

別紙 4

報告番 -	※	第	号
----------	---	---	---

主 論 文 の 要 旨

論文題目 Grothendieck monoids and their applications to representation theory and algebraic geometry
(Grothendieck モノイドとその表現論および代数幾何学への応用)
氏 名 齋藤 峻也

論 文 内 容 の 要 旨

環の表現論とは、環 R 上の加群およびそれらから構成される圏を研究する分野である。加群圏 $\text{mod } R$ やその導来圏 $D(\text{mod } R)$ はその主要な一角を担っている。これらはそれぞれアーベル圏と三角圏の構造を持っている。代数幾何学においても、代数多様体 X 上の接続層の圏 $\text{coh } X$ やベクトル束の圏 $\text{vect } X$ 、導来圏 $D(\text{coh } X)$ は、 X の幾何学的情報を多く含む不変量として重要な研究対象となっている。これらの圏もそれぞれアーベル圏、完全圏、三角圏の構造を持っている。

近年、中岡と Palu はアーベル圏や完全圏、三角圏の同時一般化として **Extriangulated** 圏（以下 **ET** 圏と呼ぶ）を導入した。ET 圏の構造は、拡大で閉じた部分圏やイデアル商、局所化などの様々な操作で遺伝し、ET 圏の理論は既存の理論よりも一般的かつ柔軟な枠組みとして注目を集めている。

本論文の目的は、アーベル圏や完全圏、三角圏を含む ET 圏の構造を Grothendieck モノイドと呼ばれる不変量を通して解析することである。本論文は大きく分けて二つのパートに分かれる。

1. ET 圏の Grothendieck モノイドの一般理論の構築（第 2 - 6 章）
2. Grothendieck モノイドの環の表現論や代数幾何学への応用（第 7 - 9 章）

以下では本論文の主要な結果について説明する。

（部分圏の分類：第 3, 6, 7 章）

部分圏の分類問題は、環の表現論や代数幾何学で活発に研究されている問題である。与えられた群の構造を調べるのに、その部分群を研究するのが有効であるように、部分圏の分類は元の圏の構造を解析する手がかりを多く与える。本論文では、ET 圏の Grothendieck モノイドから次の三種類の部分圏が完全に分類できること

を示した：

- Serre 部分圏
- 稠密 2-out-of-3 部分圏
- 有限生成 Serre 部分圏

さらに非特異射影曲線 C 上のベクトル束の圏 $\text{vect } C$ の Grothendieck モノイドを決定し、上の分類を適用することで、完全圏 $\text{vect } C$ が非自明な Serre 部分圏を持たないことを示した。

(モノイド操作の圏化：第 4, 5 章)

圏化とは、代数的対象を圏の不変量として捉え、圏レベルで代数的対象を考察する手法である。この手法により、圏論的観点から代数的対象の複雑な関係式に簡明な解釈を与えたり、あるいは逆に代数的対象に対する操作から圏に対する新しい洞察を得たりすることが出来る。本論文では、モノイドの商や局所化の Grothendieck モノイドによる圏化を与えた。より正確には、ET 圏の部分圏による局所化と Grothendieck モノイドの対応する部分モノイドによる商が可換であることを示した。また、アーベル圏の中間圏と呼ばれる ET 圏を導入し、その Grothendieck モノイドがアーベル圏の Grothendieck モノイドの局所化を与えることを示した。さらに、この観察を下に中間圏の圏構造の解析を行った。

(ネーター・スキームの位相の復元：第 6, 8 章)

可換環の場合と同様に、可換モノイドに対してはそのスペクトラムを考えることが出来る。本論文では、Grothendieck モノイドのスペクトラムの位相構造や構造層の解析を行った。とくにネーター・スキーム X の位相構造は、アーベル圏 $\text{coh } X$ の Grothendieck モノイドから完全に復元できることを示した。

(周期導来圏の不変量：第 9 章)

環の表現論において、環の導来圏の三角同値による不変量の研究は基本的である。近年、Hall 代数の圏化を動機として、環の周期導来圏というものが研究され始めている。本論文では、アルティン代数の周期導来圏の三角同値による不変量として、次のものがあることを、周期導来圏の Grothendieck モノイド（この場合 Grothendieck 群と一致する）を計算することで示した。

- アルティン環上の単純加群の同型類の個数
- (著書が以前導入した) 強周期傾対象の直既約同型類の個数