

## 論文審査の結果の要旨および担当者

|      |   |   |   |
|------|---|---|---|
| 報告番号 | ※ | 第 | 号 |
|------|---|---|---|

氏 名 齋藤峻也

論 文 題 目

Grothendieck monoids and their applications to  
representation theory and algebraic geometry

(Grothendieck モノイドとその表現論および代数幾何学への  
応用)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
高橋 亮

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
柳田 伸太郎

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (数理科学)  
藤原 一宏

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 Ph.D.  
谷本 祥

## 論文審査の結果の要旨

環上の加群圏や代数多様体上の加群層圏といった代数的な文脈で現れる圏は、環や代数多様体の不変量として、現在盛んに研究されている。本論文は、こうした代数的な圏の研究の流れに位置するものである。

代数的な圏の基本構造は、Abel 圏とそれを一般化した (Quillen の) 完全圏、および三角圏である。完全圏と三角圏からは Grothendieck 群が定まり、抽象的な圏論的枠組みの定量化を与える。また、既知の加群を Grothendieck 群として復元する圏を構成する、という圏化 (categorification) の問題も近年盛んに研究されていて、本論文の問題意識の一つである。

2010 年代に中岡と Palu は完全圏と三角圏の共通一般化として、extriangulated 圏 (以下 ET 圏と呼ぶ) を導入した。ET 圏の構造は、拡大で閉じた部分圏やイデアル商、局所化などの操作で遺伝し、その理論は従来の完全圏・三角圏の理論よりも一般的かつ柔軟な枠組みとして注目を集めている。上述の問題意識に基づき、ET 圏を Grothendieck 群のような不変量を用いて解析したい、というのが本論文の研究動機である。

本論文の目的は、Grothendieck 群の正部分 (positive part) 類似である Grothendieck モノイドを用いて ET 圏を解析することである。Grothendieck モノイドの概念は、恐らく Grothendieck 群の登場時点で既に存在していたと言ってもよいが、圏論における有用性の指摘は近年まで殆ど無かったと思われる。本論文の諸結果は、この Grothendieck モノイドが ET 圏の解析に有用であることを多角的に裏付けるものである。

本論文の主定理を一つ紹介する。申請者は

「任意の可換モノイドはある ET 圏の Grothendieck モノイドとして実現できるか？」

という問題を掲げて研究を進めた。三角圏の Grothendieck モノイドは群になり、完全圏のそれは零元以外の可逆元をもたないことから、この問題は三角圏と完全圏の一般化である ET 圏を考える意義を与えている。申請者は、ET 圏の Grothendieck モノイドの局所化に関して、この問いが肯定的であることを示した。

定理 (論文中の **Theorem F**)。  $\mathcal{C}$  を ET 圏、  $\mathcal{N}$  をその拡大閉部分圏とする。中岡-小川-酒井の完全局所化  $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{N}$  が存在し、それが saturated であると仮定する。このとき、

$$M(\mathcal{N}) \rightrightarrows M(\mathcal{C}) \rightarrow M(\mathcal{C}/\mathcal{N})$$

が可換モノイドの圏における余等化子となる。

この定理は、三角圏や完全圏に対する Grothendieck 群の完全列  $K_0(\mathcal{N}) \rightarrow K_0(\mathcal{C}) \rightarrow K_0(\mathcal{C}/\mathcal{N}) \rightarrow 0$  の拡張である。また定理の仮定はとても弱いものであり、三角圏の Verdier 商や Abel 圏の Serre 商、Frobenius 圏の安定圏などの典型的状況ではみたされる条件である。

その他、本論文において申請者は以下のことを行っている。

## 論文審査の結果の要旨

- ET 圏の Grothendieck モノイドから三種類の部分圏 (Serre 部分圏・稠密 2-out-of-3 部分圏・有限生成 Serre 部分圏) が完全に分類できることを証明した。これは松井 (2018) や Zhu-Zhuang (2021) の結果を拡張するものである。
- ET 圏の Grothendieck モノイドのスペクトラムを元の ET 圏の Serre 部分圏の集合に移植し、Noether スキームからその接続層の圏の Serre 部分圏の空間への位相埋込を構成した。応用として、Grothendieck モノイドから元のスキームの位相構造が復元されることを示した。
- 十分多くの射影対象をもち大域次元が有限な Abel 圏の周期導来圏の Grothendieck 群の構造を決定した。応用として、Artin 多元環の単純加群の同型類の集合が周期導来不変であることを見出した。

これらの結果は新しく、既に多元環の表現論および代数幾何学への応用があるだけでなく、今後の応用そしてさらなる理論展開が十分に期待される。また、榎木氏との共同研究の部分については委員会として精査しており、申請者による貢献が十分にあることを確認している。

本論文は、ET 圏の Grothendieck モノイドを導入しその基礎理論を構築するという主体性と独創性の高い内容であり、さらに ET 圏の新たな存在意義を見出し、ET 圏における主問題の解決に向けて強力なアプローチを与えるものである。また、抽象的な一般論に終始せず、多元環の表現論および代数幾何学の具体的な対象に応用している点も高評価に値する。

2023 年 2 月 20 日に行われた学位審査セミナーも、申請者の結果が非専門家にも伝わるよう一定の工夫がなされており、質問に対する応答も的確なものであった。以上によって、学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。