

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 山本 涼介

論 文 題 目

A sharp sparse domination of pseudodifferential operators

(擬微分作用素の端点スパース評価について)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
吉田 伸生

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
杉本 充

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
寺澤 祐高

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
加藤 淳

論文審査の結果の要旨

山本氏の本学位論文における研究課題は、調和解析学の先進的テーマの一つである作用素のスパース評価である。ここでスパース評価とは、ユークリッド空間上の函数空間における作用素を、交わり方が素に近い立方体の族を用い、各立方体上で定数となる函数の和（スパース作用素）により各点評価する評価式（およびその内積型評価式）を意味し、Lerner (2013) により考案された。様々な作用素に対してこのようなスパース評価を確立できれば、もとの作用素の有界性を、より単純なスパース作用素の有界性に置き換えることができる。さらにそれが各点での置き換えであることから、有界性に関する評価の精密化も期待できる。この意味でスパース評価は優れた論法である。実際 Lerner は、Muckenhoupt のクラス A_2 に属する重みを伴った特異積分作用素の L^2 評価式における、定数の重み依存性に関する「 A_2 予想」の証明に用いた。この「 A_2 予想」は Hytönen (2012) により一足早く解決されていたが、Lerner によるスパース評価を用いた証明はより単純であり、結果が成立する原理を直接的に示した点が特徴である。

本学位論文はこのような状況を背景とし、スパース評価を次の擬微分作用素に対して適用した：

$$\sigma(x, D) : f(x) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

擬微分作用素のスパース評価には近年の Beltran-Cladek (2020) による先行研究がある。その研究においては擬微分作用素の表象 $\sigma(x, \xi)$ がヘルマンダーのクラス $S_{\rho, \delta}^m$ に属するとき、 $m \leq -n(1-\rho)$ の場合には Lerner の意味でのスパース評価が成立することが示された。また、その系として、Muckenhoupt のクラス A_p に属する重みを伴った $\sigma(x, D)$ の L^p 有界性という既存結果が導かれる。山本氏は第 1 の貢献として、より広い表象のクラスに相当する $m \leq -n(1-\rho)/2$ の場合に、Lerner のものとは異なるスパース評価の成立、および逆にそのようなスパース評価の成立には $m \leq -n(1-\rho)/2$ が必要であることを示した。これは山本氏による新しいスパース評価の妥当性を保証している。またその系として、 A_p よりも狭いクラスである $A_{p/2}$ に重みを制限すれば、やはり $\sigma(x, D)$ の L^p 有界性が ($0 \leq \delta \leq \rho < 1$, $\rho \neq 0$ の場合に) 成立するという既存結果が導かれる他、コイフマン・フェファーマン型の重み付き L^p 評価式も導出される。これらの成果は、擬微分作用素にとどまらず他の様々な作用素の有界性の導出においても、このような新しいスパース評価が大きな役割を示す可能性があることを示唆しており、注目に値する。

論文審査の結果の要旨

また、Beltran-Cladek (2020) は擬微分作用素が内積型スパース評価をみたすための表象のクラス $S_{\rho,\delta}^m$ における m の臨界値 m_c を定め、 $m < m_c$ の場合には Lerner の意味での内積形スパース評価が成立することを示したが、臨界値 $m = m_c$ の場合に成立するかは問題として残されていた。山本氏は第2の貢献として、 $m = m_c$ の場合にリトルウッド・ペーリー分解を用いた改良型の内積型スパース評価の成立を提唱し、実際それを重み付きベゾフ空間上での擬微分作用素の有界性の問題に応用した。このような臨界値での評価式には既存のアイデアがそのまま適用できないことが常であるが、山本氏はここでも独自の洞察をもってその困難を克服した。

以上のように、山本涼介氏の研究成果は調和解析における先進的課題に対する新しい知見を与えたものであり、学位論文として十分な内容を持つ。また、これらの成果は副論文として ArXiv にて公表済みである。2023年1月31日に行われた学位審査セミナーにおける山本氏の発表も、自身の問題意識とその解決への基本的アイデア、および主結果の意義などが、非専門家にもよく伝わるように工夫されていた。また、学位審査委員による質疑への応答も的確であった。

以上によって、学位審査委員会は申請者が博士 (数理学) の学位を授与される資格を有すると判断する。