論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　岩田　英人

論　文　題　目

An analytic approach to the remainder terms in the asymptotic formulas
- the Volterra integral equation, the Whittaker function -
（漸近公式の誤差項に対する解析的アプローチ
- Volterra 型積分方程式, Whittaker 関数- ）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小林　亮一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松本　耕二

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
糸　健太郎

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　Ph.D.
Bachmann, Henrik

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

• 結論：本論文は博士（数理学）の学位を授与するに相応しい．

• 背景 1（第二種 Volterra 型積分方程式）：Euler totient 関数 $\varphi(n)$ (n 以下の n と互いに素な正整数の個数）の x 以下の和を二次関数とそれより低いオーダーの関数に分解する漸近公式は Dirichlet の古典的結果で $\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+E(x)$ と表される．Kaczorowski-Wiertelak (2010) は $E(x)$ に次の構造があることを示した：(i) 第二種 Volterra 型積分方程式 $F(x)-\int_0^x\frac{F(t)}{t}dt=E(x)$ は明示的に解ける，(ii) $E(x)$ はこの積分方程式の斉次解に由来する E^{AR} とそうでない E^{AN} に分解して，それぞれが Möbius 関数を用いた明示公式で表される．

• 本論文の成果 1（第二種 Volterra 型積分方程式）．(1.1) 上記 Kaczorowski-Wiertelak の結果をある条件を満たす数論的関数に一般化した：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^2}=2\alpha$（収束）を満たす数論的関数 $\{a(n)\}$ から $b(n)=\sum_{d|n}a(d)\frac{n}{d}$ により定義される数論的関数 $\{b(n)\}$ を作ると上と同じ意味で二次関数とオーダーの低い関数への分解 $\sum_{n\leq x}b(n)=\alpha x^2+\mathrm{Er}(x)$ が成り立ち，$\mathrm{Er}(x)$ に対し上と同様の第二種 Volterra 型積分方程式の斉次解の明示公式を与えた．

(1.2) Kaczorowski (2013) は多項式 Euler 積 F に付随する Euler totient 関数 $\varphi(n,F)$ を導入した．この x 以下の和は二次関数とオーダーの低い誤差に分解される：$\sum_{n\leq x}\varphi(n,F)=C(F)x^2+E(x,F)$．この設定で同じ問題を考え，第二種 Volterra 型積分方程式 $F_1(x,F)+\int_0^x\frac{F_1(t,F)}{t}dt=E(x,F)$ の斉次解に由来する AR 部分とそうでない AN 部分の，F に標準的に付随する数論的関数を用いた明示公式を与えた．

• 背景 2（E^{AN} の評価の一般化に向けて）：Rekoś (2001) は $f(z):=\lim_{n\to\infty}\sum_{0<\Im\rho<T_n}\frac{e^{\rho z}\zeta(\rho-1)}{\zeta'(\rho)}$ (resp. $f^{-}(z):=\lim_{n\to\infty}\sum_{-T_n<\Im\rho<0}\frac{e^{\rho z}\zeta(\rho-1)}{\zeta'(\rho)}$) の上半平面における解析性と $y>-\pi$ への有理型解析接続（resp. 下半平面における解析性と $y<\pi$ への有理型解析接続）と全平面における関数等式 $f(z)+\overline{f(\overline{z})}=B(z)$（$B(z)$ は $z=-\log(nk),\,n,k=1,2,\ldots$ で 2 位の極をもつ全平面における有理型関数）を示した．これを用いて Kaczorowski-Wiertelak (2010) は $E^{\mathrm{AN}}(x)=\Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{2}}\log\log\log x)$ を導いた．その方法は，Euler totient 関数に対して Mellin 逆変換の方法で $E^{\mathrm{AN}}(x)$ の積分表示を導き，積分表示から評価式を導くというものである．議論のポイントは，積分を Rekoś の関数等式が働く部分とそれ以外の部分に分解することである．

• 本論文の成果 2（E^{AN} の評価の一般化に向けて）：岩田氏は，$E^{\mathrm{AN}}(x)$ の積分表示から評価式を導く Kaczorowski-Wiertelak の議論を多項式オイラー積を持つ Selberg クラス S^{poly} の関数に対して拡張を試みた．$E^{\mathrm{AN}}(x)$ の積分表示から評価 $E^{\mathrm{AN}}(x)=\Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{2}}\log\log\log x)$ を導くには，Rekoś による $f(z)$ の有理型拡張の議論と関数等式を拡張しなければならない．この試みがうまく行く場合を見つけるため，岩田氏は Kaczorowski-Wiertelak の議論によって S^{poly} の関数に付随する Euler totient 関数の $E^{\mathrm{AN}}(x,F)$ の積分表示を求め

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

て，Rekoś タイプの関数等式が働く部分と「残りの部分」に分割した．岩田氏は「残りの部分」に問題の困難さが集約していることを観察し，議論が進むための一つの条件を見出した．これが本論文の最も重要な発見である．この条件というのは，S^{poly} の関数に，Selberg クラスの要請で現れるパラメータに $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ という条件を置くことである．この条件のもとでは，Rekoś が Γ 関数に対する Mellin-Barnes 積分公式を使って関数等式を証明したところを，上手く積分路をとって Whittaker 関数に対する Barnes 型積分公式に置き換えることによって拡張できる，というのが重要な発見の意味である．この条件は現時点で特殊関数論の方法でカバーできるギリギリの条件である（それ以上は新たな特殊関数論を構築しなければならない）．この発見により岩田氏が達成したことは，Rekoś の解析接続と関数等式の導出が $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ を満たす S^{poly} の関数に拡張できるということであり，Rekoś の拡張定理と関数等式の $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ を満たす S^{poly} の関数に対する拡張が，本論文の主定理群を成している．

以上のように，本論文は Kaczorowski-Wiertelak による $E^{\mathrm{AN}}(x)$ の評価式を S^{poly} に拡張しようという試みから始まる研究で，現時点で使える特殊関数論を働かせることによって，拡張された $E^{\mathrm{AN}}(x)$ の評価式に向かっての第一ステップである Rekoś の解析接続と関数等式の拡張が定式化され証明できるギリギリの条件を見出している．この意味で解析数論と特殊関数論への寄与が認められる．

公開の学位審査を 2/25 に行った．論文の内容のプレゼンテーションと質疑応答を行った．講演は，発表するのがやや難しい内容を，非専門家にも岩田氏の動機がよく伝わるように工夫されたものであり，委員からの質問にも的確に答えていた．

本論文が博士（数理学）の学位を授与するに相応しいと考える理由は，以上である．