現代数学への流れ　第8回

準同型・同型写像

復習　**定義1**　G_1, G_2：群

写像 $\phi : G_1 \to G_2$ が準同型であるとは，

任意の $g_1, g_2 \in G_1$ に対して

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

が成り立つことをいう．

準同型写像 ϕ が全単射のとき，ϕ は同型写像という．

例　G：群　$H \subset G$：部分群

$$\begin{array}{cccc} i : & H & \to & G \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & h & \mapsto & h \end{array}$$：包含写像

は準同型．

例　G: 群　$g \in G$

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{Z} & \to & G \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\ni$} \\ & n & \mapsto & g^n \end{array}$$

は $g^{n+m} = g^n \cdot g^m$ より 準同型

g の位数が $1 \leq d < +\infty$ のとき: $\ker(\phi) = d\mathbb{Z}$

g の位数が ∞ のとき. $\ker(\phi) = \{0\} = 0 \cdot \mathbb{Z}$.

$\mathrm{Im}(\phi) = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle g \rangle$.

例

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^\times \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\ni$} \\ & x & \mapsto & e^x \end{array}$$

とおくと. $\phi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \phi(x) \cdot \phi(y)$

より. ϕ は 準同型　このとき. $\ker(\phi) = \{0\}$　$\mathrm{Im}(\phi) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

例

$$\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$$
$$A \mapsto \det A$$

について $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ より、det は準同型。

$$\ker(\det) = SL_n(\mathbb{R})$$

また $\det\begin{pmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = a$ より、$Im(\phi) = \mathbb{R}^\times$.

例

$$\phi : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}$$

について

$$\phi(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(x)\phi(y)$$

∴ ϕ は準同型　$\ker(\phi) = \{0\}$　$Im(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$

例 $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ は準同型

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sgn} : S_n & \to & \{\pm 1\} \\ \sigma & \mapsto & \mathrm{sgn}(\sigma) \end{array}$$

$\ker(\mathrm{sgn}) = A_n$: 交代群.

例 $G = (-1, 1)$

$x, y \in G$ に対して

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

で定めると, $(G, *)$ はアーベル群になった.

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R} & \to & G \\ & x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

は同型.

φが全射であることは微積分を使って示せる.

φが準同型であることを見る.

$$\phi(x) * \phi(y) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} + \dfrac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}}{1+\dfrac{(e^{x}-e^{-x})(e^{y}-e^{-y})}{(e^{x}+e^{-x})(e^{y}+e^{-y})}}$$

$$= \frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{2e^{x+y}+2e^{-x-y}} = \phi(x+y)$$

//

<u>命題2</u> (1) 群の準同型写像の合成は準同型

(2) 群の同型写像の合成は同型

(1)を示す.

$\phi : G_1 \to G_2$ $\psi : G_2 \to G_3$: 準同型写像

このとき、任意の $g_1, g_2 \in G$ について

$$
\begin{aligned}
\psi\circ\phi(g_1 g_2) &= \psi(\phi(g_1 g_2)) \\
&= \psi(\phi(g_1)\phi(g_2)) \\
&= \psi(\phi(g_1))\psi(\phi(g_2)) \\
&= \psi\circ\phi(g_1)\,\psi\circ\phi(g_2)
\end{aligned}
$$
//

同型写像 $\phi: G_1 \to G_2$ が存在するとき、

$$G_1 \cong G_2$$

と書く。このとき、G_1 と G_2 は群として同じ性質を持つ。

例、$^\forall g \in G_1$ について

g の位数 $=$ $\phi(g)$ の位数。

$|G_1| = |G_2|$

$H \subset G_1$：部分群 $\Rightarrow$ $\phi(H) \subset G_2$：部分群

<u>命題3</u>　$\phi : G_1 \to G_2$：群準同型

このとき，次は同値．

(1)　ϕは単射

(2)　$\ker(\phi) = \{e_{G_1}\}$

(証)　((1) $\Rightarrow$ (2))

$g \in \ker(\phi)$について

$$\phi(g) = e_{G_2} = \phi(e_{G_1})$$

ϕは単射なので　$g = e_{G_1}$ が従う．

$\therefore$　$\ker(\phi) = \{e_{G_1}\}$

((2) ⇒ (1))

$g_1, g_2 \in G_1$ について

$$
\begin{aligned}
\phi(g_1) = \phi(g_2) &\Rightarrow \phi(g_1)\,\phi(g_2)^{-1} = e_{G_2} \\
&\Rightarrow \phi(g_1)\,\phi(g_2^{-1}) = e_{G_2} \\
&\Rightarrow \phi(g_1 g_2^{-1}) = e_{G_2} \\
&\Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{Ker}(\phi) = \{e_{G_1}\} \\
&\Rightarrow g_1 g_2^{-1} = e_{G_1} \\
&\Rightarrow g_1 = g_2 .
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ϕ は単射.

//

例 V, W : $\mathbb{R}$-ベクトル空間

$f : V \to W$: 線形写像

このとき、f が単射 $\Leftrightarrow$ $\ker(f) = \{0\}$

G : 群

$\mathrm{Aut}(G) = \{ \phi : G \to G : \text{同型写像} \}$

このとき、$\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して $\phi \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$ で演算が定まる。

このとき、$(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ は群になる。

(:) 結合法則 は ok.

$id \in \mathrm{Aut}(G)$ が単位元。

$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ について逆写像 $\phi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ が逆元。 //

$g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \iota_g : G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

は準同型

∵ $\iota_g(h_1 h_2) = g h_1 h_2 g^{-1} = g h_1 g^{-1} g h_2 g^{-1} = \iota_g(h_1)\,\iota_g(h_2)$ //

さらに、$\iota_{g^{-1}}$ が ι_g の逆写像になるため $\iota_g \in \mathrm{Aut}(G)$ がいえる。

ι_gを内部自己同型という。

$h_1, h_2 \in G$ について $h_1 = g h_2 g^{-1}$ となる $g \in G$ が

存在するとき、h_1 と h_2 は共役であるという。

これは同値関係になる。

例1 $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ が共役 $\Leftrightarrow$ A と B のジョルダン標準形が順序を除き一致，

命題4 $\iota : G \to \mathrm{Aut}(G)$ は準同型

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ \in & & \in \\ g & \mapsto & \iota_g \end{array}$$

∵

$$\begin{aligned}
\iota_{g_1 g_2}(h) &= g_1 g_2 h (g_1 g_2)^{-1} \\
&= g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} \\
&= \iota_{g_1}(g_2 h g_2^{-1}) \\
&= \iota_{g_1}(\iota_{g_2}(h)) \\
&= \iota_{g_1} \circ \iota_{g_2}(h)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \iota_{g_1 g_2} = \iota_{g_1} \circ \iota_{g_2}$$

//

環の準同型

定義6 A, B: 可換環　$\phi: A \to B$ 写像.

ϕが 環の準同型 であるとは 以下が成立つことをいう.

(1) 任意の $x, y \in A$ について $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$　$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

(2) $\phi(1_A) = 1_B$

補足6 $\phi(0_A) = 0_B$　$\phi(-x) = -\phi(x)$ がいえる.

例 $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は 環の準同型

$$\begin{array}{ccc} \in & & \in \\ x & \mapsto & \bar{x} \end{array}$$

例 k: 体

$k[x] = \{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in k \}$: k上の多項式環

$a \in k$

$$\begin{array}{cccc} \phi : & k[x] & \to & k \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f(x) & \mapsto & f(a) \end{array}$$

は準同型.

定義7 環準同型 $\phi : A \to B$ が全単射のとき, ϕを同型という.

命題8 A, B : 可換環 $\phi : A \to B$: 同型写像

このとき, $\phi^{-1} : B \to A$ も同型

略. //

A : 可換環 $A^{\times} := \{ a \in A \mid$ ある$b \in A$が存在して $ab = 1 \}$

このとき, $A^{\times}$ は乗法に関して群になった.

命題9 $\varphi : A \to B$: 可換環の準同型

このとき $\varphi(A^\times) \subset B^\times$ がいえて、

$$\varphi : A^\times \to B^\times \text{ は群の準同型。}$$

(∵) $x \in A^\times$ について $y \in A$ が存在して $xy = 1_A$

$$\therefore \quad \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) = \varphi(1_A) = 1_B$$

より、$\varphi(x) \in B^\times$. //