別紙 4

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論 文 題 目 Optimal constants of smoothing estimates for the 2D and massless 3D Dirac equation

(2 次元および質量 0 の 3 次元ディラック方程式の平滑化評価式の最良定数)

氏　　　名 生駒　真

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では、2 次元および質量 0 の 3 次元 Dirac 方程式に対する加藤型平滑化評価式の最良定数と extremiser について議論する．平滑化評価式とは分散型方程式の平滑化効果を表す不等式である．ここで分散型方程式とは様々な物理的状況で現れる波動の時間変化を記述する偏微分方程式全般に対する呼称であり, 代表例として Schrödinger 方程式が挙げられる．この分散型方程式には「平滑化作用」とよばれる現象が観測できるのだが, その平滑化作用は多くの場合, 平滑化評価式とよばれる時空間評価式によって評価される．本論文で扱う平滑化評価式は加藤型平滑化評価式とよばれるもので, 偏微分方程式

$$\begin{cases}(i\partial_t + \phi(D))\,u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x) \in L^2\end{cases}$$

に対する次の形で表される平滑化評価式を扱う：

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\psi(D)e^{it\phi(D)}f(x)\right|^2 w(x)dxdt \le C\|f\|_{L^2}^2. \tag{1}$$

ここで ϕ, ψ, w はそれぞれ分散関係、平滑化関数、空間の重みとよばれる．最良定数とは平滑化評価式を満たす定数 C の下限を指し, extremiser とは C が最良定数である場合における不等式の等号を成立させる関数 f のことである．平滑化評価式については古くから主に Schrödinger 方程式に関するものが良く研究されてきたが, 近年では Schrödinger 方程式に限らない, より広い偏微分方程式の平滑化評価式について知られるようになってきた．特にここ数年は N. Bez, H. Saito, M. Sugimoto らによって, 次のような結果が得ら

れている：
ある条件を満たした球対称な ϕ, ψ, w に対して, (1) 式の最良定数を $\widetilde{C}_d(w,\psi,\phi)$ とおけば

$$\widetilde{C}_d(w,\psi,\phi)=\frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\sup_{r>0}\lambda_k(r)$$

が成り立つ．ここで $\lambda_k(r)$ は, $p_{d,k}$ を d 次元の k 次ルジャンドル多項式, $\widehat{w(|\cdot|)}(\xi)=F_w(\frac{1}{2}|\xi|^2)$ として

$$\lambda_k(r):=\left|\mathbb{S}^{d-2}\right|\frac{r^{d-1}\psi(r)^2}{|\phi'(r)|}\int_{-1}^{1}F_w(r^2(1-t))p_{d,k}(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt \tag{2}$$

である．また extremiser についても詳しい情報が与えられている．第 1 節ではこれら最新の先行研究を含めた従来の研究結果について述べる．

第 2 節では本研究により得られた結果を 3 つの定理の形で述べる．定理 2.1 では Dirac 方程式の平滑化評価式の最良定数は $\widetilde{C}_d(w,\psi,\sqrt{r^2+m^2})$ 以下であること, 即ち質量 m の d 次元 Dirac 方程式の平滑化評価式の最良定数を $C_d(w,\psi,m)$ とおけば

$$C_d(w,\psi,m)\le\widetilde{C}_d(w,\psi,\sqrt{r^2+m^2})$$

が成り立つことを述べている．ここで右辺の分散関係 ϕ に $\sqrt{r^2+m^2}$ が現れるのは, Dirac 方程式の分散関係は球対称ではないものの 2 乗すると $(r^2+m^2)I_N$ ($N=2^{[(d+1)/2]}$ で I_N は $N\times N$ 単位行列) が現れることからくる (分散関係 ϕ を $\sqrt{r^2+m^2}$ とした分散型方程式は Klein-Gordon 方程式とよばれる)．これらのことから当初は定理 2.1 の不等式は等号が成立すると予想されたが, しかしながら予想に反して少なくとも 2 次元と質量 0 の場合の 3 次元については次のように等号成立について否定的な結果が得られた：

$$\begin{aligned}
C_2(w,\psi,m)&=\frac{1}{2\pi}\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{r>0}\widetilde{\lambda}_k(r),\\
&\quad\widetilde{\lambda}_k(r):=\frac{1}{2}\left\{\lambda_{|k|}(r)+\lambda_{|k+1|}(r)+\frac{m}{\sqrt{r^2+m^2}}\left|\lambda_{|k|}(r)-\lambda_{|k+1|}(r)\right|\right\},\\
C_3(w,\psi,0)&=\frac{1}{(2\pi)^2}\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\sup_{r>0}\frac{\lambda_k(r)+\lambda_{k+1}(r)}{2}.
\end{aligned}$$

ここで $\lambda_k(r)$ は (2) 式に $\phi(r)=\sqrt{r^2+m^2}$ を代入したものである．$C_2(w,\psi,m)$ の結果は定理 2.2 として, $C_3(w,\psi,0)$ の結果は定理 2.3 としてまとめている．また定理 2.2, 2.3 では同時に extremiser についても詳しく述べている．先に述べたように, Dirac 方程式の分散関係は球対称ではないので, 本研究は N. Bez, H. Saito, M. Sugimoto らによる最新の先行研究の枠外にあるものである．本研究の成果 (定理 2.3, 2.3) を加えることにより, これらの先行研究がより一般化される．

第 3 節では第 2 節で述べた 3 つの定理の証明を与える．