論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　早見　崚

論　文　題　目

Higher Courant-Dorfman algebras and associated higher Poisson vertex algebras

（Courant-Dorfman代数と対応するPoisson頂点代数の高次化）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
菅野　浩明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
粟田　英資

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
白水　徹也

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　講師　博士（理学）
浜中　真志

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文の主結果は，次数 n の differential graded (dg) シンプレクティック多様体上の関数環に対応する高次（n 次）の Courant-Dorfman 代数と n 次の Poisson 頂点代数の定義を与え，これら 2 つの代数の 1 対 1 対応を示したことである．これは $n=2$ の場合に Ekstrand (2011) が示した結果の一般化と位置づけられる．以下に学術的背景と結果の詳細を述べる．

カレント代数

$$\{J_a(\sigma), J_b(\sigma')\} = f_{ab}^c J_c(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') + k\delta_{ab}\delta'(\sigma-\sigma')$$

は 2 次元共形場理論の基本的な例である Wess-Zumino-Witten 模型の対称性を記述する代数である．特にその量子化に相当する アフィン Kac-Moody 代数の表現論は数理物理学にとどまらず，様々な視点から研究されてきた．カレント代数の古典極限は円周 S^1 からリー群 G への写像全体のなすループ群 $\mathrm{Map}(S^1, G)$ の余接束上の関数のなす Poisson 代数とみなすことができる．この立場から Alekseev-Strobl (2005) は G を (リーマン) 多様体 M に一般化し，一般化接束 $TM \oplus T^*M$ を考察することによりカレント代数の一般化を与えた．一般化接束上には Jacobi 恒等式を満たし反対称性を持つ Courant-Dorfman 括弧積が定義され Courant 亜代数 (algebroid) の例となっているが，一般に Courant 亜代数上の関数空間のなす Poisson 代数は Courant-Dorfman 代数となることが知られている．実際 Alekseev-Strobl のカレント代数の構造を調べることで Ekstrand-Zabzine (2011) は（弱い意味での）Courant-Dorfman 代数構造を見いだした．さらに Ekstrand (2011) は学位論文において Courant-Dorfman 代数と Kac (2009) らによって導入された Poisson 頂点代数に 1 対 1 対応があることを示した．この対応は 2 次元共形場理論で重要な頂点作用素代数の準古典極限が Poisson 頂点代数となるという事実を考慮すると興味深いものである．

一方 Roytenberg (2002) によれば Courant 亜代数は 次数 2 の dg シンプレクティック多様体に対応する．この立場から dg シンプレクティック多様体の次数を 3 以上の整数 n に拡張することは自然である．実際 Ikeda-Koizumi (2011), Ikeda-Xu (2013) は，空間部分 S^1 を高次元化して n 次元時空上の場の理論から次数 n の dg シンプレクティック多様体に対応するカレント代数（Batalin-Fradkin-Vilkovisky 代数）が得られることを見出した．ここで自然な問いは一般の次数 n をもつ dg シンプレクティック多様体に対応する Courant-Dorfman 代数や Poisson 頂点代数は何かという問題である．本申請論文では，この問いに対する一つの答えを与えている．

本論文の第 2 章と第 3 章は dg シンプレクティック多様体と Courant-Dorfman 代数・Poisson 頂点代数に関する先行研究のサーベイである．第 4 章で，本論文の主題である高次（n 次）の Courant-Dorfman (CD) 代数の定義が与えられる．具体的には CD 代数は可換環 $R=E^0$ 上の次数付き R-加群 $E=\oplus_{i=1}^{n-1}E^i$（$n=2$ の場合は直和成分は E^1 のみ）から生成される次数付き可換代数 $\mathcal{E}$ で，以下の構造をもつものとして定義される．すなわち，微分 $d:\mathcal{E}^i \longrightarrow \mathcal{E}^{i+1}$ とペアリング（対称双線形形式）$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \longrightarrow R$ および次数 $1-n$ をもつ括弧積 $[\ ,\ ] : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ が定義されており，それらに関して Jacobi 恒等式や Leibiniz 則などの条件が仮定される．第 5

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

章において，特にペアリングが非退化な場合，前章で定義した n 次の CD 代数が，次数 n をもつ dg シンプレクティック多様体に対応することが確認されている．この結果は本論文における高次 CD 代数の定義が自然であることの根拠とみなされる．第 6 章では，まず，既存の Lie 共形代数の定義を一般化することにより，次数 $(1-n)$ の Λ 括弧式 $[\ {}_{\Lambda}\ ] : W \times W \longrightarrow W[\Lambda]$ をもつ次数付き加群 W として n 次の Lie 共形代数が定義される． Poisson 括弧式の右辺に現れるデルタ関数の n 階微分が，Λ 括弧式では不定元 Λ の n 次項に対応しているので Λ 括弧式は Poisson 括弧式の "Fourier 変換" とみなすことができる．次に n 次の Poisson 頂点代数は，Lie 共形代数の定義における次数付き加群 W が特に結合的可換代数となり，積と括弧式に対して Leibnitz 則が成り立つものとして定義される．最後に，主結果（定理 6.1）として n 次の Poisson 頂点代数と n 次の拡張された（ペアリングに関する条件を緩めた）CD 代数の１対１対応が示されている．おおまかに言って CD 代数側で定義されるペアリングと括弧積が，次数 1 をもつ不定元 Λ を導入することにより Poisson 頂点代数側では Λ 括弧積として統一的に記述される．なお本申請論文では上に述べた Poisson 頂点代数と Lie 共形代数の関係を念頭に，Lie 共形代数に対応する弱い意味での Courant-Dorfman 代数の高次化についても議論されている．

本論文に関する学位審査セミナーを 2023 年 3 月 14 日に行った．セミナーの講演において，申請者は研究の学術的背景を紹介し, 高次 Courant-Dorfman 代数の定義，dg シンプレクティック多様体との関係，主結果である高次の Poisson 頂点代数と拡張された高次 CD 代数の１対１対応などを丁寧に説明した．質問に対する受け答えも特に問題はなく，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．本論文は高次元の場の理論に現れる古典的カレント代数の数学的構造を定式化したものであり，２次元共形場理論で成功を収めている頂点作用素代数の手法を高次元理論に拡張するための第１歩となると期待される．以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．