論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　上田太朗

論　文　題　目

On derived equivalences of Nakayama algebras

（中山代数の導来同値について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
石井　亮

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
髙橋　亮

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
中岡　宏行

委　員　東京大学大学院数理科学研究科　教授　博士（理学）
伊山　修

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

環の表現論では, 与えられた環の加群圏や導来圏の構造を研究対象とする. 与えられた環 A の表現の研究を, A と導来圏同値な別の環 B の表現の研究に帰着する手法は基本的である. Rickard の定理は, 2 つの環 A, B が導来圏同値であることを, A の傾複体 (tilting complex) で自己準同型環が B と同型なものが存在することで特徴付ける. 導来圏同値の典型例は, 箙の鏡映によって与えられる.

中山代数は, 環の表現論における古典的な対象であり, 左右ともに任意の直既約射影加群が単列加群（組成列が唯一つである加群）であることによって定義される. 体 K と自然数 n に対し $K[x]/(x^n)$ は中山代数である. また代数閉体上の有限次元代数が中山代数であることは, 線型箙 $\mathbb{A}_n$ または巡回箙 $\widetilde{\mathbb{A}}_{n-1}$ の道代数の許容イデアルによる剰余代数と森田同値であることで特徴付けられる. 中山代数は有限表現型であり, 加群圏の構造は十分に理解されている. 一方, 中山代数の導来圏の構造は複雑であり, 殆どの場合は直既約対象の分類が困難な導来 wild 表現型である.

本論文では特別な中山代数である, 道代数 $K\mathbb{A}_n$ の根基の ℓ 乗による剰余代数 $N(n,\ell)$ を扱っている. この形の中山代数の導来圏は比較的扱いやすく, 大域次元 1 以下のアーベル圏と導来圏同値となる必要十分条件 (Happel-Seidel 2010), 重み付き射影直線との関連 (Kussin-Lenzing-Meltzer 2013), 拡大標準代数と導来圏同値となる必要十分条件 (Lenzing-Meltzer-Ruan 2021) をはじめ, 様々な研究がなされている. 特に, 以下の問いに対する関心が高まっている.

問題 A 中山代数 $N(n,\ell)$ と $N(n,\ell')$ が導来圏同値となる必要十分条件を求めよ.

本論文の主定理は以下であり, 問題 A の理解を大きく前進させるものである.

定理 B 整数 $p \geq 2$, $q \geq 1$ と整数または半整数 $r \geq 0$ に対し, $p \geq 3$ ならば r は整数であると仮定する. このとき

$$n = p(p+1)q + p(p-1)r,\ \ell = (p+1)q + pr$$

に対し, $N(n,\ell)$ と $N(n,\ell+1)$ は導来圏同値である.

定理 B で $(p,q) = (2,1), (2,2)$ とおくと, 整数 $s \geq 0$ に対して $N(s+6, s+3)$ と $N(s+6, s+4)$ が導来圏同値であることと, $N(s+12, s+6)$ と $N(s+12, s+7)$ が導来圏同値であることが従うが, これらはそれぞれ Happel-Seidel と Lenzing-Meltzer-Ruan による結果である. 定理 B は先行研究を大きく発展させたものであるといえる.

申請者は, 定理 B を示すために, 整数 $s, t \geq 1$ と $0 \leq u \leq t$ に対して, 線型箙のテンソル積 $K\mathbb{A}_s \otimes_K K\mathbb{A}_t$ の特定の剰余代数 $L(s,t,u)$ を導入し, 以下を示した.

定理 C 整数 $s, t \geq 1$ と $0 \leq u \leq t$ に対し, $N(st-u, t+1)$ と $L(s,t,u)$ は導来圏同値である.

これより定理 A の証明は, $L(s,t,u)$ の形の代数の間の導来圏同値を示すことに帰着される. 申請者は, より一般に $\mathbb{Z}^2$ の有限部分集合 S に対し, $K\mathbb{A}_s \otimes_K K\mathbb{A}_t$ の剰余代数 $L(S)$ を導入し, その導来圏の特徴付けを与えた. より正確には, Serre 関手を持つ代数的三角圏 $\mathcal{D}$ に対し, 特別な例外列である（生成）S 族の概念を導入し, $\mathcal{D}$ が生成 S 族を持つことと, $\mathcal{D}$ が $L(S)$ の有界導来圏と三角同値であることの同値性を示した. その特別な場合として定理 C が得られる.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

さらに申請者は, $\mathbb{Z}^2$ の有限部分集合 S が特定の条件を満たす場合に, 組み合わせ論的に新しい有限部分集合 S' を構成する操作を導入し, 三角圏 $\mathcal{D}$ の S 族から S' 族が自然に構成されることを示した. 申請者はこの操作を変異と呼び, $L(s,t,u)$ に対応する $\mathbb{Z}^2$ の有限部分集合の間に適切な変異の列を見出すことにより, 定理 A を証明した.

定理 C からは, $N(n,\ell)$ の形の中山代数は常に大域次元 2 以下の代数と導来圏同値であることが従う. Happel-Seidel により, 大域次元 1 以下の代数と導来圏同値である $N(n,\ell)$ は極少数であることが知られているため, この事実はそれ自身, 興味深い.

Lenzing-Meltzer-Ruan は, 整数 $p,q \geq 2$ に対して $N(pq+1,p+1)$ と $N(pq+1,q+1)$ が導来圏同値であることを示したが, 申請者は S 族の変異を応用して別証明を与えた. これらの先行研究に比べて, 申請者の手法の適用範囲は遥かに広いため, 今後も様々な応用があることが期待される.

以上の諸結果は, 環の表現論において新しい知見を与えるものであり, 学位論文として十分な内容を持つものである. 2 月 22 日の学位審査セミナーでは, 申請者はよく準備されたスライドを用いて自身のアイデアについてわかりやすく説明し, 質問に対する応答も的確であった. 以上によって, 学位審査委員会は, 申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する.