論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　舘野 荘平

論　文　題　目

The Iwasawa invariants of Z_p^d-covers of links

(絡み目の Z_p^d 被覆の岩澤不変量)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
納谷　信

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
鈴木　浩志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森吉　仁志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
川村　友美

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　名誉教授　理学博士
松本　耕二

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は, 代数体に対する岩澤類数公式の, 3 次元トポロジーにおける類似に関するものである.

代数体のイデアル類群の位数は類数とよばれ, 代数体の重要な不変量である. 代数体 k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大を k_∞ とし, 部分群 $p^n\mathbb{Z}_p < \mathbb{Z}_p$ に対応する k の拡大体を k_{p^n} とする. k_{p^n} のイデアル類群の p 部分群の位数を p^{e_n} と書く. 岩澤 (1959) は, 非負整数 μ, λ と整数 ν (岩澤不変量) が存在して, 十分大きい n に対して

$$e_n = \mu p^n + \lambda n + \nu \tag{1}$$

が成立することを証明した. この等式は岩澤類数公式とよばれ, 類数の規則性を表現する重要な公式である.

本研究の背景について述べる. 3 次元有理ホモロジー球面とその中の絡み目の対 (M, L) が与えられたとき, $X = M \setminus N(L)$ ($N(L)$ は L の管状近傍) とおき, X の $\mathbb{Z}^d$ 被覆 X_∞ をとる. 部分群 $(p^n\mathbb{Z})^d < \mathbb{Z}^d$ に対応する X の被覆 X_{p^n} を Fox 完備化して得られる M の $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ 分岐被覆を M_{p^n} とする. M_{p^n} はすべて有理ホモロジー球面であると仮定し, その 1 次元ホモロジー群の p 部分群の位数を p^{e_n} と書く. 門上-水澤 (2008) は, 上述の設定で $d = 1$ の場合を扱い, 岩澤類数公式の類似を証明した. すなわち, 非負整数 μ, λ と整数 ν が存在して, 十分大きい n に対して (1) と同じ式が成立する. ($M = S^3$ の場合は Hillman-Matei-森下 (2006) による.) 一方, 数論側では, Cuoco-Monsky(1981) が, 岩澤類数公式を代数体の ${\mathbb{Z}_p}^d$ 拡大の場合に拡張していた. すなわち, 部分群 $(p^n\mathbb{Z}_p)^d < {\mathbb{Z}_p}^d$ に対応する拡大体 k_{p^n} に対して, e_n を同様に定めると, 非負整数 μ, λ が存在して,

$$e_n = (\mu p^n + \lambda n + O(1))p^{(d-1)n} \quad (n \to \infty) \tag{2}$$

が成立する. なお, Greenberg による, $O(1)$ 部分が p^n と n に関する多項式として表せるという予想がある.

以上の先行研究をふまえ, 本論文では, 門上-水澤の結果を $d \geq 2$ の場合に一般化した. $X_\infty \to X$ の Alexander 多項式を $\Delta(t_1, \ldots, t_d)$ で表し, 1 の p^n 乗根全体を $W(n)$, $W = \cup_{n=0}^{\infty} W(n)$ とする. このとき, 本論文の主結果は次のように述べられる:

(i) $\Delta(t_1, \ldots, t_d)$ が W^d 上零にならないという仮定の下で, 非負整数 μ, λ が存在して, (2) と同じ式が成立する.

(ii) M が整ホモロジー球面で, L が d 個の成分からなり, $\Delta(t_1, \ldots, t_d)$ が $(W \setminus \{1\})^d$ 上零にならないという仮定の下で, 非負整数 μ_i, λ_i $(1 \leq i \leq d)$, 整数 ν が存在して

$$e_n = \mu_d p^{dn} + \lambda_d n p^{(d-1)n} + \cdots + \mu_1 p^n + \lambda_1 n + \nu \tag{3}$$

が成立する.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

主結果 (ii) は, Greenberg 予想に相当する等式をトポロジー側で部分的に確認したものであり, 岩澤理論側では未観察の等式が得られたという点でも興味深い.

本論文では, また, S^3 内のねじれ Whitehead 絡み目 W_{2p^k} $(d=2)$ に対して, e_n を

$$e_n = kp^{2n} + 2np^n - 2kp^n - 2n + k$$

と明示的に求め, とくに, 不変量 μ, λ を決定した. これにより, 一般に, 不変量 μ が任意の非負整数値を取り得ることを明らかにした.

以上の研究成果は新しく, 数論的トポロジーという研究領域において, 一定の貢献をなすものと認められる.

主定理 (i) の証明は, Alexander 多項式の属する環 $\Lambda_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ を, 岩澤理論の環 $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T_1, \dots T_d]]$ に埋め込み, $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ 加群 $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ に対応する Λ 加群 $\mathcal{M}$ に Cuoco-Monsky の結果を適用することによってなされる. 証明のうち, $\mathcal{M}$ に関する結論を $H_1(M_{p^n}, \mathbb{Z})$ の p 部分群の位数に関する主張に読み替える作業がとくに非自明であり, 申請者は指導教員・鈴木の協力も得て証明の難点を克服した. 主定理 (ii) の証明には, Porti による, $H_1(M_{p^n}, \mathbb{Z})$ の位数を Alexander 多項式の $W(n)$ 上での値によって表す公式を用いる. その式で, Alexander 多項式を $\mathcal{M}$ の特性元で置き換えると, Monsky の結果が適用できて (3) が従う.

本研究は植木潤氏 (お茶の水女子大学・講師) との共同研究である. 直接議論しながら研究を進めたということで, 両者の貢献は分かちがたいところがあるが, おおむね申請者が代数的側面, 植木氏がトポロジー的側面を担当した. 植木氏は数論的トポロジーにおける研究経験があり, 研究全体を通じて指導的役割を果たしたであろう. 一方, 岩澤理論, とくに Cuoco-Monsky の仕事を学習し, その知見を利用して門上-水澤の結果を一般化する問題を着想したのは申請者であり, 共同研究の出発点を設定したところは評価できる. また, 申請者は, 計算機によって交点数の小さい絡み目の Alexander 多項式をすべて計算した. ねじれ Whitehead 絡み目の不変量 μ, λ の決定は, この計算結果を観察することで着想に至ったものである. なお, 上述したように, 申請者の指導教員・鈴木が主結果 (i) の証明に寄与している.

申請者は, 2023 年 3 月 23 日に行われた学位審査セミナーにおいて, 論文の概要と主定理の証明の概要を説明した. 論文全体の流れや自身の貢献した部分に関して, 適切に理解していることが確認できた. 主結果の意義も明確に説明することができ, 質疑応答から, 学位取得に足る専門知識と一定の学識を有することも確認できた.

以上に鑑みて, 学位審査委員会は, 舘野氏の論文は博士（数理学）の学位を授与するにふさわしい価値を有するものと判断する.