報告番号	※　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目	On a relation between leafwise cohomology theory and representation theory （葉向コホモロジー理論と表現論の関係について）
氏　　名	森　翔汰

論　文　内　容　の　要　旨

葉向複体は de Rham 複体の商複体である。それは、滑らかな多様体上の滑らかな葉層構造に付随するものである。現在に至るまでの約 70 年間、葉向コホモロジー理論は、群作用のパラメータ剛性理論との繋がりの中で研究されてきた。特にパラメータ剛性理論への応用において、葉向コホモロジー群の計算結果を知ることが重要である。

葉向コホモロジー群の最も重要な計算結果は、Arraut and dos Santos(1991)のものである。彼らはトーラス上の線形葉層の葉向コホモロジー群を全て求めた。その一部においては環構造まで決定している。これらの証明方法は、トーラスの de Rham コホモロジー群を Fourier 級数で求める方法の発展版である。しかし、その線形方程式の解法は非自明である。

この計算を除き、多くの結果は 1 次葉向コホモロジー群のものである。例えば以下のものが知られている。$G = SL(2,\mathbb{R})$とおく。$P \subset G$を上三角行列全体からなる部分群、$\Gamma \subset G$をココンパクト格子とする。また$M_\Gamma = \Gamma \backslash G$とおく。そして$\mathcal{F}_P$を、$P$から$M_\Gamma$への自然な作用から定まる軌道葉層とする。この時、松元と三松(2003)によって、次の同型が証明された。

$$H^1(\mathcal{F}_P) \cong \mathbb{R} \oplus H^1_{dR}(M_\Gamma).$$

ただし、$H^1(\mathcal{F}_P)$は 1 次葉向コホモロジー群、$H^1_{dR}(M_\Gamma)$は 1 次 de Rham コホモロジー群である。

2021 年に、高次葉向コホモロジー群の計算に進展があった。申請者が次の次元公式を証明した。一般に葉向コホモロジー群は有限次元でないことに注意する。

$$\dim H^2(\mathcal{F}_P) = 2g.$$

ただし、gはある非負整数である。これはGの表現論において意味のある数である。同じ時期に丸橋と蔦谷(2021)は、申請者と独立して、特別な場合に次の同型を証明した。

$$H^2(\mathcal{F}_P) \cong H^2_{dR}(M_\Gamma).$$

以上に述べた数式を統合、一般化する形で、申請者は次の主定理を得た。

定理 1（主定理）

ある非負整数 g *が存在して、以下の環としての同型が存在する。ただし* $X, Y_1, \dots, Y_{2g}$ *は不定変数。*

$$H^*(\mathcal{F}_P) \cong \bigwedge[X, Y_1, \dots, Y_{2g}] / (Y_i \wedge Y_j)_{1 \le i, j \le 2g}.$$

我々の証明方法は、Gの既約ユニタリ表現論の応用である。これは Arraut and dos Santos(1991)の方法の拡張である。言い換えると、それはトーラスの de Rham コホモロジー群を Fourier 級数で求める方法のアナロジーである。証明の鍵は、線形方程式をいかにして効率的に解くかである。

定理 1 におけるgは幾何学的な意味を持つ。松元と三松(2003)の結果と定理 1 を合わせて次を得る。

$$\dim H^1_{dR}(M_\Gamma) = 2g.$$

$K = SO(2), \Sigma_\Gamma = \Gamma \setminus G/K$とおく。この次元公式の下、次の事実は専門家にとって well-known である。

定理 2　*以下が成立する。*

(i)　Σ_Γ *はある向き付け可能閉曲面に同相。*

(ii)　*その種数を* g_Γ *とおく。すると* $g = g_\Gamma$.