現代数学への流れ　第3回

集合系の演算

Λ：空でない集合

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して集合 A_λ を対応させる規則を集合系といい，

$$(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \quad \text{または} \quad (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ と書く．}$$

λ を添え字といい，Λ を添え字集合という．

例　$n \in \mathbb{N}$ に対して　$A_n = \{1, 2, \cdots, n\}$

$$(A_n \mid n \in \mathbb{N})$$

定義1　$(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$：集合系

このとき，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{ a \mid ある\ \lambda\in\Lambda\ が存在して\ a\in A_\lambda \}$$

つまり、全ての A_λ の和集合

$$\bigcap A_\lambda = \{ a \mid 任意の\ \lambda\in\Lambda\ に対して\ a\in A_\lambda \}$$

つまり、全ての A_λ の共通部分とする。

$\Lambda = \mathbb{N}$ のとき、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

などと書く。

<u>命題2</u>

(1) $$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)$$

(2) $$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B)$$

省略。//

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が X の部分集合のとき、

$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の部分集合系という。

命題3 集合 X の部分集合系 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ について

(1) $$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

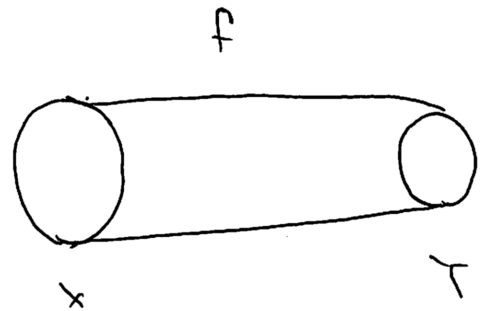
(2) $$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

省略。//

全単射写像

X, Y: 集合　$f: X \to Y$: 写像

$f: X \to Y$ が全射であるとは、任意の $y \in Y$ に対して、$y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在すること。つまり、$f(X) = Y$ が成り立つことをいう。



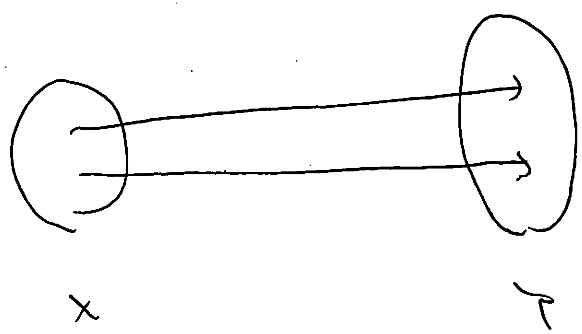
次に $f: X \to Y$ が単射であるとは、任意の $x_1, x_2 \in X$ について

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

対偶を取ると、

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成り立つことをいう。



命題4　$f: X \to Y$ が単射のとき、

$X_1, X_2 \subset X$ について

(1) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$

(2) $X_1 = f^{-1}(f(X_1))$

(3) $f(X_1) \setminus f(X_2) = f(X_1 \setminus X_2)$

が成り立つ。f が全射のとき、$Y_1 \subset Y$ について

(4) $f(f^{-1}(Y_1)) = Y_1$

が成り立つ。

(1) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$ は示した。

$y \in f(X_1) \cap f(X_2)$ について $x_i \in X_i$ が存在し $y = f(x_1) = f(x_2)$ がいえる。

このとき f は単射より $x_1 = x_2 \in X_1 \cap X_2$. $\therefore$ $y \in f(X_1 \cap X_2)$ がいえる。

(2) $X_1 \subset f^{-1}(f(X_1))$ は示した.

$x \in f^{-1}(f(X_1))$ について $f(x) \in f(X_1)$ より.

$x_1 \in X_1$ が存在して $f(x) = f(x_1)$ がいえる.

f は単射より. $x = x_1 \in X_1$

$\therefore \quad X_1 = f^{-1}(f(X_1))$

(3) $f(X_1) \setminus f(X_2) \subset f(X_1 \setminus X_2)$ は示した.

$y \in f(X_1 \setminus X_2)$ について $y = f(x)$ $(x \in X_1 \setminus X_2)$ とできる.

$\therefore \quad y = f(x) \in f(X_1)$ がいえる.

仮に $y \in f(X_2)$ ならば ある $x_2 \in X_2$ が存在して $y = f(x_2) = f(x)$ がいえる.

f は単射より. $x = x_2 \in X_2$ だが $x \in X_1 \setminus X_2$ に矛盾.

$\therefore \quad y \in f(X_1) \setminus f(X_2)$ より. $f(X_1) \setminus f(X_2) = f(X_1 \setminus X_2)$ がいえる.

(4) $f(f^{-1}(Y_1)) \subset Y_1$ は示した.

$y \in Y_1$ について f は全射なので ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ がいえる.

$f(x) = y \in Y_1$ より. $x \in f^{-1}(Y_1)$ $\therefore y = f(x) = f(f^{-1}(Y_1))$.

よって $f(f^{-1}(Y_1)) = Y_1$ がいえる. //

$A \subset B$ のとき.

$$i: \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \in & & \in \\ a & \mapsto & a \end{array}$$ を包含写像という.

また.

$$1_A: \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ \in & & \in \\ a & \mapsto & a \end{array}$$ を恒等写像という.

$A \subsetneq B$ のとき. 値域が異なるので $1_A \neq i$ である.

$f: X \to Y$ が 単射かつ 全射 のとき.

$f: X \to Y$ は 全単射 または 1対1 対応という.

$f: X \to Y$ が 全単射 $\Longleftrightarrow$ 任意 の $y \in Y$ に対して $y = f(x)$ となる
$x \in X$ が 一意 に 存在する.

が いえる. このとき.

$$\begin{aligned} g: Y &\to X \\ \in \quad & \quad \in \\ y &\mapsto x \\ (y &= f(x)) \end{aligned}$$

という 写像 を $f: X \to Y$ の 逆写像 とよぶ.

$$f^{-1}: Y \to X$$

と 記す.

<u>定理6</u> $f: X \to Y$ $g: Y \to X$ 写像

$f \circ g = 1_Y$ のとき. f は 全射 g は 単射 になる.

さらに $g \circ f = 1_X$ のとき. f, g は 全単射 で g は f の 逆写像

(・・) fが全射

$y \in Y$ について. $y = 1_Y(y) = f \circ g(y) = f(g(y))$

より. $x = g(y) \in X$ とすれば $y = f(g(y)) = f(x)$ がいえる.

∴ fは全射.

gは単射

$y_1, y_2 \in Y$ について $g(y_1) = g(y_2)$ と仮定する.

このとき. $y_1 = 1_Y(y_1) = f \circ g(y_1) = f(g(y_1))$

$= f(g(y_2)) = f \circ g(y_2) = 1_Y(y_2) = y_2$

より. $y_1 = y_2$ がいえる. ∴ gは単射.

さらに $g \circ f = 1_X$ のとき. f. gは全単射になり.

このとき. gが fの逆写像になることは $f(g(y)) = y$ より. ok. //

例

$$f: \mathbb{R} \to (-1,1) \qquad g: (-1,1) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \qquad y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$$

とおくと、

$$f\circ g(y) = f\left(\frac{y}{1-|y|}\right) = \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1+\frac{|y|}{1-|y|}} = \frac{y}{1-|y|+|y|} = y$$

$$g\circ f(x) = g\left(\frac{x}{1+|x|}\right) = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1-\frac{|x|}{1+|x|}} = \frac{x}{1+|x|-|x|} = x$$

より、f, g は全単射で、g は f の逆写像。

例 $a<b \in \mathbb{R}$ $c<d \in \mathbb{R}$ に対して

全単射

$f: [a,b] \to [c,d]$

を 以下のように構成する。

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$$

このとき、$g: [c,d] \to [a,b]$ を

$$g(y) = \frac{b-a}{d-c}(y-c) + a$$

と定めれば $f \circ g = 1_{[c,d]}$ $g \circ f = 1_{[a,b]}$ がいえる。

また $f(a)=c$ $f(d)=b$ より、$f|_{(a,b)} : (a,b) \to (c,d)$ も全単射。

例 全単射

$$f: [0,1] \to (0,1)$$

を以下で構成する。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x=0 \\ \frac{x}{4} & x=\frac{1}{2^n} \ (n=0,1,2,\cdots) \\ x & x \neq \frac{1}{2^n},\ 0 \end{cases}$$

このとき、$g: (0,1) \to [0,1]$ を

$$g(y) = \begin{cases} y=0 & y=\frac{1}{2} \\ 4y & y=\frac{1}{2^n} \ (n=2,3,4,\cdots) \\ y & y \neq \frac{1}{2^n} \ (n=1,2,3,4\cdots) \end{cases}$$

と定めれば $g \circ f = 1_{[0,1]}$ $f \circ g = 1_{(0,1)}$ がいえる。

$\therefore$ f は 全単射

置換　$n \in \mathbb{N}$

全単射 $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ を置換という.

$$S_n = \{ \sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\} : \text{置換} \}$$

このとき. S_n のサイズは $n!$

置換 $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ が $\sigma(i) = k_i$ と写すとき.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と書く.

例　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma(1) = 3 \quad \sigma(2) = 2 \quad \sigma(3) = 4 \quad \sigma(4) = 1$

順序が異なっても 上下のペアが同じなら同じと見なす.

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\sigma, \tau \in S_n$ に対して 積 $\sigma\tau$ を

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau$$

で定義する. このとき. $\sigma\tau \in S_n$ となる.

例 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\sigma\tau$ を計算する.

$$\sigma\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 2$$

$$\sigma\tau(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(2) = 1$$

$$\sigma\tau(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(1) = 3$$

$$\sigma\tau(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(4) = 4$$

$$\therefore\ \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>例</u> $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

単位置換とは $1_{\{1,\ldots,n\}}$ のこと。これを単に e などと書く。

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ の逆写像を逆置換といい、σ^{-1} で表す。

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

このとき $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$ が いえる.

例 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

巡回置換　$\{1, \cdots, n\}$ のうち $k_1, \cdots, k_r$ 以外は動かさないで

$$k_1 \mapsto k_2 \mapsto k_3 \mapsto \cdots \mapsto k_r \mapsto k_1$$

と動かす置換を巡回置換という.

これを $(k_1\, k_2 \cdots k_r)$ と表す.

$$\therefore \ (k_1 \cdots k_r) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$$

例 $(3\,4\,2\,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

補題6 任意の置換は巡回置換の積で書ける.

∵ 省略.

例 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\sigma(1) = 4 \quad \sigma(4) = 2 \quad \sigma(2) = 3 \quad \sigma(3) = 6 \quad \sigma(6) = 5 \quad \sigma(5) = 1$

$\therefore \ \sigma = (1\,4\,2\,3\,6\,5)$

例 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\sigma(1) = 3 \quad \sigma(3) = 2 \quad \sigma(2) = 1 \quad \sigma(4) = 4$

$\cancel{\sigma = (5)} \quad \sigma(5) = 6 \quad \sigma(6) = 5$

$\therefore \quad \sigma = (1\,3\,2)(5\,6)$

巡回置換 $(k_1, \dots k_r)$ の r を長さという

長さ2の巡回置換 $(i\,j)$ を互換という

このとき、

$$(k_1\,k_2 \cdots k_r) = (k_1\,k_r) \cdots (k_1\,k_3)(k_1\,k_2)$$

がいえる。 $\because$ 以下がいえる。

系7 任意の置換は互換の積で書ける.

定義8 $\sigma \in S_n$ が m 個の互換の積で書けるとき

σ の符号を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

で定める.

例

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= (1\,3\,2)(4\,5)(6\,7)$$

$$= (1\,2)(1\,3)(4\,5)(6\,7)$$

$$\therefore \ \mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1$$

例

$$(1234) = (14)(13)(12)$$

$$= (13)(14)(34)(23)(13)$$

より互換の積への表し方は一意でない．

定理4

$\sigma \in S_n$ に対し，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は互換の積の取り方に依らず一意に決まる．