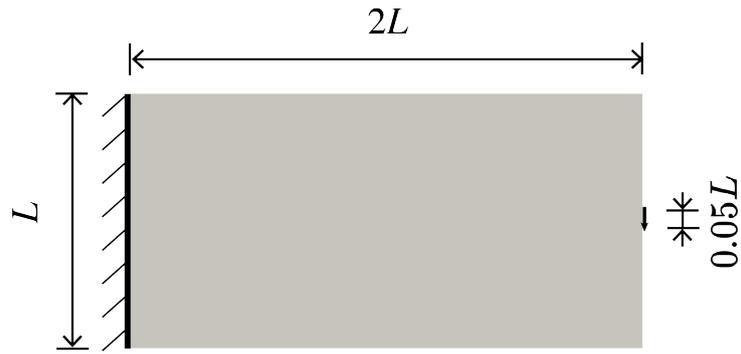


図-4.8 片持ちはり構造

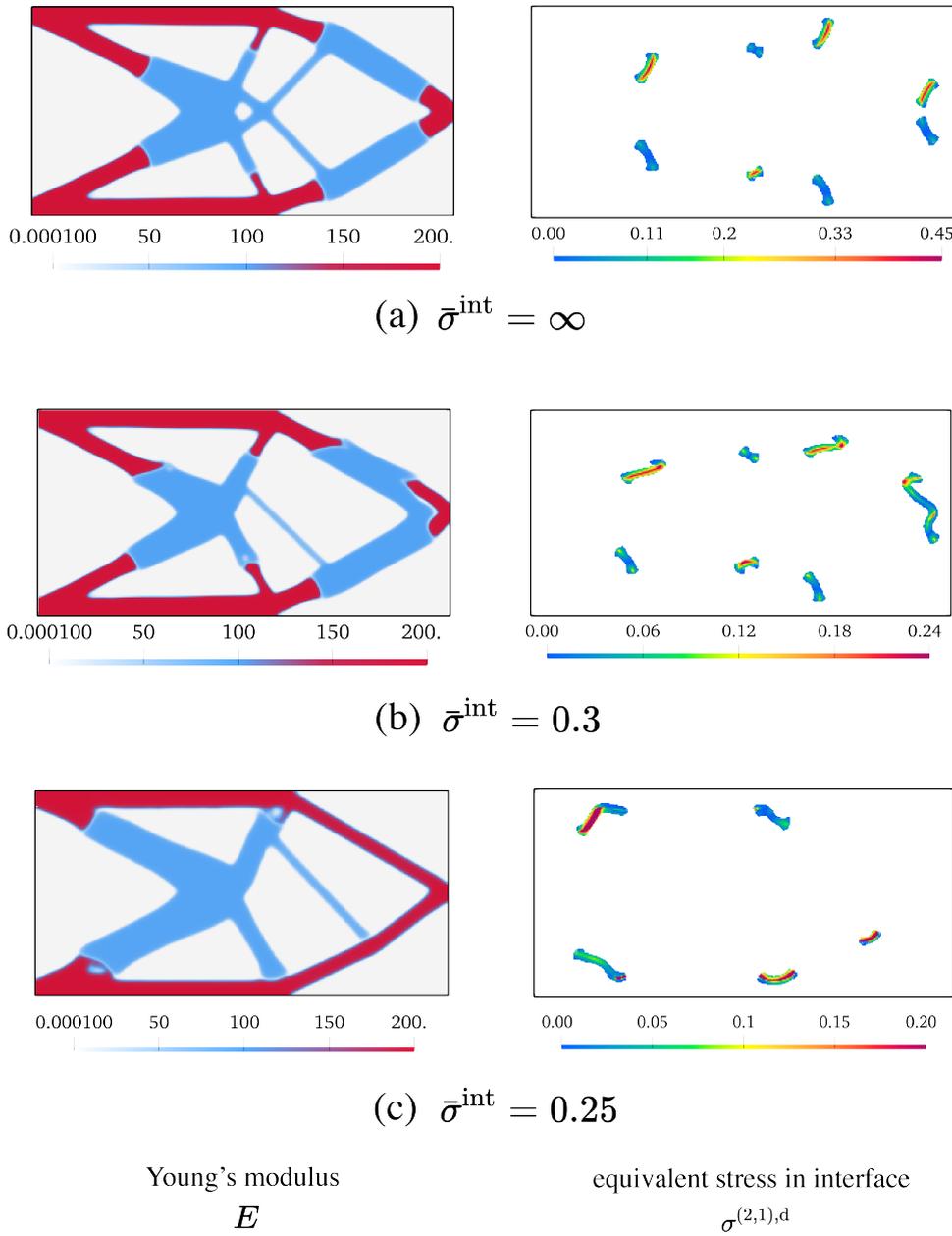
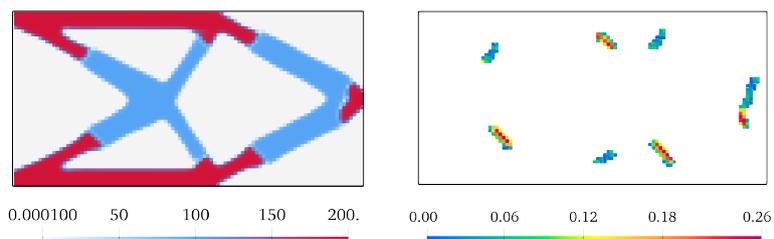
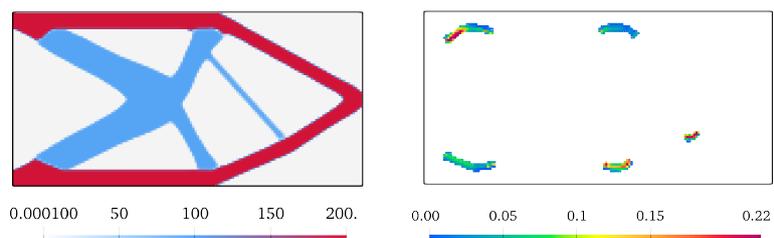


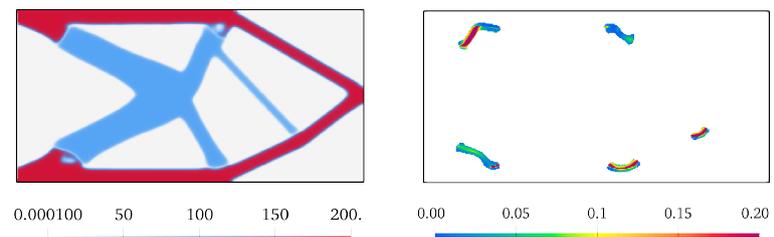
図-4.9 材料界面強度の異なる片持ちはり構造の最適化結果



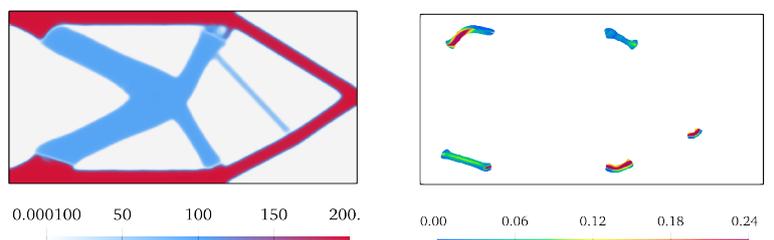
(a) mesh: 100×50



(b) mesh: 150×75



(c) mesh: 300×150



(d) mesh: 500×250

Young's modulus
 E

equivalent stress in interface
 $\sigma^{(2,1),d}$

図-4.10 メッシュ解像度の異なる片持ちはり構造の最適化結果

表-4.2 材料界面強度の異なる片持ちはり構造: 最適化結果の性能比較

	(a)	(b)	(c)
Objective function $f(\mathbf{s})$	1.00	1.02	1.02
Mean compliance c	1.31	1.32	1.31
Maximum Mat.1 stress $\sigma^{(1),v}$	0.18	0.18	0.18
Maximum Mat.2 stress $\sigma^{(2),v}$	0.79	0.79	0.81
Maximum Interface stress $\sigma^{(2,1),d}$	0.45	0.24	0.20

表-4.3 メッシュ解像度の異なる片持ちはり構造: 最適化結果の性能比較

	(a)	(b)	(c)	(d)
Objective function $f(\mathbf{s})$	1.02	1.00	1.02	1.03
Mean compliance c	1.32	1.30	1.31	1.91
Maximum Mat.1 stress $\sigma^{(1),v}$	0.17	0.15	0.18	0.23
Maximum Mat.2 stress $\sigma^{(2),v}$	0.61	0.62	0.83	1.1
Maximum Interface stress $\sigma^{(2,1),d}$	0.26	0.22	0.20	0.24

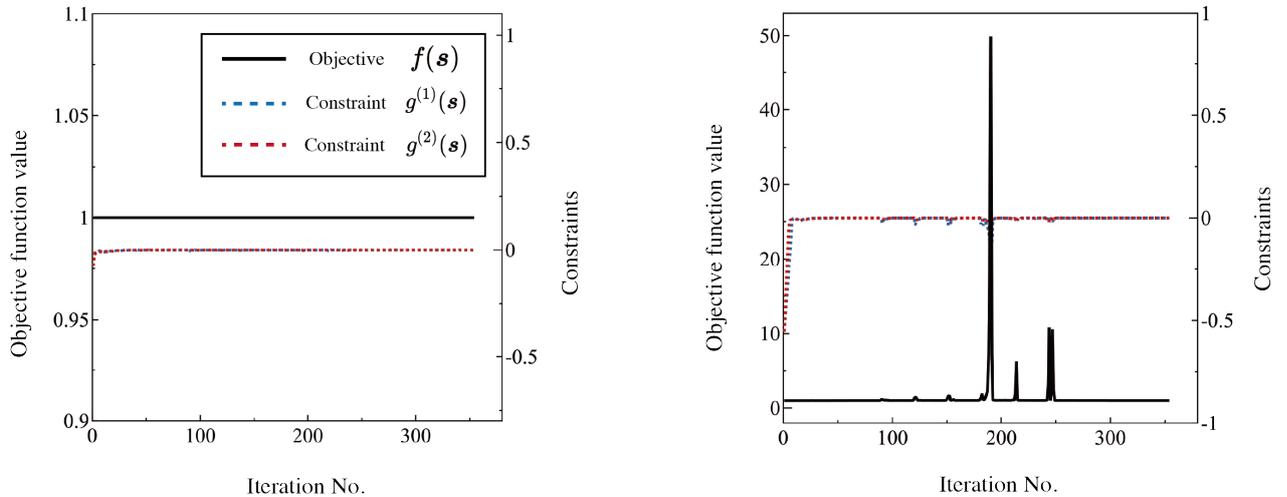


図-4.11 目的関数値と制約条件の推移: 左) 図-4.9(a), 右) 図-4.9(c)

4.6.2 片持ちはり構造

次に, 図-4.8 の片持ちはりの構造モデルを用いて, 材料界面に応力制約を与えない, または与えた場合の最適化計算を行った. また, 本計算例では界面の応力制約に着目するため, 固体材料には応力制約を課さないものとした. スケールは $L = 100$ とし, $0.05L$ の領域に

0.4 の大きさの分布荷重を与えた。要素数は $300 \times 150 = 45000$ 要素とした。各固体材料の体積制約として、 $\chi^{(1)} = \chi^{(2)} = 0.2$ を与えた。これは先の計算例と同様、設計領域に各固体材料が最大で 20% ずつ使用でき、空隙が 60% となることを意味している。設計変数の初期値は一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.2$ とした。また、フィルタ半径には $R_1 = 8, R_2 = 6$ を与えた。最適化結果を図-4.9 に示す。

図-4.9(a)に見られるように、界面応力制約を考慮しない最適構造では、剛性の高い赤の材料 2 は荷重載荷点や応力特異点である左側隅角部などの高応力領域に分布し、剛性の低い青の材料 1 は他の低応力領域に分布していることから、妥当な結果が得られているものと考えられる。一方で、界面に生じる応力については、水平方向中心線に対して上下に対称な位置に界面応力が生じているが、界面に引張りが生じる、すなわち剥離方向に高い応力が発生している。これは、実際にはその界面近傍で剥離が生じやすいことを示唆する結果といえよう。次に、界面の許容応力度に $\bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.3, \bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.25$ を与えた結果をそれぞれ図-4.9(b), (c) に示す。これらの図から、界面応力の許容応力度が小さくなるにつれて、上下非対称な材料配置に変化していることが分析できる。表-4.2 は、片持ちはり構造で得られた最適化結果の目的関数値、平均コンプライアンス値、固体材料および界面の最大応力値をまとめた表である。この表から、図-4.9(a)における界面の最大応力値が 0.45 であるのに対し、図-4.9(b)では 0.24、図-4.9(c)に至っては 0.20 まで減少している。また、図-4.9(c)のケースでは、高い引張応力が生じていた材料界面が消失していることがわかる。このように、材料界面の強度に合わせて界面剥離が生じにくくなるようなトポロジーが得られていることが考察できる。

次に、メッシュの解像度が最適化結果に与える影響について検証を行う。Fig.4.10 は、4 つの異なるメッシュ解像度で最適化計算を行った結果をまとめたものである。Fig.4.10(a) は 5000 要素、Fig.4.10(b) は 11250 要素、Fig.4.10(c) は 45000 要素、Fig.4.10(d) は 125000 要素である。なお、Fig.4.10(c) は Fig.4.9(c) の結果と同じものを示している。先程と同様に、4 つ全ての結果において、設計変数の初期値は一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.2$ を与え、フィルタ半径には $R_1 = 8, R_2 = 6$ を与えた。4 つの最適化結果を比べて、Fig.4.10(a)を除いた 3 つの材料レイアウトに大きな変化は現れなかった。このことから、高い精度で界面の応力値を評価するためには、ある程度細かいメッシュで最適化計算を行う必要があるといえる。さらに、メッシュが細くなるにつれて、最適化計算の計算コストは増加する一方で、より滑らかな結果が得ることができた。Table 4.3 は、Fig.4.10 でまとめた 4 つの結果について、目的関数値、平均コンプライアンス値、各固体材料および材料界面の最大応力値をまとめたものである。この表から、メッシュの粗い (a) を除いた 3 ケースで材料界面の許容応力度 $\bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.25$ を満足していることが定量的に明らかになった。以上の結果は、十分に細かいメッシュで計算を行うことで、メッシュの解像度に依らない、許容応力度を満足した力学的に妥当な材料レイアウトが得られることを示唆している。

図-4.11 は、図-4.9(a), (c) の場合の目的関数値および制約条件関数値の推移を示した図で

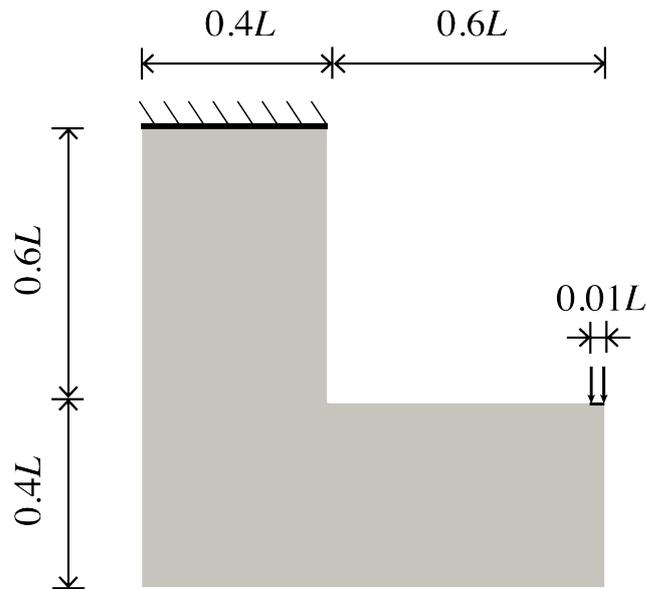


図-4.12 L字型ブラケット構造

ある。(c)のケースでは、しきい値関数のパラメータが変化する箇所で振動が見られたものの、どちらの結果においても目的関数および制約間数値が十分に収束していることから、この最適化計算で得られた結果は妥当であるといえる。

4.6.3 L字型ブラケット構造

図-4.12に示すような2次元のL字型ブラケット構造を用いて最適化計算を行う。スケールは $L = 300$ とし、 $0.01L$ の領域に0.4の大きさの等分布荷重を载荷した。要素数は57600要素とした。各固体材料の体積制約は、それぞれ $\chi^{(1)} = 0.2$, $\chi^{(2)} = 0.2$ とした。設計変数の初期値は一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.2$ を与えた。また、フィルタ半径には $R_1 = 10$, $R_2 = 8$ を与えた。固体材料および材料界面に与える許容応力度をそれぞれ変化させた場合の計算結果を図-4.13および図-4.14に示す。

定性的ではあるが、図-4.13(b)~(d)、図-4.14(e)~(h)の結果を通して、許容応力度が与えられることで、固体材料あるいは界面の応力分布が均一になっていると見受けられる。図-4.13(a)の結果においては、応力制約のない状態で最適化計算を行うと、荷重载荷点、変位拘束点、また応力特異点である隅角部にヤング率の高い赤の固体材料2が配置されており、平均コンプライアンス最小化問題として妥当な結果が得られていると考えられる。一方で、材料2におけるMisesの相当応力の分布図を見ると、応力特異点である隅角部で応力集中が生じていることがわかる。一方で、図-4.13(c)や図-4.14(g)の結果では、青の固体材料1が代わりに隅角部に配置されており、固体材料2の最大応力値は、それぞれ0.76から0.23、0.76から0.20へ大きく減少した。さらに、図-4.14の(e)と(h)から、固体材料1,2の両方に適切な許容応力度を与えた場合、隅角部を避ける円弧型の材料レイアウトが得られてい

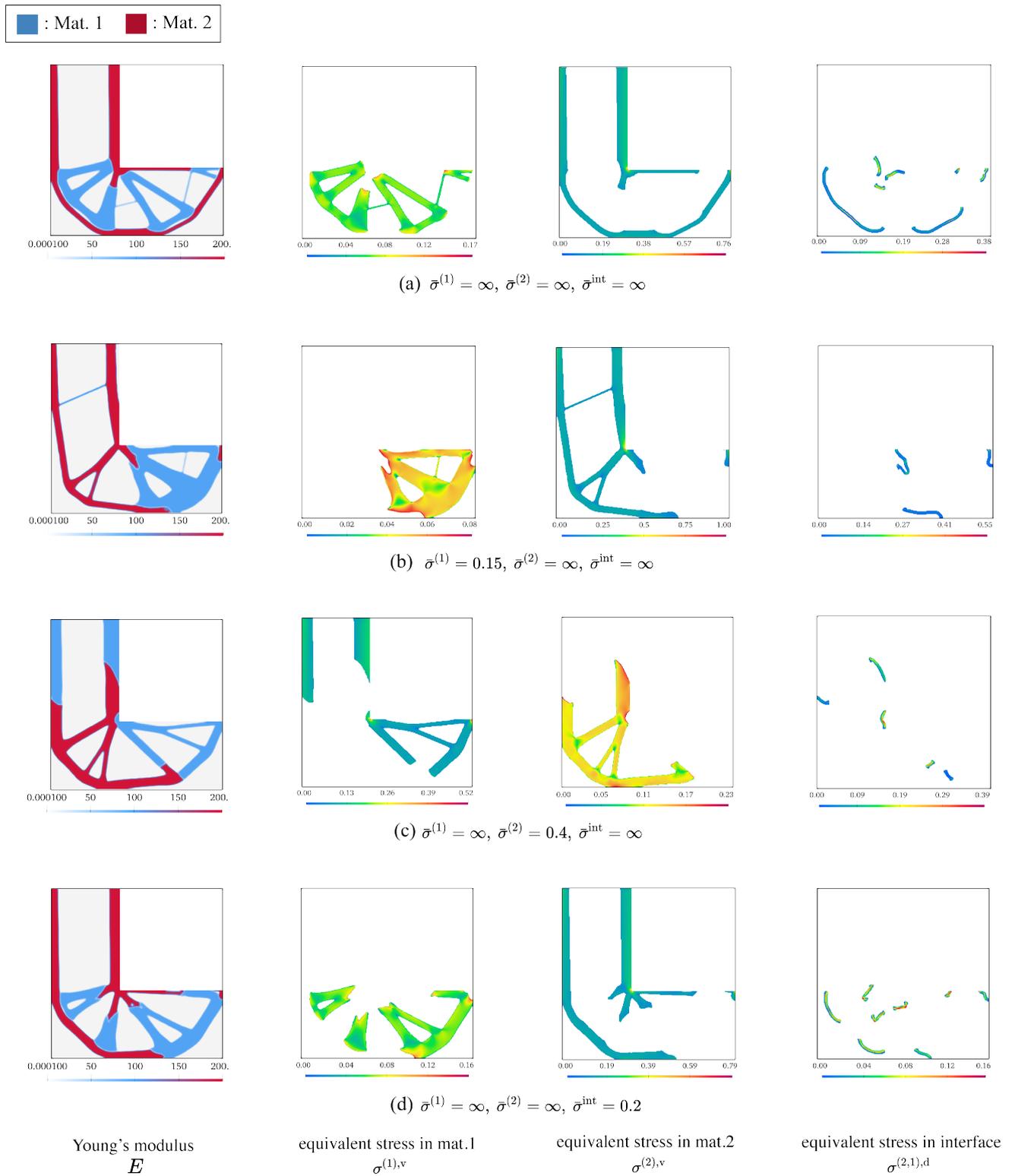
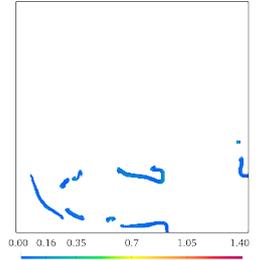
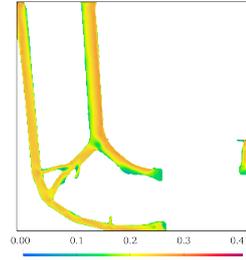
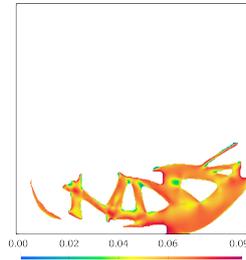
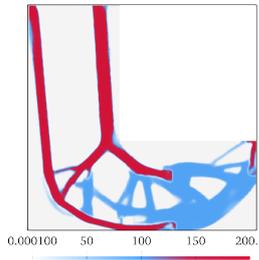
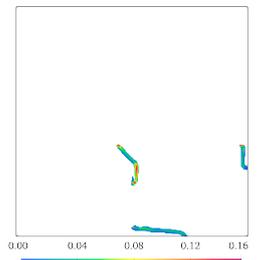
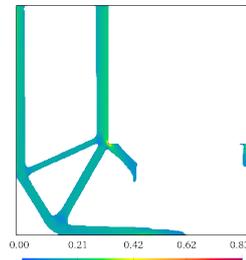
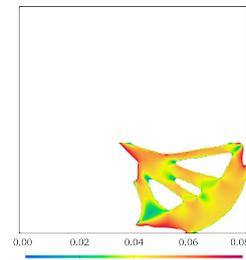
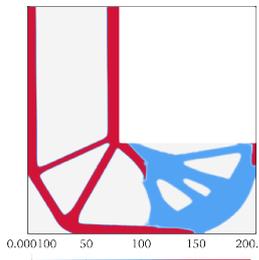


図-4.13 様々な強度設定を行った L 字型ブラケット構造の最適化結果

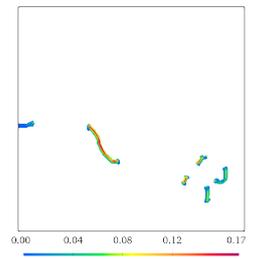
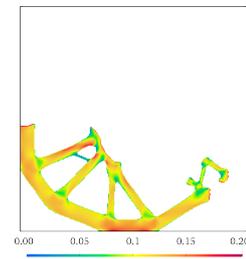
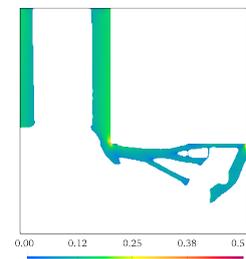
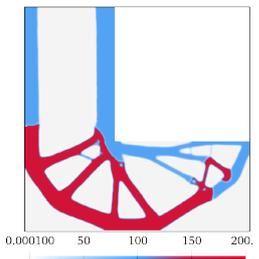
■ : Mat. 1 ■ : Mat. 2



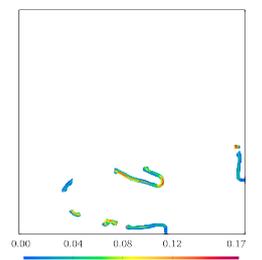
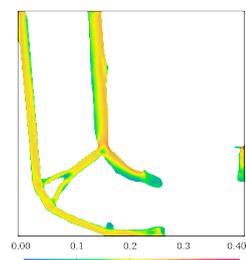
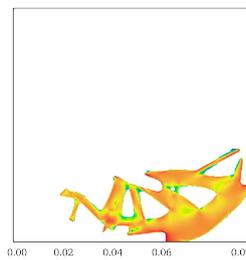
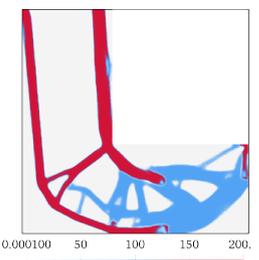
(c) $\bar{\sigma}^{(1)} = 0.15, \bar{\sigma}^{(2)} = 0.4, \bar{\sigma}^{\text{int}} = \infty$



(f) $\bar{\sigma}^{(1)} = 0.15, \bar{\sigma}^{(2)} = \infty, \bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.2$



(g) $\bar{\sigma}^{(1)} = \infty, \bar{\sigma}^{(2)} = 0.4, \bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.2$



(h) $\bar{\sigma}^{(1)} = 0.15, \bar{\sigma}^{(2)} = 0.4, \bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.2$

Young's modulus
 E

equivalent stress in mat.1
 $\sigma^{(1),v}$

equivalent stress in mat.2
 $\sigma^{(2),v}$

equivalent stress in interface
 $\sigma^{(2,1),d}$

図-4.14 様々な強度設定を行った L 字型ブラケット構造の最適化結果

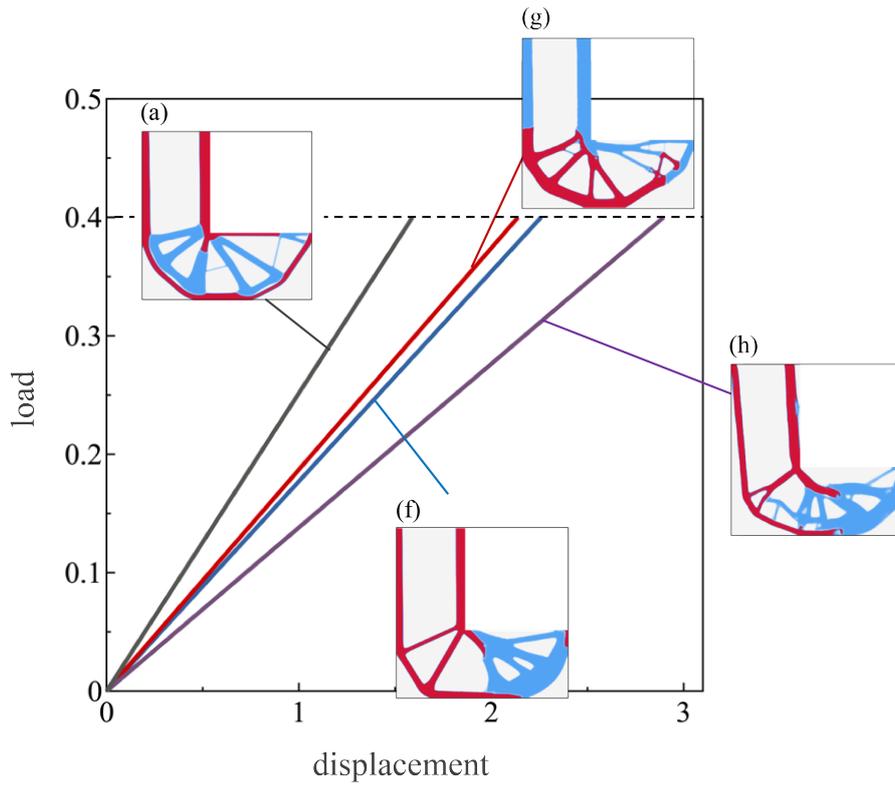


図-4.15 L字型ブラケット構造の各最適化結果に対する荷重-変位曲線

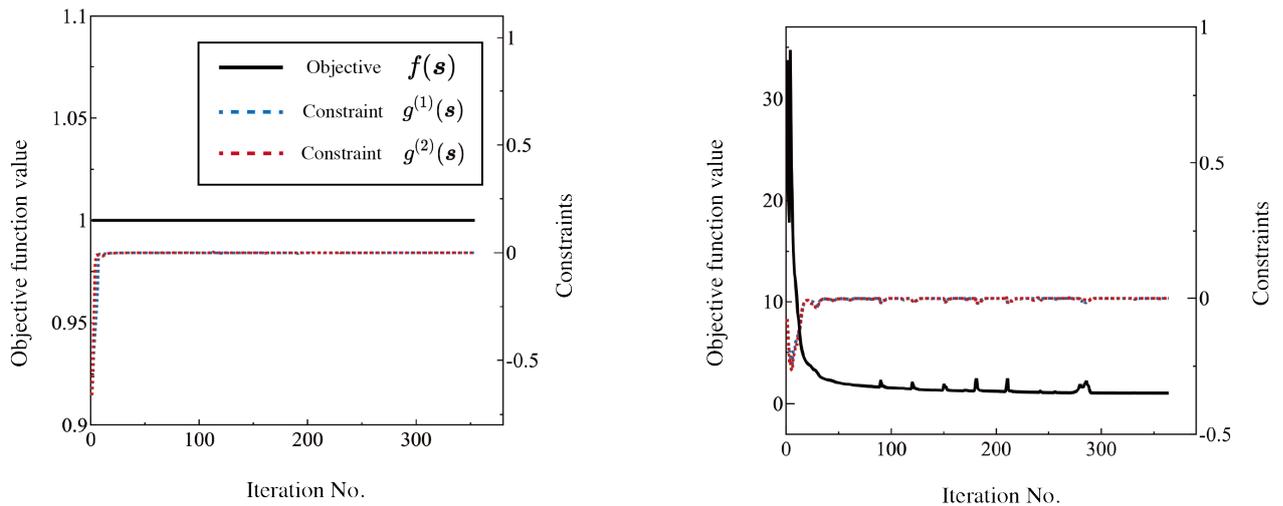


図-4.16 目的関数値と制約条件の推移: 左) 図-4.13(a), 右) 図-4.14(h)

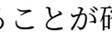
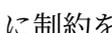
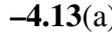
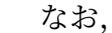
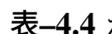
ることがわかる。このことから、固体材料に適切な許容応力度を与えることで、応力集中を避けるような計算結果が得られることが確認できた。また、やをと比較すると、青の材料 1 に制約を与えることで、材料 1 が構造の 1 箇所にとまり、材料 1 全体で均一な応力分布になるような最適化結果が得られている。

表-4.4 は、それぞれ, の各計算結果における目的関数値、平均コンプライアンス値、固体材料および材料界面の最大応力値をまとめたものである。**表-4.4**を通して、応力制約を与えていない (a) の結果が最も平均コンプライアンス値が小さく、2 つの固体材料に許容応力度を与えている (e) や、2 つの固体材料および材料界面に許容応力度を与えている (h) の平均コンプライアンス値が最も大きい値となった。このことから、平均コンプライアンス値と引き換えに、最大応力値の制御が行われていることが確認できる。

なお、では、隅角部に中間密度が比較的多い状態で最適化計算が収束した。これは、許容応力度やしきい値パラメータの変更によって緩和できると考えられる。また、**表-4.4** から、の結果における材料 2 の最大応力値 0.41 が、許容応力度である $\bar{\sigma}^{(2)} = 0.4$ を僅かではあるが超過していることが読み取れる。これは、 p -norm 関数を用いた目的関数の性質上、起こり得る結果であるといえよう。

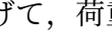
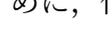
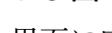
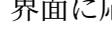
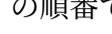
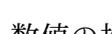
平均コンプライアンス値と引き換えに最大応力値の制御が行われていることを確認するために、代表的な 4 つの例を取り上げて、荷重変位曲線を比較する。は、およびの結果の中から代表して、の応力制約なし、の材料 1 と界面に応力制約を与えた場合の結果、の材料 2 と界面に応力制約を与えた場合の結果、の材料 1, 2 と界面に応力制約を与えた場合の結果の 4 例で得られる荷重変位曲線を示している。本研究では微小変形理論における線形弾性体を仮定しているため、荷重変位曲線はいずれの例も直線である。このから、応力制約のないが最も剛性の高い結果であることが読み取れる。続いて、, , の順番で剛性が高いことが見て取れる。最も応力制約の条件が厳しいの結果において、最も剛性が下がっていることがわかる。

図-4.16 は、それぞれ, の結果における目的関数値および制約条件関数値の推移を表したものである。前節のと同様に、許容応力度を与えることで、しきい値関数のパラメータが変化する箇所で多少の振動が見られるものの、どちらの結果においても目的関数および制約関数値が十分に収束していることから、この最適化計算で得られた結果は妥当であるといえる。

4.6.4 逆 T 字型ブラケット構造

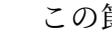
この節では、のような逆 T 字型ブラケット構造を適用した際の最適化結果を示す。この構造は、左右対称かつ荷重が 2 箇所で与えられるものであり、提案手法の数値的安定性についてより詳しく検証することができる。スケールは $L = 300$ とし、2 箇所の $0.01L$

表-4.4 様々な強度設定を行った L 字型ブラケット構造: 最適化結果の性能比較

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
Objective function $f(s)$	1.00	1.00	1.00	1.02	1.02	1.00	1.06	1.04
Mean compliance c	1.89	2.27	2.27	1.91	3.15	2.07	2.47	2.63
Maximum Mat.1 stress $\sigma^{(1),v}$	0.17	0.08	0.52	0.16	0.09	0.08	0.51	0.09
Maximum Mat.2 stress $\sigma^{(2),v}$	0.76	1.00	0.23	0.79	0.41	0.83	0.20	0.40
Maximum Interface stress $\sigma^{(2,1),d}$	0.38	0.55	0.39	0.16	1.40	0.16	0.17	0.17

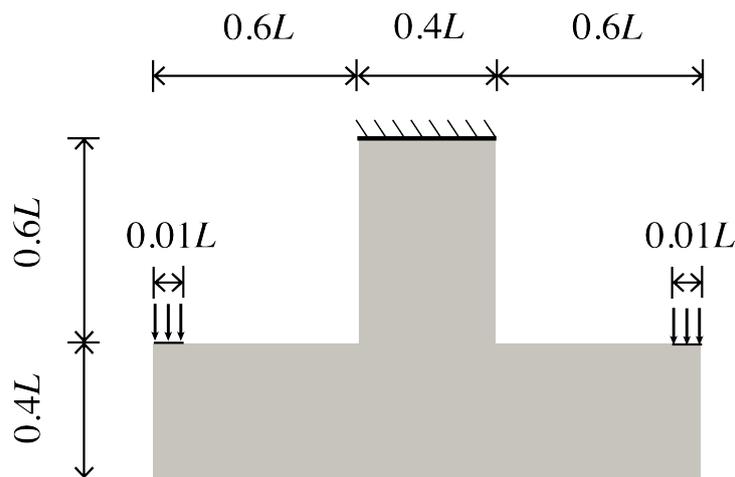


図-4.17 逆 T 字型ブラケット構造

表-4.5 固体材料数 $m = 3$ を用いた数値計算例における固体材料の材料特性

	Mat.1	Mat.2	Mat.3
Young's modulus	100	200	300
Poisson's ratio	0.3	0.3	0.3

の領域に 0.5 の大きさの等分布荷重を載荷した。要素数は 79200 要素とした。2つのフィルタ半径は、それぞれ $R_1 = 10$, $R_2 = 8$ を与えた。

まず、前節までと同じ 2 種類の固体材料および空隙を仮定した場合の最適化計算結果を図-4.18 および図-4.19 に示す。各固体材料の体積制約は、それぞれ $\chi^{(1)} = 0.2$, $\chi^{(2)} = 0.2$ とした。設計変数の初期値も一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.2$ を与えた。図-4.18 は、許容応力度に十分に大きい値を与えて計算した結果である。この図から、前節の図-4.13(a) 同様に、応力集中が起きやすい隅角部および荷重載荷点近傍にヤング率の高い赤の材料 2 が配置されていることから、妥当な計算結果が得られていると考えられる。また、中心軸に対して対称な材料レイアウトが得られており、数值的に安定した計算結果が得られていると考えられる。一方で、材料 2 の相当応力 $\sigma^{(2),v}$ のコンター図から、2箇所隅角部に応力集中が起きていることが確認

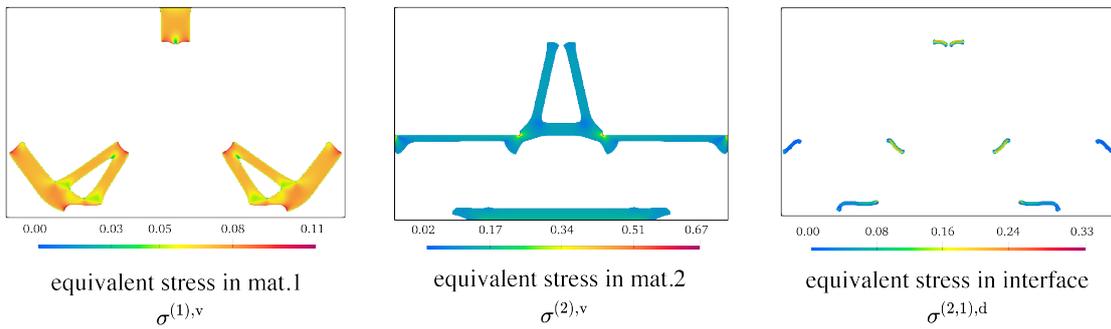
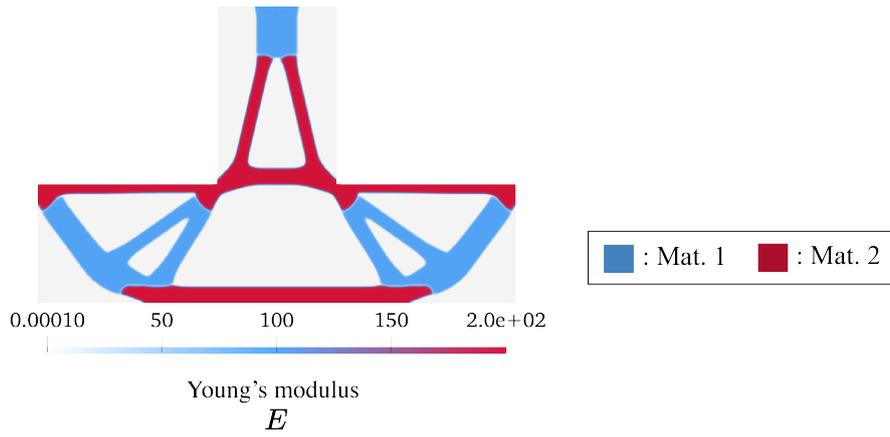


図-4.18 逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果

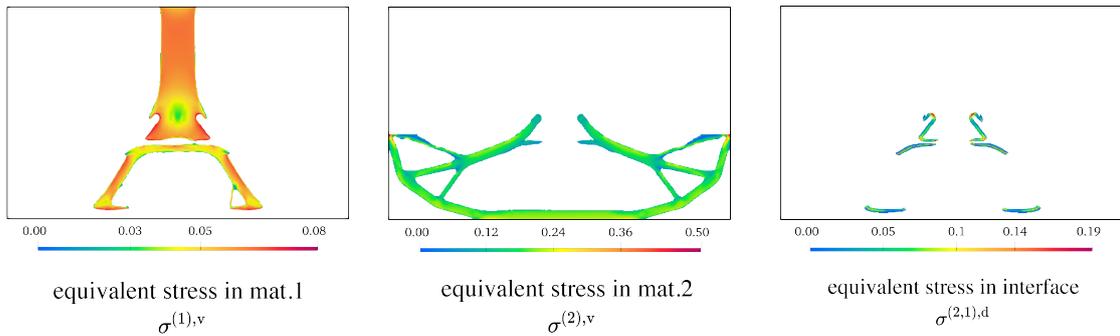
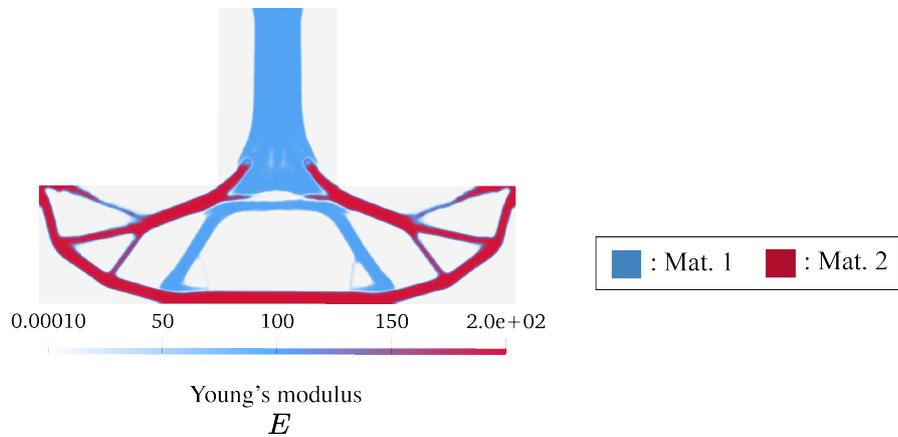


図-4.19 許容応力度を与えた場合の逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果

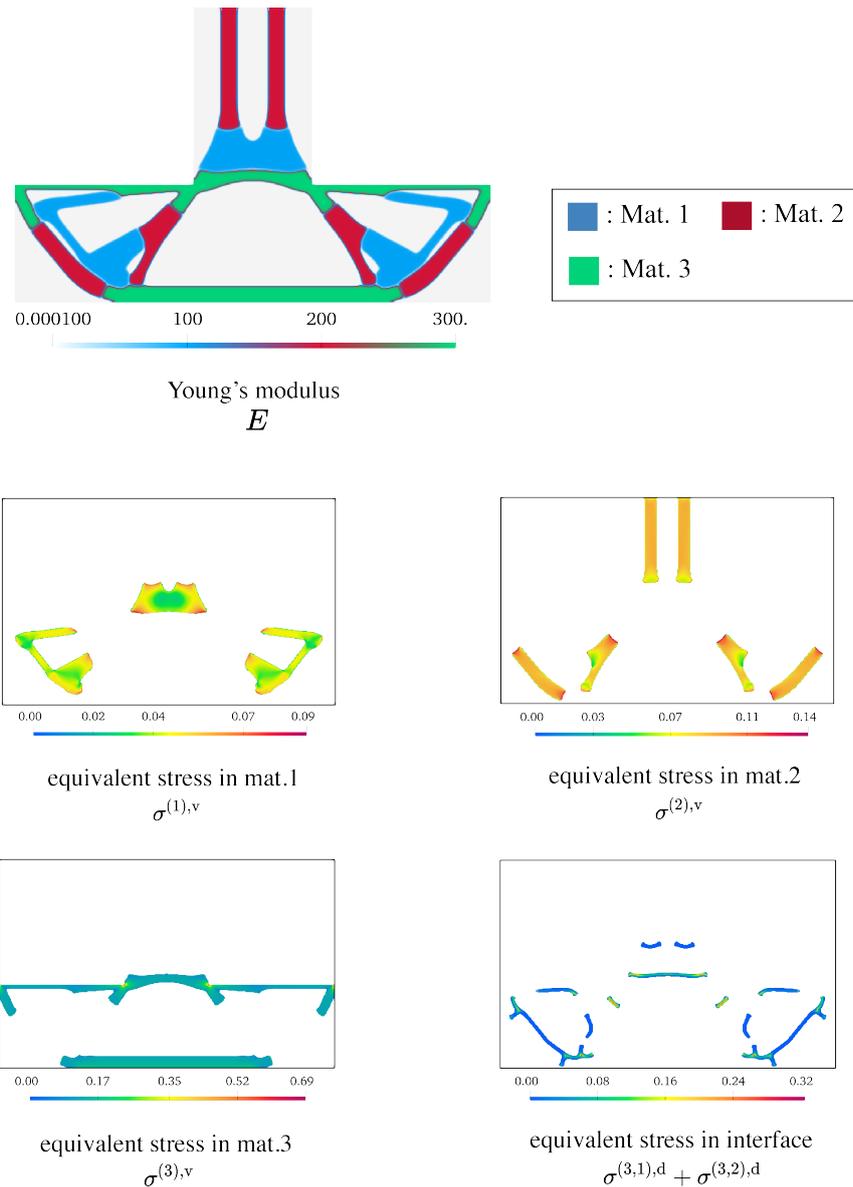


図-4.20 3種類の固体材料を使用した逆T字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果

できる。図-4.19は、固体材料および材料界面にそれぞれ $\bar{\sigma}^{(1)} = 0.15$ 、 $\bar{\sigma}^{(2)} = 0.5$ 、 $\bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.25$ を与えた場合の計算結果である。図-4.18では、材料2の最大応力値は0.67であったのに対し、 $\bar{\sigma}^{(2)} = 0.5$ という許容応力度の値を与えることで、最大応力値を0.5まで下げることができた。材料1に関しては、図-4.18の結果から、制約を与えなくても応力集中が比較的生じていなかった。それにも関わらず、図-4.19で $\bar{\sigma}^{(1)} = 0.15$ という許容応力度の値を与えることによって、最大応力値を0.11から0.08まで下げることができた。材料界面に関して、図-4.19で $\bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.25$ という許容応力度の値を与えることによって、最大応力値を0.33から0.19まで下げることができた。

次に、表-4.5に示すような3種類の固体材料および空隙を仮定した場合の最適化計算結果を図-4.20、図-4.21および図-4.22に示す。なお、各固体材料の体積制約は、それぞれ

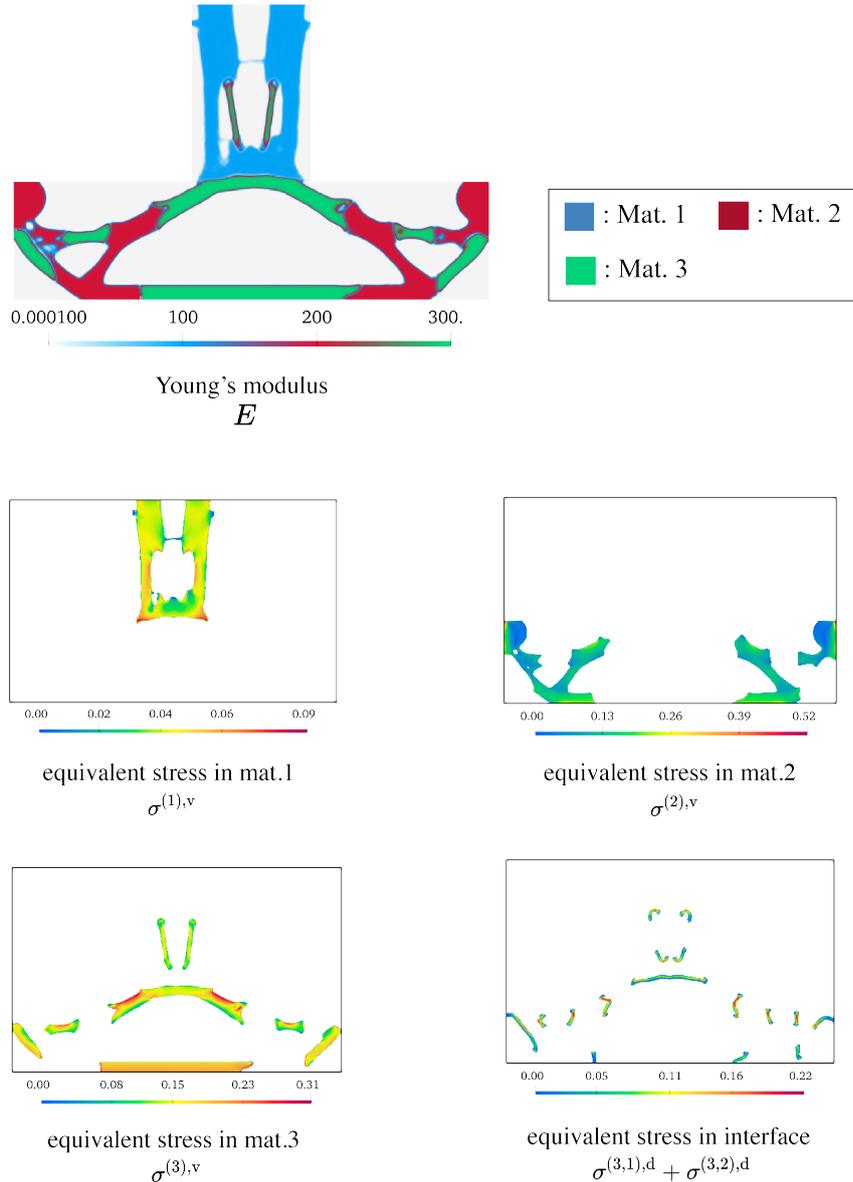


図-4.21 材料 1, 2, 3 および材料界面に許容応力度を与えた場合の逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果

$\chi^{(1)} = \chi^{(2)} = \chi^{(3)} = 0.15$ とした。設計変数の初期値も一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = s_i^{(3)} = 0.15$ を与えた。図-4.20 は、図-4.18 同様に、3 材料を用いても中心軸に対して対称な材料レイアウトが得られており、数値的に安定した計算結果が得られていると考えられる。一方で、図-4.21 は、許容応力度の値にそれぞれ $\bar{\sigma}^{(1)} = 0.15$, $\bar{\sigma}^{(2)} = 0.5$, $\bar{\sigma}^{(3)} = 0.6$, $\bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.25$ を与えて最適化計算を行った場合の計算結果である。定性的ではあるが、図-4.21 の結果は図-4.19 と比較しても、非対称性がより顕著であり、中間密度を多く残した最適化結果である。このことから、固体材料数を増やすことで、固体材料に許容応力度を与えた場合の数値的安定性が低くなる傾向をもつことが考察できる。図-4.22 は、固体材料 2, 固体材料 3 および界面にそ

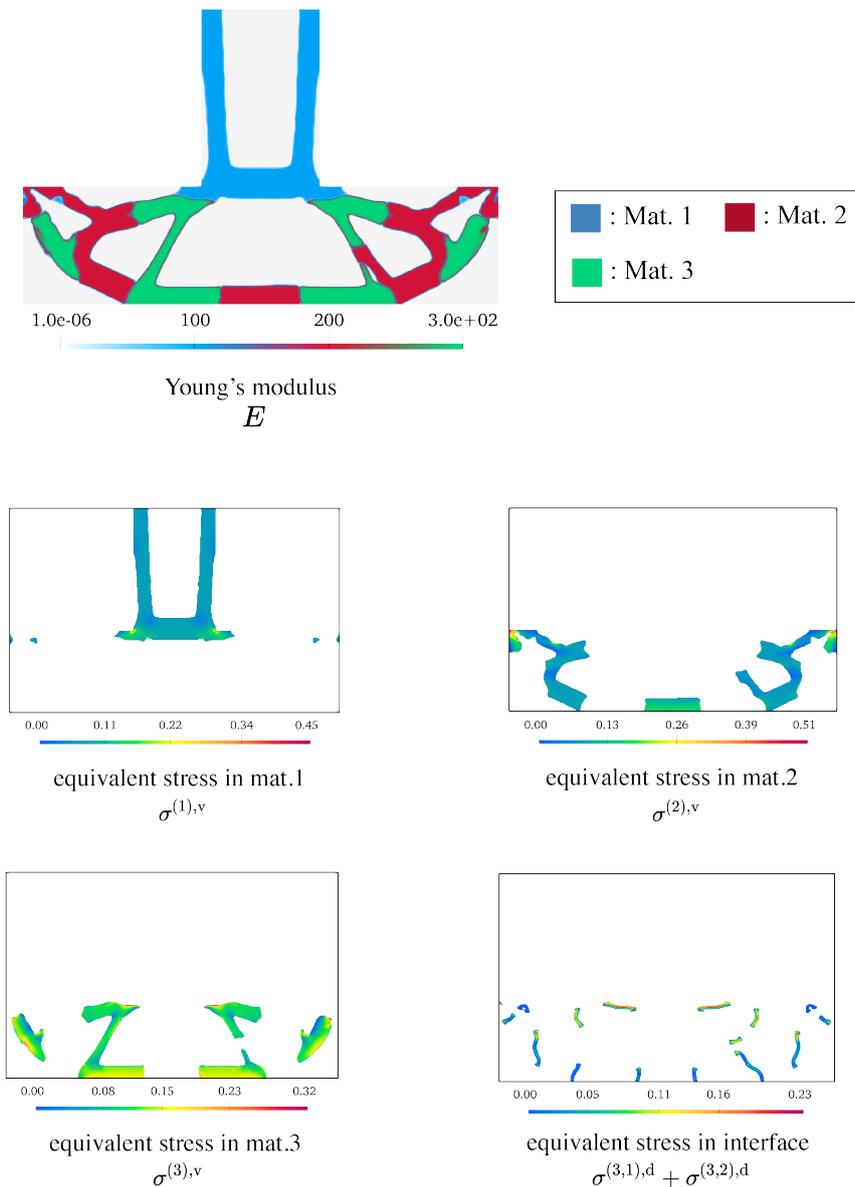


図-4.22 材料 2, 3 および材料界面に許容応力度を与えた逆 T 字型ブラケット構造のトポロジー最適化結果

それぞれ $\bar{\sigma}^{(2)} = 0.5$, $\bar{\sigma}^{(3)} = 0.6$, $\bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.25$ の許容応力度の値を与え、固体材料 1 には十分に大きい許容応力度の値を与えた場合の計算結果である。この問題設定は、青の材料 1 が低剛性かつ高強度材料であることを想定したものである。図-4.22 を図-4.21 と比較すると、図-4.22 が比較的対称な材料レイアウトであることがわかる。このことから、許容応力度を与えていない固体材料の存在の有無が、数値安定性を左右させていることを示唆していると考えられる。

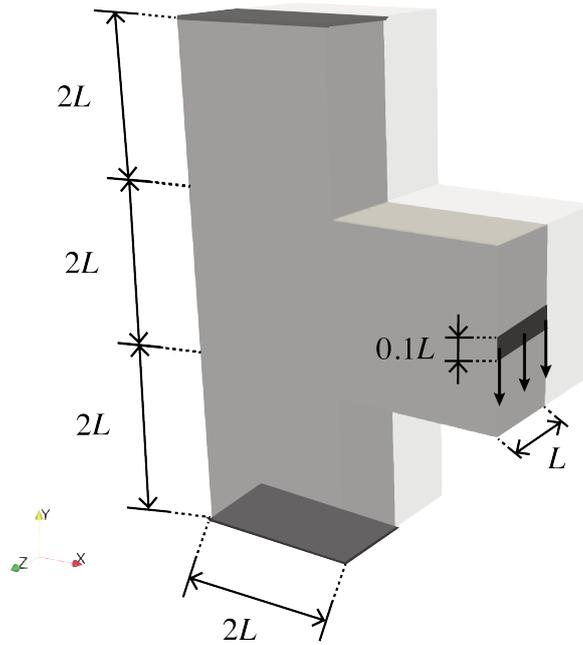


図-4.23 3次元持ち送り構造

4.6.5 3次元持ち送り構造

最後に、提案手法を3次元設計に適用した際の最適化結果を示す。図-4.23のような3次元持ち送り構造を用いた。スケールは $L = 20$ とし、図-4.23で示した $L \times 0.1L$ の領域に0.5の大きさの等分布荷重を載荷した。最適化計算の要素数は192000要素とした。また、この最適化計算例では $z = 0$ の平面における対称構造を設定しており、この後に示す結果も $z = 0$ を軸に反転させたものを映し出している。各固体材料の体積制約は、それぞれ $\chi^{(1)} = 0.15$, $\chi^{(2)} = 0.15$ とした。設計変数の初期値も一様に $s_i^{(1)} = s_i^{(2)} = 0.15$ を与えた。

固体材料および材料界面に与える許容応力度をそれぞれ変化させた場合の計算結果を図-4.24および図-4.25に示す。図-4.24は、固体材料および材料界面の許容応力度の値を十分に大きくして計算を行った場合の計算結果である。この図から、 y 軸での上半分、下半分で対称的な材料レイアウトが得られていることが明らかとなった。一方で、図-4.25では、固体材料および材料界面の許容応力度の値としてそれぞれ $\bar{\sigma}^{(1)} = 0.15$, $\bar{\sigma}^{(2)} = 0.5$, $\bar{\sigma}^{\text{int}} = 0.25$ を与えて最適化計算を行った。図-4.26は、図-4.24、図-4.25における材料1の相当応力のコンター図を別視点から見て比較したものである。この図から、図-4.24とは異なり、図-4.25では材料1が y 軸での上半分、下半分で非対称な材料レイアウトになっていることがわかる。これは、材料界面に与えられている引張/圧縮非対称応力規準が、このような非対称な材料レイアウトに起因しているものと考えられる。具体的には、図-4.26のように、上半分に材料1を多めに配置することで、上半分に生じる引張応力に対抗できるような材料配置

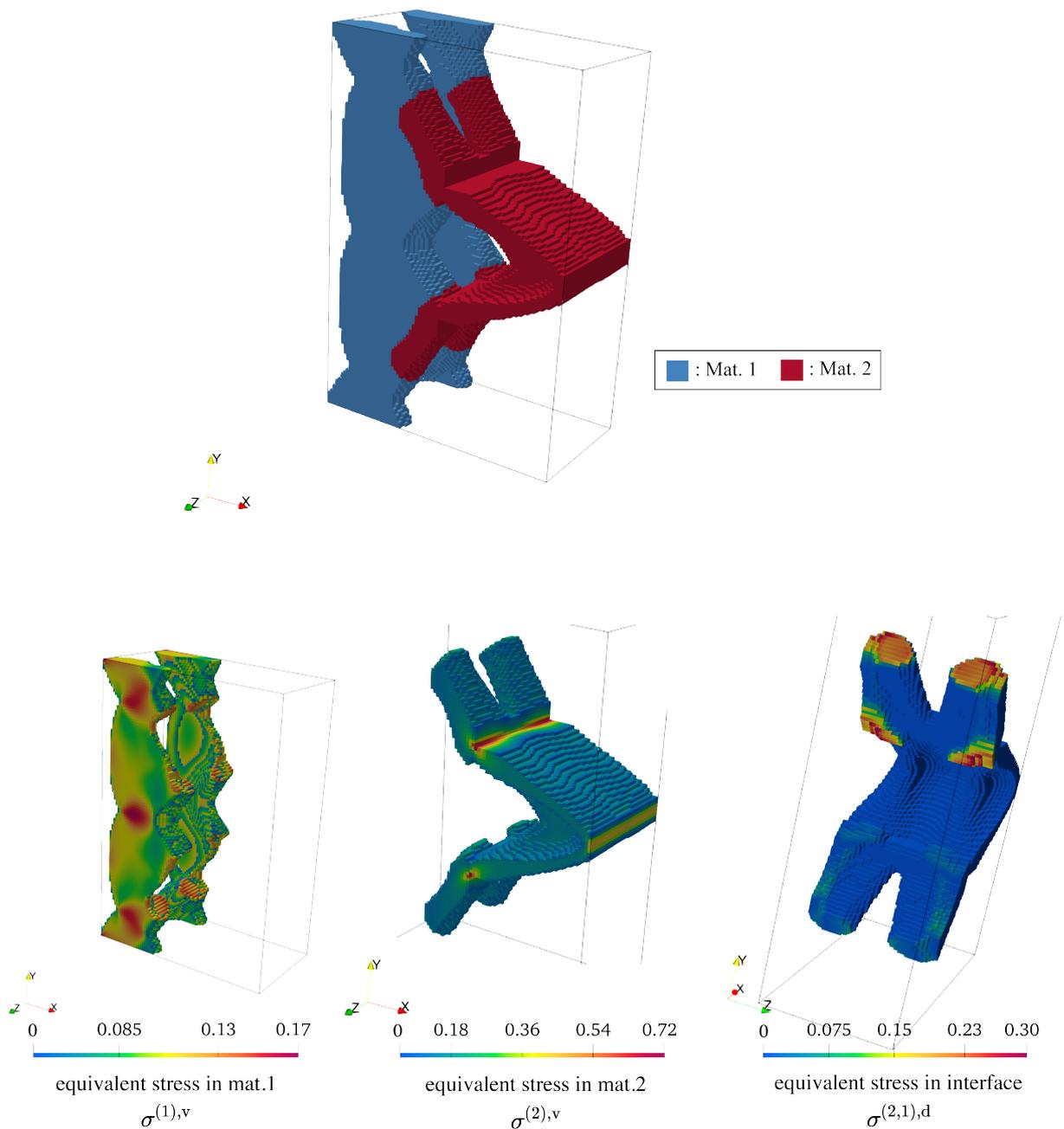


図-4.24 3次元持ち送り構造におけるトポロジー最適化結果

が得られたのだと考えられる。

4.7 結論および今後の展望

本研究では、各固体材料および材料界面の強度を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化手法を開発し、その性能検証を行った。ヤング率の正規化に対して、DMO型材料内挿関数を採用し、さらに graded interface の概念を拡張する手法を提案した。さらに本研究では、材料界面の仮想的な界面体積比率を定義し、材料界面の応力の評価を行った。固体材料には Mises の相当応力、材料界面には引張/圧縮非対称応力規準を用いて、より現実に近い界

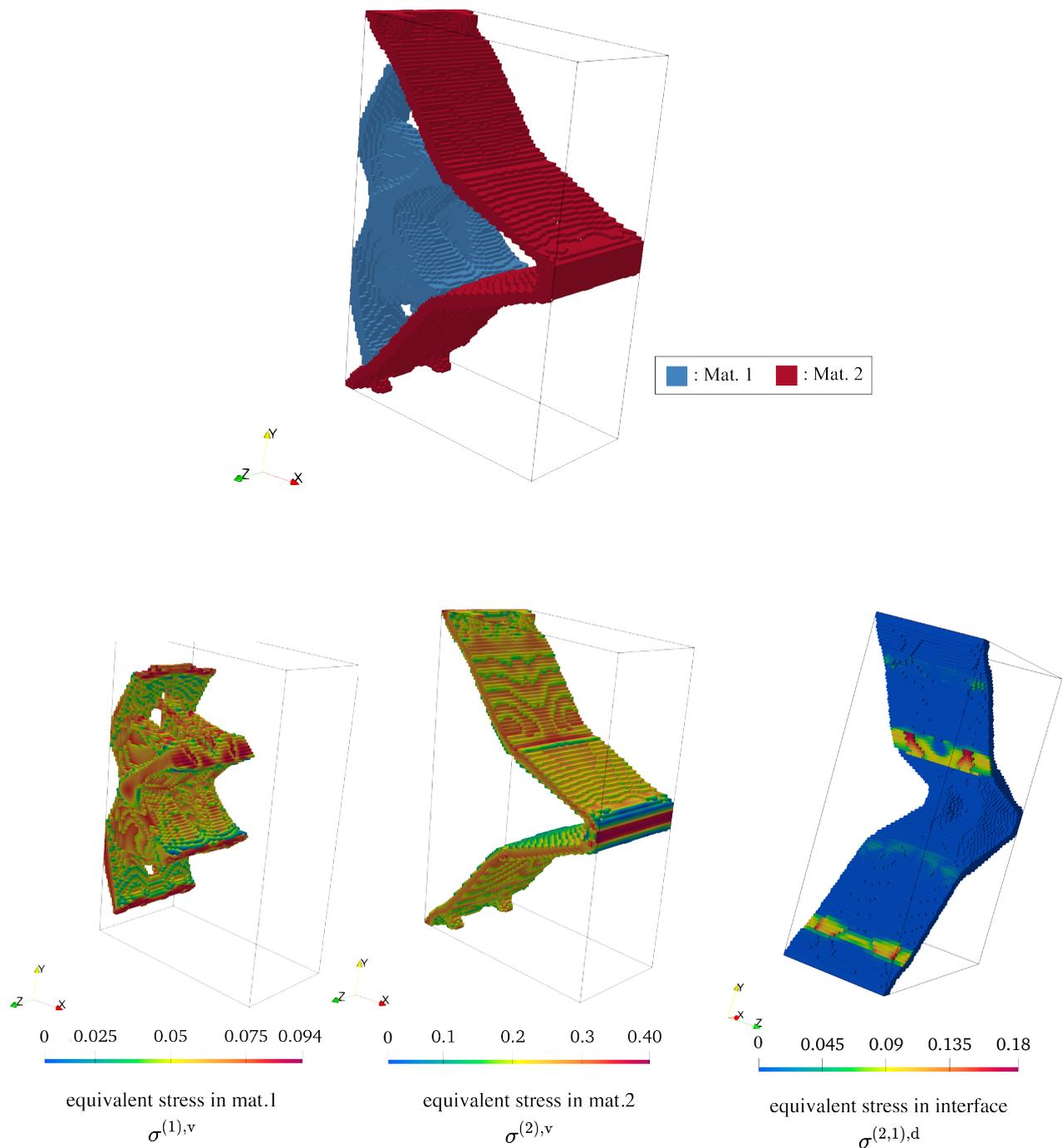


図-4.25 許容応力度を与えた場合の3次元持ち送り構造におけるトポロジー最適化結果

面を再現した状態で最適化計算を行った。また、応力制約付き構造最適化問題で生じ得る特異点問題を緩和するために、DMO型材料内挿関数に適応した緩和手法を新たに提案した。本提案手法で得られる形状は、界面および固体材料の最大応力値を制御し、構造の安定性を向上させるのに有効であることが確認できた。また、固体材料や界面の許容応力度を考慮することで最大応力値を制御できるが、その代わりに構造の全体剛性が下がることが明らかになった。

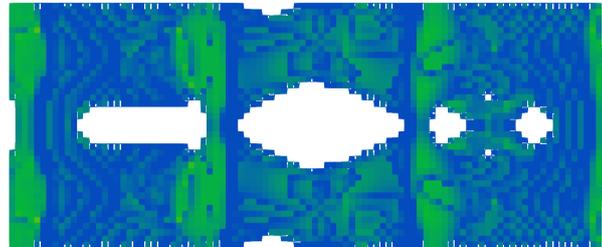
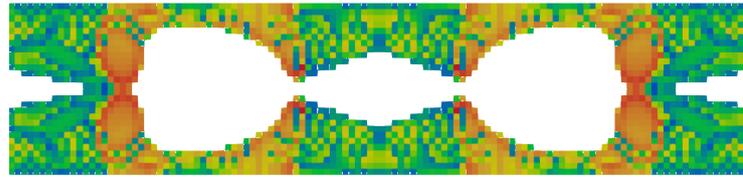


図-4.26 図-4.24 と図-4.25 の材料 1 の Mises の相当応力分布図を別視点から見た図

一方で、本研究で提案する手法は、問題設定によっては中間密度を残したまま、あるいは目的関数の性質上、最大応力値が許容応力度を超過した状態で最適化計算が収束することがある。これは今後取り組むべき課題であると考えている。また、提案手法では界面にある程度幅をもたせて解析を行うことから、繊細な界面形状を表現することが難しく、得られた最適構造をそのまま製造した場合、界面で局所的に応力集中が生じる可能性があると考えられる。したがって、本提案手法は固体材料のレイアウトを大まかに決定するための最適設計手法という位置づけになる。また、本研究では固定されたメッシュを用いており、厳密な材料界面の応力の評価もまた困難であるのが現状である。その一方で、本章の計算結果は、ある程度メッシュの解像度が高ければ、概ね同じ材料配置が得られることを示唆している。以上のことから、材料界面にアダプティブメッシュを取り入れる、B スプライン曲線で補間を行うことで、上述したような問題にある程度対処できると考えている。

5 結論

本研究では各固体材料およびその界面の応力値が各々の材料強度および界面強度を満足するようなマルチマテリアルトポロジー最適化手法の開発を目的として、独自の材料界面表現法、相当応力式、問題設定の提案を行った。この提案手法を軸として、材料界面のヤング率を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化手法および固体材料および界面の強度を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化手法を構築し、その性能検証を行った。

まず、第3章で扱った界面のヤング率を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化について、材料界面の物性を考慮しながら個々の材料に等価な重みを与えることで固体材料間の可換性を完全に満足することができる手法であることを示した。また、本手法の独創性として、隣接する要素間に生じる設計変数の空間勾配を用いて、材料界面の界面体積比率を表現した点にあり、これによって界面幅を制御しつつ、数値的に安定した手法を確立することができた。さらに本手法を用いて実施した最適化計算から、提案する材料モデルは、材料の可換性・独立性を担保しつつ材料界面のヤング率を考慮できるものであることを確認した。最適化計算例では、材料界面の剛性が小さいと仮定した場合は、材料界面の表面積が小さくなり、構造上の弱点を減らすようなレイアウトが得られた。一方で、材料界面の剛性が母材よりも大きいという仮想的な条件下で計算を行うと、界面の表面積を大きくするようなレイアウトが得られることが分かった。これについては、現実的な問題設定ではないものの、数値上の力学計算としては正しい結果といえる。以上より、第3章で得られた数値計算結果から、本論文で提案した手法の妥当性が確認できた。

第4章では、各固体材料および材料界面の強度を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化手法を開発し、その性能検証を行った。まず、材料モデルの正則化に関連して、DMO型材料内挿関数を採用し、*graded interface* の概念を取り入れた界面表現法を提案した。さらに本研究では、材料界面の仮想的な界面体積比率を定義し、材料界面の強度評価を行った。固体材料には *Mises* の相当応力、材料界面には引張/圧縮非対称応力規準を用いて、より現実に近い界面を再現した状態で最適化計算を行った。また、応力制約付き構造最適化問題で生じ得る特異点問題を緩和するために、DMO型材料内挿関数に適応した緩和手法を新たに提案した。これにより、所与の材料体積制約条件下で界面および固体材料の最大応力値を制御しつつ、構造の剛性最大化を可能にするという、実際のマルチマテリアル構造の設計に有用な手法の開発に成功した。

第1章でも言及したとおり、本論文で提案する手法は材料界面にある程度の幅を持たせた上で、界面剛性を変化させて与えることが可能である。以上のような特徴から、接着剤による接着を想定したマルチマテリアル最適構造設計への適用が可能であると考えている。また、3Dプリンタなどの積層造形技術を使って製造したマルチマテリアル構造物は、製造条件によって遷移的な界面を有することが分かっているため、このような構造設計にも適用可

能であると考えられる。さらに、第4章で得られた結果は、固体材料に応力集中が生じない、かつ材料界面の負荷を軽減できるような材料レイアウトであった。このことから、本提案手法は強度の観点で材料界面が弱点となり得るマルチマテリアル構造の上流設計に役立つと考えられる。

その一方で、第4章で言及したとおり、本提案手法では繊細な界面形状を表現することは難しい。また、界面の応力を厳密に評価するためには、十分に細かいメッシュによる離散化、あるいはXFEMなどの特殊な解析方法が必要となるが、本論文における数値計算例では、一様な固定メッシュを利用するに留まっている。以上のことから、現状は固体材料のレイアウトを大まかに決定するための最適設計手法という位置づけになる。上述した問題に対しては、材料界面にアダプティブメッシュやBスプライン曲線を用いた補間技術を取り入れることで、ある程度改善できると考えている。本提案手法は、材料界面を扱う工学的な問題全般への発展が可能であり、例えば、界面剥離を抑えた不熱膨張メタマテリアルトポロジー最適設計などへの展開が期待される。

付録 A 勾配法を用いた最適化アルゴリズム

A.1 Optimality criteria method (OC)

OC 法¹⁰⁹⁾⁻¹¹³⁾ は厳密な最適性基準である KKT 条件を基にした解法である。式 (2.8) の KKT 条件から、次式を得る。

$$\frac{\frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial s_i}}{-\lambda_0 \frac{\partial h(\mathbf{s})}{\partial s_i}} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{A.1})$$

ここで、Lagrange 乗数 λ_0 が常に正の値をとり、微分項 $\partial f(\mathbf{s})/\partial s_i$ が常に負の値、 $\partial h(\mathbf{x})/\partial x_i$ が常に正の値をとると仮定すると、式 (A.1) を満たす解 s_i^* は 1 つ存在する。その最適解を探索する方法として、次式のような設計変数の更新手続きを用いる。

$$s_i^{(k+1)} = s_i^{(k)} \left[\frac{\frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial s_i}}{\frac{\partial h(\mathbf{s})}{\partial s_i}} \right]^\eta \quad (\text{A.2})$$

ここで、設計変数の上付きの文字 (k) は、最適化ステップを意味する。 η は定数で、0.5 から 0.75 程度の値が用いられる。

しかし、式 (A.2) のような設計変数の更新を行うことで、設計変数が上限値または下限値を超過してしまう可能性が考えられる。そこで、式 (A.2) を修正して、以下のように設計変数が上限値と下限値を超過しない手続きに変更する。

$$s_i^{(k+1)} = \min \left\{ \max \left\{ s_i^{\text{L}(k)}, \left(A_i^{(k)} \right)^\eta \right\}, s_i^{\text{U}(k)} \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$= \begin{cases} s_i^{\text{L}(k)} & \left(s_i^{(k)} \left(A_i^{(k)} \right)^\eta \leq s_i^{\text{L}(k)} \right) \\ s_i^{(k)} \left(A_i^{(k)} \right)^\eta & \left(s_i^{\text{L}(k)} < s_i^{(k)} \left(A_i^{(k)} \right)^\eta < s_i^{\text{U}(k)} \right) \\ s_i^{\text{U}(k)} & \left(s_i^{(k)} \left(A_i^{(k)} \right)^\eta \geq s_i^{\text{U}(k)} \right) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

さらに、 $s_i^{\text{L}(k)}$ 、 $s_i^{\text{U}(k)}$ を次式のようなムーブリミットを設けることで、1 回の最適化ステップにおける設計変数の変動量を制御する。

$$s_i^{\text{L}(k)} = \max \left\{ (1 - \varsigma) s_i^{(k)}, s_i^{\text{L}} \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$s_i^{\text{U}(k)} = \min \left\{ (1 + \varsigma) s_i^{(k)}, s_i^{\text{U}} \right\} \quad (\text{A.6})$$

適切なムーブリミット ς を与えることにより、極端に局所的な最適解への収束を避けることができる。一般的には $\varsigma = 0.15$ が用いられることが多い。

以上で示した OC 法は、平均コンプライアンス最小化問題などの基本的な問題では非常に高い収束性を示すが、目的関数の微分 $\partial f(\mathbf{s})/\partial s_i$ の符号が変化する問題、制約関数が設計変数に対して単調でない、または不活性な問題の場合、OC 法で安定的に解くことができない。このような場合は、次に示す MMA などの逐次凸関数近似法を利用することが望ましい。

A.2 Method of moving asymptotes (MMA)

構造物等の位相最適化問題の解法としては、先述した最適性規準法 (OC 法) や逐次線形計画法 (Sequential Linear Programming: SLP 法) などが多く用いられてきた。MMA¹⁰⁰⁾ は、1987 年に Svanberg によって提案された最適化アルゴリズムであり、CONLIN 法¹¹⁴⁾ を一般化した、数理計画法 (Mathematical Programming: MP) の 1 つである。この手法は、設計変数を漸近線を用いて凸近似するものである。上下限の漸近線をそれぞれ $U_i^{(k)}$ と $L_i^{(k)}$ とすると、凸な近似関数 \tilde{g} は、1 次までの Taylor 級数展開することで、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j(\mathbf{s}) = & g_j(\mathbf{s}^{(k)}) + \sum_{+i}^{n_s} p_{ij}^{(k)} \left(\frac{1}{U_i^{(k)} - s_i} - \frac{1}{U_i^{(k)} - s_i^{(k)}} \right) \\ & + \sum_{-i}^{n_s} q_{ij}^{(k)} \left(\frac{1}{s_i - L_i^{(k)}} - \frac{1}{s_i^{(k)} - L_i^{(k)}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ここで

$$p_{ij}^{(k)} = \left(U_i^{(k)} - s_i^{(k)} \right)^2 \frac{\partial g_j(\mathbf{s}^{(k)})}{\partial s_i} \quad \text{if} \quad \frac{\partial g_j(\mathbf{s}^{(k)})}{\partial s_i} > 0 \quad (\text{A.8})$$

$$q_{ij}^{(k)} = - \left(s_i^{(k)} - L_i^{(k)} \right)^2 \frac{\partial g_j(\mathbf{s}^{(k)})}{\partial s_i} \quad \text{if} \quad \frac{\partial g_j(\mathbf{s}^{(k)})}{\partial s_i} \leq 0 \quad (\text{A.9})$$

ここで g_j は原関数、 \tilde{g} はその凸な近似関数である。また、 $j = 0, \dots, n_g$ とし g_0 は目的関数、すなわち、 $g_0 \equiv f$ である。 \sum_{+i} と \sum_{-i} は正と負の一回微分の項の合計を意味している。 $p_{ij}^{(k)}$ と $q_{ij}^{(k)}$ は係数で、1 回の微分の符号にしたがって選択される。また、 n_s 個の漸近線 $L_i^{(k)}$ および $U_i^{(k)}$ は次のように更新される。

$$L_i^{(k)} = s_i^{(k)} - \tilde{\alpha}_i \left(s_i^{(k-1)} - L_i^{(k-1)} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$U_i^{(k)} = s_i^{(k)} + \tilde{\alpha}_i \left(U_i^{(k-1)} - s_i^{(k-1)} \right) \quad (\text{A.11})$$

ここで、 $\tilde{\alpha}_i$ は対応する設計変数 $s_i^{(k)}$ の変化量に応じて計算されるパラメータである。以上のように、元の最適化問題を近似関数を使って間接的に以下の陽的な問題に置き換え、それを双対法によって解く。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \tilde{g}_0(\mathbf{s}) \\ & \tilde{g}_j(\mathbf{s}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n_g) \\ & L_i \leq \underline{\beta}_i \leq s_i \leq \bar{\beta}_i \leq U_i \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

パラメータ $\underline{\beta}_i$ と $\bar{\beta}_i$ は間接的に求まる移動限界と呼ばれるもので、次ステップの最適解の候補 $s_i^{(k+1)}$ として扱われる。

付録 B graded interface の概要

graded interface⁵⁴⁾ とは、設計変数の空間勾配に基づいて材料界面を表現するための手法である。この手法は 2 段階のフィルタリング操作 (smoothing) としきい値関数による 2 値化 (projection) を通して行われる。Fig.B.1 は、その graded interface の手続きのフローチャートである。まず、フィルタ半径 R_1 を用いた式 (2.36) の Helmholtz 型偏微分方程式による密度フィルタによって、設計変数場 s を平滑化する。その後、式 (3.10) などのしきい値関数による射影で、変数場は v に 2 値化される。その後、フィルタ半径 R_2 を用いたフィルタによって再び平滑化された後、空間勾配をとり、最終的に界面体積比率 \hat{v} が得られる。

Fig.B.1 から、2 段階のフィルタリング操作を行うことで、固体材料の材料体積比率を表す s と、界面体積比率 \hat{v} の変数場を分離できることがわかる。このことは、最適化計算で最終的に得られるレイアウトが、固体材料と界面が完全に分離した状態で得られることを意味している。密度法の欠点の 1 つとして、界面を明示的に表現することができないといったことが挙げられるが、この graded interface の手法を取り入れることでその欠点を克服しつつ、感度解析で設計変数の更新ができるなどといった密度法の利点を活かすことができる。

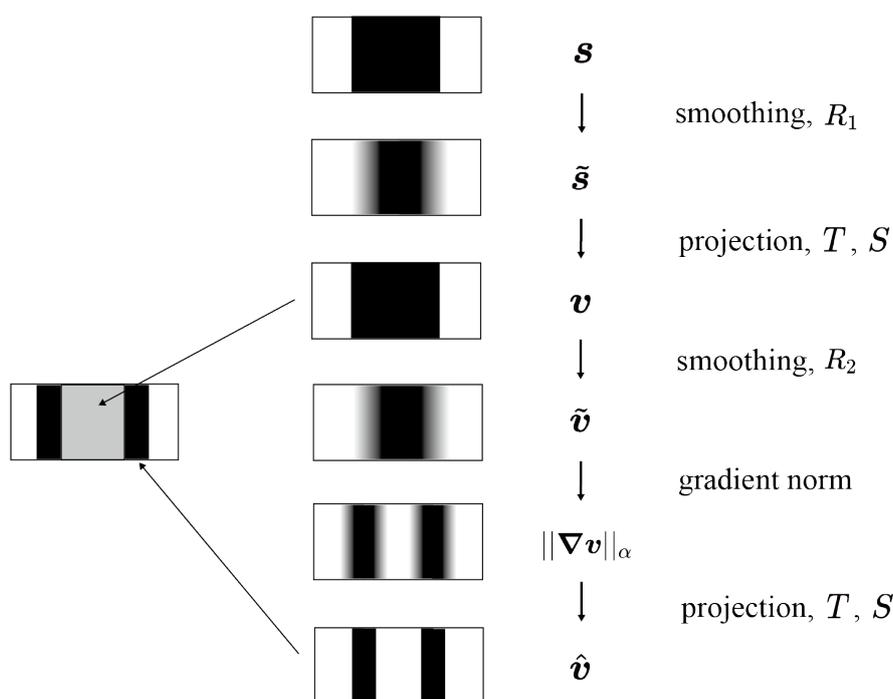


図-B.1 母材とコーティング材を表現するための 2 段階フィルタリングの手順

参考文献

- 1) 国立研究開発法人新エネルギー・産業技術総合開発機構: 革新的新構造材料等研究開発, <https://www.nedo.go.jp/activities/ZZJP-100077.html> (参照 2023-01-24).
- 2) Thompson M.K., Moroni G., Vaneker T., Fadel G., Campbell R.I., Gibson I., Bernard A., Schulz J., Graf P., Ahuja B.: Design for additive manufacturing: Trends, opportunities, considerations, and constraints, *CIRP Ann.*, Vol.65, pp.737–760, 2016.
- 3) Bayat M., Dong W., Thorborg J., To A.C., Hattel J.H.: A review of multi-scale and multi-physics simulations of metal additive manufacturing processes with focus on modeling strategies, *Addit. Manuf.*, Vol.47, pp.102278, 2021.
- 4) Rafiee M., Farahani D., Therriault D.: Multi-material 3D and 4D printing: a survey, *Adv Sci*, Vol.7, pp.1902307, 2020.
- 5) Gu D., Shi X., Poprawe R., Bourell D.L., Setchi R., Zhu J.: Material-structure-performance integrated laser-metal additive manufacturing, *Science*, Vol.372, pp.eabg1487, 2021.
- 6) Bendsóe M.P., Kikuchi N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.71, pp.197–224, 1988.
- 7) Allaire G., Jouve F., Toader A.M.: A level-set method for shape optimization, *C R Math*, Vol.334, No.12, pp.1125–1130, 2002
- 8) Wang M.Y., Wang X., Guo D.: A level set method for structural topology optimization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.192, pp.227–246, 2003.
- 9) Allaire G., Jouve F., Toader A.M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *J Comput. Phys.*, Vol.194, No.1 pp.363–393, 2004.
- 10) Allaire G., de Gournay F., Jouve F., Toader A.: Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method, *Control Cybern*, Vol.34, No.1, pp.50–80 2005.
- 11) Luo Z., Tong L., Wang M.Y., Wang S.: Shape and topology optimization of compliant mechanisms using a parameterization level set method, *J.Comput.Phys.*, Vol.227, pp.680–705, 2007.
- 12) Yamada T., Izui K., Nishiwaki S., Takezawa A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.199, pp.2876–2891, 2010.
- 13) Wang Y., Kang Z.: A velocity field level set method for shape and topology optimization, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.115, pp.1315–1336, 2018.
- 14) Guo X., Zhang W., Zhong W.: Doing topology optimization explicitly and geometrically—a new moving morphable components based framework, *J. Appl. Mech.*, Vol.81(8), pp.081009, 2014.

- 15) Bourdin B., Chambolle A.: Design-dependent loads in topology optimization, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol.9, pp.19–48, 2003.
- 16) Wang M.Y., Zhou S.: Phase field: a variational method for structural topology optimization, *Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol.6, No.6, pp.547–566 2004.
- 17) Burger M., Stainko R.: Phase-field relaxation of topology optimization with local stress constraints, *SIAM J. Optim.*, Vol.45, pp.1447–1466, 2006.
- 18) Takezawa A., Nishiwaki S., Kitamura M.: Shape and topology optimization based on the phase field method and sensitivity analysis, *J. Comput. Phys.*, Vol.229, pp.2697–2718, 2010.
- 19) Wallin M., Ristinmaa M.: Finite strain topology optimization based on phase-field regularization, *Struct. Multidiscipl. Optim.*, Vol.51, No.2, pp.305–317, 2015.
- 20) Sokolowski J., Zochowski A.: On the topological derivative in shape optimization, *SIAM J Control Opt*, Vol.37, pp.1251–1272, 1999.
- 21) Bendsøe, M.P.: Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optim.*, Vol.1, pp.193–202, 1989.
- 22) Zhou M., Rozvany G.I.N.: The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.89, pp.309–336, 1991.
- 23) Rozvany G.I.N., Zhou M., Birker T.: Generalized shape optimization without homogenization., *Struct. Optim.*, Vol.4, pp.250–254, 1992.
- 24) Mlejnek H.P.: Some aspects of the genesis of structures, *Struct. Optim.*, Vol.5, pp.64–69, 1992.
- 25) Xie Y.M., Steven G.P.: A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Comput. Struct.*, Vol.49, pp.885–896, 1993.
- 26) Huang X., Xie Y.M.: Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials, *Comput. Mech.*, Vol.43, pp.393–401, 2009.
- 27) Du J., Olhoff N.: Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps, *Struct. Multidiscipl. Optim.*, Vol.34, pp.91–110, 2007.
- 28) Zhang Y., Liu S.: Design of conducting paths based on topology optimization, *Heat Mass Transf.*, Vol.44, pp.1217–1227, 2008.
- 29) Niu B., Olhoff N., Lund E., Cheng G.: Discrete material optimization of vibrating laminated composite plates for minimum sound radiation, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.47, pp.2097–2114, 2010.
- 30) Alexandersen J., Sigmund O., Aage N.: Large scale three-dimensional topology opti-

- misation of heat sinks cooled by natural convection, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol.100, pp.876–891, 2016.
- 31) Wang F., Christiansen R.E., Yu Y., Mørk J., Sigmund O.: Maximizing the quality factor to mode volume ratio for ultra-small photonic crystal cavities, *Appl. Phys. Lett.*, Vol.113, pp.241101, 2018.
 - 32) Li Q., Sigmund O., Jensen J.S., Aage N.: Reduced-order methods for dynamic problems in topology optimization: A comparative study, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.387, pp.114149, 2021.
 - 33) Zhu J.H., Zhang W.H., Xia L.: Topology optimization in aircraft and aerospace structures design, *Arch. Comput. Methods Eng.*, Vol.23, pp. 595–622, 2016.
 - 34) Aage N., Andreassen E., Lazarov B.S., Sigmund O.: Giga-voxel computational morphogenesis for structural design, *Nature*, Vol.550, pp.84–86, 2017.
 - 35) Roper S.W., Lee H., Huh M., Kim I.Y.: Simultaneous isotropic and anisotropic multi-material topology optimization for conceptual-level design of aerospace components, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.64, pp.441–456, 2021.
 - 36) Wang M.Y., Wang X.: "Color" level sets: A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.193, No.6–8, pp.469–496, 2004.
 - 37) Wang Y., Luo Z., Zhang N., Wu T.: Topological design for mechanical metamaterials using a multiphase level set method, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.54, pp.937–952, 2016.
 - 38) Zhang W., Song J., Zhou J., Du Z., Zhu Y., Sun Z., Guo X.: Topology optimization with multiple materials via moving morphable component (MMC) method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.113, pp.1653–1675, 2018.
 - 39) Sigmund O., Torquato S.: Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.45, pp.1037–1067, 1997.
 - 40) Gibiansky L.V., Sigmund O.: Multiphase composites with extremal bulk modulus, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.48, pp.461–498, 2000.
 - 41) Kato J., Lipka A., Ramm E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.39, No.1, pp.63–81, 2009.
 - 42) Hvejsel C.F., Lund E.: Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.43, No.6, pp.811–825, 2011.
 - 43) Li D., Kim I.Y.: Multi-material topology optimization for practical lightweight design, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.58, pp.1081–1094, 2018.
 - 44) Zuo W., Saitou K.: Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpola-

- tion, *Struct. Multidiscipl. Optim.*, Vol.55, No.2, pp.477–491, 2017.
- 45) Stegmann J., Lund E.: Discrete material optimization of general composite shell structures, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.62, No.14, pp.2009–2027, 2005.
 - 46) Gao T., Zhang W.: A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Volume.88, No.8, pp.774–796, 2011.
 - 47) Gao T., Xu P., Zhang W.: Topology optimization of thermo-elastic structures with multiple materials under mass constraint, *Comput. Struct.*, Vol.173, pp.150–160, 2016.
 - 48) Zhang X.S., Chi H., Paulino G.H.: Adaptive multi-material topology optimization with hyperelastic materials under large deformations: A virtual element approach, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.370, pp.112976, 2020.
 - 49) Radman A., Huang X., Xie Y.: Topological design of microstructures of multi-phase materials for maximum stiffness or thermal conductivity, *Comput. Mater. Sci.*, Vol.91, pp.266–273, 2014.
 - 50) Xu B., Zhao L., Li W., He J., Xie Y.M.: Dynamic response reliability based topological optimization of continuum structures involving multi-phase materials, *Compos. Struct.*, Vol.149, pp.134–144, 2016.
 - 51) Liu P., Luo Y., Kang Z.: Multi-material topology optimization considering interface behavior via XFEM and level set method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.308, pp.113–133, 2016.
 - 52) Liu P., Kang Z.: Integrated topology optimization of multi-component structures considering connecting interface behavior, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.341, pp.851–887, 2018.
 - 53) Moës N., Dolbow J., Belytschko T.: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol.46, pp.131–150, 1999.
 - 54) Clausen A., Aage N., Sigmund O.: Topology optimization of coated structures and material interface problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.290, pp.524–541, 2015.
 - 55) Luo Y., Li Q., Liu S.: Topology optimization of shell-infill structures using an erosion-based interface identification method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.355, pp.94–112, 2019.
 - 56) Yi B., Yoon G.H., Peng X.: A simple density filter for the topology optimization of coated structures, *Eng. Optim.*, Vol.53, pp.2088–2107, 2021.
 - 57) Luo Y., Sigmund O., Li Q., Liu S.: Additive manufacturing oriented topology optimization of structures with self-supported enclosed voids, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.372, pp.113385, 2020.
 - 58) Luo Y., Hu J., Liu S.: Self-connected multi-domain topology optimization of structures

- with multiple dissimilar microstructures, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.64, pp.125–140, 2021.
- 59) Hu J., Luo Y., Liu S.: Two-scale concurrent topology optimization method of hierarchical structures with self-connected multiple lattice-material domains, *Compos. Struct.*, Vol.272, pp.114224, 2021.
- 60) Kieback B., Neubrand A., Riedel H.: Processing techniques for functionally graded materials, *Mater. Sci. Eng. A* Vol.362, pp.81–106, 2003.
- 61) Faure A., Michailidis G., Parry G., Vermaak N., Estevez R.: Design of thermoelastic multi-material structures with graded interfaces using topology optimization, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.56, No.1, pp.823–837, 2017.
- 62) Chu S., Xiao M., Gao L., Li H., Zhang J., Zhang, X.: Topology optimization of multi-material structures with graded interfaces, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.346, No.1, pp.1096–1117, 2019.
- 63) Jung Y., Lee J., Min, S.: Multi-material topology optimization considering joint stiffness using a two-step filtering approach, *Finite. Elem. Anal. Des.*, Vol.197, pp.103635, 2021.
- 64) Bai J., Zuo W.: Multi-material topology optimization of coated structures using level set method, *Compos. Struct.*, Vol.300(15), pp.116074, 2022.
- 65) Duysinx P., Bendsóe M.P.: Topology optimization of continuum structures with local stress constraints, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol.43, pp.1453–1478, 1998.
- 66) Kirsch U.: On singular topologies in optimum structural design, *Struct. Optim.*, Vol.2, pp.133–142, 1990.
- 67) Rozvany G.I.N., Birker T.: On singular topologies in exact layout optimization, *Struct. Optim.*, Vol.8, pp.228–235, 1994.
- 68) Rozvany G.I.N.: Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints, *Struct. Optim.*, Vol.11, pp.213–217, 1996.
- 69) Le C., Norato J., Bruns T., Ha C., Tortorelli D.: Stress-based topology optimization for continua, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.41, pp.600–620, 2010.
- 70) Holmberg E., Torstenfelt B., Klarbring A.: Stress constrained topology optimization, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.48, pp.33–47, 2013.
- 71) Kiyono C.Y., Vatanabe S.L., Silva E.C.N., Reddy J.N.: A new multi-p-norm formulation approach for stress-based topology optimization design, *Comput. Struct.*, Vol.156, pp.10–19, 2016.
- 72) Verbart A., Langelaar M., Keulen van F.: A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.55, pp.663–679, 2017.

- 73) Yu H., Huang J., Zou B., Shao W., Liu J.: Stress-constrained shell-lattice infill structural optimisation for additive manufacturing, *Virtual Phys. Prototyp.*, vol.15, pp.35–48, 2020.
- 74) Silva da G.A., Beck A.T., Sigmund O.: Topology optimization of compliant mechanisms considering stress constraints, manufacturing uncertainty and geometric nonlinearity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.365, pp.112972, 2020.
- 75) Giraldo-Londoño O., Aguiló A.M., Paulino H.G.: Local stress constraints in topology optimization of structures subjected to arbitrary dynamic loads: a stress aggregation-free approach, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.64, pp.3287–3309, 2021.
- 76) Cheng G.D., Guo X.: ϵ -relaxed approach in structural topology optimization, *Struct. Optim.*, Vol.13(4), pp.258–266, 1997.
- 77) Bruggi M.: On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization, *Comput. Struct.*, Vol.36, pp.125–141, 2008.
- 78) Yang R.J., Chen C.J.: Stress-based topology optimization, *Struct. Optim.*, Vol.12, pp.98–105, 1996.
- 79) Qiu G.Y., Li X.S.: A note on the derivation of global stress constraints, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.40, pp.625–628, 2009.
- 80) Xu S., Liu J., Zou B., Li Q., Ma Y.: Stress constrained multi-material topology optimization with the ordered SIMP method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.373, pp.113453, 2021.
- 81) Kundu D.R., Li W., Shelly Zhang S.X.: Multimaterial stress-constrained topology optimization with multiple distinct yield criteria, *Extreme Mech. Lett.*, Vol.54, pp.101716, 2022.
- 82) Chu S., Xiao M., Gao L., Li H.: A level set-based method for stress-constrained multi-material topology optimization of minimizing a global measure of stress, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol.117, pp.800–818, 2019.
- 83) Ramani A.: Multi-material topology optimization with strength constraints, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.43, No.5, pp.597–615, 2011.
- 84) Liu P., Shi L., Kang Z.: Multi-material structural topology optimization considering material interfacial stress constraints, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.363, pp.112887, 2020.
- 85) Hu J., Liu Y., Luo Y. Huang H., Liu S.: Topology optimization of multi-material structures considering a piecewise interface stress constraint, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.398, pp.115274, 2022.
- 86) Michell A.G.M.: The limits of economy of material in frame structures, *Philosophical Magazine*, Vol.8(6), pp.589–597, 1904.

- 87) Prager W.: Optimization of structural design, *J. Optim. Theory Appl.*, Vol.6, pp.1–21, 1970.
- 88) Prager W., Rozvany G.I.N.: Optimization of structural geometry, *Dyn. Syst.*, pp.265–293, 1977.
- 89) Wu J., Dick C., Westermann, R.: A dystem for high-resolution topology optimization, *IEEE VIS. C.*, Vol.22(3), pp.1195–1208, 2016.
- 90) Olhoff N., Lurie K.A., Cherkaev A.V., Fedorov A.: Sliding regimes of anisotropy in optimal design of vibrating plates, *Int. J. Solids Struct.*, Vol17, No.10, pp.931–948, 1981.
- 91) Diaz A., Sigmund, O.: Checkerboard patterns in layout optimization, *Struct. Optim.*, Vol.10, pp. 40–45, 1995.
- 92) Sigmund O.: On the design compliant mechanisms using topology optimization, *J. Struct. Mech.*, Vol.25, pp.493–524, 1997.
- 93) Bruns T., Tortorelli D.: Topology optimization of non-linear structures and compliant mechanisms, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.190, pp.3443–3459, 2001.
- 94) Bourdin B.: Filters in topology optimization, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.50, pp.2143–2158, 2001.
- 95) Bruns T.E., Tortorelli D.A.: An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.57, pp.1413–1430, 2003.
- 96) Wang M.Y., Wang S.: Bilateral filtering for structural topology optimization, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.63, pp.1911–1938, 2005.
- 97) Guest J.K., Prévost J.H., Belytschko T.: Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.61, pp.238–254, 2004.
- 98) Lazarov B.S., Sigmund O.: Filters in topology optimization based on helmholtz-type differential equations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.86, No.6, pp.765–781, 2011.
- 99) Wang B., Zhou Y., Tian K., Wang G.: Novel implementation of extrusion constraint in topology optimization by Helmholtz-type anisotropic filter, *Struct. Multidiscipl. Optim.*, Vol.62, No.4, pp. 2091–2100, 2020.
- 100) Svanberg K.: The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.24, pp.359–373, 1987.
- 101) Svanberg K.: A Class of Globally Convergent Optimization Methods Based on Conservative Convex Separable Approximations, *SIAM Journal of Optimization*, Vol.12, No.2, pp.555–573, 2002.
- 102) 岸本 直樹, 野口 悠暉, 佐藤 勇氣, 泉井 一浩, 山田 崇恭, 西脇 眞二: レベルセット法に

- 基づく複数材料を対象としたトポロジー最適化, 日本機械学会論文集, Vol.83, No.849, 2017.
- 103) 野田 雅貴, 野口 悠暉, 山田 崇恭: 材料定義の完全対称性を持つ対称レベルセット関数に基づく複数材料トポロジー最適化, 日本機械学会論文集, Vol.87, No.896, 2021.
- 104) Creton C., Kramer E.J., Brown H.R. Hui, C.-Y.: Adhesion and fracture of interfaces between immiscible polymers: from the molecular to the continuum scal, in: *Molecular Simulation Fracture Gel Theory*, Springer, pp. 53–136, 2002.
- 105) Tan C., Wang G., Ji L., Tong Y., Duan X.-M.: Investigation on 316L/W functionally graded materials fabricated by mechanical alloying and spark plasma sintering, *J. Nucl. Mater.*, Vol.469, pp. 32–38, 2016.
- 106) Bendsóe M.P., Sigmund O.: Material interpolation schemes in topology optimization, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.69, pp.227–246, 1999.
- 107) Bendsóe M.P., Sigmund O.: *Topology optimization—Theory, Methods and Applications* (2nd edn), Springer, 2003.
- 108) Brewer C.J., Lagace A.P.: Quadratic Stress Criterion for Initiation of Delamination, *J. Compos. Mater.*, Vol.22, pp.1141–1155, 1988.
- 109) Suzuki K., Kikuchi N.: A homogenization method for shape and topology optimization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol.93, pp.291–318, 1991.
- 110) Yang R.J., Chuang C.H.: Optimal topology design using linear programming, *Comput. Struct.*, Vol.52, No.2, pp.265–275, 1994.
- 111) Nishiwaki S., Frecker L.M., Min S., Kikuchi N.: Topology Optimization of Compliant Mechanisms using the Homogenization Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.42, No.3. pp.535–560,1998.
- 112) Hassani B., Hinton E.: A review of homogenization and topology optimization III-topology optimization using optimality criteria, *Comput. Struct.*, Vol.69, pp.739–756, 1998.
- 113) 西脇 眞二, 泉井 一浩, 菊池 昇: トポロジー最適化, 丸善出版, 2013.
- 114) Fleury C., Braibant V.: Structural Optimization: A new dual method using mixed variables, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.23, pp.409–428, 1986.

謝辞

本論文を執筆するにあたり、多くの方にご指導、ご鞭撻をいただきました。ここに感謝の意を記します。本学土木工学専攻の加藤準治教授に深く感謝いたします。研究や本論文に関する相談、議論、指導に関して、幅広くかつ多くのご助言をいただきました。また、研究の事のみならず、研究者として生きていく上での心がけ、姿勢についても多くのことを学ばせていただきました。本論文に至るまでの道のりは全く平坦なものではありませんでしたが、私が博士課程に進学し、修了することができたのは、紛れもなく加藤先生のおかげだと感じております。本当にありがとうございました。

本論文に対し、貴重なご意見をいただいた同学土木工学専攻の中村光教授、松本敏郎教授、西口浩司講師、干場大也助教に深く感謝いたします。中村先生には、副査として携わっていただき、本研究および論文に対し、本質的で鋭いご指摘をいただきました。松本先生には、外部副査として携わっていただいたほか、学会の際にも度々お話をさせていただきました。西口先生には、副査として携わっていただき、本研究の指導のみならず、計算機環境などの点で様々なご助言をいただきました。干場先生には、材料力学、構造力学の専門的な面から、学びの多いご指導をいただきました。また、干場先生は私が学部生の頃からの長い付き合いになりました。今後とも宜しくお願い致します。秘書の福井さんには、研究費用などの庶務の面で非常にお世話になりました。以上、教員の方々にはご飯をご馳走していただく機会が多かったのですが、今後は自分をご馳走する立場になれるよう精進して参ります。

また、研究室のメンバーの皆様には、コロナウイルスの影響もあり、旅行や学会と一緒に行く機会が少ない環境ではありましたが、3年間楽しく共に研究活動を行うことができました。私が研究室で学年が一番上でありましたが、自分が皆様に教えたことより、圧倒的に多くのことを学ばせて頂いたと感じております。研究室の面々とは今後とも何かしらの形で関わらせて頂くことになるかもしれませんが、そのときは宜しくお願いします。

最後になりますが、自身の進学をサポートして下さった家族、支えてくれた友人達に深く感謝を述べたいと思います。ありがとうございました。

渡邊大貴