論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　森翔汰

論　文　題　目

On a relation between leafwise cohomology theory and representation theory

（葉向コホモロジー理論と表現論の関係について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
宇澤　達

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森吉　仁志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
松尾　信一郎

委　員　大阪公立大学大学院理学研究科　教授　博士（理学）
伊師　英之

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

C^r 多様体 M の上の葉層構造 $\mathcal{F} = \{L_\lambda\}$ とは、多様体 M の p-次元連結部分多様体（単射はめ込みの像、葉、leaf と呼ばれる）L_λ による分割 $M = \coprod L_\lambda$ であり、各点で局所的に直積構造 $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ を持つものを言う．申請論文では滑らかな場合、すなわち C^∞ の場合をもっぱら扱っている．

葉層構造の原型としては、多様体 M の上のベクトル場の積分曲線の集合が挙げられる．上の定義はベクトル場が 0 にならない場合である．一般論では正則葉層構造、0 になる点がある場合を特異葉層構造として区別するが、ここでは葉層構造と言えば正則なものを指す．ベクトル場について Poincaré-Bendixon の定理が成立するので、葉層構造の存在には大局的な条件がつき、コホモロジーの言葉で表すことができることが示唆される．

申請論文で扱う Leafwise cohomology とは次の複体によって定義されるコホモロジー環である．

M の接バンドル T_*M の部分バンドル E を葉層構造 $\mathcal{F}$ の葉に接するベクトルの全体からなるものとする．$I^*(\mathcal{F})$ で、$\bigwedge E$ の $\Omega^*(M)$ の中での annihilator を表した時、次の完全系列により $(\Omega(\mathcal{F}), d_{\mathcal{F}})$ を定義する．この複体のコホモロジーが leafwise cohomology である．

$$0 \to I^*(\mathcal{F}) \to \Omega^*_{dR}(M) \to \Omega^*(\mathcal{F}) \to 0$$

申請者は、$G = \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ として、Γ を G の cocompact な離散部分群である時に定義される多様体 $M_\Gamma = \Gamma\backslash G$ の上に、上三角行列の全体のなす G の部分群 P の軌道によって定義される葉層構造 $\mathcal{F}_P$ を考察し、その leafwise cohomology を次のように完全に決定した．(p.45, Theorem 5.1)

定理 1.

$$H^*(\mathcal{F}_P) \cong \bigwedge[X, Y_1, ..., Y_{2g_\Gamma}]/(\{Y_i \wedge Y_j\}_{1\le i,j\le 2g_\Gamma})$$

で $X, Y_1, ..., Y_{2g_\Gamma}$ は不定元である．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

また、ここに現れる g_Γ で表される自然数も $\Gamma\backslash\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})/\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ は向きづけ可能な曲面（リーマン面）となるがその種数であることも証明している (Theorem 6.1).

主定理の証明の方法は、$\Omega^*(\mathcal{F}_P)$ を L^2-完備化した後 G のユニタリ表現として分解し、複体としての微分 $d_{\mathcal{F}_P}$ の作用を考える．この時、ソボレフ空間で考察を進め、「フーリエ展開」の係数の増大度を調べ、無限回微分可能なクラスでのコホモロジーの計算に成功している．ここでは $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の分類、そしてリー環の生成元をうまくとった具体的な（かなり複雑な）計算がキーポイントとなる．

この結果の一部（コホモロジー群としての構造）は独立に Maruhashi, Tsutaya (2021) によって得られている．

申請論文では leafwise cohomology と葉層構造の parametrization の取り替えの問題との関係、またリー環のコホモロジーとの関係、$\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ のユニタリ表現論、Sobolov 空間についての必要事項など、問題意識とその流れ、また証明に用いられる道具立てについても丁寧な解説がなされていることは評価に値する．

森氏の申請論文は葉層構造の理論において重要な例について美しい形で leafwise cohomology を決定している．学位論文としてふさわしいものである、と言うのが学位審査委員会の一致した意見である．

本論文に関する公開審査会を 2023 年 2 月 17 日に行い、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．よって、学位審査委員会は、申請者に博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．