論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

氏　　　　　名　　　生駒　真

論　文　題　目

Optimal constants of smoothing estimates for the 2D and massless 3D Dirac equation

(2次元および質量0の3次元ディラック方程式の平滑化評価式の最良定数)

論文審査担当者

主　査　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
菱田　俊明

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
杉本　充

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
内藤　久資

委　員　　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
中島　誠

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

分散型偏微分方程式の解の時間発展に沿う正則性の上昇は時間変数で平均化することで観察されるので, その定量的な表現は時空間積分による評価式となる. 本学位申請論文で考察されるのは, そのような評価式の一つである加藤型平滑化評価

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\psi(|D|)e^{-it\phi(D)}f(x)\right|^2 w(|x|)\,dx\,dt \le C\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{1}$$

である. ここで, $D=-i\nabla$, $|D|=\mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}$ (ただし $\mathcal{F}$ はフーリエ変換) とし, 発展群 $e^{-it\phi(D)}=\mathcal{F}^{-1}e^{-it\phi(\xi)}\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}_t$ 上の初期値問題 $(d\ge 2)$

$$i\partial_t u=\phi(D)u, \qquad u(\cdot,0)=f \tag{2}$$

の解作用素を与え, $\psi(|\xi|)$ は平滑化の程度を表す表象である. 評価 (1) は無限遠で十分速く減衰する荷重 $w(|x|)>0$ により空間変数に関して局在化することで獲得される平滑化効果と弱い意味での長時間挙動を同時に表現している. 例えば Klein-Gordon 方程式 $\partial_t^2u-\Delta u+m^2u=0$ ($m>0$ は質量パラメータ) の表象の因数分解から得られる $\phi(D)=\sqrt{-\Delta+m^2}$ に対しては, 長時間挙動のみを表す評価として (1) が $\psi=1$ で成り立つが, このことは同じ荷重を置いたときの Schrödinger 発展群 $e^{it\Delta}$ による (1) の $\psi(|\xi|)=(1+|\xi|^2)^{1/4}$ での成立と同値であることが知られており, 両者はそれらを包括する評価 (1) を通して統一的に理解される.

一般に, 方程式の解が関わる関数不等式の最良定数を達成する関数があれば, その関数を初期データとして時間発展させた解は方程式に内在する特徴を備えていると期待され, 最良定数の決定と併せて興味深く, それが本論文の主題である. 評価 (1) を任意の $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対してみたす定数 C の下限についても, 先駆的な Simon (1992) 以来, この 10 年間程度に渡る Bez, Sugimoto らによる一連の仕事に至るまで活発な研究が展開されており, 申請者の成果もその流れの中にある. 本論文で扱われているのは, 相対論的量子力学に現れる Dirac 方程式の初期値問題, すなわち (2) において $N=2^{[(d+1)/2]}$ として解 $u(x,t)$ は $\mathbb{C}^N$ 値で

$$\phi(D)=\sum_{j=1}^{d}\alpha_jD_j+m\alpha_{d+1} \tag{3}$$

とした問題である. ここで, エルミット行列 $\alpha_j\in\mathbb{C}^{N\times N}$ は u の各成分が Klein-Gordon 方程式に従うべく反交換関係 $\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=2\delta_{jk}I_N$ (ただし I_N は N 次単位行列) をみたしている. Ben Artzi-Ruzhansky-Sugimoto

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

(2020) による比較原理を通して, $\phi(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + m^2}$ に対する評価 (1) から Dirac 作用素 (3) に対する評価 (1) が従うが, 最良定数の特徴づけやそれを達成する関数の存在と非存在については, $\phi(\xi)$ の球対称性のもとでの Bez-Saito-Sugimoto (2015) など従来の結果から直接には得られない. 本論文の成果の意義は, 以下のように, Bez-Saito-Sugimoto の手法の射程を Dirac 作用素 (3) にまでひろげたことと要約される.

Dirac 方程式と Klein-Gordon 方程式の上記の関係から, Dirac 作用素 (3) に対する (1) の最良定数と $\phi(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + m^2}$ に対するそれとの関係が期待される. 本論文の定理 1 では, 前者は後者を超えないことが示された. Bez-Saito-Sugimoto の方法を踏襲したその論証は自乗可積分関数の球面調和関数による展開に基づき, 球面調和関数についての Funk-Hecke の公式を援用するが, (3) の表象 $\phi(\xi) \in \mathbb{C}^{N\times N}$ の固有値 $\pm\sqrt{|\xi|^2 + m^2}$ と指数関数 $e^{-it\phi(\xi)}$ の射影分解を用いた計算には独自性が認められる. 引き続き, 定理 2 と定理 3 において, それぞれ空間 2 次元 $(m \geq 0)$ と 3 次元 $(m = 0)$ の場合に, 定理 1 における両者の最良定数が一般に一致しないことを明らかにしており, 注目に値する. 実際, 定理 2 では $d = 2$ での球面調和関数による展開はフーリエ級数展開にほかならないことに着眼して, Dirac 作用素 (3) に対する (1) の最良定数を, Bez-Saito-Sugimoto が Funk-Hecke の公式の係数として現れる積分を通して与えた $\phi(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + m^2}$ に対する (1) の最良定数の非自明な修正によって特徴づけた. また, 最良定数を達成する関数が存在するための必要十分条件も示している. 定理 3 の成果は定理 2 と同様な趣旨であるが, (3) の表象 $\phi(\xi) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ の形と $d = 3$ での球面調和関数の表示を活用するとともに, $m = 0$ より $\mathbb{C}^2$ 上での考察に帰せられることを見いだし, 一般次元の場合への展望も示唆している.

以上のように, Dirac 方程式に対する加藤型平滑化評価の最良定数とそれを達成する関数について本論文で得られた知見は, 当分野の発展に寄与している. 本論文に関する公開審査会を 2023 年 2 月 10 日に行い, 申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した. よって, 学位審査委員会は, 申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する.