別紙４

報告番号	※ 第 号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　A sharp sparse domination of pseudodifferential operators
(擬微分作用素の端点スパース評価について)

氏　　名　山本　涼介

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では表象が Hörmander クラス$S^m_{\rho,\delta}$に属する擬微分作用素の端点スパース評価について議論する。作用素Tのスパース評価とは、

$$|Tf(x)| \le C \sum_{Q\in S} \left(\int_Q |f|^r\right)^{1/r} 1_Q(x)$$

のような各点評価や、

$$|\langle Tf, g\rangle| \le C \sum_{Q\in S} |Q| \left(\int_Q |f|^r\right)^{1/r} \left(\int_Q |g|^s\right)^{1/s}$$

のような内積型の不等式評価を意味する。ただし、ここで S はスパース集合(あまり密集していない n 次元立方体の集まり)である。Beltran、Cladek(2020)により、擬微分作用素のスパース評価の結果が得られた。彼らは、表象が属する$S^m_{\rho,\delta}$の m が、ある値 m(r,s)より真に小さい場合にスパース評価が成立する事を示した。更に、m が m(r,s)より真に大きい場合は、スパース評価を得られない例を構成した。しかし、彼らの論文において m=m(r,s)の場合については言及されていない。本論文では m=m(r,s)の場合を、新たな型のスパース評価を導入することにより扱う。以下に本論文の各項での内容の要旨を記載する。

第１項では、基本的な記号の定義、及び擬微分作用素やスパース評価についての記号や定義を述べ、それらに関する幾つかの先行研究を挙げる。主定理について、各点評価に関する定理は、本項でその主張を述べ、証明は第２項で述べる。内積型の定理については、その主張、証明共に第３項で述べる。

第２項では、Lerner、Nazarov (2019)の理論に基づき、次の形の擬微分作用素の各点評価を与える。

$$|a(x,D)f(x)| \le C \sum_{Q\in S} \left(\int_Q |f|^2\right)^{1/2} \sum_{U\subset Q} 1_U(x).$$

さらに与えた各点評価の、Coifman-Fefferman 型の重み付きL^p評価へと応用する。第３項では、Beltran、Cladek(2020)の与えた内積型のスパース評価を、Besov 型のスパース評価を導入することにより改良する。

$$|\langle a(x,D)f,g\rangle| \le C \sum_{j\ge 0} 2^{j\sigma} \sum_{Q\in S_j} |Q| \left(\int_Q \left|\phi_j * f\right|^r\right)^{1/r} \left(\int_Q |g|^s\right)^{1/s}.$$

ただし、ここで$\{\phi_j\}_j$は Littlewood-Paley の単位分解とする彼らの手法を用いると、直ちに$\sigma = m - m(r,s) + \varepsilon$と取れる事が分かる。しかし、この評価は$\varepsilon$分の可微分性を損失している。本項では、Lerner(2018)による極大作用素

$$M_{T,s}f(x) = \sup_{Q\ni x} |Q|^{-1/s} \| T\left(f 1_{(3Q)^c}\right)\|_{L^s(Q)}$$

の弱L^r有界性が、スパース評価の成立の十分条件となる事と Hadamard の三線定理を用いて、εを消去する。次に、発散方程式

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + (-\Delta)^{(1-\rho)/2} u = 0 \\ u(0) = f \end{cases}$$

の基本解$e^{it(-\Delta)^{(1-\rho)/2}}f$の Besov 型のスパース評価についても言及する。$e^{it(-\Delta)^{(1-\rho)/2}}$は表象が$S^0_{\rho,0}$の擬微分作用素とみなせるが、この基本解については、一般の擬微分作用素として扱わずに、Littman の補題を用いることで、スパース評価を改善する事が出来る事を示す。更に与えたスパース評価を用いて重み付き Besov 空間上での擬微分作用素や$e^{it(-\Delta)^{(1-\rho)/2}}$の有界性を導出する。また、導出された重み付き有界性の内の幾つかについて、ある種の最適性を示す。

付録 A では、第３項で導出した重み付き Besov 空間上での有界性における、その作用素ノルムの重みに依存する定数部分を改良する。付録 B では、$M_{T,s}$の弱L^r有界性が、スパース評価の成立の必要条件とはならないであろう事を示す事実を述べる。