

博士学位申請論文

Spectroscopy of Muonic Helium Hyperfine
Structure at J-PARC

(J-PARCでのミュオニックヘリウム超微細構造の分光)

学籍番号 462001099

名古屋大学 理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻
素粒子物性研究室

福村省三

概要

CPT 定理は C,P,T の全ての変換を課した際に理論が不変であることを主張する、現代物理学の基本的枠組みに直接関わる対称性である。CPT 定理からは粒子と反粒子の対称性が示唆され、正負ミューオンの質量や異常磁気能率を比較することで CPT 対称性を検証可能である。しかし現在、負ミューオンの質量 m_{μ^-} や磁気モーメント μ_{μ^-} の決定精度は正ミューオンに 1 桁劣る。このため高精度に決定された m_{μ^-} や μ_{μ^-} への需要は大きい。

ミューオニックヘリウム原子はヘリウム原子の 2 つの電子のうちの一つを負ミューオンに置換したエキゾチック原子である。三体系でありながら、実験的には純レプトン二体系のミューオニウムと同様の取り扱いが可能であり、高磁場の下で超微細構造 (Hyperfine Structure : HFS) を分光することで理論的な曖昧さなく μ_{μ^-} や m_{μ^-} を決定可能である。我々はミューオニックヘリウム原子の超微細構造精密分光によって μ_{μ^-} や m_{μ^-} を、現在の 100 倍の $\mathcal{O}(10)$ ppb で決定することを目標としている。すでにゼロ磁場におけるミューオニックヘリウム原子の HFS 分光に成功しており、世界最高精度である 4.5 ppm の精度で以下の結果を得た。

$$\Delta\nu_{4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{MuSEUM}}(0 \text{ atm}, 0^\circ\text{C}) = 4\,464\,980(20) \text{ kHz} \quad (4.5 \text{ ppm}) \quad (1)$$

更なる高精度化に向けて、大強度ミューオンビームライン J-PARC MLF MUSE H-Line の利用と、光ポンピングを利用した高偏極ミューオニックヘリウム原子の生成を組み込んだ HFS 分光を計画している。本研究では J-PARC で開発したレーザー装置を使用し、パルスミューオンビームを用いた手法としては初めて高偏極ミューオニックヘリウム原子の生成を実証した。到達偏極率は 30%程度と見積もっている。H-Line の利用と高偏極ミューオニックヘリウム原子生成を組み込んだ HFS 分光の到達精度を MC シミュレーションにより推定した結果、 m_{μ^-} と μ_{μ^-} について 100 日間の測定で 70 ppb の統計精度が期待される。

本論文では J-PARC での、ゼロ磁場におけるミューオニックヘリウム原子の HFS 分光と高偏極ミューオニックヘリウム原子の生成について述べる。

目次

第 1 章 Introduction	5
1.1 CPT 定理	5
1.2 ミューオン磁気モーメントと質量の実験的決定	6
1.2.1 HFS 分光による磁気モーメント比の決定	7
1.2.2 ミューオニウムの超微細構造分光の現状	9
1.2.3 ミューオニックヘリウムの超微細構造分光の現状	10
1.3 ミューオニックヘリウム超微細構造の理論計算	10
1.3.1 基底状態超微細構造とゼーマン効果	12
1.3.2 摂動計算	13
1.3.3 摂動法以外の手法による計算値	17
第 2 章 HFS 測定原理	19
2.1 マイクロ波中での状態振幅	19
2.1.1 高磁場	21
2.1.2 低磁場	25
2.2 初期状態	26
2.3 ミューオン偏極率の時間発展	27
2.3.1 高磁場	28
2.3.2 低磁場	29
2.4 共鳴曲線	31
2.4.1 ミューオンの崩壊	31
2.4.2 高磁場の場合	32
2.4.3 低磁場の場合	33
2.4.4 ミューオニウムの共鳴曲線	36
2.5 超微細構造の圧力依存性	36
第 3 章 ミューオニックヘリウム HFS 測定装置	39
3.1 J-PARC MLF MUSE D-Line	40
3.2 ガスチャンバー	41
3.2.1 ガス標的	42
3.2.2 残留偏極	43
3.3 マイクロ波回路	44
3.3.1 マイクロ波キャビティ	44

	3
3.3.2 周波数調整	46
3.3.3 入力マイクロ波	46
3.3.4 品質係数	47
3.3.5 磁気シールド	49
3.4 検出器	49
3.4.1 データ取得	51
3.5 データ処理	51
第 4 章 ゼロ磁場でのミュオニックヘリウム超微細構造分光	53
4.1 先行研究	53
4.2 Blind Analysis	53
4.3 解析	54
4.3.1 規格化	54
4.3.2 Data Selection by Microwave Power	55
4.3.3 非対称度の計算	56
4.3.4 Fitting by Resonance Curve	57
4.4 Unblind	63
4.5 系統的不確かさ	65
4.6 ミュオニウムとの比較	66
第 5 章 高精度化に向けて	68
5.1 Spin Exchange Optical Pumping	68
5.1.1 SEOP for ^3He	70
5.1.2 ミュオニックヘリウムの SEOP	71
5.1.3 Hybrid SEOP	71
5.1.4 偏極領域	72
5.2 ミュオニックヘリウム原子再偏極装置	74
5.2.1 D1 Area	74
5.2.2 レーザー装置	74
5.2.3 Glass Cell	78
5.3 測定結果	81
5.4 HFS 分光への SEOP の組み込み	88
5.4.1 金属製セル	99
第 6 章 Conclusion	100
謝辞	101
Appendix	102
A Breit equation	102
A.1 電磁場での荷電粒子の運動	102

A.2	電磁場中の荷電粒子が従うディラック方程式	105
A.3	Liénard-Wiechert ポテンシャル	108
A.4	Darwin Lagrangian	111
A.5	Breit equation	114
B	Breit-Rabi equation	130
B.1	more general case	136

第1章 Introduction

CPT 定理は C,P,T の全ての変換を課した際に理論が不変であることを主張する命題であり、現代物理学の基本的枠組みに直接関わる対称性である。CPT 対称性は粒子と反粒子の質量や磁気モーメントを比較することで検証可能である。第2世代のレプトンについては負ミューオンの質量 m_{μ^-} や磁気モーメント μ_{μ^-} の決定精度は正ミューオンに1桁劣り、CPT 定理の検証も m_{μ^-} や μ_{μ^-} の決定精度に制限されている。このため高精度に決定された μ_{μ^-} や m_{μ^-} への需要は大きい。

ミューオニックヘリウム原子 ($\text{He}\mu^-e^-$) はヘリウム原子の持つ2つの電子 (e^-) のうちの1つを負ミューオン (μ^-) に置き換えたエキゾチック原子の1種である。 μ^- の軌道半径は e^- の約1/400なので、 $\text{He}\mu^-e^-$ 原子は $(\text{He}\mu^-)^+$ を疑似的な原子核とした水素様原子として扱うこともできる。 ^4He 原子から生成された $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の場合、 ^4He 原子核のスピンは0なので基底状態の超微細構造 (Hyperfine Structure : HFS) は μ^- と e^- のスピン相互作用から生じる。正ミューオン μ^+ と e^- の束縛状態であるミューオニウム (Mu) と比較すると、Mu が標準模型において点状レプトンの純粋な二体系であるのに対し、 $\text{He}\mu^-e^-$ 原子は三体系であり、 μ^- が He 原子核の周りに偏在する複雑な系である。この効果によって Mu と $\text{He}\mu^-e^-$ 原子の超微細構造はわずかに異なる。すなわち精密に測定された $\text{He}\mu^-e^-$ 原子の超微細構造は量子三体系の理論を検証する最良の指針たりうる。一方で $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子は三体系であるにも関わらず、実験的には Mu と同様な取り扱いが可能である。1.2.1 で後述する通り、Mu と $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の基底状態 HFS を高磁場の下で精密に分光すれば、それぞれ正負ミューオン μ^\pm の質量や磁気モーメントを理論的な曖昧さなく実験的に決定できる。

本章では $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子や Mu の HFS 分光について述べる。

1.1 CPT 定理

CPT 定理は荷電共役変換 (C 変換)、パリティ反転変換 (P 変換)、時間反転変換 (T 変換) の全てを課した際に理論が不変であることを主張する命題である。現代物理学の基本的枠組みに直接関わる対称性であり、CPT 対称性の検証は非常に重要である。CPT 定理により粒子と反粒子は質量や寿命が等しく、磁気モーメントが反転することが示唆される。すなわち、粒子と反粒子の間でこれらを比較することで CPT 対称性を検証できる。

現在正ミューオンの質量 m_{μ^+} は、ミューオニウムの HFS 測定から決定された電子との質量比 [1]

$$\frac{m_{\mu^+}}{m_{e^-}} = 206.768\,277(24) \quad (120 \text{ ppb}) \quad (1.1)$$

が最高精度の実験値である。一方、負ミューオンの質量 m_{μ^-} はミューオニック Si の特性 X 線の

分光から決定された [2]

$$\frac{m_{\mu^-}}{m_{e^-}} = 206.768\,30(64) \quad (3.1 \text{ ppm}) \quad (1.2)$$

が最高精度である。すなわち、正負ミューオンの質量の比較による CPT 対称性の検証は、 m_{μ^-} の決定精度により、3.1 ppm のレベルに制限されている。

CPT 対称性は正負ミューオンの異常磁気能率 $a_{\mu} = \frac{g_{\mu}-2}{2}$ を比較することでも検証できる。 a_{μ} は標準模型による計算値 [3]

$$a_{\mu}^{\text{th}} = 116\,591\,810(43) \times 10^{-11} \quad (1.3)$$

と実験値 [4]

$$a_{\mu}^{\text{exp}} = 116\,592\,061(22) \times 10^{-11} \quad (1.4)$$

の間に 4.2σ の乖離が存在していることでも注目されており、アメリカの Fermi National Accelerator Laboratory では現在も測定が続けられている。また日本の J-PARC においても測定に向けた取り組みが進行中である [5]。 a_{μ} の実験値は下式で決定され、パラメーターの 1 にミューオンと陽子の磁気モーメント比 μ_{μ}/μ_p が含まれる。

$$a_{\mu} = \frac{g_e \omega_a \mu_p \mu_{\mu}}{2 \omega_p \mu_e \mu_p} \quad (1.5)$$

ここで、 ω_a は蓄積リング内でのミューオンのサイクロトロン運動とスピン回転の周波数の差、 ω_p は蓄積リング内の磁場による自由陽子の NMR 周波数。 μ_{μ^-}/μ_p の不確かさが μ_{μ^+}/μ_p と比べて 1 桁大きいので、現在は a_{μ^-} の決定にも μ_{μ^+}/μ_p の値が使用されている [6]。

CPT 定理の検証のためだけでなく、標準模型のパラメーターという観点からも高精度に決定された正負ミューオンの質量 $m_{\mu^{\pm}}$ や磁気モーメント μ_{μ^-} への需要は大きい。

1.2 ミューオン磁気モーメントと質量の実験的決定

正ミューオン μ^+ と電子 e^- の束縛系である純レプトン二体系のミューオニウム Mu や、ヘリウム原子の持つ 2 つの電子 (e^-) のうちの 1 つを負ミューオン (μ^-) に置き換えたミューオニックヘリウム原子 $\text{He}\mu^-e^-$ の寿命はミューオンと同程度であり、エキゾチック原子の中では実験的に扱いやすい。本節で詳細を説明するが、高磁場の下で Mu や $\text{He}\mu^-e^-$ 原子の超微細構造を分光することで、理論的な曖昧さなくミューオンの磁気モーメントや質量を実験的に決定できる。我々は $\text{He}\mu^-e^-$ 原子の精密分光により負ミューオン質量と磁気モーメントの不確かさを 100 倍改善することを目指して研究に取り組んでいる。正ミューオンの質量と磁気モーメントについて、J-PARC(Japan Proton Accelerator Research Complex) では MuSEUM(Muonium Spectroscopy Experiment Using Microwave) コラボレーションが Mu の HFS 精密分光による 10 倍の精度改善を目指した取り組みを進行中である [7][8]。また Mu の 1S-2S 状態間の遷移周波数を精密分光することで m_{μ^+} の決定精度を 100 倍向上することを目指した実験が J-PARC と PSI(Paul Scherrer Institut) で別個に計画されている [9][10][11]。

1.2.1 HFS 分光による磁気モーメント比の決定

静磁場 \mathbf{B} 中の基底状態の Mu や $\text{He}\mu^-e^-$ 原子のスピンハミルトニアンは下式で与えられる。

$$\mathcal{H} = h\Delta\nu \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + \mu_B^e g_J \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} - \mu_B^\mu g'_\mu \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \quad (1.6)$$

ここで h はプランク定数、 $h\Delta\nu$ は超微細構造、 \mathbf{I} 、 \mathbf{J} はそれぞれミューオンと電子のスピン演算子、 μ_B^e, μ_B^μ は電子、ミューオンの磁気モーメントの大きさ、 g_J, g'_μ は束縛状態の電子、ミューオンの g 因子である。 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の場合にのみ生じる高次の効果は $\Delta\nu$ 、 g_J 、 g'_μ に現れるため、三体系であるにも関わらず ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子は Mu と同様の取り扱いが可能である。

Appendix.B の通りにすれば (1.6) から、各固有状態のエネルギー準位を与える Breit-Rabi 方程式が以下の通り得られる

$$E_{F=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}, m_F} = -\frac{h\Delta\nu}{4} - m_F \mu_B^\mu g'_\mu B_0 \pm \frac{h\Delta\nu}{2} \sqrt{1 + 2m_F x + x^2} \quad (1.7)$$

ここで、

$$x = \frac{(g_S \mu_B + g_\mu \mu_\mu) B_0}{h\Delta\nu} \quad (1.8)$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2} \quad (1.9)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2} \quad (1.10)$$

であり、 F, m_F はそれぞれ原子の全スピンとその z 成分を意味する。また、 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ とした。水素様原子の場合、各スピン固有状態とは以下のように対応する。

$$\begin{pmatrix} |F, m_F\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |0, 0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & -s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$\text{He}\mu^-e^-$ 原子の場合、 $\Delta\nu < 0$ 、 $\mu_B^\mu < 0$ として扱うことに留意する必要がある。

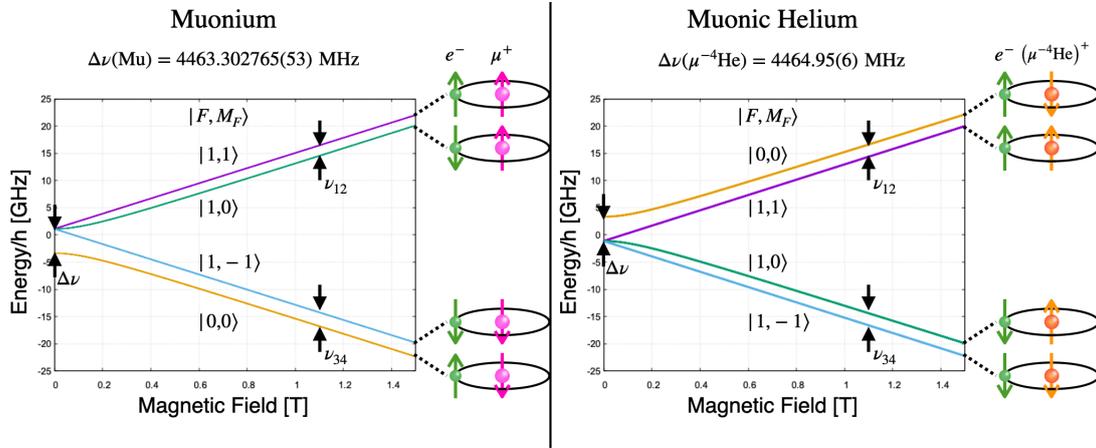


図 1.1: ミューオニウムとミューオニックヘリウムのエネルギー準位図。高磁場では縮退や状態の混合がなくなる。

(1.7) から、磁場に対するエネルギーの変化が同じ符号となる副準位間の準位差を考える。Mu の場合は以下の通りである。

$$\Delta\nu_{12}^{\text{Mu}} = \frac{E_{1,1} - E_{1,0}}{h} = -\mu_B^{\mu} g'_{\mu} \frac{B_0}{h} + \frac{\Delta\nu}{2} (1 + x - \sqrt{1 + x^2}) \quad (1.12)$$

$$\Delta\nu_{34}^{\text{Mu}} = \frac{E_{1,-1} - E_{0,0}}{h} = \mu_B^{\mu} g'_{\mu} \frac{B_0}{h} + \frac{\Delta\nu}{2} (1 - x + \sqrt{1 + x^2}) \quad (1.13)$$

$\text{He}\mu^{-}e^{-}$ 原子の場合、 $-\Delta\nu \rightarrow \Delta\nu, -\mu_B^{\mu} \rightarrow \mu_B^{\mu}$ と置き換えれば以下の通り。

$$\Delta\nu_{12}^{\mu\text{He}} = \frac{E_{0,0} - E_{1,1}}{h} = -\mu_B^{\mu} g'_{\mu} \frac{B_0}{h} + \frac{\Delta\nu}{2} (1 - x + \sqrt{1 + x^2}) \quad (1.14)$$

$$\Delta\nu_{34}^{\mu\text{He}} = \frac{E_{1,0} - E_{1,-1}}{h} = \mu_B^{\mu} g'_{\mu} \frac{B_0}{h} + \frac{\Delta\nu}{2} (1 + x - \sqrt{1 + x^2}) \quad (1.15)$$

この際 x についても $x \rightarrow -x$ と置き換えられる。いずれの場合も

$$\nu_{12} + \nu_{34} = \Delta\nu \quad (1.16)$$

が常に成立する。

磁場を陽子 NMR で測定する場合、磁場は自由陽子の NMR 周波数 ν_p から $B_0 = \frac{h\nu_p}{2\mu_p}$ として求める。また、

$$r'_e = \frac{\mu_e}{\mu_p} = \frac{gJ\mu_B^e}{2\mu_p} \quad (1.17)$$

$$r'_{\mu\pm} = \frac{\mu_{\mu\pm}}{\mu_p} = \frac{g'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{2\mu_p} \quad (1.18)$$

とすれば

$$x = \frac{(r'_e \pm r'_{\mu\pm}) \nu_p}{\Delta\nu} \quad (1.19)$$

となる。これらを用いれば、以下が得られる

$$\nu_{12} = \pm \frac{(r'_e \mp r'_{\mu^\pm}) \nu_p}{2} + \frac{\Delta\nu}{2} (1 \mp \sqrt{1+x^2}) \quad (1.20)$$

$$\nu_{34} = \mp \frac{(r'_e \mp r'_{\mu^\pm}) \nu_p}{2} + \frac{\Delta\nu}{2} (1 \pm \sqrt{1+x^2}) \quad (1.21)$$

$$r'_{\mu^\pm} = \frac{\mp 2\nu_{12}\nu_{34} + (\nu_{34} - \nu_{12}) r'_e \nu_p}{\nu_p [2r'_e \nu_p \pm (\nu_{34} - \nu_{12})]} \quad (1.22)$$

以上から、 ν_{12} と ν_{34} の測定により、 $\Delta\nu$ だけでなく以下の通りミュオンと陽子の磁気モーメント比が得られる。

$$\frac{\mu_{\mu^\pm}}{\mu_p} = r'_{\mu^\pm} \frac{g_\mu}{g'_\mu} \quad (1.23)$$

$$= \frac{\mp 2\nu_{12}\nu_{34} + (\nu_{34} - \nu_{12}) r'_e \nu_p}{\nu_p [2r'_e \nu_p \pm (\nu_{34} - \nu_{12})]} \frac{g_\mu}{g'_\mu} \quad (1.24)$$

(1.24) には高磁場での分光における測定値 ν_{12}, ν_{34} と外部磁場に対応する ν_p の他には電子と陽子の磁気モーメント比 μ_e/μ_p 、電子の質量 m_e 、自由ミュオンの g 因子 g_μ 、束縛状態のミュオンと電子の g 因子 g'_μ, g_J のみが含まれる。 $\mu_e/\mu_p, m_e, g_\mu$ は実験的に高精度で決定されている。 g'_μ, g_J はミュオンの質量、電子の質量、ヘリウム原子核の質量、自由電子の g 因子、自由ミュオンの g 因子、微細構造定数をパラメーターとして計算可能である [12][13]。磁気モーメントと質量は

$$\mu_{\mu^\pm} = g_\mu \frac{e\hbar}{2m_\mu} \quad (1.25)$$

で相関し、 e と \hbar は定義値である。したがって $\nu_{12}, \nu_{34}, \nu_p$ を高精度に測定すれば μ^\pm の磁気モーメントと質量の決定精度を、その他のパラメーターの中で最も精度の低い μ_e/μ_p の不確かさ 300 ppt と同程度まで向上できる [14]。

1.2.2 ミューオニウムの超微細構造分光の現状

Mu は純レプトンの束縛系であるため、高精度な理論計算が可能である。最新の理論値は 2019 年に Eides が報告した値に Karashenboim が補正を加えた以下の値である [15][16]

$$\Delta\nu_{\text{Mu}}^{\text{th}} = 4\,463.302\,832(511)(70)(52)(2) \text{ MHz (120 ppb)} \quad (1.26)$$

不確かさの 1 つ目は電子とミュオンの質量比 m_e/m_μ の不確かさに由来し、2 つ目は QED の高次項によるもの、3 つ目は理論による系統的な不確かさ、4 つ目は微細構造定数 α の不確かさによるもの。

Mu はエキゾチック原子の中では比較的寿命が長く、高精度な測定が可能な原子でもある。最高精度の実験値は、1999 年に Liu らが、Los Alamos Meson Physics Facility (LAMPF) で 1.7 T の磁場中でのゼーマン分裂を利用して測定した以下の値である [1]

$$\Delta\nu_{\text{Mu}}^{\text{ex, HF}} = 4\,463.302\,765(50)(17) \text{ MHz (12 ppb)} \quad (1.27)$$

1つ目の不確かさは統計的な原因、2つ目の不確かさは系統的な原因が由来である。

ゼロ磁場での測定についても、1975年に Casoerson が LAMPF で測定した結果が報告されている [17]。

$$\Delta\nu_{\text{Mu}}^{\text{ex, ZF}} = 4\,463.302\,2(14)\text{ MHz (310 ppb)} \quad (1.28)$$

この値では統計的な不確かさのみを考慮している。

1.2.3 ミューオンニックヘリウムの超微細構造分光の現状

${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子は三体系であり、また ${}^4\text{He}$ 原子核が有限の大きさを持つため理論的な取り扱いが難しい。理論値は摂動論や変分法といった手法で計算されており、最新の理論値は2018年に Aznabayev が報告した、変分法による以下の値である [18]。

$$\Delta\nu_{{}^4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{th}} = 4\,464.55(60)\text{ MHz (134 ppm)} \quad (1.29)$$

ただし不確かさの原因については言及されていない。Krutov による2次の摂動論による計算の結果は Aznabayev の計算と同程度の不確かさを持ち、

$$\Delta\nu_{{}^4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{th, SOPT}} = 4465.526(700)\text{ MHz} \quad (1.30)$$

である [19]。 $\Delta\nu_{{}^4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{th, SOPT}}$ の不確かさは三体系波動関数の不確かさに起因する、Fermi Energy ν_F の不確かさ、 α や粒子の質量といったパラメーターの不確かさ、計算していない高次の electron vertex corrections が主要因である。

${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子は寿命が $2.2\ \mu\text{s}$ 程度であり実験的には扱いやすい。また Mu と同様の手法で HFS を測定でき、1980年には Orth らが、ゼロ磁場での測定で得た以下の値を報告している [20]。

$$\Delta\nu_{{}^4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{ex, ZF}} = 4\,464.94(6)\text{ MHz (13 ppm)} \quad (1.31)$$

1982年には Gardner らが、高磁場での測定によって以下の値を報告した [21]。

$$\Delta\nu_{{}^4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{ex, HF}} = 4\,465.004(29)\text{ MHz (6.5 ppm)} \quad (1.32)$$

これらの実験値の不確かさは統計的なものである。

最新の理論値でも不確かさは過去の実験値よりも大きい。測定精度をより向上すれば、理論の発展を促すモチベーションになりうる。

1.3 ミューオンニックヘリウム超微細構造の理論計算

電磁場中の2粒子系を表す非相対論的な方程式である Breit 方程式は以下で与えられる [22]。(Appendix.A で導出について説明する)

$$W\psi_{++}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_5 + \mathcal{H}_6)\psi_{++}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (1.33)$$

$$W = E - m_1c^2 - m_2c^2 \quad (1.34)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + q_1\phi(\mathbf{r}_1) + q_2\phi(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (1.35)$$

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mathbf{p}_1^4}{8m_1^3c^2} - \frac{\mathbf{p}_2^4}{8m_2^3c^2} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{2m_1m_2c^2} \frac{1}{r_{12}} \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^2} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{2m_1m_2c^2} \frac{1}{r_{12}} \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{\sum_{i,j} r_i^{12} r_j^{12} p_i^1 p_j^2}{r_{12}^2} \right] \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 &= \frac{q_1\hbar}{2m_1c} \left[\frac{[\mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_1)] + [\mathbf{p}_1 \times [-\text{grad}_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}]]}{2m_1c} - \frac{2[\mathbf{p}_2 \times [-\text{grad}_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}]]}{2m_2c} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 \\ &+ \frac{q_2\hbar}{2m_2c} \left[\frac{[\mathbf{p}_2 \times \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_2)] + [\mathbf{p}_2 \times [-\text{grad}_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}]]}{2m_2c} - \frac{2[\mathbf{p}_1 \times [-\text{grad}_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}]]}{2m_1c} \right] \boldsymbol{\sigma}_2 \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4 &= -i\hbar \left[\frac{q_1}{(2m_1c)^2} \left[\mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{p}_1 \cdot \left[-\text{grad}_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_2}{(2m_2c)^2} \left[\mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_2) + \mathbf{p}_2 \cdot \left[-\text{grad}_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \right] \right] \right] \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\mathcal{H}_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{4m_1m_2c^2} \left[-\frac{8\pi}{3} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^3(\mathbf{r}_{12}) + \frac{1}{r_{12}^3} \left[\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^2} \right] \right] \quad (1.40)$$

$$\mathcal{H}_6 = -\left[\frac{q_1\hbar}{2m_1c} \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{q_1\hbar}{2m_2c} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right] - 2 \left[\frac{q_1\hbar}{2m_1c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{p}_1 + \frac{q_1\hbar}{2m_2c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{p}_2 \right] \quad (1.41)$$

\mathcal{H}_5 の第二項、すなわち []' で囲まれた項は $r \neq 0$ でのみ評価し、 $r = 0$ では第一項だけを考える。ここで、 E は系の全エネルギー、 ψ_{++} は2粒子の波動関数、 m_i は粒子 i の質量、 q_i は粒子 i の電荷、 \mathbf{p}_i は粒子 i の運動量、 $\boldsymbol{\sigma}_i$ は粒子 i のスピン行列、 \mathbf{r}_i は粒子 i の位置ベクトル ($i=1,2$) であり、 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 、 ϕ 、 \mathbf{A} はそれぞれ電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル、 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ は外部電場、 \mathbf{B} は外部磁場、 c は光速、 ϵ_0 は真空の誘電率を意味する。

これらは Dirac-Coulomb-Breit ハミルトニアンと呼ばれ、それぞれ

\mathcal{H}_0 : 非相対論的な運動

\mathcal{H}_1 : 運動エネルギーの相対論的な補正

\mathcal{H}_2 : 電子が生成する磁場の遅延に起因する、古典的な相対論効果の補正

\mathcal{H}_3 : スピンと起動角運動量の相互作用

\mathcal{H}_4 : 電場との相互作用

\mathcal{H}_5 : 2粒子のスピン-スピン相互作用

\mathcal{H}_6 : スピンと磁場の相互作用

を表している。Dirac-Coulomb-Breit ハミルトニアンは ${}^4\text{He}\mu^-e$ 原子の HFS の計算で利用されている。

Breit 方程式はクーロンゲージを仮定しているため Lorentz 対称ではなく、電磁場について量子化もされていない。また非相対論極限に近似する際の高次項を無視しているなど、高精度な計算には向いていない。ミューオニウム HFS の理論値の計算には場の理論的に2粒子の相互作用を表した Bethe-Salpeter 方程式や、非相対論的なスピン 1/2 の粒子と電磁場の相互作用を表した有効場の理論である Non-relativistic quantum electrodynamics(NRQED) が使用されている [15][23]。

1.3.1 基底状態超微細構造とゼーマン効果

Breit 方程式の \mathcal{H}_5 は2粒子のスピン-スピン相互作用を表す。 \mathcal{H}_5 によって生じるエネルギー構造が Hyperfine Structure である。 \mathcal{H}_6 はそれぞれの粒子のスピンと磁場の相互作用を表しており、磁場によるエネルギー準位の変化である Zeemann 効果を生む。 \mathcal{H}_0 の動径方向の固有関数を ϕ とすると、

$$\langle \phi | \mathcal{H}_5 + \mathcal{H}_6 | \phi \rangle = \frac{1}{4} \Delta\nu \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \mu_1 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{B} + \mu_2 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{B} \quad (1.42)$$

となり、基底状態の二粒子系のスピンハミルトニアンが得られる。ただし $\Delta\nu$ は Hyperfine Structure であり、ゼロ磁場におけるスピン固有状態のエネルギー差を意味する。ゼーマン効果について高次の効果を考慮すると、 \mathcal{H} を以下のように書き換える必要がある [24]。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \Delta\nu \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{1}{2} g_1 \mu_1 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} g_2 \mu_2 \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{B} \quad (1.43)$$

g_1, g_2 はそれぞれ束縛状態にある粒子1, 粒子2の g 因子である。束縛状態にある粒子の g 因子は、束縛により生じる効果から自由な状態とは値が異なる。ミューオニウムの場合、束縛状態の μ^+ と e^- の g 因子は以下の通りである [12]

$$g_N = g'_\mu = g_\mu \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} \left(1 - \frac{3m_e}{2m_\mu} \right) - \left(\alpha^2 \frac{m_e}{m_\mu} - \frac{\alpha^3 m_e}{12\pi m_\mu} + \frac{97}{108} \alpha^4 \right) \right] \quad (1.44)$$

$$g_J = g_e \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} \left(1 - \frac{3m_e}{2m_\mu} \right) + \frac{\alpha^3}{4\pi} - \left(\alpha^2 \frac{m_e}{m_\mu} - \frac{5\alpha^3 m_e}{12\pi m_\mu} + \alpha^4 \left[\frac{1}{12} + \frac{0.289\dots}{\pi^2} \right] \right) \right] \quad (1.45)$$

ただし g_μ, g_e はそれぞれ自由な μ^+, e^- の g 因子であり、 α は微細構造定数。三体系であるミューオニックヘリウムの場合、 ${}^4\text{He}$ 原子核と e^- のそれぞれから影響を受けるため、基底状態における束縛 μ^- の g 因子は以下の通り [13]

$$g'_\mu = g_\mu \left[1 - \frac{2\alpha^2}{3} \left[1 - \frac{3m_\mu}{2m_\alpha} + \frac{9}{2} \left(\frac{m_\mu^2}{m_\alpha} - \frac{3\alpha}{22\pi} \left(1 - \frac{5m_\mu}{3m_\alpha} \right) - \frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \frac{3m_\mu}{2m_\alpha} \right) G_{1s} \left(\frac{2\alpha m_r}{m_e} \right) \right) \right] \right] \times \left(1 - \frac{\alpha}{3} \left[1 - \frac{2m_e}{m_\alpha + m_\mu} - \frac{1}{2} \frac{m_e m_\mu}{m_\alpha^2} \right] \right) \quad (1.46)$$

ここで、 m_α は α 粒子、すなわち ${}^4\text{He}$ 原子核の質量。 e^- については原子核 $({}^4\text{He}\mu^-)^+$ に束縛されているとみなし、 g 因子はミューオニウムの場合から $m_\mu \rightarrow m_\alpha + m_\mu$ と置き換えれば良い。

1.3.2 摂動計算

Krutov と Martynenko による摂動的な取り扱いでは、非相対論的な三体系ハミルトニアンとして下式を使用する [19]。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Delta\mathcal{H} + \Delta\mathcal{H}_{\text{rec}} \quad (1.47)$$

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2M_\mu} \nabla_\mu^2 - \frac{1}{2M_e} \nabla_e^2 - \frac{2\alpha}{x_\mu} - \frac{\alpha}{x_e} \quad (1.48)$$

$$\Delta\mathcal{H} = \frac{\alpha}{x_{\mu e}} - \frac{\alpha}{x_e} \quad (1.49)$$

$$\Delta\mathcal{H}_{\text{rec}} = -\frac{1}{m_\alpha} \nabla_\mu \cdot \nabla_e \quad (1.50)$$

$$M_\mu = \frac{m_\mu m_\alpha}{m_\mu + m_\alpha} \quad (1.51)$$

$$M_e = \frac{m_e m_\alpha}{m_e + m_\alpha} \quad (1.52)$$

ここで \mathcal{H}_0 は μ^- , e^- の運動を原点の ${}^4\text{He}$ 原子核との換算質量 M_μ , M_e を使用して表したものである。 m_μ , m_e , m_α は μ^- , e^- , ${}^4\text{He}^{++}$ の質量、 \mathbf{x}_μ , \mathbf{x}_e は原子核と μ^- , e^- の相対位置ベクトル、 $\mathbf{x}_{\mu e} = \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_e$ である。 \mathcal{H}_0 の第3項は ${}^4\text{He}^{++}$ によるクーロンポテンシャルと μ^- の相互作用、第4項は $({}^4\text{He}\mu^-)^+$ によるクーロンポテンシャルと e^- の相互作用を表している。 $\Delta\mathcal{H}$ と $\Delta\mathcal{H}_{\text{rec}}$ は e^- の運動に対するスカラーポテンシャルと、反跳を表す摂動ハミルトニアンである。

超微細相互作用を表すハミルトニアンは以下で与えられる。

$$\Delta\mathcal{H}_{\text{HFS}} = -\frac{8\pi\alpha}{3m_e m_\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}_e}{4} \delta(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_e) \quad (1.53)$$

$\Delta\mathcal{H}_{\text{HFS}}$ は (A.279) の第一項に等しく、Fermi contact interaction と呼ばれる相互作用を表す。 $\boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}_e$ はそれぞれ μ^- , e^- のスピン行列。

\mathcal{H}_0 の固有関数は下式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Psi_0(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_\mu) &= \psi_e(\mathbf{x}_e) \psi_\mu(\mathbf{x}_\mu) \\ &= \frac{1}{\pi} (2\alpha^2 M_e M_\mu)^{3/2} \exp[-2\alpha M_\mu x_\mu] [-\alpha M_e x_e] \end{aligned} \quad (1.54)$$

$\Psi_0(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_\mu)$ と (1.53) を使えば以下が得られる。

$$\begin{aligned}\Delta\nu_0^{\text{HFS}} &= \frac{8\pi\alpha}{3m_e m_\mu} \langle \delta(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_e) \rangle \\ &= \frac{\nu_F}{\left(1 + \frac{M_e}{2M_\mu}\right)^3}\end{aligned}\quad (1.55)$$

$$\begin{aligned}\nu_F &= \frac{8\alpha^4 M_e^3}{3m_e m_\mu} \\ &= 4516.915 \text{ MHz}\end{aligned}\quad (1.56)$$

$2\hbar\nu_F$ は Fermi Energy であり、Fermi contact interaction によって生じる。(1.55) 中で、換算質量の比 $\frac{M_e}{2M_\mu}$ によって生じる反跳効果は $\Delta\nu_{\text{rec}}^{\text{HFS}} = -33.525 \text{ MHz}$ となる。Krutov と Martynenko による計算では、1998 年の CODATA 推奨値を元に、以下の値を使用している [25]

$$m_e = 0.510\,998\,918(44) \times 10^{-3} \text{ GeV} \quad (1.57)$$

$$m_\mu = 0.105\,658\,369\,2(94) \text{ GeV} \quad (1.58)$$

$$\alpha^{-1} = 137.035\,99911(46) \quad (1.59)$$

$$m({}^4_2\text{He}) = 3.727\,379\,04(15) \text{ GeV} \quad (1.60)$$

$$a_e = 1.159\,652\,186\,9(41) \times 10^{-3} \quad (1.61)$$

$$a_\mu = 1.165\,919\,81(62) \times 10^{-3} \quad (1.62)$$

ここで、 $m({}^4_2\text{He})$ は ${}^4\text{He}$ の質量、 a_e, a_μ はそれぞれ e^- と μ の異常磁気能率。

$\Delta\mathcal{H}$ と $\Delta\mathcal{H}_{\text{rec}}$ による寄与は、Lakdawala と Mohr による second-order Perturbation Theory(SOPT) の計算によると、以下の値である [26]。

$$\Delta\nu_{\Delta\mathcal{H}} = -29.650 \text{ MHz} \quad (1.63)$$

$$\Delta\nu_{\Delta\mathcal{H}_{\text{rec}}, \text{SOPT}} = 0.079 \text{ MHz} \quad (1.64)$$

1.3.2.1 Relativistic effect

相対論的な効果による HFS への影響は Breit interaction とも呼ばれる、

$$\mathcal{H}_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{2x_{\mu x}} \left[\boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}_e + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \mathbf{x}_{\mu e})(\boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \mathbf{x}_{\mu e})}{x_{\mu e}^2} \right] \quad (1.65)$$

から計算される。 \mathcal{H}_B は Darwin Lagrangian(A.110) に含まれる遅延ポテンシャルであり Breit equation においては \mathcal{H}_2 に相当する。Huang と Hughes による計算によれば、HFS への寄与は以下の通り [27]。

$$\begin{aligned}
\Delta\nu_{\text{rel}} &= \nu_F \left[\frac{3}{2} (Z_e \alpha)^2 - \frac{1}{3} (Z_\mu \alpha)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{(Z_\mu \alpha)^2}{M_\mu} \right) \right] \\
&= \nu_F \left[\frac{3}{2} (\alpha)^2 - \frac{4}{3} (\alpha)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{(Z_\mu \alpha)^2}{M_\mu} \right) \right] \\
&= 0.040 \text{ MHz (8.9 ppm)}
\end{aligned} \tag{1.66}$$

第一項の $\frac{3}{2} (Z_e \alpha)^2$ が Breit interaction に由来し、 $Z_e = 1$ である。第二項 $-\frac{1}{3} (Z_\mu \alpha)^2$ はミュオンの寄与で、 $Z_\mu = 2$ である。

1.3.2.2 Vacuum Polarization

HFS の理論計算における真空効果の主要な寄与は、1-loop の vacuum polarization (VP) である。ミュオニックヘリウムでは e^- の 1-loop の VP によって以下のポテンシャルが生じる [19]

$$\Delta V_{\text{VP}}^{e\alpha}(x_e) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) \left(-\frac{2\alpha}{x_e} \right) \exp[-2m_e \xi x_e] d\xi \tag{1.67}$$

$$\rho(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} (2\xi^2 + 1)}{\xi^4} \tag{1.68}$$

$$\Delta V_{\text{VP}}^{\mu e}(x_\mu) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) \left(-\frac{2\alpha}{x_\mu} \right) \exp[-2m_e \xi x_\mu] d\xi \tag{1.69}$$

$$\Delta V_{\text{VP}}^{e\mu}(|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_\mu|) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) \left(-\frac{\alpha}{x_{e\mu}} \right) \exp[-2m_e \xi x_{e\mu}] d\xi \tag{1.70}$$

ここで、 $x_{e\mu} = |\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_\mu|$ 。1次の摂動論では、これらの効果は超微細相互作用ハミルトニアン (1.53) と結合し、以下のポテンシャルとなる。

$$\Delta V_{\text{VP}}^{\text{HFS}}(\mathbf{x}_{e\mu}) = -\frac{8\alpha}{3m_e m_\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu}{4} \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left(\pi \delta \left(\mathbf{x}_{e\mu} - \frac{m_e^2 \xi^2}{x_{e\mu}} \right) \exp[-2m_e \xi x_{e\mu}] \right) \tag{1.71}$$

$\Delta V_{\text{VP}}^{\text{HFS}}(\mathbf{x}_{e\mu})$ による HFS の補正は以下の通り [19]

$$\begin{aligned}
\Delta\nu_{\text{VP}}^{\text{HFS}} &= \nu_F \frac{\alpha M_e}{6\pi M_\mu \left(1 + \frac{M_e}{2M_\mu}\right)^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \frac{\left[\frac{M_e}{2M_\mu} + 2 \frac{m_e \xi}{2M_\mu \alpha} \frac{M_e}{2M_\mu} + \frac{m_e \xi}{2M_\mu \alpha} \left(2 + \frac{m_e \xi}{2M_\mu \alpha}\right) \right]}{\left(1 + \frac{m_e \xi}{2M_\mu \alpha}\right)^2 \left(\frac{M_e}{2M_\mu \alpha} + \frac{m_e \xi}{2M_\mu \alpha}\right)^2} \\
&= 0.035 \text{ MHz}
\end{aligned} \tag{1.72}$$

一方で、Krutov によればミュオンの VP の寄与は $\mathcal{O}(10^{-6})$ MHz と非常に小さくなる。2-loop の VP の寄与についても 1-loop の VP の $\frac{\alpha}{\pi}$ 倍程度となり、0.001 MHz よりも小さいと考えられるため無視されている。

VP の寄与については、Krutov の SOPT による計算によれば、それぞれ以下の通りである [19]

$$\Delta V_{\text{VP VOPT } e\alpha} = 0.151 \text{ MHz} \tag{1.73}$$

$$\Delta V_{\text{VP VOPT } \mu\alpha} = 0.048 \text{ MHz} \tag{1.74}$$

$$\Delta V_{\text{VP VOPT } e\mu} = -0.145 \text{ MHz} \tag{1.75}$$

1.3.2.3 Radiative Recoil

1-loop の真空偏極とクーロン相互作用 $\Delta\mathcal{H}$ を含んだ高次の摂動では radiative-recoil の効果が生じ、以下のオーダーの寄与が生じる。

$$\mathcal{O}\left(\nu_F\alpha\left(\frac{M_e}{M_\mu}\right)^2\ln\frac{M_\mu}{M_e}\right) \quad (1.76)$$

Krutov の計算ではこの効果は 0.004 Hz と身積もられ、不確かさに含まれている。

1.3.2.4 Nuclear structure correction

Nuclear structure effect もミュオニックヘリウム HFS に対する重要な補正の1つである。これは他のミュオニック原子でも同様である。ミュオンと原子核の相互作用を考えた場合、Nuclear structure effect の主要な寄与は、 ${}^4\text{He}^{2+}$ イオンの荷電半径を $r_\alpha = 01.676$ fm として、以下のポテンシャルから計算される [19]。

$$\Delta V_{\text{str},\mu}(\mathbf{r}_\mu) = \frac{2}{3}\pi Z\alpha\langle r_\alpha^2\rangle\delta(\mathbf{r}_\mu) \quad (1.77)$$

$\Delta V_{\text{str},\mu}(\mathbf{r}_\mu)$ の寄与は以下の通り。

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{\text{str},\mu}^{\text{HFS}} &= -\nu_F\frac{8}{3}\alpha^2M_\mu^2r_\alpha^2\left(3\frac{M_e}{M_\mu}-\frac{11}{2}\frac{M_e^2}{M_\mu^2}+\dots\right) \\ &= -0.007 \text{ MHz} \end{aligned} \quad (1.78)$$

同様にして、 e^- と Nuclear structure effect の寄与については以下が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{\text{str},e}^{\text{HFS}} &= -\nu_F\frac{4}{3}\alpha^2M_e^2r_\alpha^2\left[5-\ln\frac{M_e}{M_\mu}+\frac{M_e^2}{M_\mu^2}\left(3\ln\frac{M_e}{M_\mu}-7\right)+\frac{M_e^2}{M_\mu^2}\left(\frac{17}{2}-3\ln\frac{M_e}{M_\mu}\dots\right)\right] \\ &= -0.003 \text{ MHz} \end{aligned} \quad (1.79)$$

1.3.2.5 Two-Photon Exchange Recoil Correction

Krutov によれば、 μ^- と e^- の相互作用を考える際、以下で表される 2 光子を交換する反跳の補正に注意する必要がある [19]。

$$\Delta V_{\text{rec},\mu e}^{\text{HFS}}(\mathbf{x}_{\mu e}) = 8\frac{\alpha^2}{m_\mu^2 - m_e^2}\ln\frac{m_\mu}{m_e}\delta(\mathbf{x}_e) \quad (1.80)$$

この過程の寄与は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{\text{rec},\mu e}^{\text{HFS}}(\mathbf{x}_{\mu e}) &= \nu_F\frac{3\alpha}{\pi}\frac{m_em_\mu}{m_\mu^2 - m_e^2}\ln\frac{m_\mu}{m_e} \\ &= 0.812 \text{ MHz} \end{aligned} \quad (1.81)$$

1.3.2.6 Vartex Correction

QED の摂動計算では (1.53) に対する vertex correction が必要となる。vertex correction は主に異常磁気能率を生じる効果なので、簡単には μ^- と e^- の異常磁気能率 a_μ, a_e を用いて以下のように HFS への寄与が見積もられる [26][28]。

$$\Delta\nu_{\text{rad}} = \nu_F [a_\mu + a_e + a_\mu a_e] \quad (1.82)$$

Krutov と Martynenko の計算では a_μ, a_e の寄与はそれぞれ以下の通りと見積もられている [19]。

$$\Delta\nu_{g-2}^\mu = 5.244 \text{ MHz} \quad (1.83)$$

$$\Delta\nu_{g-2}^e = 5.244 \text{ MHz} \quad (1.84)$$

一方で、Krutov と Martynenko が実際に計算した電子の vertex correction は異常磁気能率からの推定値とは大きく異なり、以下の値である [19]。

$$\Delta\nu_{\text{vertex}}^e = 6.138 \text{ MHz} \quad (1.85)$$

1.3.2.7 Resulting Value and Uncertainty Estimation

以上の値を合計した結果、Krutov と Martynenko による second-order perturbation theory のミュートニックヘリウム原子 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の HFS 理論値は

$$\Delta\nu_{\text{HFS}} = 4465.526 (700) \text{ MHz} \quad (1.86)$$

となる [19]。 $\Delta\nu_{\text{HFS}}$ の不確かさは以下を主要因として見積もられている。

- 三体系波動関数の不確かさに起因する、Fermi Energy ν_F の不確かさ
- α や粒子の質量といったパラメーターの不確かさ
- 計算していない高次の electron vertex corrections

1.3.3 摂動法以外の手法による計算値

${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の HFS の理論計算は perturbation theory 以外の手法でも取り組まれている。 μ^- の位置 x_μ を定数として近似する Born-Oppenheimer 近似では、1981 年に Drachman が [29]

$$\Delta\nu_{\text{HFS}}^{\text{Drachman}} = 4450 \text{ MHz} \quad (1.87)$$

と報告している。ただし不確かさについては言及がない。

変分法によるアプローチでは、Aznabayev が (1.47) から求めた波動関数を使用して以下の値を報告している [18]。

$$\Delta\nu_{\text{HFS}}^{\text{Aznabayev}} = 4\,464.55 (60) \text{ MHz} \quad (1.88)$$

他にも 2012 年には Frolov が以下の計算結果を報告している [30]

$$\Delta\nu_{\text{HFS}}^{\text{Frolov}} = 4464.554\ 54(3)\ \text{MHz} \quad (1.89)$$

Frolov の計算では以下のハミルトニアンから得た波動関数を使用している。

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar}{2m_e} \left[\nabla_e^2 + \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right) \nabla_\mu^2 + \left(\frac{m_e}{M_{\text{He}}} \right) \nabla_{\text{He}}^2 \right] + \frac{e^2}{r_{e\mu}} - \frac{2e^2}{r_{e\text{He}}} - \frac{2e^2}{r_{\mu\text{He}}} \quad (1.90)$$

$\Delta\nu_{\text{HFS}}^{\text{Frolov}}$ の不確かさは $\Delta\nu_{\text{HFS}}^{\text{Aznabayev}}$ よりもはるかに小さい。これは Frolov の計算では不確かさについて、Fermi contact interaction 以外の効果を考慮せず計算精度のみ計上しているためと思われる。実際、2001 年の Pachucki の変分法による計算 [31] では、 μ^- と e^- の異常磁気能率への補正を始め、HFS に影響を与える高次の補正から不確かさを見積もった結果、 $\Delta\nu_{\text{HFS}}^{\text{Aznabayev}}$ と同等の不確かさを持つ以下の値を報告している。

$$\Delta\nu_{\text{HFS}}^{\text{Pachucki}} = 4464.54\ (60)\ \text{MHz} \quad (1.91)$$

第2章 HFS測定原理

原子に磁場を印加すると、磁場が固有状態を混合する。混合した各状態はそれぞれの固有エネルギーの差に応じた周期で状態遷移を繰り返すが、通常この周波数は $\geq \mathcal{O}$ (GHz) であり、ある程度の測定時間で平均すると無視できる。磁場が振動磁場である場合、磁場の振動周期によって状態遷移の周期は異なる。磁場の振動周期と状態間の遷移周波数が近いほど状態遷移は低速となる。この現象を利用して原子の超微細構造を測定できる。

本章では基底状態の ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子にマイクロ波磁場を印加した場合について、超微細構造の測定原理を説明する。

2.1 マイクロ波中での状態振幅

磁場 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ との相互作用ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_B = \begin{pmatrix} (m_I, m_J) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ \frac{g_S\mu_B - g_\mu\mu_\mu}{2} B_z & \frac{g_S\mu_B}{2} B_- & -\frac{g_\mu\mu_\mu}{2} B_- & 0 \\ \frac{g_S\mu_B}{2} B_+ & -\frac{g_S\mu_B + g_\mu\mu_\mu}{2} B_z & 0 & -\frac{g_\mu\mu_\mu}{2} B_- \\ -\frac{g_\mu\mu_\mu}{2} B_+ & 0 & \frac{g_S\mu_B + g_\mu\mu_\mu}{2} B_z & \frac{g_S\mu_B}{2} B_- \\ 0 & -\frac{g_\mu\mu_\mu}{2} B_+ & \frac{g_S\mu_B}{2} B_+ & -\frac{g_S\mu_B - g_\mu\mu_\mu}{2} B_z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

である。ただし、 $B_\pm = B_x \pm iB_y$ であり、 m_I, m_J はそれぞれ μ^-, e^- のスピンを表す。マイクロ波のハミルトニアンは、印加マイクロ波周波数 ν に対して角周波数を $\omega = 2\pi\nu$ として

$$\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_B \cos \omega t \quad (2.2)$$

となる。2次の摂動を無視する限りでは軌道角運動量を持たない状態では電場によるエネルギー変化は生じないため、電場については無視できる。これを各固有状態 $|F, m_F\rangle$ についてのハミルトニアンに変形すれば、

$$P\mathcal{H}_M P^{-1} = P\mathcal{H}_B P^{-1} \cos \omega t$$

$$= \frac{\cos \omega t}{2} \begin{pmatrix} (F, m_F) = (1, 1) & (1, 0) & (1, -1) & (0, 0) \\ (g_S\mu_B + g_\mu\mu_\mu) B_z & (s g_S\mu_B + c g_\mu\mu_\mu) B_- & 0 & (c g_S\mu_B - s g_\mu\mu_\mu) B_- \\ (s g_S\mu_B + c g_\mu\mu_\mu) B_+ & (c^2 - s^2) (g_S\mu_B - g_\mu\mu_\mu) B_z & (c g_S\mu_B + s g_\mu\mu_\mu) B_- & -2cs (g_S\mu_B - g_\mu\mu_\mu) B_z \\ 0 & (c g_S\mu_B + s g_\mu\mu_\mu) B_+ & -(g_S\mu_B + g_\mu\mu_\mu) B_z & -(s g_S\mu_B - c g_\mu\mu_\mu) B_+ \\ (c g_S\mu_B - s g_\mu\mu_\mu) B_+ & -2cs (g_S\mu_B - g_\mu\mu_\mu) B_z & -(s g_S\mu_B - c g_\mu\mu_\mu) B_- & (s^2 - c^2) (g_S\mu_B - g_\mu\mu_\mu) B_z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & -s & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の波動関数を以下のように置く。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \sum_k a_k(t) |k\rangle \exp\left[-i\frac{E_k}{\hbar}t\right] \quad (2.5)$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \\ |3\rangle \\ |4\rangle \end{pmatrix} = \begin{matrix} |F, m_F\rangle \\ \begin{pmatrix} |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |0, 0\rangle \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.6)$$

であり、 $\phi(\mathbf{r})$ は波動関数の空間成分、 E_k は各状態の固有エネルギー、 $a_k(t)$ は各状態の振幅。 $\mathcal{H}_0 = P(\mathcal{H}_{\text{HFS}} + \mathcal{H}_{B_z})P^{-1}$ 、 $\mathcal{H}'_M = \mathcal{H}'_B \cos \omega t = P\mathcal{H}_MP^{-1}$ とすると、Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'_M) \psi(t) \quad (2.7)$$

からマイクロ波による状態変化を表す微分方程式が以下の通りに得られる。

$$\dot{a}_k(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_{k'} a_{k'}(t) \langle k | \mathcal{H}'_B | k' \rangle \cot \omega t \exp\left[-i\frac{E_{k'} - E_k}{\hbar}t\right] \quad (2.8)$$

(2.8) に寿命での崩壊を加えた以下の式が各状態の振幅の時間変化となる。

$$\dot{a}_k(t) = -\frac{\gamma}{2} a_k(t) - \frac{i}{\hbar} \sum_{k'} a_{k'}(t) \langle k | \mathcal{H}'_B | k' \rangle \cot \omega t \exp\left[-i\frac{E_{k'} - E_k}{\hbar}t\right] \quad (2.9)$$

ここで、

$$b_{kk'} = \frac{1}{2\hbar} \langle k | \mathcal{H}'_B | k' \rangle \quad (2.10)$$

$$\omega_{k'k} = \frac{E'_{k'} - E_k}{\hbar} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} f_{k'k} &= 2 \cos \omega t \exp[-i\omega_{k'k}t] \\ &= \exp[-i(\omega_{k'k} + \omega)t] + \exp[-i(\omega_{k'k} - \omega)t] \end{aligned} \quad (2.12)$$

と置く。 $\omega_{k'k}$ は $|k'\rangle, |k\rangle$ 間の遷移角周波数に相当する。遷移周波数の測定では $B_z = 0$ となるようにマイクロ波を印加するので $b_{11} = b_{22} = b_{24} = b_{33} = b_{42} = b_{44} = 0$ 。また $b_{k'k} = b_{kk'}^*$, $f_{k'k} = f_{kk'}^*$ 。 $\omega_{k'k} + \omega \geq O(\text{GHz})$ なので、 $f_{kk'}$ 内の $\exp[-i(\omega_{k'k} + \omega)t]$ の項はある程度の時間で平均すると無視できる。以上から

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{a}_3(t) \\ \dot{a}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -ib_{12}f_{12} & 0 & -ib_{41}^*f_{41}^* \\ -ib_{12}^*f_{12}^* & -\gamma/2 & -ib_{23}f_{23} & 0 \\ 0 & -ib_{23}^*f_{23}^* & -\gamma/2 & -ib_{43}^*f_{43}^* \\ -ib_{41}f_{41} & 0 & -ib_{43}f_{43} & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

図 1.1 から、 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の場合 $E_4 > E_1 \geq E_2 \geq E_3$ であり、Mu の場合 $E_1 > E_2 \geq E_3 \geq E_4$ である。

2.1.1 高磁場

図 1.1 の通り、高磁場では ω_{41} と ω_{23} が近い値となる。 $\omega_{41} - \omega \simeq 0$ となるようにマイクロ波を印加する場合、

$$\omega_{42,43,12,13} - \omega \geq O(\text{GHz})$$

なので $\exp[-i(\omega_{42,43,12,13} - \omega)t]$ は無視でき、各状態の時間変化は以下の通りとなる。

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{a}_3(t) \\ \dot{a}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & 0 & 0 & -ib_{41}^* \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \\ 0 & -\gamma/2 & -ib_{23} \exp[-i(\omega_{23} - \omega)t] & 0 \\ 0 & -ib_{23}^* \exp[i(\omega_{23} - \omega)t] & -\gamma/2 & 0 \\ -ib_{41} \exp[-i(\omega_{41} - \omega)t] & 0 & 0 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

状態が混合する準位だけをまとめた以下の 2 つの方程式は別個に解ける。

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -ib_{41}^* \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \\ -ib_{41} \exp[-i(\omega_{41} - \omega)t] & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_2(t) \\ \dot{a}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -ib_{23} \exp[-i(\omega_{23} - \omega)t] \\ -ib_{23}^* \exp[i(\omega_{23} - \omega)t] & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

(2.15) について、係数行列の固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \exp[-i(\omega_{41} - \omega)t] \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

なので、係数行列を対角化するために以下の行列 Q, Q^{-1} を使う

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \exp[-i(\omega_{41} - \omega)t] & \exp[-i(\omega_{41} - \omega)t] \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \\ -1 & \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$|b| = |b_{41}|$ と置けば、

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -ib_{41}^* \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \\ -ib_{41} \exp[-i(\omega_{41} - \omega)t] & -\gamma/2 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} -\gamma/2 + i|b| & 0 \\ 0 & -\gamma/2 - i|b| \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

よって (2.15) を以下のように変形できる

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 + i|b| & 0 \\ 0 & -\gamma/2 - i|b| \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

としてその時間微分を考えると、

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \left[Q^{-1} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \right] \quad (2.23)$$

$$= Q^{-1} \begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_4(t) \end{pmatrix} + \left[\frac{d}{dt} Q^{-1} \right] \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma/2 + i|b| & 0 \\ 0 & -\gamma/2 - i|b| \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i(\omega_{41} - \omega) \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \\ 0 & i(\omega_{41} - \omega) \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma/2 + i|b| & 0 \\ 0 & -\gamma/2 - i|b| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i(\omega_{41} - \omega) \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \\ 0 & i(\omega_{41} - \omega) \exp[i(\omega_{41} - \omega)t] \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$= A \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

ただし、

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\gamma + 2i|b| + i(\omega_{41} - \omega) & i(\omega_{41} - \omega) \\ i(\omega_{41} - \omega) & -\gamma - 2i|b| + i(\omega_{41} - \omega) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

よって

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \exp[tA] \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$\Gamma = \sqrt{(\omega_{41} - \omega) + 4|b|^2}$ とおいて以下の通りに A を対角化する。

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) + \Gamma] & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) - \Gamma] \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$R = \begin{pmatrix} \omega_{41} - \omega & \omega_{41} - \omega \\ \Gamma - 2|b| & -\Gamma - 2|b| \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$R^{-1} = \frac{1}{2(\omega_{41} - \omega)\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma + 2|b| & \omega_{41} - \omega \\ \Gamma - 2|b| & -(\omega_{41} - \omega) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

これを用いれば

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \exp [tA] \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} (tA)^n \right] \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) + \Gamma] & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) - \Gamma] \end{pmatrix} R \end{pmatrix}^n \right] \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^n}{n!} R^{-1} \begin{pmatrix} \left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) + \Gamma] \right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) - \Gamma] \right)^n \end{pmatrix} R \right] \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$= R^{-1} \begin{pmatrix} \exp \left[-\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) + \Gamma] \right] & 0 \\ 0 & \exp \left[-\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) - \Gamma] \right] \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

以上から、下式が得られる。

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} = Q(t) R^{-1} \begin{pmatrix} \exp \left[-\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) + \Gamma] \right] & 0 \\ 0 & \exp \left[-\frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2} [(\omega_{41} - \omega) - \Gamma] \right] \end{pmatrix} R Q^{-1}(0) \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_4(0) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

これを計算すれば、状態振幅について以下の方程式が得られる。

$$a_1(t) = \left[\left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] - i \frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \right) a_1(0) - i \frac{2|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] a_4(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_{41} - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.39)$$

$$a_4(t) = \left[-i \frac{2|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] a_1(0) + \left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] + i \frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \right) a_4(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_{41} - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.40)$$

$\Gamma = \sqrt{(\omega_{41} - \omega)^2 + 4|b|^2}$ であり、 $|4\rangle$ と $|1\rangle$ の組み合わせでは $|b| = \frac{1}{4\hbar} \sqrt{(cg_S\mu_B - sg_\mu\mu_\mu)^2 (B_x^2 + B_y^2)}$ となる。

(2.16) についても同様に解けば、以下を得る。

$$a_2(t) = \left[\left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] - i \frac{(\omega_{23} - \omega)}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \right) a_2(0) - i \frac{2|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] a_3(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_{23} - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.41)$$

$$a_3(t) = \left[-i \frac{2|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] a_2(0) + \left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] + i \frac{(\omega_{23} - \omega)}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \right) a_3(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_{23} - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.42)$$

この場合 $|b| = \frac{1}{4\hbar} \sqrt{(cg_S\mu_B + sg_\mu\mu_\mu)^2 (B_x^2 + B_y^2)}$ である。

2.1.2 低磁場

磁場が弱い場合は $\omega_{41} \simeq \omega_{42} \simeq \omega_{43} \simeq \omega$ であり、 $\omega_{12,13,23} - \omega \leq O(\text{GHz})$ とできる。 $\omega_{41} = \omega_0$ と置けば、微分方程式は以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{a}_3(t) \\ \dot{a}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & 0 & 0 & -ib_{41}^* \exp[i(\omega_0 - \omega)t] \\ 0 & -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma/2 & ib_{43}^* \exp[i(\omega_0 - \omega)t] \\ -ib_{41} \exp[-i(\omega_0 - \omega)t] & 0 & ib_{43} \exp[-i(\omega_0 - \omega)t] & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

ここで、 $c \simeq s \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、 $2b_{41} = (cg_S\mu_B - sg_\mu\mu_\mu) B_+$ 、 $2b_{43} = -(sg_S\mu_B - cg_\mu\mu_\mu) B_-$ 。x 軸をマイクロ波磁場 \mathbf{B} に平行にとれば、 $b_{41} = -b_{43}^* = b$ として、 $b = b^* = |b|$ なので、以下のようになる。

$$a_{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1(t) \pm a_3(t)] \quad (2.44)$$

$$\dot{a}_4(t) = -i\sqrt{2}|b|a_+(t) - \frac{\gamma}{2}a_4(t) \quad (2.45)$$

(2.44)、(2.45) を使えば微分方程式は以下のように書き換えられる。

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_+(t) \\ \dot{a}_-(t) \\ \dot{a}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & 0 & -i\sqrt{2}|b| \exp[i(\omega_0 - \omega)t] \\ 0 & -\gamma/2 & 0 \\ -i\sqrt{2}|b| \exp[-i(\omega_0 - \omega)t] & 0 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+(t) \\ a_-(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$\Gamma = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 8|b|^2}$ として、 a_+ と a_4 について高磁場の場合と同様に解けば下式を得る。

$$a_-(t) = \frac{a_1(0) - a_3(0)}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t\right] \quad (2.47)$$

$$a_+(t) = \left[\left(\cos\left[\frac{\Gamma}{2}t\right] - i\frac{(\omega_0 - \omega)}{\Gamma} \sin\left[\frac{\Gamma}{2}t\right] \right) \frac{a_1(0) + a_3(0)}{\sqrt{2}} - i\frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \sin\left[\frac{\Gamma}{2}t\right] a_4(0) \right] \exp\left[i\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right] \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t\right] \quad (2.48)$$

$$a_4(t) = \left[-i\frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \sin\left[\frac{\Gamma}{2}t\right] \frac{a_1(0) + a_3(0)}{\sqrt{2}} + \left(\cos\left[\frac{\Gamma}{2}t\right] + i\frac{(\omega_0 - \omega)}{\Gamma} \sin\left[\frac{\Gamma}{2}t\right] \right) a_4(0) \right] \exp\left[i\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right] \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t\right] \quad (2.49)$$

となる。 $a_1(t)$, $a_3(t)$ は以下から求める。

$$a_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+(t) + a_-(t)) \quad (2.50)$$

$$a_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+(t) - a_-(t)) \quad (2.51)$$

2.2 初期状態

ミューオニックヘリウム内の μ^- の偏極率 P_μ は

$$P_\mu = \frac{\sum_{m_I, m_J} |\langle m_I = \frac{1}{2} | \rho_{m_I, m_J} | m_I, m_J \rangle|^2 - \sum_{m_I, m_J} |\langle m_I = -\frac{1}{2} | \rho_{m_I, m_J} | m_I, m_J \rangle|^2}{\sum_{m_I, m_J} |\langle m_I = \frac{1}{2} | \rho_{m_I, m_J} | m_I, m_J \rangle|^2 + \sum_{m_I, m_J} |\langle m_I = -\frac{1}{2} | \rho_{m_I, m_J} | m_I, m_J \rangle|^2} \quad (2.52)$$

で与えられる。ただし ρ_{m_I, m_J} は各状態の振幅。よって

$$P_\mu = \frac{\rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 + \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2 - \rho_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 - \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2}{\sum_{m_I, m_J} |\rho_{m_I, m_J}|^2} \quad (2.53)$$

同様に、電子の偏極率 P_e は

$$P_e = \frac{\rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 - \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2 + \rho_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 - \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2}{\sum_{F, m_F} |\rho_{F, m_F}|^2} \quad (2.54)$$

$\sum_{m_I, m_J} |\rho_{m_I, m_J}|^2 = 1$ として計算すると、以下が得られる。

$$\rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 = \frac{1 + P_\mu}{2} \frac{1 + P_e}{2} \quad (2.55)$$

$$\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2 = \frac{1 + P_\mu}{2} \frac{1 - P_e}{2} \quad (2.56)$$

$$\rho_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 = \frac{1 - P_\mu}{2} \frac{1 + P_e}{2} \quad (2.57)$$

$$\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2 = \frac{1 - P_\mu}{2} \frac{1 - P_e}{2} \quad (2.58)$$

$$(2.59)$$

これらを使えば、 $|F, m_F\rangle$ の密度行列を以下のように書ける。

$$\rho = \frac{1}{4} P' \begin{pmatrix} (1+P_\mu)(1+P_e) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+P_\mu)(1-P_e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-P_\mu)(1+P_e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-P_\mu)(1-P_e) \end{pmatrix} P'^{-1} \quad (2.60)$$

非対角成分は各状態の位相関係を意味し、統計平均をとると消える。

以上から、 μ^- の偏極率が P_μ 、 e^- の偏極率が P_e のときの初期状態について以下を得る。

$$|a_1(0)|^2 = \frac{1}{4} (1+P_\mu)(1+P_e) \quad (2.61)$$

$$|a_2(0)|^2 = \frac{1}{4} [s^2(1+P_\mu)(1-P_e) + c^2(1-P_\mu)(1+P_e)] \quad (2.62)$$

$$|a_3(0)|^2 = \frac{1}{4} (1-P_\mu)(1-P_e) \quad (2.63)$$

$$|a_4(0)|^2 = \frac{1}{4} [c^2(1+P_\mu)(1-P_e) + s^2(1-P_\mu)(1+P_e)] \quad (2.64)$$

2.3 ミューオン偏極率の時間発展

$|\uparrow_\mu\rangle = |m_I = \pm\frac{1}{2}\rangle$ とする。ミューオニックヘリウム の波動関数を

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \sum_k^4 a_k(t) |k\rangle \exp\left[-i\frac{E_k}{\hbar}t\right] \quad (2.65)$$

とした場合、ミューオンの偏極方向の期待値は

$$\langle P(t) \rangle = \sum_{k,j}^4 a_k^*(t) a_j(t) (\langle k|\uparrow_\mu\rangle \langle \uparrow_\mu|j\rangle - \langle k|\downarrow_\mu\rangle \langle \downarrow_\mu|j\rangle) \exp\left[-i\frac{E_k}{\hbar}t\right] \quad (2.66)$$

であり、

$$\langle 1|\uparrow_\mu\rangle = \langle \uparrow_\mu|1\rangle = 1 \quad (2.67)$$

$$\langle 1|\downarrow_\mu\rangle = \langle \downarrow_\mu|1\rangle = 0 \quad (2.68)$$

$$\langle 2|\uparrow_\mu\rangle = \langle \uparrow_\mu|2\rangle = s \quad (2.69)$$

$$\langle 2|\downarrow_\mu\rangle = \langle \downarrow_\mu|2\rangle = c \quad (2.70)$$

$$\langle 3|\uparrow_\mu\rangle = \langle \uparrow_\mu|3\rangle = 0 \quad (2.71)$$

$$\langle 3|\downarrow_\mu\rangle = \langle \downarrow_\mu|3\rangle = 1 \quad (2.72)$$

$$\langle 4|\uparrow_\mu\rangle = \langle \uparrow_\mu|4\rangle = c \quad (2.73)$$

$$\langle 4|\downarrow\mu\rangle = \langle \downarrow\mu|4\rangle = -s \quad (2.74)$$

なので、

$$S_{\mu_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 - c^2 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2sc & 0 & c^2 - s \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

として

$$\begin{aligned} \langle P_\mu(t) \rangle &= \sum_{k,j}^4 a_k^*(t)a_j(t) \langle k|S_{\mu_z}|j\rangle \exp\left[-i\frac{E_k}{\hbar}t\right] \\ &= |a_1(t)|^2 - |a_3(t)|^2 + (s^2 - c^2) \left(|a_2(t)|^2 - |a_4(t)|^2\right) + 4sc\text{Re} \left(a_2^*(t)a_4(t) \exp\left[i\frac{E_2 - E_4}{\hbar}t\right] \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

(2.77)

電子についても同様に考えれば

$$\langle P_e(t) \rangle = |a_1(t)|^2 - |a_3(t)|^2 - (s^2 - c^2) \left(|a_2(t)|^2 - |a_4(t)|^2\right) - 4sc\text{Re} \left(a_2^*(t)a_4(t) \exp\left[i\frac{E_2 - E_4}{\hbar}t\right] \right) \quad (2.78)$$

ただし、ミューオンの崩壊レート $\gamma = 454.90(17)$ kHz に対して $\frac{E_2 - E_4}{\hbar}$ は $\mathcal{O}(\text{GHz})$ と遥かに大きいので、第4項は無視できる。

2.3.1 高磁場

高磁場においては

$$a_1(t) = \left[\left(\cos\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] - i\frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma_{41}} \sin\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] \right) a_1(0) - i\frac{2|b_{41}|}{\Gamma} \sin\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] a_4(0) \right] \exp\left[i\frac{\omega_{41} - \omega}{2}t\right] \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t\right] \quad (2.79)$$

なので

$$\begin{aligned} |a_1(t)|^2 &= \left[\left(\cos^2\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] + \left(\frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma_{41}}\right)^2 \sin^2\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] \right) |a_1(0)|^2 + \left(\frac{2|b_{41}|}{\Gamma}\right)^2 \sin^2\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] |a_4(0)|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Re} \left(i\frac{2|b_{41}|}{\Gamma_{41}} \left(\cos\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] - i\frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma_{41}} \sin\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] \right) \sin\left[\frac{\Gamma_{41}}{2}t\right] a_1^*(0)a_4(0) \right) \right] \exp[-\gamma t] \end{aligned} \quad (2.80)$$

初期状態についての議論から、 $a_1^*(0)a_4(0) = a_1(0)a_4^*(0) = 0$ なので、結局

$$|a_1(t)|^2 = \left[\left(\cos^2 \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] + \left(\frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma_{41}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] \right) |a_1(0)|^2 + \left(\frac{2|b_{41}|}{\Gamma} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] |a_4(0)|^2 \right] \exp[-\gamma t] \quad (2.81)$$

同様にすれば、以下が得られる

$$a_2(t) = \left[\left(\cos \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] - i \frac{(\omega_{23} - \omega)}{\Gamma_{23}} \sin \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] \right) a_2(0) - i \frac{2|b_{23}|}{\Gamma_{23}} \sin \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] a_3(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_{23} - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.82)$$

$$|a_2(t)|^2 = \left[\left(\cos^2 \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] + \left(\frac{(\omega_{23} - \omega)}{\Gamma_{23}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] \right) |a_2(0)|^2 + \left(\frac{2|b_{23}|}{\Gamma_{23}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] |a_3(0)|^2 + \frac{4|b_{23}|}{\Gamma_{23}} \frac{(\omega_{23} - \omega)}{\Gamma_{23}} \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] a_2(0)a_3(0) \right] \exp[-\gamma t] \quad (2.83)$$

$$a_3(t) = \left[-i \frac{2|b|}{\Gamma_{23}} \sin \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] a_2(0) + \left(\cos \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] + i \frac{(\omega_{23} - \omega)}{\Gamma_{23}} \sin \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] \right) a_3(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_{23} - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.84)$$

$$|a_3(t)|^2 = \left[\left(\frac{2|b_{23}|}{\Gamma_{23}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] |a_2(0)|^2 + \left(\cos^2 \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] + \left(\frac{(\omega_{23} - \omega)}{\Gamma_{23}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{23}}{2} t \right] \right) |a_3(0)|^2 \right] \exp[-\gamma t] \quad (2.85)$$

$$a_4(t) = \left[-i \frac{2|b_{41}|}{\Gamma_{41}} \sin \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] a_1(0) + \left(\cos \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] + i \frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma_{41}} \sin \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] \right) a_4(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_{41} - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.86)$$

$$|a_4(t)|^2 = \left[\left(\frac{2|b_{41}|}{\Gamma_{41}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] |a_1(0)|^2 + \left(\cos^2 \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] + \left(\frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma_{41}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] \right) |a_4(0)|^2 \right] \exp[-\gamma t] \quad (2.87)$$

$$\Gamma_{41} = \sqrt{(\omega_{41} - \omega)^2 + 4|b_{41}|^2} \quad (2.88)$$

$$|b_{41}| = \frac{1}{4\hbar} \sqrt{(cg_S \mu_B - sg_\mu \mu_\mu)^2 (B_x^2 + B_y^2)} \quad (2.89)$$

2.3.2 低磁場

低磁場では $\Gamma = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 8|b|^2}$ であり、

$$a_-(t) = \frac{a_1(0) - a_3(0)}{\sqrt{2}} \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.90)$$

$$a_+(t) = \left[\left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] - i \frac{(\omega_0 - \omega)}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \right) \frac{a_1(0) + a_3(0)}{\sqrt{2}} - i \frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] a_4(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.91)$$

$$a_4(t) = \left[-i \frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \frac{a_1(0) + a_3(0)}{\sqrt{2}} + \left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] + i \frac{(\omega_0 - \omega)}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \right) a_4(0) \right] \exp \left[i \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.92)$$

$$a_2(t) = a_2(0) \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.93)$$

である。よって、 $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ として

$$a_1(t) = \left[\left[\left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] + \cos \left[\frac{\Delta\omega}{2} t \right] \right) - i \left(\frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] + \sin \left[\frac{\Delta\omega}{2} t \right] \right) \right] \frac{a_1(0)}{2} \right. \\ \left. + \left[\left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] - \cos \left[\frac{\Delta\omega}{2} t \right] \right) - i \left(\frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] - \sin \left[\frac{\Delta\omega}{2} t \right] \right) \right] \frac{a_3(0)}{2} \right. \\ \left. - i \frac{2|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] a_4(0) \right] \exp \left[i \frac{\Delta\omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.94)$$

$$a_3(t) = \left[\left[\left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] - \cos \left[\frac{\Delta\omega}{2} t \right] \right) - i \left(\frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] - \sin \left[\frac{\Delta\omega}{2} t \right] \right) \right] \frac{a_1(0)}{2} \right. \\ \left. + \left[\left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] + \cos \left[\frac{\Delta\omega}{2} t \right] \right) - i \left(\frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] + \sin \left[\frac{\Delta\omega}{2} t \right] \right) \right] \frac{a_3(0)}{2} \right. \\ \left. - i \frac{2|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] a_4(0) \right] \exp \left[i \frac{\Delta\omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.95)$$

$$a_4(t) = \left[-i \frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \frac{a_1(0) + a_3(0)}{\sqrt{2}} + \left(\cos \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] + i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \right) a_4(0) \right] \exp \left[i \frac{\Delta\omega}{2} t \right] \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t \right] \quad (2.96)$$

。これらを用いて計算すれば、以下が得られる。

$$|a_1(t)|^2 = \left[\left[2 - \left(\frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \right)^2 \frac{1 - \cos[\Gamma t]}{2} + \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] + \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] \right] \right] \left| \frac{a_1(0)}{2} \right|^2 \right. \\ \left. + \left[2 - \left(\frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \right)^2 \frac{1 - \cos[\Gamma t]}{2} - \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] + \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] \right] \right] \left| \frac{a_3(0)}{2} \right|^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{2|b|}{\Gamma} \right)^2 \frac{1 - \cos[\Gamma t]}{2} |a_4(0)|^2 \right] \exp[-\gamma t] \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned}
|a_3(t)|^2 = & \left[\left[2 - \left(\frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \right)^2 \frac{1 - \cos[\Gamma t]}{2} - \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] + \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] \right] \right] \left| \frac{a_1(0)}{2} \right|^2 \\
& + \left[\left[2 - \left(\frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \right)^2 \frac{1 - \cos[\Gamma t]}{2} + \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] + \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] \right] \right] \left| \frac{a_3(0)}{2} \right|^2 \\
& \quad + \left(\frac{2|b|}{\Gamma} \right)^2 \frac{1 - \cos[\Gamma t]}{2} |a_4(0)|^2 \right] \exp[-\gamma t]
\end{aligned} \tag{2.98}$$

$$|a_4(t)|^2 = \left[\left(\frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \left(\left| \frac{a_1(0)}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{a_3(0)}{\sqrt{2}} \right|^2 \right) + \left(1 - \left(\frac{2\sqrt{2}|b|}{\Gamma} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma}{2} t \right] \right) |a_4(0)|^2 \right] \exp[-\gamma t] \tag{2.99}$$

2.4 共鳴曲線

高磁場と低磁場のいずれの場合においても、 $\Delta\omega$ が大きくなると $\sin^2 \frac{\Gamma}{2} t$ 、 $\cos \Gamma t$ 、 $\cos \frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t$ の項の係数は小さく、 $\cos \frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t$ の項は振動の周期が大きくなり、 $|b| = 0$ kHz とした場合に近づく。これを利用し、 $|b| = 0$ の場合とそうでない場合の状態量の違いを時間で積分した信号量を求めると $\Delta\omega = 0$ にピークを持つ共鳴曲線が得られる。ミュオンやミュオンニクヘリウム原子の場合、共鳴曲線はマイクロ波を印加する場合としない場合の崩壊電子/陽電子検出数の差を時間で積分することで得られる。時刻 t_1 から t_2 の間に検出される二次粒子の数を、マイクロ波を印加する場合は $N_{\text{ON}}(y_0, \theta, t_1, t_2)$ 、しない場合は $N_{\text{OFF}}(y_0, \theta, t_1, t_2)$ とし、信号量 S を以下のように定義する

$$S = \frac{\Delta N}{N_{\text{OFF}}} \tag{2.100}$$

$$= \frac{N_{\text{ON}}}{N_{\text{OFF}}} - 1 \tag{2.101}$$

ミュオンの崩壊電子、陽電子の放出方向はスピン方向に相関するため、マイクロ波を印加する場合の偏極率 $P_z^{\text{ON}}(t)$ と、しない場合の偏極率 $P_z^{\text{OFF}}(t)$ を用いて

$$\Delta N = N_{\text{ON}} - N_{\text{OFF}} \tag{2.102}$$

$$= \frac{\gamma d\Omega}{4\pi} A_2(y_0) \cos \theta \left[\int_{t_1}^{t_2} [P_z^{\text{ON}}(t) - P_z^{\text{OFF}}(t)] \exp(-\gamma t) dt \right] \tag{2.103}$$

とできる。

2.4.1 ミュオンの崩壊

ミュオンの主要な崩壊は弱い相互作用による、Michel 崩壊と呼ばれる以下のモードである。

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \tag{2.104}$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (2.105)$$

ミューオンの寿命 τ_μ 、あるいは崩壊レートの測定値は以下の値である [32]

$$\tau_\mu \equiv \frac{1}{\gamma} = 2.196\,981\,1(22)\,\mu\text{s} \quad (2.106)$$

自由ミューオンの崩壊スペクトルは以下の式で表される [33]

$$N(y, \theta, t) = \frac{\gamma}{2\pi} y^2 [(3 - 2y) + (1 - 2y) P_z(t) \cos \theta] \exp[-\gamma t] \quad (2.107)$$

ただし $y = p/p_{max}$ は崩壊電子/陽電子の最大運動量に対する割合であり、 θ はミューオンのスピンと電子、陽電子の運動量のなす角度。原子核の束縛軌道中で負ミューオンが崩壊する場合、原子核との反跳によって二次粒子の持ちうるエネルギーは増加する。ただしヘリウム原子核は軽いため、この効果はミューオニックヘリウムの場合無視できる。

$y \geq y_0$ のミューオンを立体角 $d\Omega$ の領域で検出する場合の検出率は

$$N(y_0, \theta, t) d\Omega = \int_{y_0}^1 N(y, \theta, t) dy d\Omega \quad (2.108)$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi} [A_1(y_0) + A_2(y_0) P_z(t) \cos \theta] \exp[-\gamma t] d\Omega \quad (2.109)$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi} A_1(y_0) [1 + a(y_0) P_z(t) \cos \theta] \exp[-\gamma t] d\Omega \quad (2.110)$$

$$A_1(y_0) = 1 - (2y_0^3 - y_0^4) \quad (2.111)$$

$$A_2(y_0) = \frac{1}{3} - \left(y_0^4 - \frac{2}{3} y_0^3 \right) \quad (2.112)$$

$$a(y_0) = \frac{A_2(y_0)}{A_1(y_0)} \quad (2.113)$$

である。時刻 t_1 から t_2 の間に検出される二次粒子の数は

$$N(y_0, \theta, t_1, t_2) d\Omega = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\gamma}{4\pi} A_1(y_0) [1 + a(y_0) P_z(t) \cos \theta] \exp[-\gamma t] d\Omega \quad (2.114)$$

$$= \frac{\gamma d\Omega}{4\pi} \left[[-A_1(y_0) (\exp(-\gamma t))]_{t_1}^{t_2} + A_2(y_0) \cos \theta \left[\int_{t_1}^{t_2} P_{z0}(t) \exp(-\gamma t) dt \right] \right] \quad (2.115)$$

となる。

2.4.2 高磁場の場合

${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の場合、高磁場極限では $c \approx 0, s \approx 1$ なので、 $|1\rangle$ と $|4\rangle$ の遷移を測定する場合 (2.77) から、偏極率は以下で表せる。

$$P_z(t) = \cos^2 \left[\frac{\Gamma_{41} t}{2} \right] + \left(\frac{(\omega_{41} - \omega)}{\Gamma_{41}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{41} t}{2} \right] - \left(\frac{2|b_{41}|}{\Gamma_{41}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{41} t}{2} \right] \quad (2.116)$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{2|b_{41}|}{\Gamma_{41}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] \quad (2.117)$$

マイクロ波を印加しない場合 $|b_{41}| = 0$ なので

$$[P_z^{\text{ON}}(t) - P_z^{\text{OFF}}(t)] \exp[-\gamma t] = [|a_4(0)| - |a_1(0)|] \left[2 \left(\frac{2|b_{41}|}{\Gamma_{41}} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\Gamma_{41}}{2} t \right] \exp[-\gamma t] \right] \quad (2.118)$$

$$= 2 [|a_4(0)| - |a_1(0)|] \frac{2|b_{41}|^2}{\Gamma_{41}^2} (1 - \cos[\Gamma_{41}t]) \exp[-\gamma t] \quad (2.119)$$

ミューオンの初期偏極率を P 、電子の初期偏極率を 0 とすれば $|a_4(0)| - |a_1(0)| = -P$ なので

$$[P_z^{\text{ON}}(t) - P_z^{\text{OFF}}(t)] \exp[-\gamma t] = -P \frac{2|b_{41}|^2}{\Gamma_{41}^2} (1 - \cos[\Gamma_{41}t]) \exp[-\gamma t] \quad (2.120)$$

したがって、 ΔN は以下の通りになる。

$$\Delta N(y_0, \theta, t_1, t_2) = \frac{\gamma d\Omega}{4\pi} A_2(y_0) \cos \theta \left[\int_{t_1}^{t_2} -P \frac{2|b_{41}|^2}{\Gamma_{41}^2} (1 - \cos[\Gamma_{41}t]) \exp[-\gamma t] dt \right] \quad (2.121)$$

以上から、以下が得られる。

$$S(t_1, t_2) = \frac{-PA_2(y_0) \cos \theta}{[A_1(y_0) - \frac{P}{2}A_2(y_0) \cos \theta]} \left[\frac{\gamma \int_{t_1}^{t_2} \frac{2|b_{41}|^2}{\Gamma_{41}^2} (1 - \cos[\Gamma_{41}t]) \exp[-\gamma t] dt}{\gamma \int_{t_1}^{t_2} \exp[-\gamma t] dt} \right] \quad (2.122)$$

$$= \frac{-PA_2(y_0) \cos \theta}{[A_1(y_0) - \frac{P}{2}A_2(y_0) \cos \theta]} L(t_1, t_2) \quad (2.123)$$

$$L(t_1, t_2) = \frac{1}{\exp[-\gamma t_1] - \exp[-\gamma t_2]} \frac{2|b_{41}|^2}{\Gamma_{41}^2} \left[\exp[-\gamma t_1] \left(1 - g(t_1) \frac{\gamma^2}{\Gamma_{41}^2 + \gamma^2} \right) - \exp[-\gamma t_2] \left(1 - g(t_2) \frac{\gamma^2}{\Gamma_{41}^2 + \gamma^2} \right) \right] \quad (2.124)$$

$$g(t) = \cos(\Gamma_{41}t) - \frac{\Gamma_{41}}{\gamma} \sin(\Gamma_{41}t) \quad (2.125)$$

$$\Gamma_{41} = \sqrt{(\omega_{41} - \omega)^2 + 4|b_{41}|^2} \quad (2.126)$$

$$|b_{41}| = \frac{1}{4\hbar} \sqrt{(cg_S\mu_B - sg_\mu\mu_\mu)^2 (B_x^2 + B_y^2)} \quad (2.127)$$

|2) と |3) の遷移を測定する場合、 $\Gamma_{41} \rightarrow \Gamma_{23}, |b_{41}| \rightarrow |b_{23}|, -P \rightarrow P$ と置き換えれば良い。

2.4.3 低磁場の場合

低磁場においては $s \approx c$ なので偏極率は以下で表せる。

$$P_z(t) = |a_1(t)| - |a_3(t)| \quad (2.128)$$

$$= 2 \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] + \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] \right] \left[\frac{|a_1(0)|^2}{4} - \frac{|a_3(0)|^2}{4} \right] \quad (2.129)$$

マイクロ波を印加しない場合、 $\Gamma = \Delta\omega$ であり、 $P_z^{\text{OFF}}(t) = [|a_1(0)|^2 - |a_3(0)|^2]$ なので

$$P_z^{\text{ON}}(t) - P_z^{\text{OFF}}(t) = \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] + \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] - 1 \right] [|a_1(0)|^2 - |a_3(0)|^2] \quad (2.130)$$

よって、初期偏極率を P とすれば以下が得られる。

$$S(t_1, t_2) = \frac{\Delta N(y_0, \theta, t_1, t_2)}{N_{\text{OFF}}(y_0, \theta, t_1, t_2)} \quad (2.131)$$

$$= \frac{\frac{P}{2} A_2(y_0) \cos \theta}{[A_1(y_0) - \frac{P}{2} A_2(y_0) \cos \theta]} \left[\frac{\gamma \int_{t_1}^{t_2} \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] + \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2\Gamma} \right] \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] - 1 \right] \exp[-\gamma t] dt}{\gamma \int_{t_1}^{t_2} \exp[-\gamma t] dt} \right] \quad (2.132)$$

$$= \frac{P A_2(y_0) \cos \theta}{[A_1(y_0) - \frac{P}{2} A_2(y_0) \cos \theta]} L(t_1, t_2) \quad (2.133)$$

$$L(t_1, t_2) = \frac{\gamma}{\exp(-\gamma t_1) - \exp(-\gamma t_2)} \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{\Gamma} \frac{\left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} \right] \sin \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] - \gamma \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right]}{[\Gamma + \Delta\omega]^2 + 4\gamma^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Gamma + \Delta\omega}{\Gamma} \frac{\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} \right] \sin \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] - \gamma \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right]}{[\Gamma - \Delta\omega]^2 + 4\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma} \right] \exp[-\gamma t] \right]_{t_1}^{t_2} \quad (2.134)$$

$$\Gamma = \sqrt{\Delta\omega^2 + 8|b|^2} \quad (2.135)$$

$$|b| = \frac{1}{4\hbar} \sqrt{(cg_S \mu_B - sg_\mu \mu_\mu)^2 (B_x^2 + B_y^2)} \quad (2.136)$$

低磁場における共鳴曲線の形状を図 2.1, 2.2 に示す。

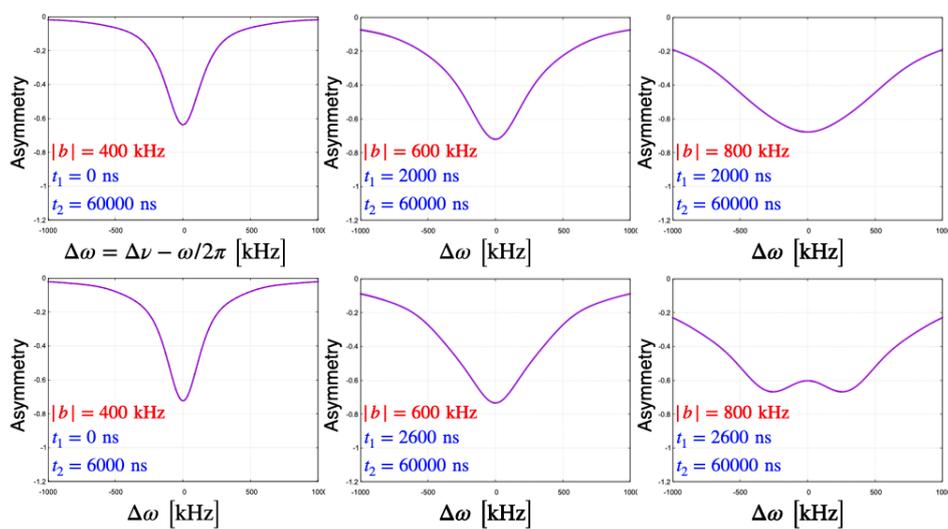


図 2.1: 低磁場で、印加マイクロ波強度に相当するパラメーター $|b|$ を変化させた際の共鳴曲線。 $|b|$ が大きい、すなわち印加マイクロ波強度が大きいほど線幅が広がる。

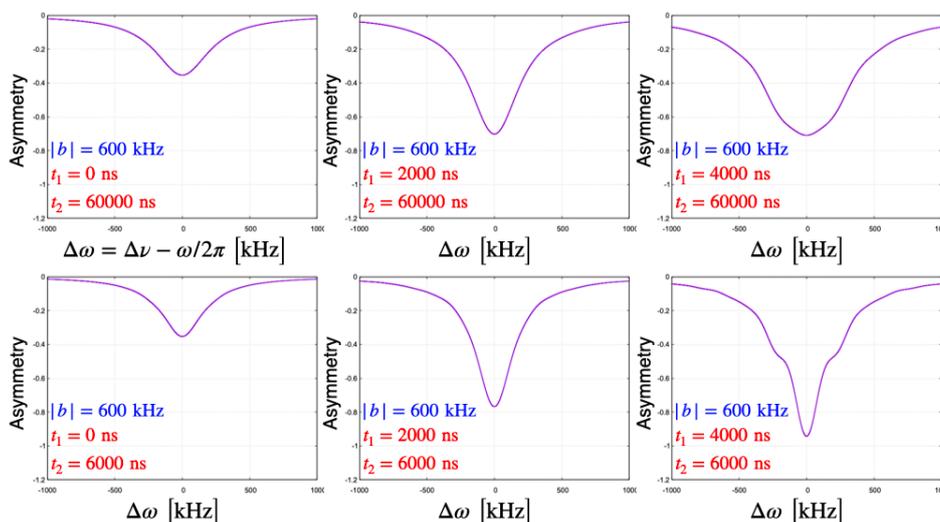


図 2.2: 低磁場で、積分間隔 $[t_1, t_2]$ を変化させた際の共鳴曲線。積分間隔次第で共鳴曲線の形状は大きく変化する。

2.4.4 ミューオニウムの共鳴曲線

${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の原子核の磁気モーメントは μ^- に等しく、図 1.1 の通り状態によるエネルギーの大小関係が水素原子や Mu の場合と異なる。このため水素原子や Mu の場合の取り扱いが ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子とわずかに異なる。Mu の場合、スピン固有状態を固有エネルギーが高い順に並べると $|1\rangle \geq |2\rangle \geq |3\rangle > |4\rangle$ となる。したがって、高磁場においては $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ と $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ の遷移を考える。加えて $\Delta\nu > 0$ と扱うため、高磁場極限では $c \approx 1, s \approx 0$ となる。これにより各状態の振幅の式が変化する。ただし最終的に得られる共鳴曲線 $L(t_1, t_2)$ は ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の場合と同様の形になる。

低磁場の場合については ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子と同様に扱え、得られる共鳴曲線も同様になる。

2.5 超微細構造の圧力依存性

ミューオニウムやミューオニックヘリウム原子は周囲のガス原子と衝突を繰り返す。この際ガス中の原子との相互作用の効果で ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ や Mu の準位エネルギーは変動する。Torii によれば、ガス原子とミューオニックヘリウム原子の距離を R として、原子同士の相互作用ポテンシャルを $V(R(t))$ とすると原子の振動状態は以下のように表せる [34]

$$f(t) = \exp[-i\omega_0 t + i\eta(t)] \quad (2.137)$$

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^t \kappa(t') dt' \quad (2.138)$$

$$\kappa(t) = V(R(t)) \quad (2.139)$$

ω_0 は共鳴周波数、 $\kappa(t)$ は 周波数の変動、 $\eta(t)$ はガス同士の相互作用により生じる位相の変化。非弾性衝突を無視すれば、 $\eta(t)$ は実数となる。共鳴曲線 $I(\omega)$ は $f(t)$ のフーリエ変換から得られ、

$$I(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} f(t) \exp[i\omega t] dt \right|^2 \quad (2.140)$$

となる。

ガスの圧力や温度といった巨視的条件は通常時間によって変化せず、 $f(t)$ は定常的にランダムな過程である。この場合 $I(\omega)$ は、以下のように相関関数 $\Phi(\tau)$ のフーリエ変換で書き直せる (Wiener-Khinchin Theorem)

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[\int_0^{\infty} \Phi(\tau) \exp[-i\omega\tau] d\tau \right] \quad (2.141)$$

$$\Phi(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} f^*(t) f(t+\tau) dt \quad (2.142)$$

$$= \langle f^*(0) f(\tau) \rangle \quad (2.143)$$

$\Phi(\tau)$ について、

$$\Delta\Phi(\tau) = -\Phi(\tau) \langle 1 - \exp[-i\Delta\eta] \rangle \equiv -\Phi(\tau)(\Delta - i\gamma)\Delta\tau \quad (2.144)$$

とでき、

$$\Delta - i\gamma = -iNv \int_{b_1}^{\infty} (1 - \exp[-\eta(b)]) 2\pi b db \equiv -iNv(\sigma_{\Delta} - i\sigma_{\gamma}) \quad (2.145)$$

となる。 N はガス原子の数であり、 v は衝突する原子の相対速度、 $\eta(b) = \eta_i(b) - \eta_f(b)$ は衝突前後の位相変化。

(2.144) から、

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = -(\Delta - i\gamma)\Phi \quad (2.146)$$

$$\Phi = \exp[-(\Delta - i\gamma)\tau] \quad (2.147)$$

である。これを用いれば

$$I(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \Delta)^2 + \gamma^2} \quad (2.148)$$

となり、ガス原子の数、すなわちガス圧力に比例して共鳴周波数はシフトする。したがって HFS 分光の際は複数の標的ガス圧で測定し、真空に外挿する必要がある。三体衝突の考慮が必要な高圧環境ではさらに 2 次の項が生じる。

ミュオニウム HFS の場合、Crane らによれば、ガス圧によるシフトは以下の通りである [35]。

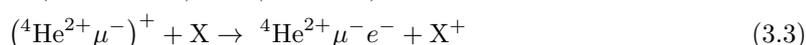
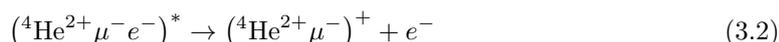
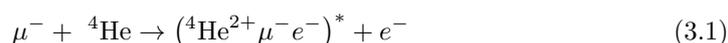
$$\Delta\nu_{\text{Mu}}(D) = \Delta\nu_{\text{Mu}}(0) (1 + aP + bP^2) \quad (2.149)$$

Gas	a [$10^{-9}/\text{Torr}$]	b [$10^{-15}/\text{Torr}^2$]
Argon	-5.00 ± 0.24	8.14 ± 2.59
Krypton	-10.59 ± 0.39	8.79 ± 5.90

P は 0°C でのガス密度、 a は 1 次の密度シフトの係数、 b は二次の密度シフトの係数である。

第3章 ミューオンニックヘリウムHFS測定装置

我々は茨城県東海村にある J-PARC の物質生命科学実験施設 (MLF : Material and Life Science Experimental Facility) Muon Source Extension (MUSE) を使用して ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の超微細構造を分光している。図 3.1 に測定の概念図を示す。測定ではまず ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子生成のために ${}^4\text{He}$ と、少量の電子供給源を混合したガス標的を封入したガスチャンバーに偏極 μ^- ビームを入射する。 μ^- は標的ガスをイオン化しながら減速し、十分エネルギーが低くなると以下の過程で ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子を形成する。



ただし、X は electron donor として混合したガス原子。X = Xe の場合については Souder らが詳細を報告している [36]。

生成した ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子にマイクロ波を照射すると共鳴により ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の状態が遷移し、 μ^- のスピンは反転する。 μ^- は $2.2 \mu\text{s}$ で崩壊し、スピンと反平行な方向に崩壊電子を多く放出する。したがって印加マイクロ波の周波数を掃引しながらガスチャンバー下流の検出器で N_{ON} と N_{OFF} を測定すれば、2.4 で求めた共鳴曲線が得られる。

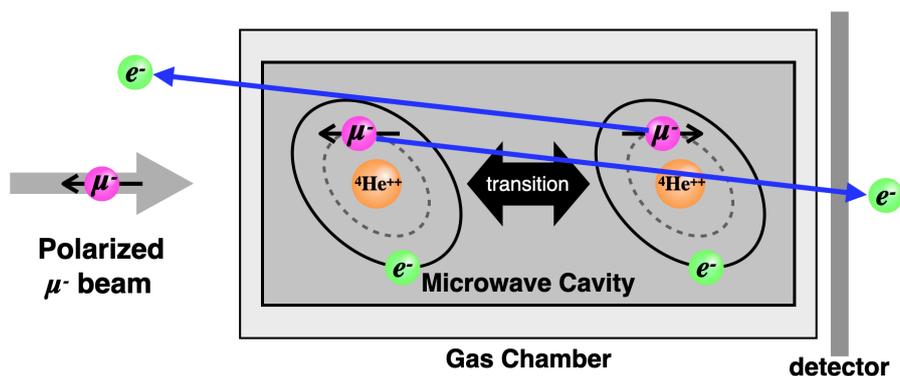


図 3.1: ミューオンニックヘリウム超微細構造分光の概念図

本実験には、J-PARC でミューオニウムの超微細構造を分光する MuSEUM コラボレーションの装置を、キャビティをカスタマイズして利用している。ゼロ磁場での測定における具体的な装置の

配置図は図 3.2 の通りである。

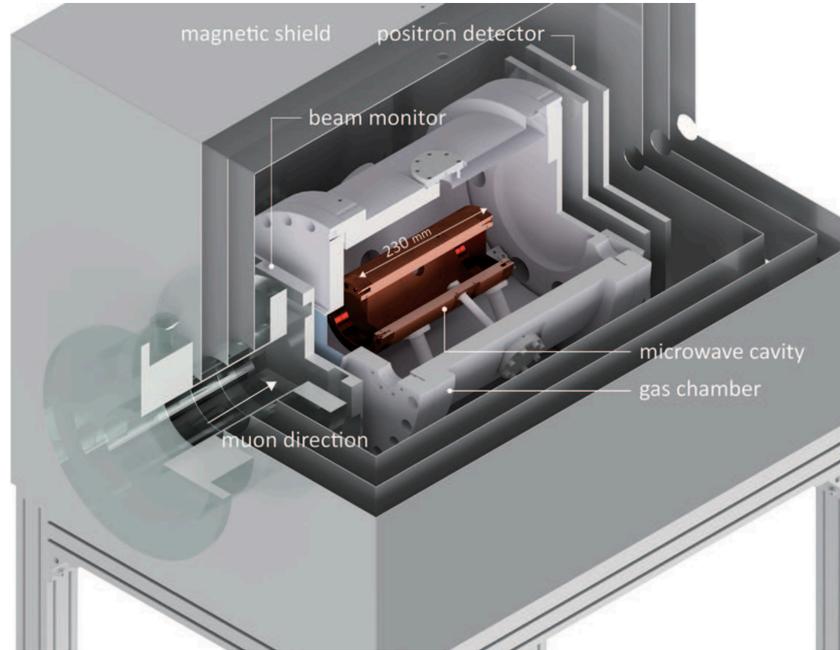


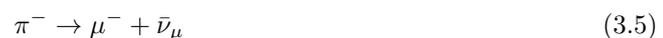
図 3.2: ゼロ磁場における測定装置の概念図 [37]。ガスチャンバー内部にマイクロ波キャビティを設置する。崩壊陽電子はチャンバー下流の検出器でカウントする。装置は磁気シールドで消磁する。

以下では各装置の詳細について説明する。

3.1 J-PARC MLF MUSE D-Line

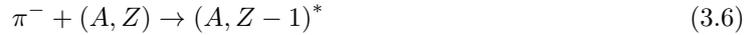
J-PARC は茨城県東海村に所在する、大強度陽子加速施設である。イオン源から供給される H^- は全長 400 m の線形加速器 (LINIAC) により 400 MeV まで加速される。 H^- ビームは周長 30 m の RCS (Rapid Cycling Synchrotron) に輸送され、荷電変換フォイルにより陽子に変換された後、3 GeV に加速される。RCS での加速後、95%以上の陽子は MLF に、残りの陽子は MR (Main Ring Synchrotron) に送られる。J-PARC はパルス状のビームを供給し、RCS への入射と出射は 25 Hz のサイクルで繰り返される。ビーム強度を高めるため、RCS は 1 サイクルで 2 つのバンチを加速する。このため J-PARC が供給するミューオンビームは 600 ns の時間間隔で 2 つのバンチが飛来する。

MLF では陽子を炭素標的に入射し、核破砕で生じた π^\pm の、以下の崩壊からミューオンを生成する。



角運動量の保存のため、生成ミューオンは 100%偏極している。

π^- は崩壊の他に、下式のように原子に捕獲されて電子と陽電子を発生させる



この反応によって生成した電子、陽電子はバックグラウンドとして各ビームラインに到達する。

実験には MLF の MUSE D-Line の D2 Area を使用する。2023 年現在、J-PARC の陽子ビーム強度は約 800 kW であり、D-Line でのミューオンビーム強度はそれぞれ $1.6 \times 10^7 \mu^+/\text{s}$ 、 $1.7 \times 10^6 \mu^-/\text{s}$ である。

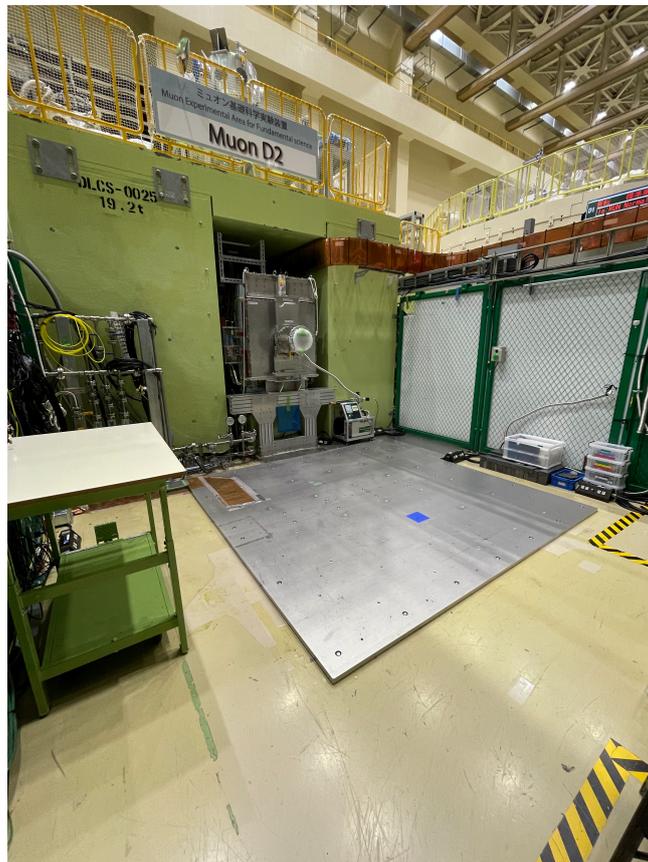


図 3.3: J-PARC MLF MUSE D2 Area。自由度が高く、様々な装置を使用できる。

3.2 ガスチャンバー

ガスチャンバーは直径 280 mm、長さ 450 mm の円筒形の容器で、アルミニウム製である。上流側のフランジには直径 100 mm、厚さ 100 μm の、CuBe 製の薄いビーム窓がある。標的ガス封入の際は一度ガスチャンバー内を真空引きする。このためガスチャンバー内は大気圧に対して負圧、正圧のどちらにもなりうる。これによるビーム窓の破損を防ぐため、ビーム窓の上流に円筒形の小

フランジが設置してある。小フランジ内部を真空引きすることで、ビーム窓は常にチャンバー内部から押し出される方向に力を受ける。下流側のフランジには、低エネルギーの陽電子やビームライン上流から到来する電子、陽電子バックグラウンドを吸収して低減するために厚さ 55mm のアルミ板が取り付けられている。

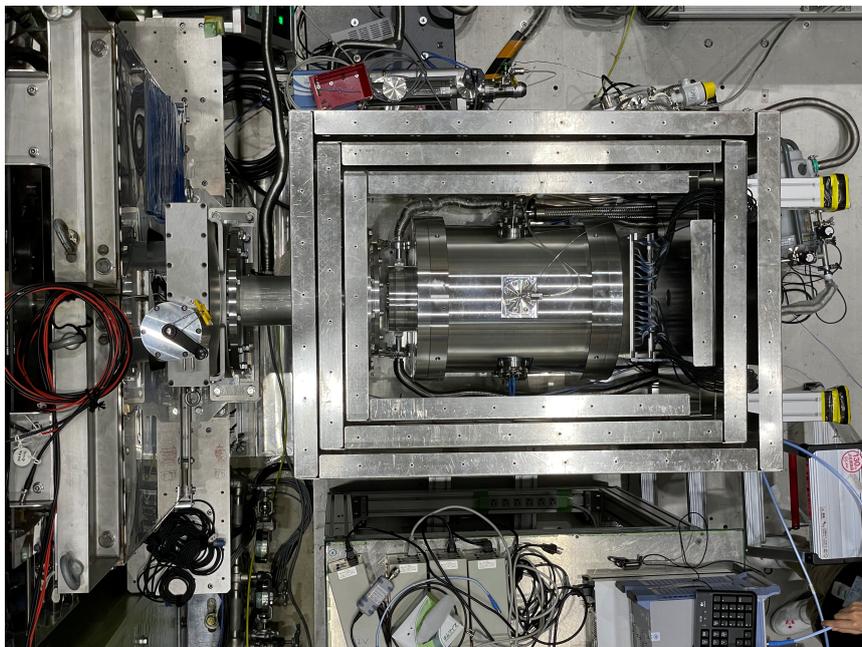


図 3.4: 磁気シールド内に設置されたガスチャンバー。天面のシールドを取り外して直上から見た図。

標的ガス封入前の真空度の測定には crystal and cold cathode combination gauge (TOEL CC10) を使用する。圧力が 0.6 Pa 以下の場合に cold cathode gauge、それ以外の場合では crystal gauge が使用される。標的封入後のチャンバー内の標的ガス圧の測定には capacitance gauge (ANELVA M-342DG) を使用する。ANELVA M-342DG の測定精度は 300 K で 0.2% である。

3.2.1 ガス標的

${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子を生成するため、標的には ${}^4\text{He}$ ガスが必要である。 ${}^4\text{He}$ ガス中で停止した μ^- は ${}^4\text{He}$ 原子核に束縛され、Auger 遷移によって基底状態の $({}^4\text{He}\mu^-)^+$ イオンを形成する。 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の第一イオン化エネルギーは水素の 13.6 eV に近い値なので、 $({}^4\text{He}\mu^-)^+$ イオンは第一イオン化エネルギーが 24.6 eV である ${}^4\text{He}$ から電子を得ることができない。したがって ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子形成のために電子を供給する原子 (electron donor) をガス標的に混合する必要がある。 ${}^3\text{He}\mu^-e^-$ 原子の分光も含め、全ての先行研究で electron donor として Xe が使用されている [20][21][38][39]。表 3.2.1 にいくつかの原子と分子のイオン化エネルギーを示す。 CH_4 の第一イオン化エネルギー 12.5 eV は Xe の 12.1 eV に近いため、 CH_4 も electron donor として扱える [40]。後述の残留偏極率や、原子核捕獲率の観点に加え、将来計画への影響を鑑みて我々は electron donor として CH_4

を選択し、 ^4He 標的に 2% の CH_4 を混合している。 CH_4 を electron donor とした HFS 分光には前例はない。

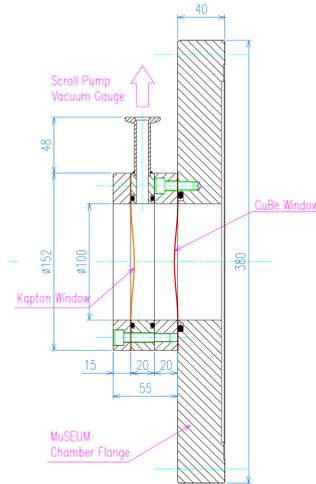


図 3.5: ガスチャンバー上流側フランジの図面。CuBe 製ビーム窓とカプトン窓の間の空間が常にチャンバー内部より低圧に保つことでビーム窓の変形を抑制する。

μ^+ の電子束縛エネルギーは $(^4\text{He}\mu^-)^+$ イオンとほぼ同等であり、 $^4\text{He}\mu^-e^-$ 生成用ガス標的に μ^+ を入射した場合には Mu が生成する。

atom or molecule	ionization energy (eV)
He	24.59
Ne	21.56
Ar	15.76
Kr	14.00
Xe	12.13
N_2	11.48
CH_4	12.94

表 3.1: ガス分子ごとのイオン化エネルギー

3.2.2 残留偏極

μ^- が He 原子に束縛されると高励起状態の $^4\text{He}^{2+}\mu^-e^-$ 原子が生成し、Auger 遷移によって基底状態の $(^4\text{He}\mu^-)^+$ イオンとなる [36]。Auger 遷移や周囲の原子による Stark 混合、電子獲得の際の超微細相互作用のため、 μ^- は減偏極する。Orth らの測定によれば、electron donor に Xe を使用する場合、残留偏極は 2-3% 程度となる [20]。一方で CH_4 を使用した場合には 5% の残留偏極が報告されている [40]。

3.3 マイクロ波回路

3.3.1 マイクロ波キャビティ

マイクロ波キャビティは、TM₂₂₀モードでの共鳴周波数が、ミューオニウム HFS の値である 4.463 GHz となるように設計された、長さ 330 mm、直径 180 mm の純銅製の円筒である。マイクロ波を固定端反射するため、キャビティ上流は厚さ 20 μm の銅フォイルに覆われ、下流には銅製のメッシュが張られる。

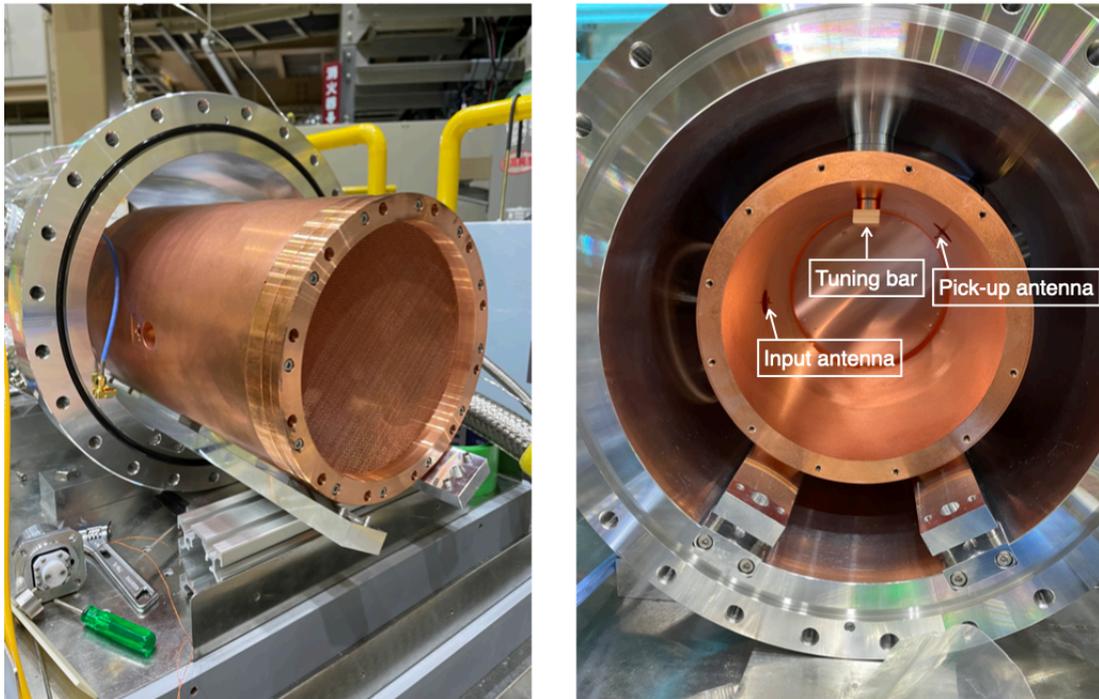


図 3.6: TM₂₂₀ キャビティ。左：下流側がメッシュで終端されているため、キャビティ内外の気圧差によって上流側終端の銅フォイルが破損することはない。右：キャビティ内部。下流側終端を取り外している。

円筒形キャビティ内における TM_{*mn0*} モードのマイクロ波について、共鳴周波数は以下の式で与えられる。

$$f_{mn0} = \frac{c}{n_r} \sqrt{\left(\frac{j_{mn}}{\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2d}\right)^2} \quad (3.9)$$

ここで、 c は光速、 n_r は媒質の屈折率、 j_{mn} は m 次のベッセル関数の n 番目のゼロ点、 R はキャビティの半径、 d はキャビティの長さ。

また強度分布は以下の式で与えられる。

$$H_r = -A \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin[m\theta] \quad (3.10)$$

$$= -A \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} \left[J_{m-1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) + J_{m+1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \right] \sin[m\theta] \quad (3.11)$$

$$H_\theta = -A \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos[m\theta] \quad (3.12)$$

$$= -A \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} \left[J_{m-1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) - J_{m+1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \right] \cos[m\theta] \quad (3.13)$$

$$H_z = 0 \quad (3.14)$$

$$\omega^2 \varepsilon \mu = k_c^2 = \left(\frac{j_{mn}}{R} \right)^2 \quad (3.15)$$

ここで、 $J_m(x)$ は m 次のベッセル関数であり、 A は規格化定数。マイクロ波強度の二乗和は

$$|H|^2 = |H_r|^2 + |H_\theta|^2 \quad (3.16)$$

$$= A^2 \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{4k_c^2} \left[J_{m-1}^2 \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) + J_{m+1}^2 \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) - 2J_{m-1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) J_{m+1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos(2m\theta) \right] \quad (3.17)$$

となる。また quality factor Q を、入力マイクロ波強度 P とキャビティ内のマイクロ波のエネルギー W を用いて

$$Q = \omega \frac{W}{P} \quad (3.18)$$

とすれば、キャビティの体積を $V = \pi R^2 d$ として W は

$$W = \mu \int_V |H|^2 dV \quad (3.19)$$

$$= A^2 \frac{\omega^2 \varepsilon^2 \mu}{4k_c^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^d \left[J_{m-1}^2 \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) + J_{m+1}^2 \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) - 2J_{m-1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) J_{m+1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos(2m\theta) \right] r dr d\theta dz \quad (3.20)$$

$$= 2\pi A^2 \frac{\omega^2 \varepsilon^2 \mu}{4k_c^2} d \int_0^R \left[J_{m-1}^2 \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) + J_{m+1}^2 \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \right] r dr \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon A^2 V J_{m+1}^2(j_{mn}) \quad (3.22)$$

となるので

$$|H|^2 = \frac{PQ}{2\pi\mu V J_{m+1}(j_{mn})} \left[J_{m-1}^2 \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) + J_{m+1}^2 \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) - 2J_{m-1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) J_{m+1} \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos(2m\theta) \right] \quad (3.23)$$

ともできる。

実際に測定される信号はマイクロ波強度とミュオン停止位置の畳み込みである。積分に使用する時間幅が小さい場合、位置による状態遷移確率の効果が無視できなくなる。

3.3.2 周波数調整

キャビティの共鳴周波数はキャビティ内に誘電体を挿入することで大きくなり、非誘電体を挿入することで小さくなる。この変化は挿入する物体の量と位置によって制御でき、 $20\text{ mm} \times 100\text{ mm} \times 5\text{ mm}$ のアルミニウム板ないし酸化アルミニウム板を組み合わせ、ピエゾモーター (attocube ANPz101eXT12) で動かして共鳴マイクロ波周波数を調整する。周波数の調整幅は $\pm 1\text{ MHz}$ 程度である。

3.3.3 入力マイクロ波

キャビティへの入力マイクロ波は信号発生器 (Rohde&Schwarz SMBV-B100A) により生成し、アンプ (Mini Circuit ZVE-8G) で増幅する。これらのマイクロ波は同軸ケーブル (HUBER+SUHNER SUCOFLEX104, SUCOFLEX126, GigaLane GL200) を使用してキャビティまで導かれ、周波数 4463 MHz に合わせた直径 11 mm の円形ループ input アンテナによってキャビティ内部に放射される。マイクロ波の印加は 25 Hz で ON と OFF を切り替える。

ミュオンウムの状態遷移確率は印加マイクロ波周波数だけでなくパワーにも依存する。本実験ではキャビティに入射するマイクロ波の 0.1% と、マイクロ波キャビティに設置された pick up アンテナの出力をパワーメータ (Rohde&Schwarz NRP-18A) で測定し、キャビティ内部のマイクロ波強度をモニターしている。pick up アンテナは直径 11 mm の円形ループアンテナをベースとして、十分なマイクロ波を pick up できるように調整した。

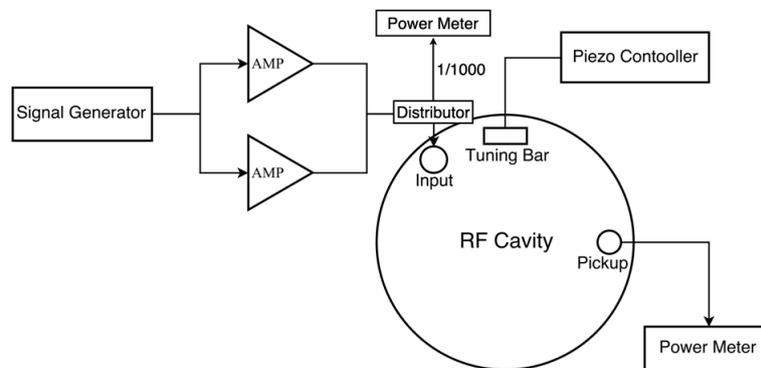


図 3.7: マイクロ波系の回路図。入力マイクロ波の $1/1000$ を分波して、ピックアップパワーと共にモニターする [41]。

3.3.4 品質係数

(3.23) の通り Q はマイクロ波強度に関係するが、中心周波数によって異なる値となりうる。測定中の信号強度を担保するため、また Q の変化による信号強度の変化を補正するため、各測定の前でキャビティ内のマイクロ波磁場の Q はベクトルネットワークアナライザー (Rohde&Schwarz ZNB4) によって評価する。input アンテナについて入力信号に対する反射信号の比である S_{11} を測定し、そのスペクトルを Lorentzian で Fit し、共鳴中心周波数 f_c と半値幅 ω_c を決定する。これらを使用し、

$$Q = \frac{f_c}{\omega_c} \quad (3.24)$$

として Q を決定する。

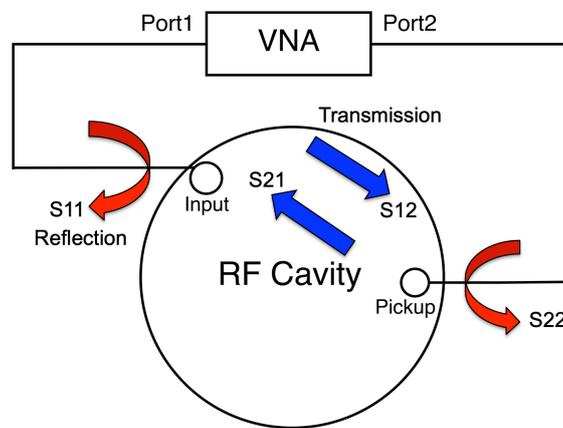


図 3.8: VNA によるキャビティの性能測定概念図 [41]

2022 年の 3 月に 10.5 atm での測定をした際、 piezomotor を 300 μm ずつ動かしながら記録したマイクロ波キャビティの S_{11} パラメーターを一例として図 3.9 に示す。これらを Lorentz 関数で Fit して誘電体の位置毎のキャビティの共鳴周波数 f_c とその半値幅 ω_c を決定し、 Q を求めた。10.5 atm での測定の際の誘電体の位置と共鳴周波数の対応を図 3.10 に、共鳴周波数と Q の対応を図 3.11 に示す。

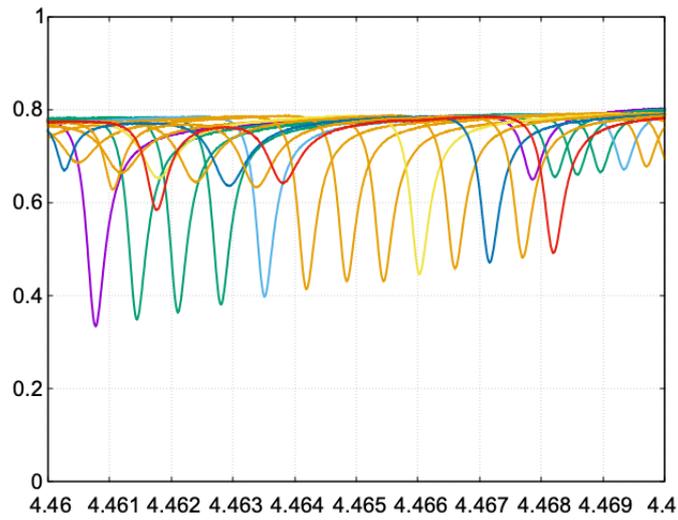


図 3.9: 2022 年 3 月のキャビティの S_{11} パラメーター。横軸は周波数 (GHz)、縦軸は反射率。誘電体の位置が変わるとピークの位置も変化していく

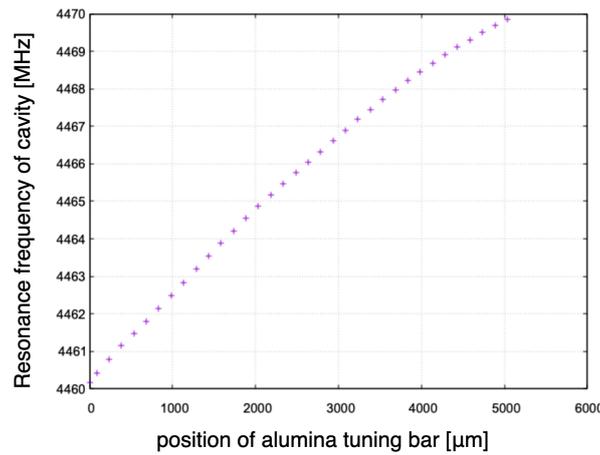


図 3.10: アルミナ製チューニングバーの位置と共鳴周波数の対応。チューニングバーがキャビティの内壁と接触した状態が横軸のゼロ点。標的ガス圧が変化すると、屈折率の変化によって共鳴周波数はシフトするが、 He は誘電率が小さいため 10.5 atm と真空と比較しても 1.5 MHz 程度のシフトに収まる。

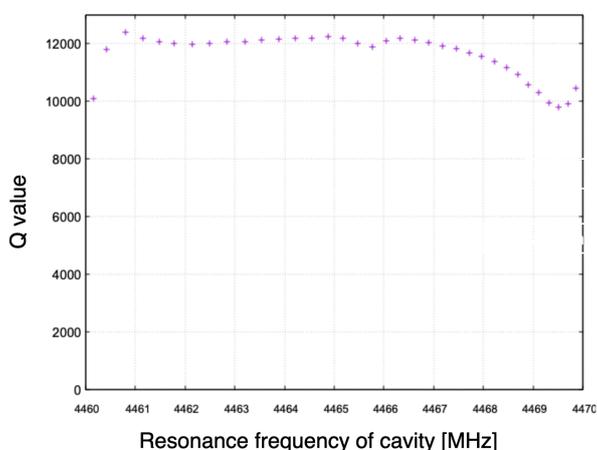


図 3.11: 共鳴周波数と Q 値の対応。ガス圧によるシフトを考慮しても、 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子や Mu の HFS の付近では $Q = 12000$ 程度で安定している。

3.3.5 磁気シールド

ゼロ磁場で超微細構造を分光するため、ガスチャンバーやマイクロ波キャビティは環境磁場から遮蔽する。装置は 3 層のパーマロイ製磁気シールドで覆われている。分解能約 0.5 nT の同軸フラックスゲートプローブ (MTI K.K. FM-3500) を使用して測定された磁気シールド内部の磁場は環境磁場の約 1/1000 倍の 350 nT 以下である。磁場の最大の発生源は、空洞の温度を測定する熱電対である。

3.4 検出器

状態遷移による崩壊電子放出方向の変化の測定では、J-PARC の大強度ミュオンビームによる高レート係数率に対応可能な検出器が必要となる。我々はプラスチックシンチレーターを高度に分割した検出器を使用することでこの要件を満たしている。検出器は 2 層構造で、1 層当たり 24×24 個の 10 mm 角、3 mm 厚のプラスチックシンチレーターで構成される。層間隔は 40 mm であり、ガスチャンバー下流に設置し、電子/陽電子を検出する。プラスチックシンチレーターには Eljen EJ212 を使用している。EJ212 は減衰定数が速く (2 ns)、発光波長は約 450 nm である。検出器の各セグメントの境界には、光クロストーク低減のため反射膜 (3M Enhanced Specular Reflector : ESR) が貼り付けてある。

それぞれのプラスチックシンチレーターには SiPM (浜松ホトニクス株式会社 S12825-050P-01) が取り付けられている。SiPM は MPPC (Multi-Pixel Photon Counter) とも呼ばれる、ガイガーモード APD をマルチピクセル化したフォトンカウンティングデバイスであり、S12825-050P-01 では 1.3 mm 角のアクティブエリアに 50 μm 間隔で 667 個のアバランシェフォトダイオード (APD) が配置されている。

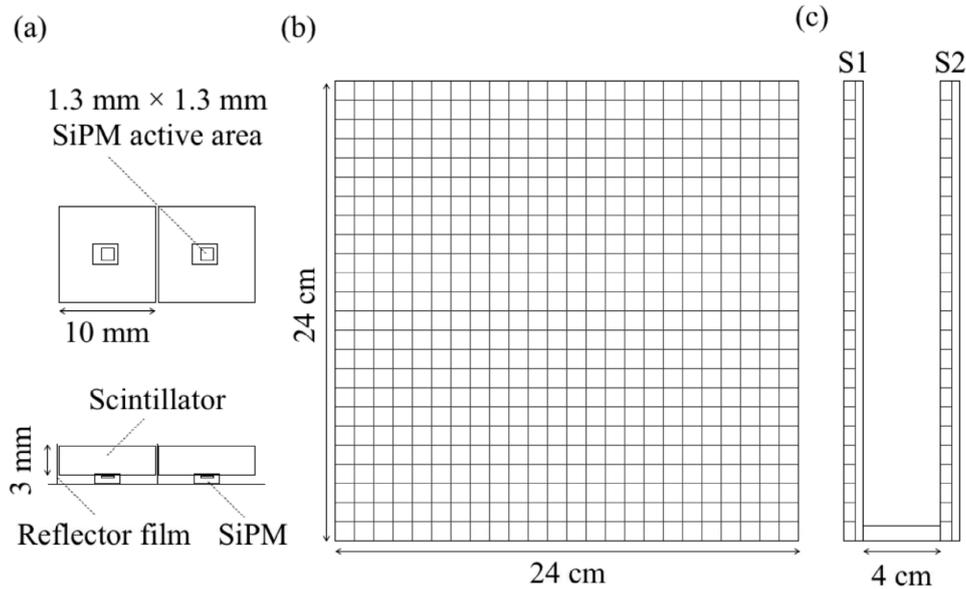


図 3.12: 検出器の概念図 [7]。(a). 各セグメントの詳細。(b). 上流から見た図。24 cm × 24 cm の領域にシンチレーターが敷き詰められている。(c). 横から見た図。2 層構造になっており、層間隔は 4 cm

SiPM の読み出しには、KEK の Open-It(Open Source Consortium of Instrumentation) グループが開発した Kalliope(KEK Advanced Liner and Logic board Integrated Optical detector for Positron and Electron) を使用する。Kalliope は ASIC として開発されたアナログ信号回路 VOLUME2012 と、FPGA を含んだデジタル回路の組み合わせからなり、増幅した SiPM の信号をデジタル回路で読み出す [42]。デジタル回路の FPGA には時間分解能 1 ns の Time-to-Digital Converter(TDC) が実装されている。TDC の時間窓は $64 \mu\text{s}$ であり、これはミューオンの寿命 $2.2 \mu\text{s}$ よりも十分長く、J-PARC のビームのパルス間隔 25 ms よりも十分短い。Kalliope は 1 枚当たり 32ch なので、検出器 1 層につき 18 枚の Kalliope を使用する。

prompt particles や、ビームライン上流で崩壊したミューオン由来の粒子によるバックグラウンド低減のため、検出器の上流には absorber として厚さ 30 mm のアルミニウム板が設置されている。absorber の厚みは磁気シールド内の空間的制約によって決定されている。

1 層目と 2 層目の検出器でのミューオンの崩壊陽電子の検出時間の差の測定から、検出器の時間分解能は 4 ns と評価されている [43]。これはマイクロ波によるミューオニウム状態遷移信号の時間スペクトルを十分測定可能な分解能である。



図 3.13: Kalliope Board。Open-It グループが開発したモジュール。プラスチックシンチレータの発光を、アンプと波高分別器を組み込んだ ASIC でデジタルパルスに成形し、TDC とマルチヒット保持用メモリを組み込んだ FPGA で時間情報を SiTCP TCP パケットに成形して、光イーサネット PC に送る。

3.4.1 データ取得

読み出し回路のデータ取得トリガーには J-PARC の RCS から提供されるビーム入射トリガーを使用するため、ミュオンパルスビームの到達とも対応する。陽子加速器が停止した場合にはトリガー信号は発生しない。ただしビーム電流モニタの故障等の理由で、予期せぬビームロスが発生した場合でもトリガー信号が得られる可能性がある。取得データは各データ取得トリガーに対応した ID を持つため、各トリガー毎の検出粒子数からビームロスを検出し、解析から除外できる。

3.5 データ処理

検出器から得られた信号は”clustering analysis”と”coincidence analysis”により処理される。

clustering analysis は光クロストークのために 1 粒子の入射を複数のセグメントで検出したイベントを補正するものである。時間、空間的に近いタイミングのイベントを以下の手順でクラスタリングする。

1. 各セグメントについて粒子検出イベントを時間順に並べる
2. Ch x について、各イベントと近い時間 (typically ± 8 ns) で Ch $x+1$, Ch $x+24$, Ch $x+25$ にイベントがないか確認し、イベントが見つかった場合はクラスタに追加する。クラスタに追加されたセグメントではこの探索は行わない。ただし、 $x \bmod 24 = 23$ の場合は Ch $x+24$ のみ、 $x/24 = 23, 46$ の場合は Ch $x+1$ のみを探索し、 x がこのどちらも満たす場合は探索をしない

3. あるセグメントで粒子検出イベントが見つかった場合、近いタイミング (typically ± 8 ns) で隣接する最大8個のセグメントにもイベントがないかを確認する
4. 3の終了後、各クラスターに含まれるセグメントについて2と同様の処理をし、隣接するクラスターを結合する。この際基準とする検出タイミングにはクラスターの始点となったイベントのものを使用する。

この操作により、最大9セグメントが1クラスターに追加される。ここで、セグメント番号 Ch は

$$Ch = x + 24y + 24^2 \times (l - 1) \quad (3.25)$$

として決定しており、層番号 l は1層目の検出器の場合 $l = 1$ 、2層目の場合 $l = 2$ である。

クラスタリングの完了後、dark noise のように各層で独立に発生するバックグラウンドを除外するため、2層の検出器で同時に検出されたイベントをピックアップする coincidence analysis をする。1層目の検出器の各クラスターについて、その検出時間の ± 15 ns の間に2層目にもクラスターが存在するもののみを解析に使用するイベントとした。ただし2層目のクラスターについて、一度 coincidence の判断に使用したクラスターは以降の探索では使用しない。

第4章 ゼロ磁場でのミュオニックヘリウム 超微細構造分光

3章で述べた装置を使用し、我々は2021年から2022年にかけて3 atm, 4 atm, 10.5 atmの標的ガス圧で ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子のHFSをゼロ磁場で分光した。また3通りのガス圧で得られたHFSの値を真空外挿することで、世界最高精度で ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子のHFSを決定した。本章ではこれらの測定について解析手法と結果を述べる。

4.1 先行研究

基底状態の ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子のHFSはこれまでに、Orthらによるゼロ磁場での測定から [20]

$$\Delta\nu_{{}^4\text{He}\mu^-e^-} = 4\,464.95(6) \text{ MHz (13 ppm)} \quad (4.1)$$

Gardnerらによる11.5 kGと13.6 kGの高磁場での測定から [21]

$$\Delta\nu_{{}^4\text{He}\mu^-e^-} = 4\,464.004(29) \text{ MHz (6.5 ppm)} \quad (4.2)$$

と報告されている。どちらの測定もLAMPFで行われ、 ${}^4\text{He}$ ガス標的にelectron donorとしてXeを1.5%混合している。

Orthらの測定では19.4 atmでの測定値を、Caspersonらによって報告されたミュオニウムHFSのpressure shift

$$\Delta\nu_{\text{pressure}}(p) = Ap \quad (4.3)$$

$$A = 14.7(9) \text{ kHz/atm (at } 0^\circ\text{C)} \quad (4.4)$$

を使用して真空外挿している [17]。一方Gardnerらの測定では5 atmと15 atmの2点を測定し、一次関数で真空外挿している。この際求められた ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の圧力シフトは

$$A = 11.4(2.7) \text{ kHz/atm (at } 0^\circ\text{C)} \quad (4.5)$$

である。

4.2 Blind Analysis

2022年の3 atmと10.5 atmの測定では、結果にバイアスがかからないように印加マイクロ波周波数に一定のオフセット δ_B を加えている。印加マイクロ波周波数はDAQ PCを経由して信号発生

機 (Rohde&Schwarz SMBV-B100A) に設定する。図 4.1 にマイクロ波制御用コンソールの画面と、Rohde&Schwarz SMBV-B100A のフロントパネルの表示を示す。マイクロ波制御用コンソールで設定した設定印加マイクロ波周波数に、 ± 8 kHz の範囲でランダムに設定されたオフセット δ_B を加えた値を信号発生機に送信している。印加マイクロ波周波数の真の値は隠されており、Unblind 用プログラムに事前に設定されたパスワードを入力する以外の方法で δ_B を知ることはできない。



図 4.1: 左: マイクロ波制御用コンソールの画面。オフセット値はマスクされている。マイクロ波パワーや標的ガス圧もこの画面でモニターし、記録する。右: Signal Generator Rohde&Schwarz SMBV-B100A のフロントパネル。出力マイクロ波周波数はマスクされているため、実際の印加マイクロ波周波数を知ることはできない。

4.3 解析

本節で取り扱うデータは clustering analysis と coincidence analysis の処理をした後のものである。

4.3.1 規格化

解析に使用するデータではビームロスの発生等により、マイクロ波を照射した場合と照射しない場合の、実際のデータ取得回数が異なる場合がある。これを補正するために、各データについてマイクロ波を照射した場合と照射しない場合それぞれのデータを実際のデータ取得回数で規格化する。データ取得回数は図 4.2 のような粒子検出数の分布のうち、規定量 (今回は 5 個に設定) 以上を超えるイベント数を積分して決定する。

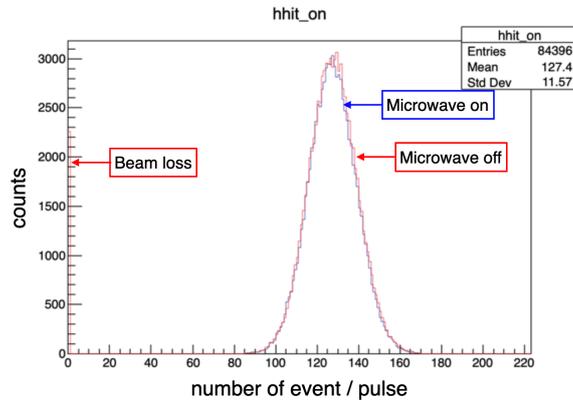


図 4.2: 粒子検出イベント数のヒストグラムの 1 例。ビームロスのため、0 イベントにもカウントが発生する。

4.3.2 Data Selection by Microwave Power

今回の測定、特に 2022 年 3 月の標的ガス圧 10.5 atm での測定では、同軸ケーブルに取り付けられた SMA コネクタの劣化の影響で入力マイクロ波強度が不安定であった。図 4.3 は正常な場合と、異常があった場合の入力マイクロ波強度のモニター値のグラフである。

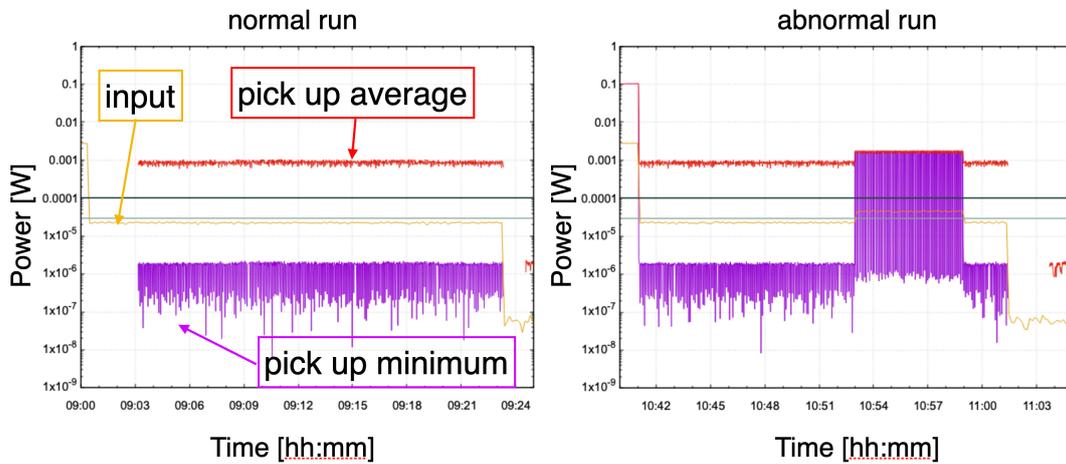


図 4.3: マイクロ波強度のモニター値。左：正常な run。右：測定中に突然入力強度が増加した run。



図 4.4: 左：摩耗していない SMA コネクタ。右：劣化した SMA コネクタ。コネクタの摩耗により絶縁体部分が金属粉に覆われている

入力マイクロ波強度の大きな変動は大きな系統的不確かさを生じる。今回の解析では取得データのうち、このような入力マイクロ波強度に異常があった期間については解析から除外している。

4.3.3 非対称度の計算

以上の処理をしたデータを使用して

$$\text{Asymmetry}(t) \equiv \frac{N_{\text{ON}}(t)}{N_{\text{OFF}}(t)} - 1 \tag{4.6}$$

を計算する。ここで $N_{\text{ON}}(t)$, $N_{\text{OFF}}(t)$ はそれぞれ各時間における、マイクロ波を印加した場合と印加しない場合の規格化された検出粒子数である。Asymmetry は μ^- のスピン反転量に応じて生じる崩壊電子放出方向の分布の変化を表す。

共鳴が起きている状態と起きていない状態における Asymmetry の時間変化を図 4.5 に示す。

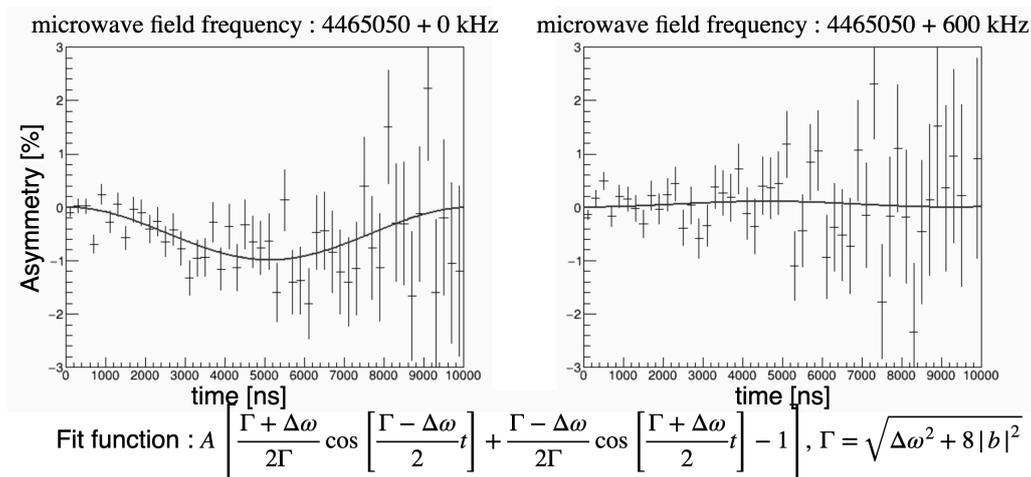


図 4.5: 2021 年の 4 atm での測定における $N_{\text{ON}}/N_{\text{OFF}} - 1$ のプロット。印加マイクロ波の周波数が共鳴周波数に近い場合には Asymmetry が変化する。

4.3.4 Fitting by Resonance Curve

Asymmetry を時刻 t_1 から t_2 の範囲で積分し、周波数との対応を下式で表されるゼロ磁場での共鳴曲線で Fit して HFS を決定する。

$$L(t_1, t_2) = \frac{\gamma}{\exp(-\gamma t_1) - \exp(-\gamma t_2)} \left[\left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{\Gamma} \frac{[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2}]}{[\Gamma + \Delta\omega]^2 + 4\gamma^2} \sin \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] - \gamma \cos \left[\frac{\Gamma + \Delta\omega}{2} t \right] \right. \right. \quad (4.7)$$

$$\left. \left. + \frac{\Gamma + \Delta\omega}{\Gamma} \frac{[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2}]}{[\Gamma - \Delta\omega]^2 + 4\gamma^2} \sin \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] - \gamma \cos \left[\frac{\Gamma - \Delta\omega}{2} t \right] + \frac{1}{2\gamma} \right] \exp[-\gamma t] \right]_{t_1}^{t_2}$$

時間によってバックグラウンドと信号量の比が変化することや、積分区間によって共鳴曲線の形状が変化するため、 t_1, t_2 の値によって結果は変化する。十分な統計量が得られていれば、 t_1, t_2 はある程度狭くする方が Fit の結果得られる共鳴周波数の決定精度は高くなる。ただし積分区間が短くなると、特に共鳴中心ではマイクロは強度分布による Rabi 振動の周期のばらつきとミュオンの停止位置分布の効果が無視できなくなる。現状の解析では t_2 をデータ取得周期の終端 $60 \mu\text{s}$ に固定した場合の Fit 精度が良好であった。

$t_2 = 60 \mu\text{s}$ に固定し、 t_1 を変化させた場合の Fit 結果の変化を図 4.11, 図 4.7, 図 4.8 に示す。三通りのガス圧における共鳴周波数の決定精度の平均が最も良好だった $t_1 = 1600 \text{ ns}$ を採用し、以下の結果を得た。

$$\Delta\nu_{\text{He}\mu^-e^-} (3.044 \text{ atm}, 24.6^\circ\text{C}) = 4\,464\,992 (20) + \delta_B \text{ kHz} \quad (4.8)$$

$$\Delta\nu_{\text{He}\mu^-e^-} (3.969 \text{ atm}, 17.3^\circ\text{C}) = 4\,465\,050 (17) \text{ kHz} \quad (4.9)$$

$$\Delta\nu_{\text{He}\mu^-e^-} (10.43 \text{ atm}, 18.5^\circ\text{C}) = 4\,465\,106 (17) + \delta_B \text{ kHz} \quad (4.10)$$

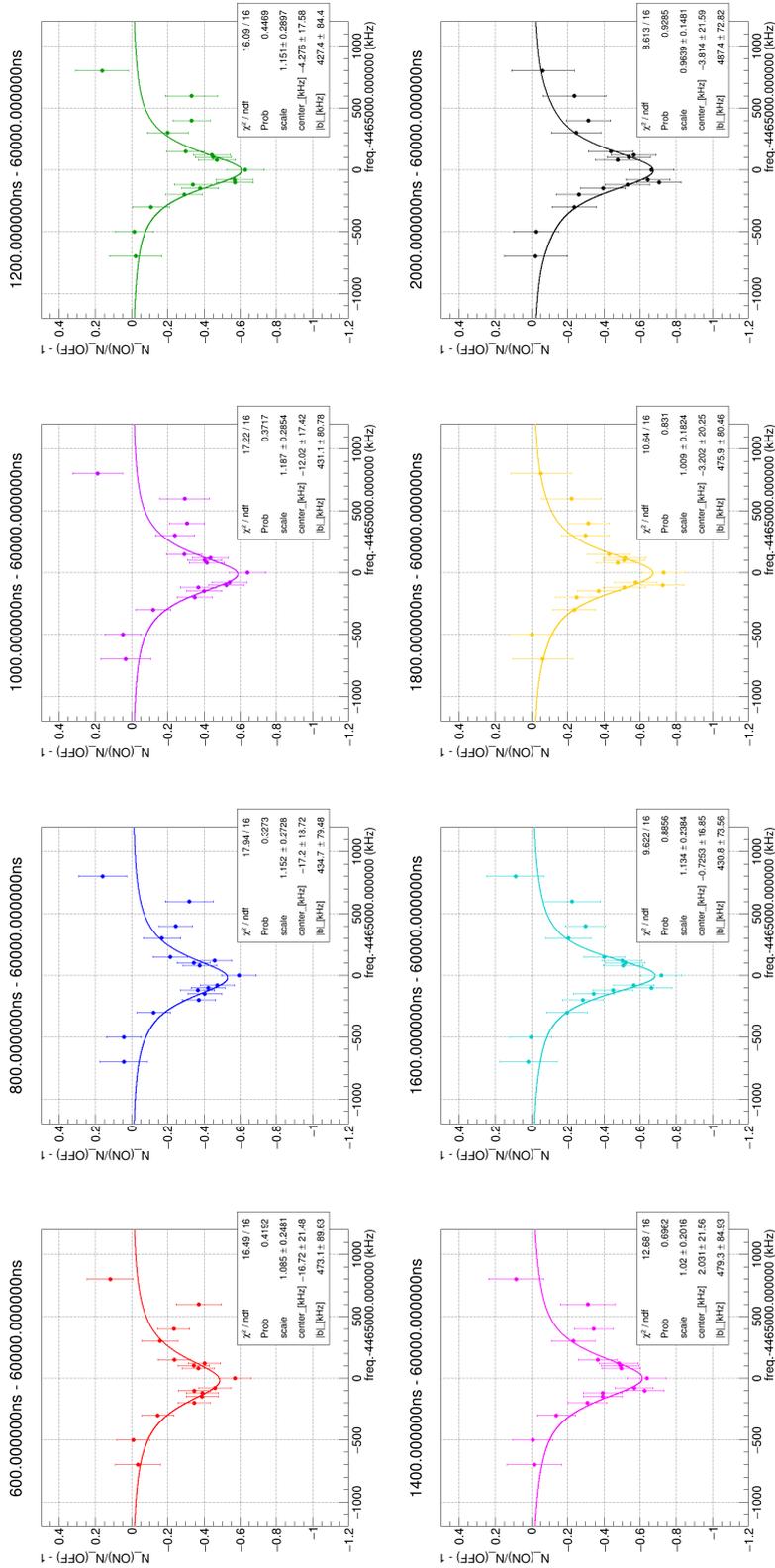


図 4.6: 3atm での測定の解析結果

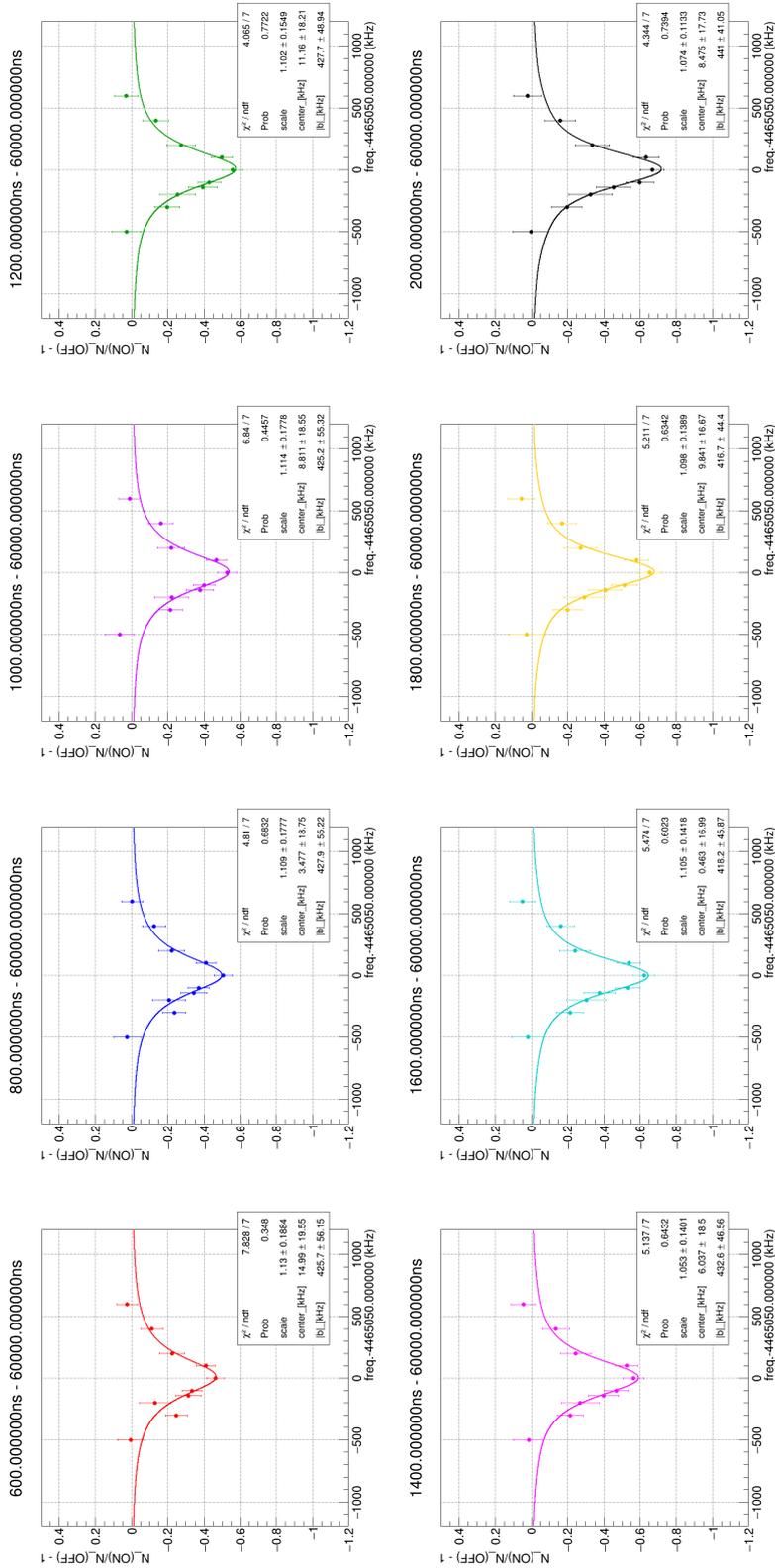


図 4.7: 4atm での測定の解析結果

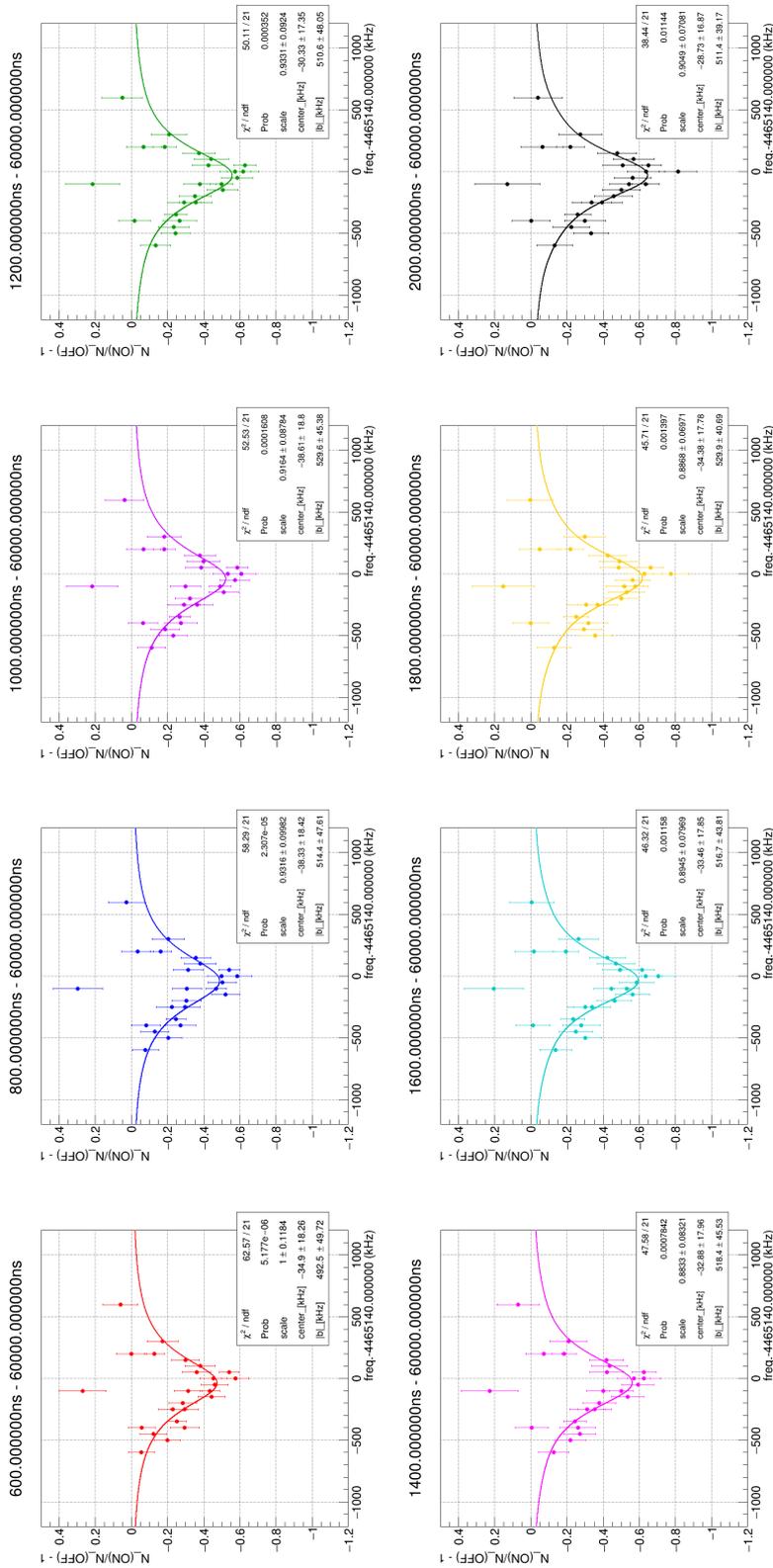


図 4.8: 10.5atm での測定の解析結果

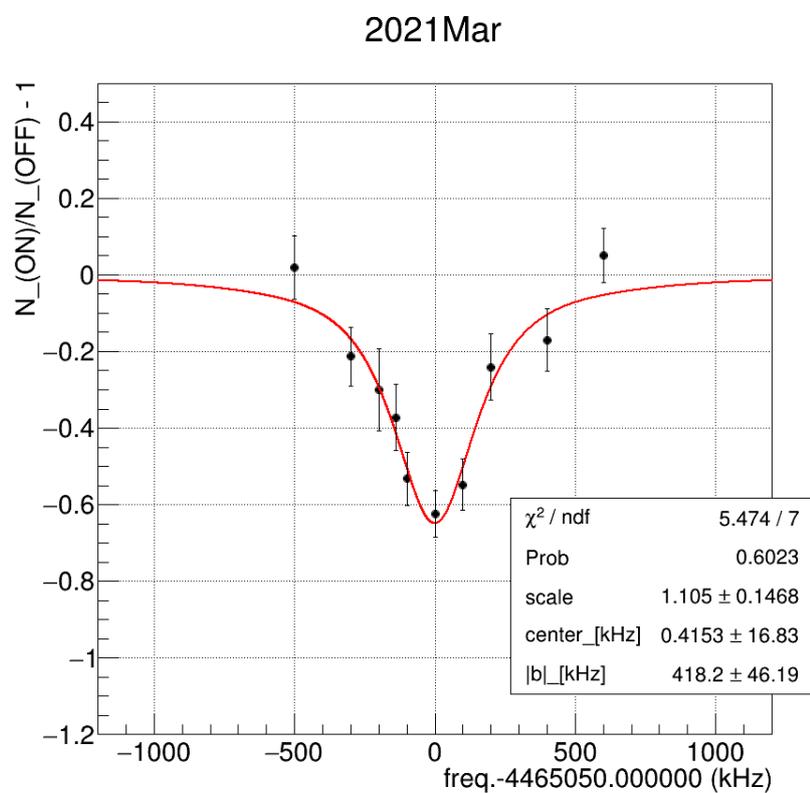


図 4.9: 4atm の最終結果

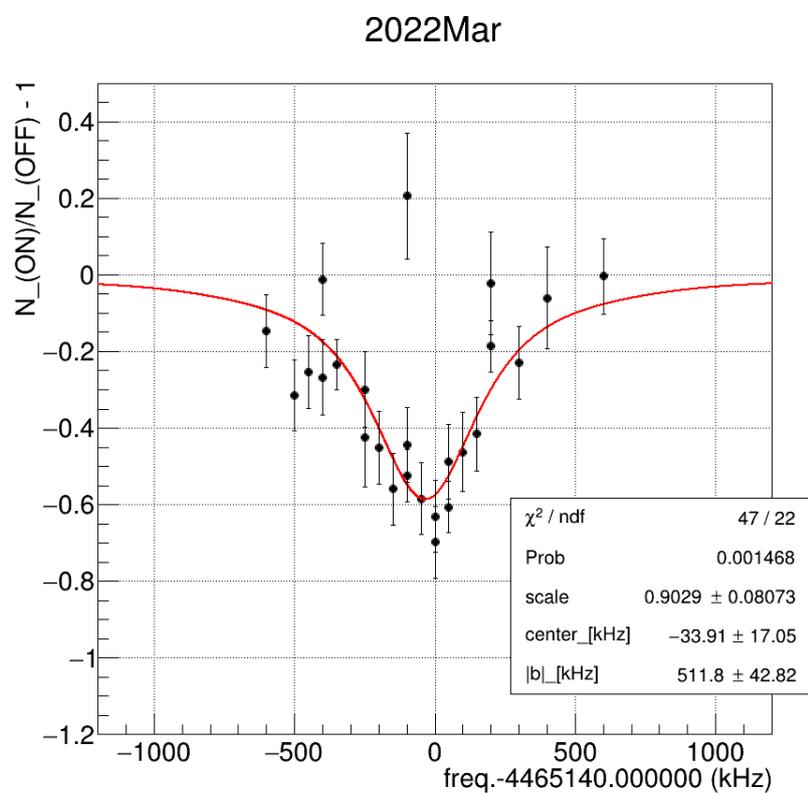


図 4.10: 10.5atm の最終結果。 $\Delta\omega = -100$ kHz で正の値となっている点は同軸ケーブルの不調のためキャビティにマイクロ波が入力できていなかったと思われるが、pick-up 側のパワーモニタが稼働しておらず、除外する根拠がないので残している。

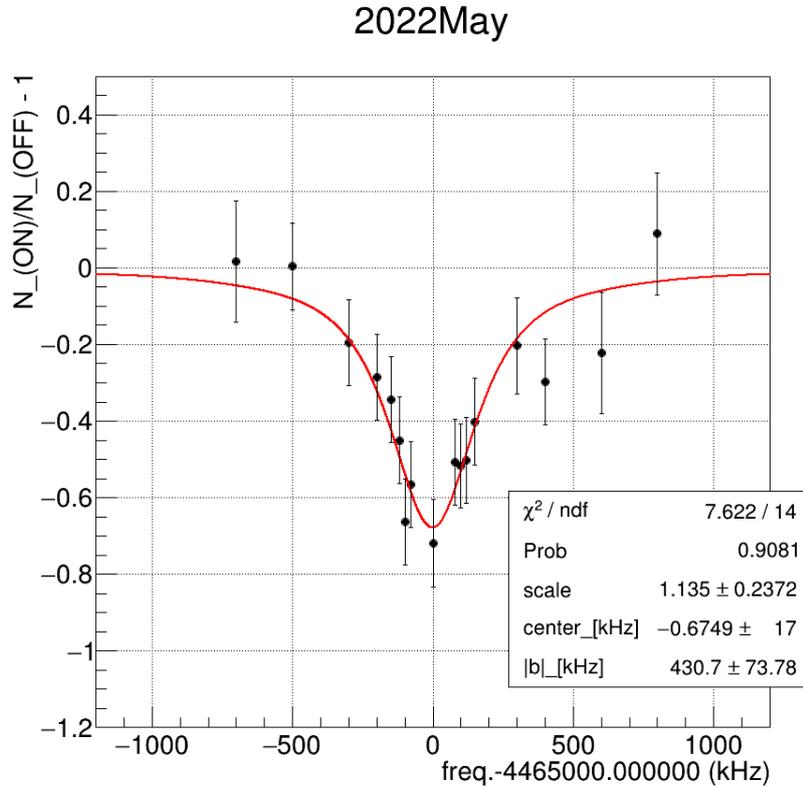


図 4.11: 3atm での測定の解析結果

4.4 Unblind

測定結果の確定後、 δ_B の値を unblind した。その結果は

$$\delta_B = -1.926 \text{ kHz} \quad (4.11)$$

であった。 δ_B を取り除いた測定結果を真空に外挿するために、以下の一次関数で Fit する。

$$\Delta\nu_{^4\text{He}\mu^-e^-} (P \text{ atm}, 0^\circ\text{C}) = \Delta\nu_{^4\text{He}\mu^-e^-} (0 \text{ atm}, 0^\circ\text{C}) + AP \quad (4.12)$$

2.5 で述べた通り、標的ガス圧が大きくなると 2 次の圧力依存性が無視できない。ただし今回の測定では 2 次の効果を Fit するにはデータ点数が少ない。また 2 次の効果まで考慮した標的ガスが異なるミュオニウムでの測定例から、今回の測定範囲である 10.5 atm 以下の領域では 2 次の効果は 1 次の効果より 2 桁小さい [35]。そのため真空外挿では 1 次の効果のみ考慮し、2 次の効果はミュオニウムの測定例のうち最大のを基準に系統的不確かさとして計上している。

共鳴中心の決定と同様に、Fit には ROOT の MINUIT2 アルゴリズムを使用する。MINUIT2 では通常、評価関数とデータ点の残差を各データ点の不確かさで重み付けした値の二乗和 χ^2 が最小

となるようなパラメーターを探索する。パラメーターの探索手法は準ニュートン法のうちのDFP法と呼ばれる方式である。

Fitによる真空外挿の結果、図4.12の通り

$$\Delta\nu_{4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{MuSEUM}}(0\text{ atm}, 0^\circ\text{C}) = 4\,464\,980(20)\text{ kHz (4.5 ppm)} \quad (4.13)$$

$$A = 13.0 \pm 3.2\text{ kHz/atm(at } 0^\circ\text{C)} \quad (4.14)$$

を得た。先行研究の結果 [20][21]

$$\Delta\nu_{4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{Orth}} = 4\,464.95(6)\text{ MHz (13 ppm)} \text{ (at Zero Field by Orth, et.al.)} \quad (4.15)$$

$$\Delta\nu_{4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{Gardner}} = 4\,464.004(29)\text{ MHz (6.5 ppm)} \text{ (at High Field by Gardner, et.al.)} \quad (4.16)$$

と比較すると 1σ の範囲内で無矛盾である。また圧力シフトの係数 A についても Gardner らの測定結果

$$A^{\text{Gardner}} = 11.4(2.7)\text{ kHz/atm (at } 0^\circ\text{C)} \quad (4.17)$$

と無矛盾な値である。

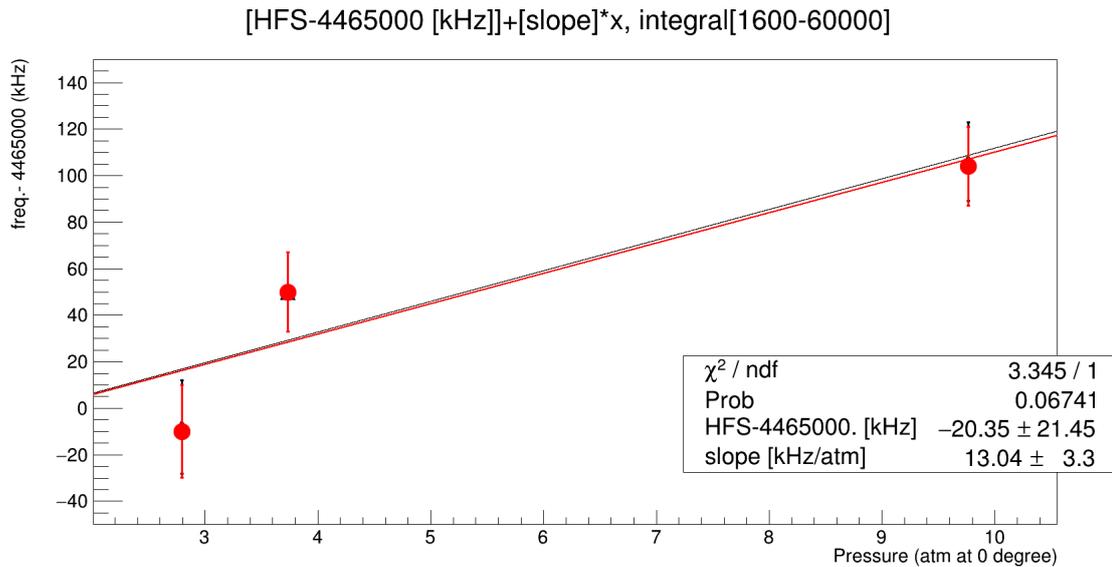


図 4.12: 真空外挿の結果。黒線は unblinded 前、赤線は unblind 後のデータ点を使用した結果であり、unblinded によって結果は 1 kHz 変化した。

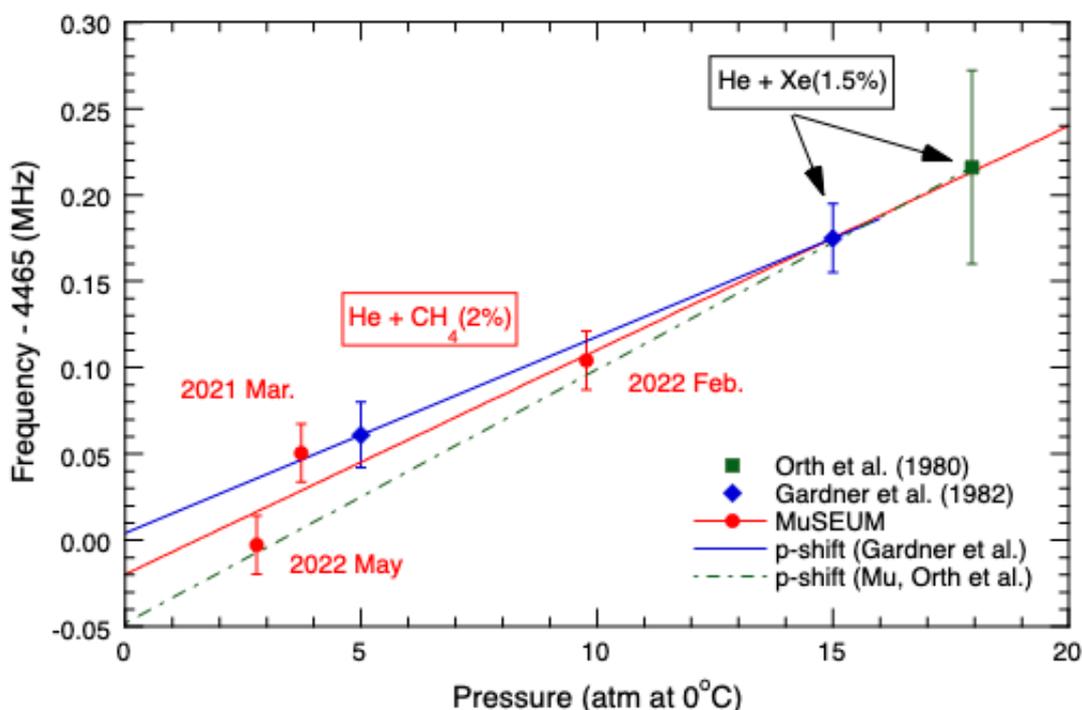


図 4.13: 先行例との比較。赤色の線が今回の結果。緑色の線は Orth によるゼロ磁場での測定 [20]、青色の線は Gardner による高磁場での測定 [21]。

今回の測定結果はこれらの先行研究の結果よりも高精度な、世界記録である。

4.5 系統的不確かさ

同様の装置、手法で Mu の HFS を測定した際の系統的な不確かさは表 4.1 の通りである [7]。 μ^- ビーム強度は μ^+ ビームに比べて約 1/10 となるため、本測定においては Detector pileup の寄与は無視できる。また今回の測定ではより測定精度が高いガス圧計を使用したため、Pressure gauge precision の寄与は 5 Hz である。一方標的ガス温度については変動が大きかったため、45 Hz の寄与がある。

CH_4 の混合率が変化すると圧力シフトの大きさも変化するため、これも系統的な不確かさの要因となる。しかし CH_4 による水素様原子の HFS の圧力シフトは測定例がない。そこで、水素様原子の既知の最大の圧力シフトである Xe 中の水素の圧力シフトから測定に与える最大の不確かさを見積もる [44]。今回の一連の測定では CH_4 の混合率に 0.2% の不確かさがあり、圧力シフトに最大 $\sim 3 \text{ Hz/atm}$ の不確かさが生じる [45]。

圧力シフトの 2 次効果については、測定例のある中で値の最も大きい Kr 中の Mu についての結果をもとにすると、最大で 780 Hz の不確かさが生じる [17]。この効果による不確かさを低減するためには、He ガス中での圧力シフトの 2 次効果を決定する必要がある。

Source	Contribution [Hz]
Pressure gauge precision	46
Microwave power drift	37
Detector pileup	19
Gas temperature fluctuation	6
Static magnetic field	negligible
Gas impurity buildup	12
Muon beam intensity	negligible
Muon beam profile	negligible
total	63

表 4.1: Mu の測定における系統的不確かさ

その他の要因の寄与については表 4.1 と同様となる。これらを表にまとめると、表 4.2 の通りである。今回の測定における最大の系統的不確かさ 782 Hz は、統計的不確かさは 20 kHz より二桁下のオーダーである。

Source	Contribution [Hz]
Pressure gauge precision	5
Microwave power drift	37
Detector pileup	negligible
Gas temperature fluctuation	45
Static magnetic field	negligible
Gas impurity buildup	6
CH4 concentration	3 [Hz/atm]
Quadratic pressure shift	<780
Muon beam intensity	negligible
Muon beam profile	negligible
total	782

表 4.2: ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の測定における系統的不確かさ

4.6 ミュオンニウムとの比較

2022 年 3 月の、10.5 atm での測定では同時にミュオンニウム HFS についても測定した。積分区間 [1600 μs , 600000 μs] での解析結果は図 4.14 の通りである。

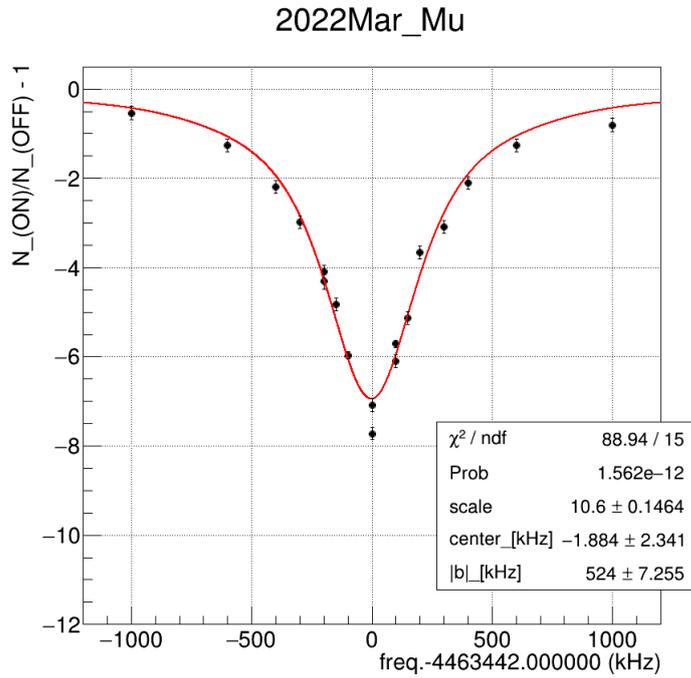


図 4.14: 10.5atm 標的でのミュオニウムの測定結果

$^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の共鳴曲線と比較すると、共鳴中心における信号量はミュオニウムの方が約 11 倍大きい。これはミュオンの残留偏極に由来した違いである。Mu の生成の際は超微細相互作用によってのみ減偏極が生じるため、ゼロ磁場における Mu の残留偏極は 50% である。信号強度は偏極率に依存するので、我々の測定における $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の残留偏極は約 4.5% だったと推定できる。33

第5章 高精度化に向けて

我々はゼロ磁場での測定によって ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の HFS を世界記録の精度で決定した。最終的な目標としては $\mathcal{O}(1 \text{ ppb})$ を目指しており、高精度化のためには大強度ビームの利用と高偏極 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の利用が考えられる。このうち大強度ビームについては J-PARC で 2022 年から新しく運用されている H-Line を利用する予定である。H-Line は D-Line の約 10 倍の強度のビームを供給し、加えて超伝導磁石を利用した高磁場での測定が可能である [46][47]。

高偏極 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の生成については、1993 年に Barton が LAMPF で、Rb とのスピンの交換によって 44% 偏極した ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子を生成している [48]。これを参考に、J-PARC にパルスミュオンビームを使用した ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子再偏極装置を組み上げ、詳細に調べた。本章ではこの ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の再偏極について説明する。

5.1 Spin Exchange Optical Pumping

${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子形成の過程で、 μ^- は Auger 遷移や Stark 混合により減偏極する。図 4.6 で見たように、 μ^- の減偏極は ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の HFS 測定精度を制限する。 μ^- を再偏極できれば測定精度を大幅に向上する可能性があり、Spin Exchange Optical Pumping (SEOP) と呼ばれる手法によってその実現を目指す。

SEOP は中性子スピフィルターのための偏極 ${}^3\text{He}$ 原子生成などに利用される原子核偏極技術である [49]。SEOP では Optical Pumping によって生成したアルカリ金属原子 (一般には Rb) とのスピンの交換によって原子核偏極を実現する。Optical Pumping はレーザー照射によって原子の状態遷移を誘発し、特定の状態の原子の量を増加させることで偏極状態を作り出す手法である。根本的な原理は Mu や ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の HFS 分光と同様であり、またアルカリ金属原子のエネルギースペクトルは Breit-Rabi 方程式で計算可能である。以下では J-PARC における中性子スピフィルター開発での SEOP とのアナロジーから ${}^4\text{He}$ ガス中の Rb について考察する [50]。

中性子スピフィルター開発では通常、常温で 3 気圧の ${}^3\text{He}$ 、と 50 torr の N_2 、少量のアルカリ金属を封入したガラスセルで SEOP を行う。SEOP にはアルカリ金属蒸気が必要なため、十分な偏極効率が得られる 200 度程度までセルを加熱する。 ${}^{85}\text{Rb}$ の $5^2S_{1/2}-5^2P_{1/2}$ HFS の圧力シフトは ${}^3\text{He}$ 中では 20 GHz/atm、 ${}^4\text{He}$ 中では 5 MHz/Torr ≈ 3.8 GHz/atm である [51][52]。また ${}^{85}\text{Rb}5^2S_{1/2}-5^2P_{1/2}$ のゼーマン分裂による線幅の広がり、2 T でも約 20 GHz である。これらは一般的なレーザーの線幅に対して十分小さいため、795 nm のレーザーを Rb に照射すると全ての副準位が同時に励起される。

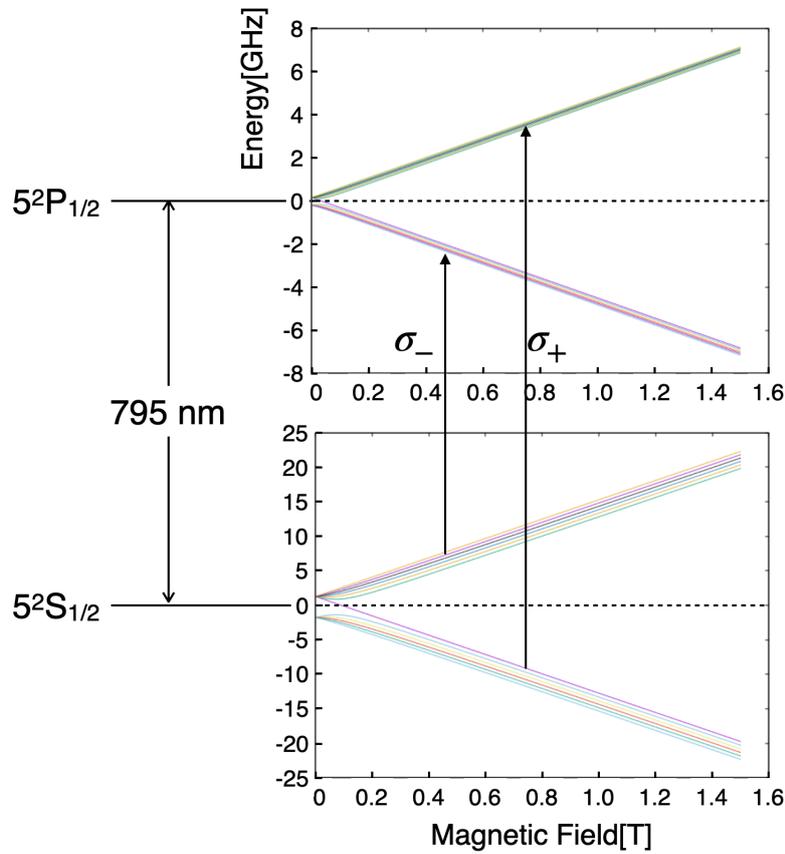


図 5.1: ^{85}Rb の Breit-Rabi Diagram。原子核のスピンが $1/2$ 以外の場合でも Breit-Rabi 方程式は適用できる。磁場が 2 T 印加された場合でも線幅の広がりも 20 GHz ほどであり、レーザーの波長で考えると 70 pm と非常に小さい。

$5^2P_{1/2}$ に励起された ^{85}Rb が $5^2S_{1/2}$ に脱励起すると、放出された光子は周囲の ^{85}Rb を励起するが、この光子は偏光していないため基底状態 ^{85}Rb の偏極率は低下してしまう。これを防ぐために $^3\text{HeSEOP}$ では少量の N_2 をセルに封入し、 N_2 との衝突で ^{85}Rb を脱励起させる。緩衝ガスに N_2 を使用するのには、 Rb との衝突断面積が 50 \AA^2 と大きい事に加え、アルカリ金属とは反応しないためである。 N_2 と ^{85}Rb の衝突頻度は ^{85}Rb の $5^2P_{1/2}$ 状態の崩壊レート $\Gamma = 1/27 \text{ ns}^{-1}$ よりも大きい必要がある。

Rb の励起エネルギーは衝突により N_2 の振動状態や回転状態として蓄積され、 ^3He ガスやセルの壁面に熱として衝突的に伝達される。この過程のためレーザー光の一部が熱としてセルに蓄積され、セルの温度はオープンの周辺温度より数十度ほど高くなる。 N_2 との衝突は Rb 原子を基底状態に脱励起させるほか、励起状態、及び基底状態の副準位を等確率で混合する。

Optical Pumping 中の、 Rb 原子による光子の平均吸収確率 $\langle \delta\Gamma \rangle$ は

$$\langle \delta\Gamma \rangle = (1 - 2\langle S_z \rangle) R_p \tag{5.1}$$

と与えられる。ここで R_p は非偏極の Rb がポンピングレート、 $2\langle S_z \rangle$ は Rb の平均偏極率。ポンピングレートは

$$R_p = \int_0^\infty I(\nu) \sigma(\nu) d\nu \quad (5.2)$$

であり、 $I(\nu)$ は単位周波数あたりのレーザー強度、 $\sigma(\nu)$ は Rb の吸収断面積。ポンピング光による Rb 原子の全スピン $\langle F_z \rangle$ の変化は

$$\frac{d\langle F_z \rangle}{dt} = \frac{1}{2} (1 - 2\langle S_z \rangle) R_p - \Gamma_{\text{Rb}} \langle S_z \rangle \quad (5.3)$$

と表せる。ここで Γ_{Rb} は Rb のスピン緩和レート。定常状態の Rb のスピン偏極率 P_{Rb} は

$$P_{\text{Rb}} = 2\langle S_z \rangle \quad (5.4)$$

$$= \frac{\Gamma_{\text{Rb}}}{\Gamma_{\text{Rb}} + R_p} \quad (5.5)$$

となる。 $P_{\text{Rb}} \approx 1$ の場合

$$\langle \delta\Gamma \rangle = (1 - 2\langle S_z \rangle) R_p \quad (5.6)$$

$$= \Gamma_{\text{Rb}} P_{\text{Rb}} \quad (5.7)$$

となり、光ポンピング効率は 100% に近づく。

5.1.1 SEOP for ^3He

偏極した Rb 原子と ^3He 原子が衝突すると、Rb と ^3He の弱い超微細相互作用によって Rb の角運動量の一部が ^3He に伝達する。これにより ^3He は偏極するが、一方で ^3He 原子と壁面の衝突や ^3He 同士の衝突、磁場勾配による拡散といった要因で偏極緩和を生じる。偏極緩和の確率を Γ_{He} とした時、 ^3He の偏極率の変化は

$$\frac{dP_{\text{He}}}{dt} = \kappa_{\text{Rb}} [\text{Rb}] (P_{\text{Rb}} - P_{\text{He}}) - \Gamma_{\text{He}} P_{\text{He}} \quad (5.8)$$

と表される。ここで、 κ_{Rb} は Rb- ^3He 衝突でのスピン交換係数、 $[\text{Rb}]$ は Rb の数密度。定常状態での ^3He の偏極率は

$$\frac{dP_{\text{He}}}{dt} = 0 \quad (5.9)$$

$$\kappa_{\text{Rb}} [\text{Rb}] (P_{\text{Rb}} - P_{\text{He}}) = \Gamma_{\text{He}} P_{\text{He}} \quad (5.10)$$

から

$$P_{\text{He}} = P_{\text{Rb}} \frac{\kappa_{\text{Rb}} [\text{Rb}]}{\kappa_{\text{Rb}} [\text{Rb}] + \Gamma_{\text{He}}} \quad (5.11)$$

となる。

5.1.2 ミューオンックヘリウムの SEOP

He 原子の軌道に捕獲されたミュオンは基底状態へのカスケード中に 2 つの電子を放出し、 $(\text{He}\mu^-)^+$ イオンを生成する。 μ^- の質量は e^- の 200 倍以上であるため、原子核の周りを回るボーア半径は e^- の 1/400 以下となる。したがって $(\text{He}\mu^-)^+$ イオンは、正味の電荷が +1 の擬似的な原子核と考えられ、陽子とよく似た振る舞いをする。

10 気圧の He 中で、このイオンは数ナノ秒で分子イオン $\text{He}(\text{He}\mu^-)^+$ を形成する [53]。 $\text{He}(\text{He}\mu^-)^+$ は偏極アルカリ金属原子との荷電交換



によって、電子偏極 $\text{He}\mu^- e^-$ 原子を生成する。ここで \uparrow は電子のスピン偏極を意味する。また $\text{He}\mu^- e^-$ 原子はアルカリ金属原子とのスピン交換



によっても偏極される [48]。

これらの反応で生成した電子偏極 $\text{He}\mu^- e^-$ 原子の一部は、超微細相互作用により擬似原子核偏極 $\text{He}\mu^- e^-$ 原子となる。 ^4He 原子核はスピン 0 なので、 $^4\text{He}\mu^- e^-$ 原子の擬似原子核の偏極はすなわち μ^- の偏極を意味する。

また、アルカリ金属原子の第一イオン化エネルギーは小さく、K で 4.3407 eV、Rb で 4.1771 eV、Cs で 3.8939 eV である。よって低気圧の ^4He ガス中であっても、アルカリ金属蒸気が存在すればアルカリ金属原子を electron donor として $^4\text{He}\mu^- e^-$ 原子が形成される。electron donor のアルカリ金属原子が偏極していれば、生成する $^4\text{He}\mu^- e^-$ 原子も電子が偏極した状態であると考えられる。

偏極の過程こそ異なるものの、 $^4\text{He}\mu^- e^-$ の偏極率の変化は ^3He と同様に下式で表して良いと考えられる。

$$\frac{dP_{^4\text{He}\mu^- e^-}}{dt} = \kappa_{\text{Rb}} [\text{Rb}] (P_{\text{Rb}} - P_{^4\text{He}\mu^- e^-}) - \Gamma_{^4\text{He}\mu^- e^-} P_{^4\text{He}\mu^- e^-} \quad (5.14)$$

J-PARC における $^4\text{He}\mu^- e^-$ の場合、ビーム強度が $\mathcal{O}(10^6 \mu^-/\text{s})$ なので、 $^4\text{He}\mu^- e^-$ よりも ^4He の数の方がはるかに大きい。 ^4He が基底状態である場合、Pauli の排他律から $^4\text{He}\mu^- e^-$ と ^4He が衝突しても ^4He の量子状態は変わらないと考えられる。加えて $^4\text{He}\mu^- e^-$ の平均自由行程は $\mathcal{O}(0.1 \mu\text{m})$ 程度であり、数密度比を考えると $^4\text{He}\mu^- e^-$ 同士の衝突が起こる確率は無視できる。すなわち $^4\text{He}\mu^- e^-$ の場合、 ^3He と比較して偏極緩和確率は小さい。

5.1.3 Hybrid SEOP

Rb は D1 線を励起するのに必要な 795 nm レーザーが安価なことや、光ポンピング効率において優れる一方、Rb 同士の衝突による偏極緩和確率が大きい。Hybrid SEOP は SEOP に複数のアルカリ金属を使用することで Rb の偏極緩和を抑制する手法であり、J-PARC のスピンフィルター開発では Rb と K を使用している [54]。K 原子と Rb 原子のスピン交換衝突では Rb 原子の偏極がほ

とんど損失なく K 原子に伝達する。K 原子同士の衝突による偏極緩和は Rb の場合と比べて非常に小さいため、Hybrid SEOP の導入によってアルカリ金属の Optical Pumping 効率が上昇する。

K-Rb のスピン交換衝突断面積は 200 \AA^2 と非常に大きい。通常 SEOP に使用される温度である 200°C では $[\text{K}] \simeq [\text{Rb}] \simeq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ であり、K-Rb のスピン交換レートは 10^5 s^{-1} となる。これは SEOP セルにおけるアルカリ金属の典型的なスピン緩和速度 500 s^{-1} よりはるかに速い。したがって K 原子と Rb 原子はスピン温度平衡状態にあり、電子のスピン偏極率 P_A は等しくなる。この単純化により

$$\frac{dP_{\text{He}}}{dt} = -\Gamma_{\text{He}}P_{\text{He}} + \Gamma_{\text{SE}}(P_A - P_{\text{He}}) \quad (5.15)$$

となる。ここで $\Gamma_{\text{SE}} = \kappa_{\text{K}}[\text{K}] + \kappa_{\text{Rb}}[\text{Rb}]$ 。 ^3He の場合、スピン交換レート係数 κ は K と Rb の場合でほぼ等しいので、スピン交換レートはアルカリ金属の数密度にほぼ比例する。定常状態では

$$(P_A - P_{\text{He}}) = \frac{\Gamma_{\text{He}}}{\Gamma_{\text{SE}}}P_{\text{He}} \quad (5.16)$$

$$P_A = \left(1 + \frac{\Gamma_{\text{He}}}{\Gamma_{\text{SE}}}\right)P_{\text{He}} \quad (5.17)$$

$$P_{\text{He}} = P_A \frac{\Gamma_{\text{SE}}}{\Gamma_{\text{SE}} + \Gamma_{\text{He}}} \quad (5.18)$$

となり、 $\Gamma_{\text{SE}} > \Gamma_{\text{Rb}}$ なので、到達偏極率が向上する。

一方 $^4\text{He}\mu^-e^-$ の場合、高温において到達偏極率を保つことができる点に Hybrid SEOP の利点がある。 $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子は $2.2 \mu\text{s}$ で崩壊するため、より多くの μ^- を再偏極するためにアルカリ金属の数密度やアルカリ金属と $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の衝突頻度を向上させたい。しかし数密度が大きくなりすぎるとアルカリ金属を光ポンピングしきれなくなってしまう。Hybrid SEOP であれば、同じ温度におけるアルカリ金属の数密度の合計量こそ減少するものの、より高温な状態でもアルカリ金属を 100% 偏極可能である。

5.1.4 偏極領域

SEOP に用いるガラスセルには Rb 原子の他に $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子生成のための He ガスと、緩衝ガスとして N_2 や CH_4 を封入する。ここで緩衝ガスは偏極した Rb 原子がセルの壁面に衝突して減偏極するのを防ぐ役割を持つ。セルの大きさを L とすると空中の原子は弾性軌道により約 L/v の時間で壁に衝突する。ここに他の気体が存在すると原子の運動は拡散運動となり、壁と衝突するまでの時間は L^2/D となる。ここで D は拡散係数であり、その次元は $[\text{L}^2\text{T}^{-1}]$ なので単位時間あたりに粒子が広がる面積を意味する。古典的には平均速度 v の粒子の平均自由行程が ℓ ならば

$$D = \frac{1}{3}v\ell \quad (5.19)$$

で与えられる。

He ガス中の Rb 原子については 2000°C , 760 torr において $D_0 = 0.54 \text{ cm}^2/\text{s}$ ないし $D_0 = 0.7 \text{ cm}^2/\text{s}$ である。 D は平均自由行程に比例するので、圧力に反比例する。よってガス圧を P とすると

$$D = (760 \text{ torr}/P) D_0 \quad (5.20)$$

となる。

質量 m_j 、数密度 n_j の標的原子中の注目原子 (質量 m_i) の平均自由行程 ℓ は

$$\ell = \frac{1}{\sigma_{ij} n_j} \left(\frac{m_j}{m_i + m_j} \right)^{1/2} \quad (5.21)$$

となる。ここで σ_{ij} は標的原子と注目原子の散乱断面積。また体積一定の容器内では、気体の状態方程式から

$$n_j = \frac{P_j N_A}{RT} \quad (5.22)$$

である。ここで N_A はアボガドロ定数、 R は気体定数。標的原子に複数の原子を考える場合は

$$\ell_{\text{tot}} = \left[\sum_j \ell_{ij} \right]^{-1} = \left[\sum_j \sigma_{ij} n_j \left(\frac{m_i + m_j}{m_j} \right)^{1/2} \right]^{-1} \quad (5.23)$$

となる。

$R = 8.31 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$, $N_A = 6.02 \times 10^{23} / \text{mol}$ なので、例えば $P_{\text{He}} = 6 \text{ atm}$, $V = 450 \text{ cm}^3$, $T = 200^\circ\text{C}$ の場合、 $n = 6 \times 1.013 \times 10^5 \times 6.02 \times 10^{23} / 8.31 / 473.15 = 9.31 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ また Rb 原子の原子半径は 248 pm, He 原子の原子半径は 31 pm なので、古典的には散乱断面積は $\sigma = \pi (248 + 31)^2 \text{ pm}^2$ である。よって

$$\ell_{\text{Rb-He}} = \frac{1}{\pi (248 + 31)^2 \times 10^{-24} \times 9.31 \times 10^{25}} \left(\frac{4.0026}{84.912 + 4.0026} \right)^{1/2} \quad (5.24)$$

$$= 9.32 \text{ nm} \quad (5.25)$$

Maxwell-Boltzmann 分布の平均速度は

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (5.26)$$

$$= 343.48 \text{ m/s} \quad (5.27)$$

なので平均自由時間としては

$$\frac{\ell_{\text{Rb-He}}}{\bar{v}} = \frac{9.32 \times 10^{-9}}{343.48} \quad (5.28)$$

$$= 2.71 \times 10^{-11} \text{ s} \quad (5.29)$$

となる。同様に He ガス中の K 原子を考えた場合、平均自由行程は以下の値となる。

$$\ell_{\text{K-He}} = \frac{1}{\pi (235 + 31)^2 \times 10^{-24} \times 9.31 \times 10^{25}} \left(\frac{4.0026}{38.96370668 + 4.0026} \right)^{1/2} \quad (5.30)$$

$$= 14.75 \text{ nm} \quad (5.31)$$

アルカリ金属原子の平均自由行程の小ささから、SEOP ではレーザーが照射された領域でのみ標的原子は偏極する。

5.2 ミューオンickヘリウム原子再偏極装置

5.2.1 D1 Area

J-PARC MLF MUSE D-Line の D1 Area を利用し、 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子再偏極の実証実験をした。D1 Area のビームスペックは D2 Area と同等である。D1 Area にはビーム軸方向に最大 0.4 T の磁場を印加可能なヘルムホルツコイルが備え付けられている。ヘルムホルツコイルの上流、下流にはそれぞれ 10 個の検出器が対称に設置されている。



図 5.2: D1 エリアの装置を横からみた写真

5.2.2 レーザー装置

本実験ではアルカリ金属の偏極のためにレーザーが必要となる。以下では実験に使用した装置について説明する。光ポンピングするアルカリ金属は、中性子スピフィルターに倣い Rb を選択した [50]。

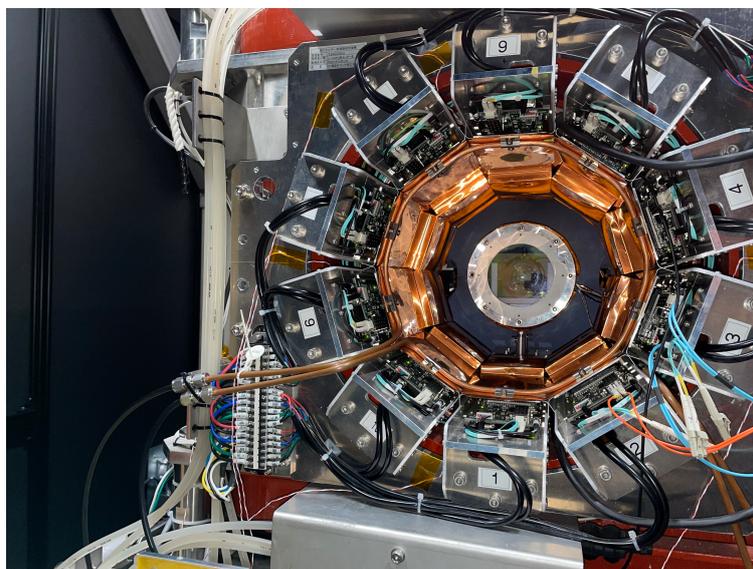


図 5.3: D1 装置を下流側から見た写真。検出器には Kalliope モジュールが使用されている

5.2.2.1 Laser Diode Array

本実験には多数のレーザーダイオードを水平に並べたレーザー素子 Laser Diode Array(LDA) の出力するビームを使用した。LDA は Coherent DILAS 製で、中心波長は 796.9 nm、線幅 0.8 nm の CW レーザーを供給する。100 A の電流を流すと 90 W の出力がある。図 5.6 は使用した LDA(SN : 62313) のスペックシートである。

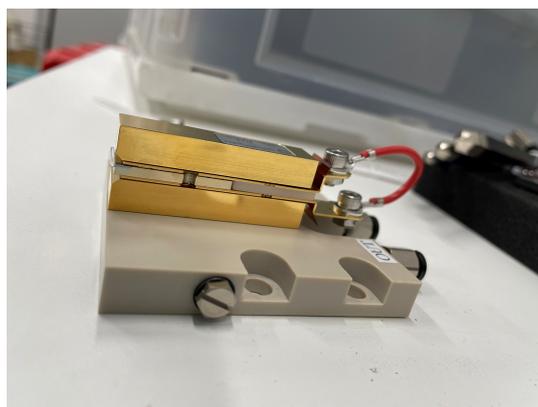


図 5.4: 使用した LDA。レーザー射出部にはレンズが設置されており、鉛直方向の発散を強く抑えている。

5.2.2.2 Chirped-VBG

LDA が供給するビームは線幅が広く、また中心周波数も Rb の D1 線 795 nm とは異なるため、そのまま使用しても大部分のレーザーは optical pumping に寄与しない。

VBG (Volume Bragg Grating) は回折格子の一種であり、重クロム酸ゼラチン (DiChromated Gelatin : DCG) フィルムを 2 枚のガラスで挟んだ素子である。DCG にはレーザー干渉によって溝が刻まれており、入射光に対して回折格子として機能する。パターン間隔 d nm の VBG にレーザーを垂直入射すると、入射光のうち波長 d nm の光の一部は Bragg 反射され、LDA に入射する。LDA に入射した光は誘導放射を引き起こすため、LDA のレーザー放射と VBG での Bragg 反射を繰り返すことで中心波長 d nm かつ線幅の狭いレーザー光を生成できる。

VBG のパターン間隔が変化すれば、出力されるレーザーの波長も変化する。これを利用し、VBG の熱膨張を制御する他、Chirped-VBG と呼ばれる素子を使用することでレーザー波長の微調整が可能となる。Chirped-VBG はパターン間隔に傾斜をつけた VBG であり、レーザーを照射する高さによって Bragg 反射する光の波長が異なる。すなわち Chirped-VBG の高さを調整するだけでレーザー波長を調整可能である。波長の調整が容易であるため、我々は Chirped-VBG をレーザー波長の挟帯化素子として採用した。図 5.9 に波長挟帯化の前後のレーザーのスペクトルを示す。

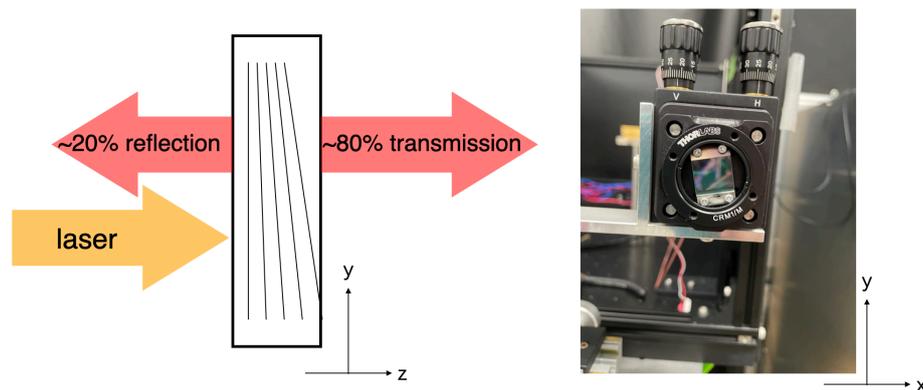


図 5.5: 左 : Chirped-VBG の概念図。高さによって異なる波長の光を約 20% Bragg 反射し、誘導放射を引き起こす。右 : 実物の写真。14 mm 角の正方形。

E11.4Y-795.2-90C-SO3.6 (1x1)



62313

23.03.2021

Continuous Wave-Operation

P (110 A)	88,6 W	Wavelength (FWHM)	796,9 nm
I (90,0 W)	111,1 A	Line width	0,8 nm
Threshold	38,7 A	Temperature	20 °C
Slope	1,24 W/A	Current	110,0 A
Overall efficiency	45,0 %		
UF	1,80 V	Flow rate	18,0 l/h
UE	1,61 V		
Rs	1,7 mOhm		

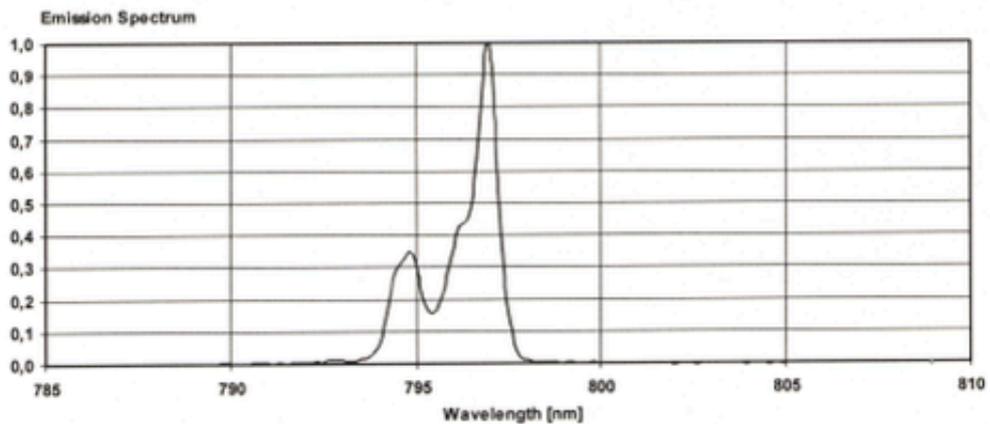
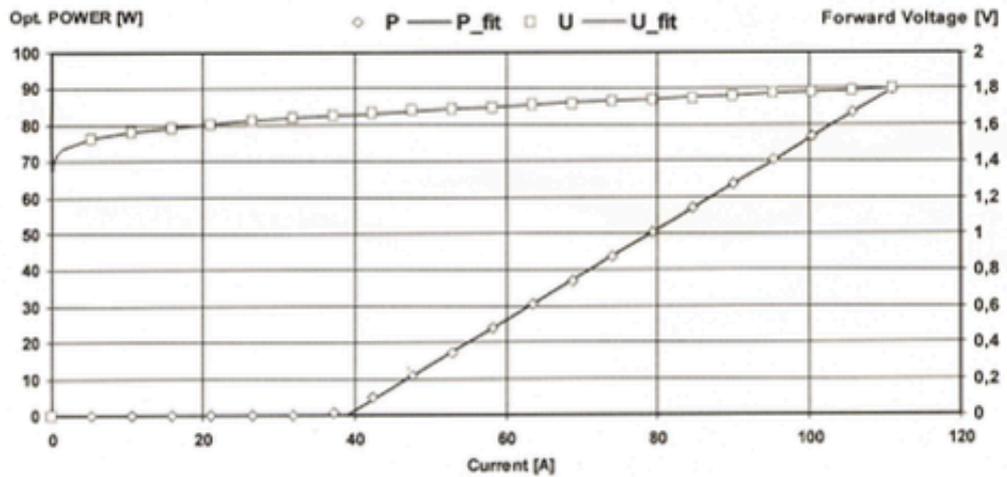


図 5.6: LDA のスペックシート。

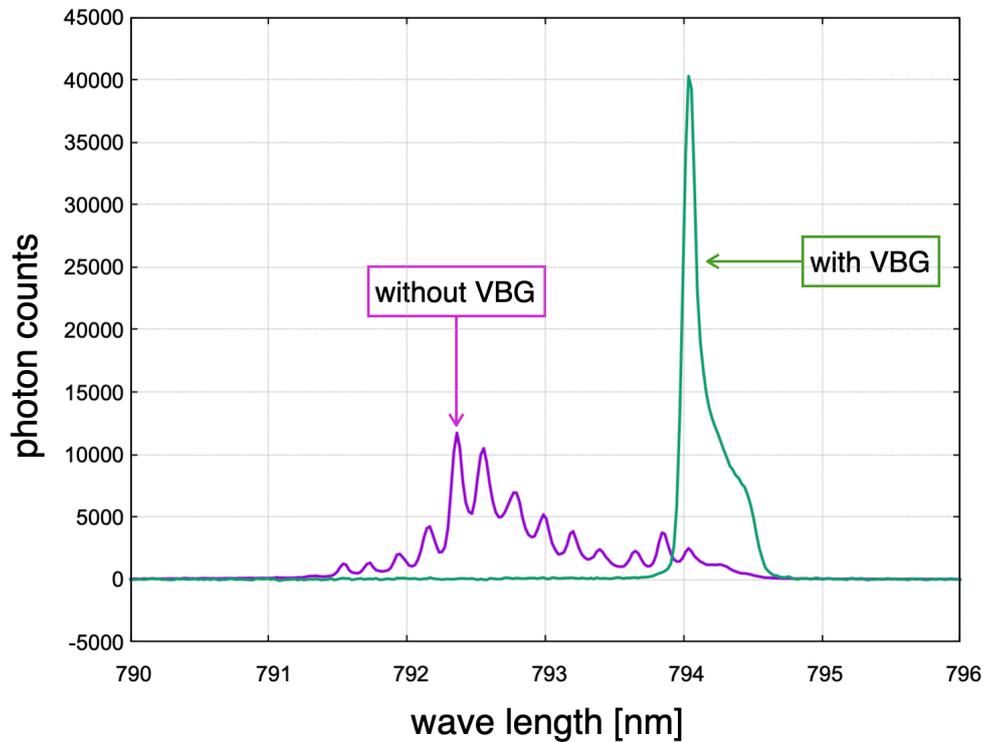


図 5.7: Chirped-VBG により狭帯化する前後のスペクトル。狭帯化前は各レーザーダイオードの共振周波数が異なるため、ピークが複数ある。VBG を使用することで線幅は 0.2 nm まで狭まる。狭帯化後のピーク周波数は VBG の高さで調整する。レーザー光によって VBG は加熱されるため、狭帯化後も熱平衡状態になるまでは徐々にレーザー波長が変化する。

5.2.2.3 光学素子

Rb はレーザーが照射されている領域でのみ偏極する。照射するレーザーの形状調整には $f = -20$ mm のレンズ (Thorlabs LK1085L2-B) と $f = -30$ mm のレンズ (Thorlabs LK1982L2-B) を使用した。また Rb を偏極するため、LDA が出力する線偏光状態の光を $\lambda/4$ 板 (Thorlabs WPQ10M-780) で円偏光状態にした。

5.2.3 Glass Cell

ガラスセルには Rb や K を封入する。セルは Rb、K の両方を封入した Hybrid セルと、Rb のみを封入した Pure-Rb セルの 2 通りを作成した。

アルカリ金属は反応性が高く、Pyrex のような一般的なガラスにアルカリ金属を封入して加熱した場合、ガラスは変色する。これを避けるためにアルミノシリケートガラスの 1 種である GE180 を使用して SEOP 用のセルを製作する。セルには常温で 3 atm の ^4He ガスを封入する。ガラスが

厚いと μ^- ビームがセル内部に到達できず、 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子を生成できない。反面ガラスが薄すぎる場合、内圧によりセルは破裂する。セルの設計は応力の計算と Geant4 シミュレーションの併用によって最適化した。内圧に強いため、カプセルのような形状をベースとしている。今回使用したセルは直径 75 mm、長さ 150 mm、ガラス厚さ 1 mm である。

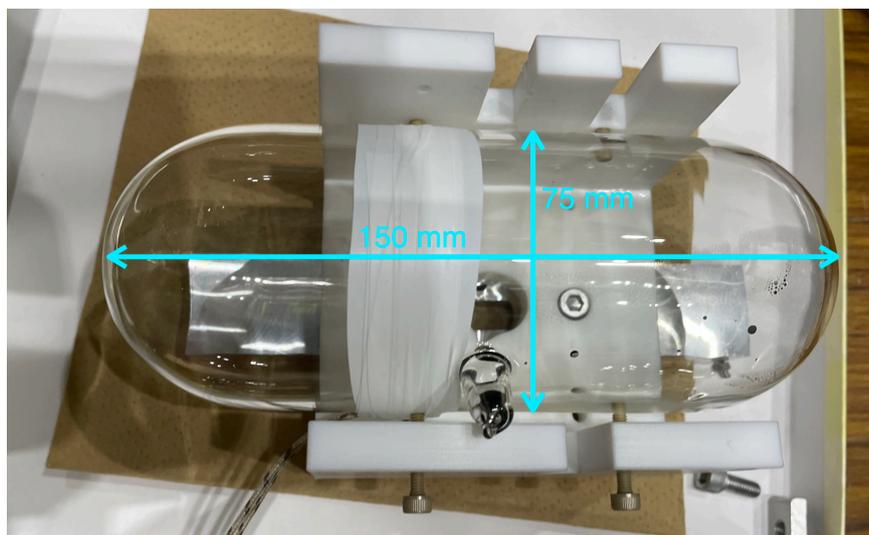


図 5.8: 今回使用したガラスセル。ガラス加工は東北大学金属材料研究所のガラス工場に依頼した。温度モニター用の熱電対はシールテープで固定している。



図 5.9: 試験用に製作した pyrex 製のセル。左: Rb 封入後、50 時間 200°C に加熱したもの。Rb によって腐食され、変色している

Molcure	Composition by Weight
SiO ₂	60.3%
BaO	18.2%
Al ₂ O ₃	14.3%
CaO	6.5%
SrO	0.25%

表 5.1: Composition of GE180

Molcure	Composition by Weight
SiO ₂	80.6%
Ba ₂ O ₃	13.0%
Na ₂ O	4.0%
Al ₂ O ₃	2.3%
Others	0.1%

表 5.2: Composition of Pyrex

5.2.3.1 レーザー遮光

MLFでのレーザーの使用には、安全のため厳重な遮光が求められる。我々はレーザーを暗箱に設置し、セル加熱用のオーブンと暗箱をアルミダクトで接続した。セル加熱用のオーブンはアルミニウム製の円筒形であり、ミュオンビーム上流側は0.5 mm厚の黒色アルマイトで終端しているためビームライン上流にレーザー光が漏れ出すことはない。さらにD1 Areaの分光器全体を黒色アルマイト板と暗幕で覆い、簡易的な暗室とすることで2重に遮光している。

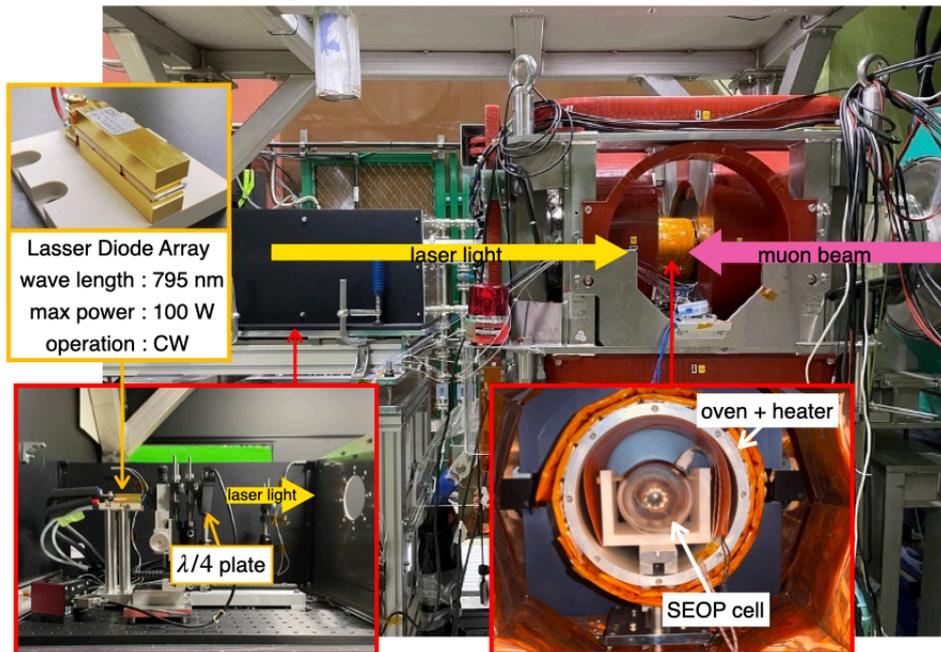


図 5.10: 実験のセットアップ。暗箱とオーブンをつなぐダクトと、分光器を覆う暗室を設置する前の様子。

5.3 測定結果

セルを加熱し、レーザーと μ^- ビームを同時に照射すると、図 5.11 のようにレーザーの偏光に対応して偏極した Rb と同じ方向に μ^- が再偏極する。セルの上下流の検出器で μ^- の崩壊電子をカウントし、上流側での検出数 N_{up} と下流側での検出数 N_{down} の非対称度 $\text{Asymmetry} = \frac{N_{\text{up}} - N_{\text{down}}}{N_{\text{up}} + N_{\text{down}}}$ を求める。各検出器の検出効率が一定であれば、 $\text{Asymmetry} = AP(t)$ となる。ここで、 A は立体角や測定可能な崩壊粒子のエネルギー範囲などの要素で決まる係数であり、 μSR の測定から $A = 0.22$ と求められている。実際にはセルを設置する位置や、セルの加熱による検出器の温度変化等起因する検出効率のばらつきによってオフセットは変化する。 Asymmetry は偏極率に比例するので、 μ^- の再偏極に伴い Asymmetry は変化していく。ビーム上流側に偏極した μ^- が増加すると Asymmetry も増加し、下流側に偏極した μ^- が増加すると Asymmetry は減少する。

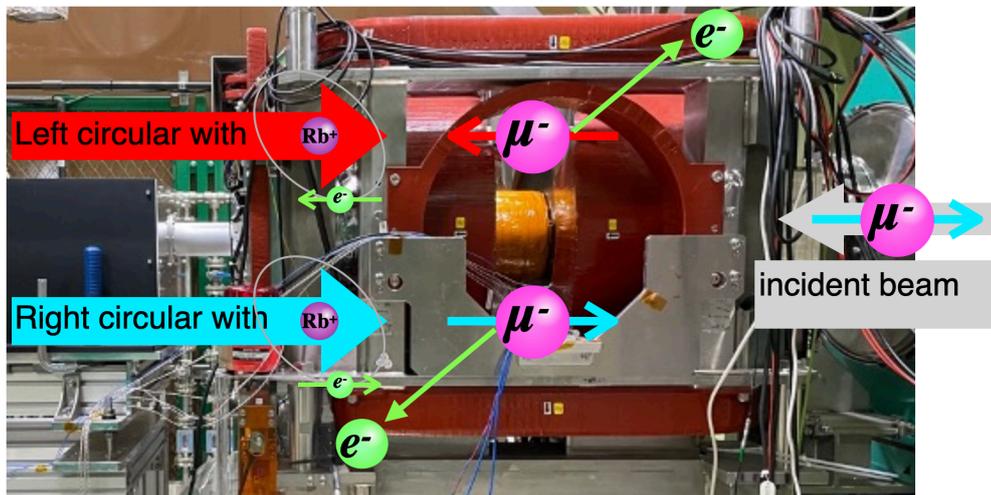


図 5.11: 照射レーザーの偏光と Rb、 μ^- 偏極方向の対応を表した図。

図 5.12 に 240 度に加熱した Hybrid セルでの測定結果を示す。照射レーザーの偏光に対応して Asymmetry が変化しており、 μ^- が再偏極していることがわかる。また照射レーザーが直線偏光である場合 Rb は無偏極状態となり、 μ^- を減偏極させる。 $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子では残留偏極が小さいため、 Asymmetry は変化しない。図 5.13 は 200 度と 240 度において Hybrid セルに右円偏光光を照射した結果の比較である。 $t < 2000$ ns の領域では 240 度の場合の Asymmetry が有意に大きい。これは温度の上昇に伴いセル内のアルカリ金属の数密度や $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子との相対速度が増加し、衝突頻度が增大したためである。 $t > 2000$ ns の領域では Asymmetry が飽和し、違いがなくなると考えられる。

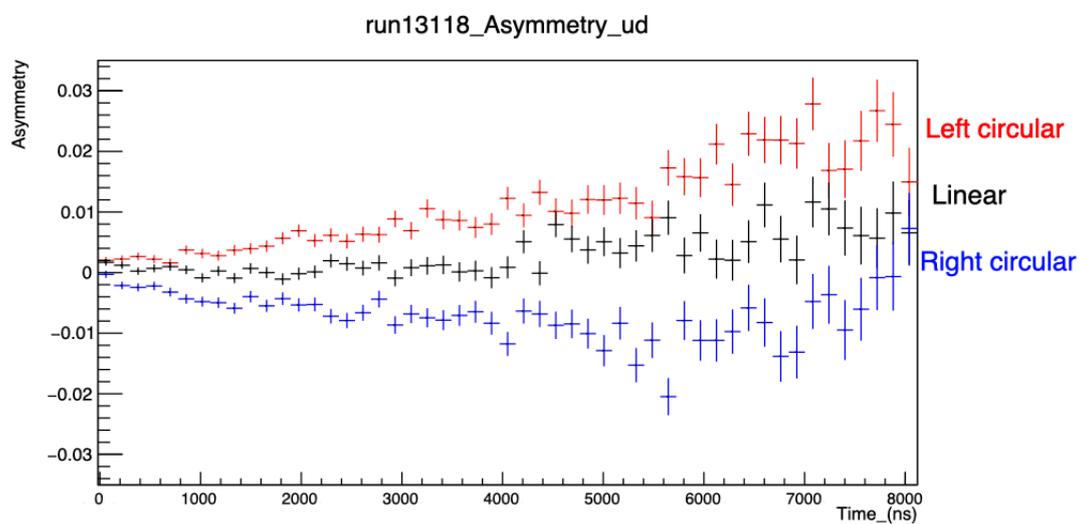


図 5.12: Hybrid セルを 240 度に加熱した際の測定結果

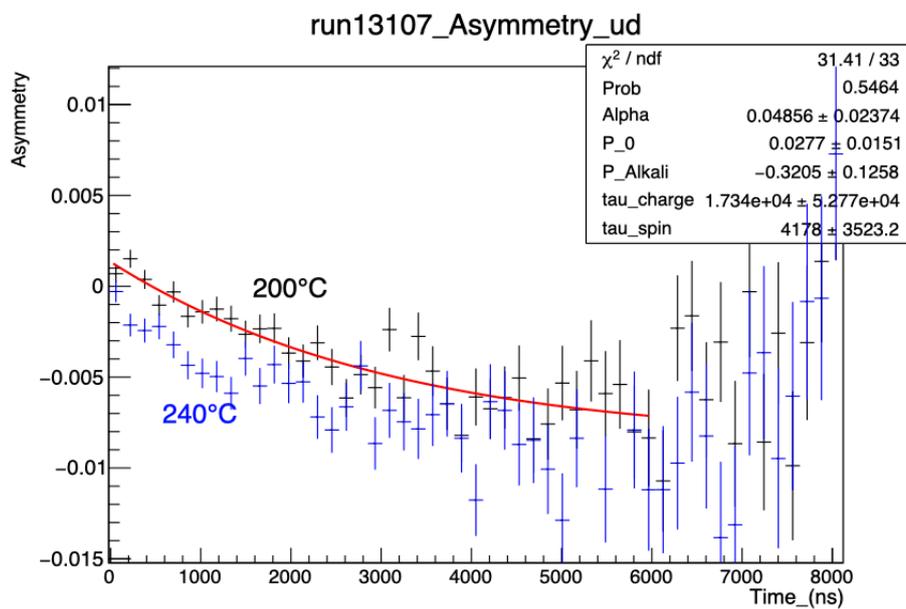


図 5.13: Hybrid セルを 200 度に加熱した場合と 240 度に加熱した場合の、右円偏光レーザーによる Asymmetry の変化。

一方で Rb セルの場合、200 度と 220 度の測定結果を比べると図 5.14 の通りであり、ほとんど変化がない。これは pure-Rb セルでは Hybrid セルに比べて Rb 同士の衝突によるスピン減偏極の効果が大きく、数密度の増大に伴って光ポンピング効率が低下したためと考えられる。

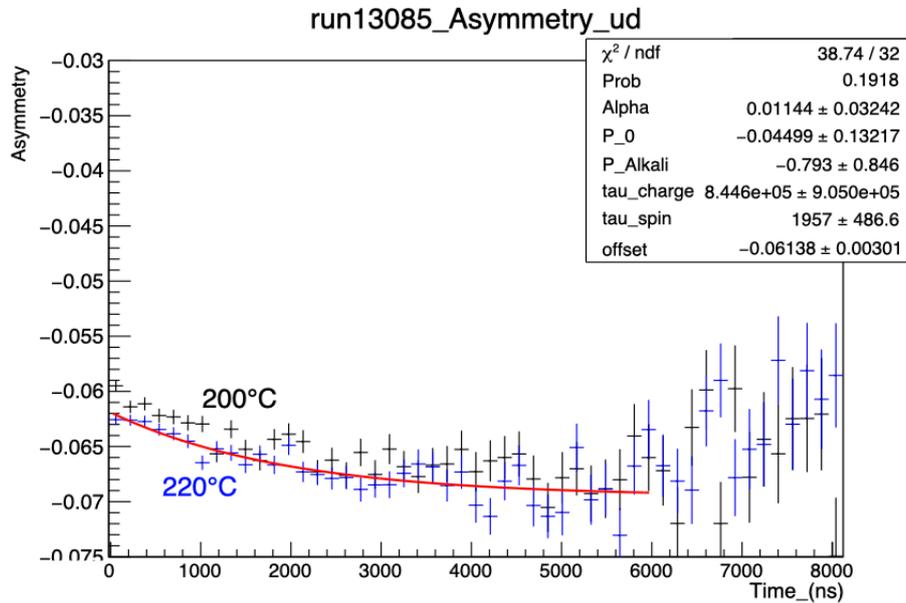


図 5.14: Rb セルを 200 度に加熱した場合と 220 度に加熱した場合の、右円偏光レーザーによる Asymmetry の変化。

セル内のアルカリ金属の偏極率を見積もるため、Rb セルに μ^+ を入射して Mu の再偏極についても測定した。Mu は超微細相互作用以外の過程では減偏極しないため、入射 μ^+ の偏極率を P_μ 、セル内のアルカリ金属の偏極率を P_{Alkali} とすれば生成時点の偏極率は $(P_\mu + P_{\text{Alkali}})/2$ となる。また直線偏光レーザーを入射している場合、 μ^+ は無偏極状態になる。D-Line の供給する μ^+ ビームはほぼ 100% 偏極しているため、これらから μ の偏極率と Asymmetry の対応や P_{Alkali} の値を大まかに推定できる。 $^3\text{HeSEOP}$ の知見から、セル内の Rb 光ポンピング効率が十分高いと考えられる 200 度で測定を実行し、図 5.15 に示す結果を得た。セル内の Rb の偏極率は約 30% と推定される。これは照射レーザー径が約 40 mm であるのに対しセルの直径が 75 mm であったため、セルの体積の 36% 程度の領域にしかレーザーが照射されていないことが大きな原因と考えられる。レーザー強度が足りず Rb を 100% 偏極できていない場合、温度の増加とともにその影響は大きくなり、到達 Asymmetry も減少する。今回の測定ではいずれの温度でも到達 Asymmetry は同程度であり、レーザー照射領域の Rb は 100% 偏極と考えられる。

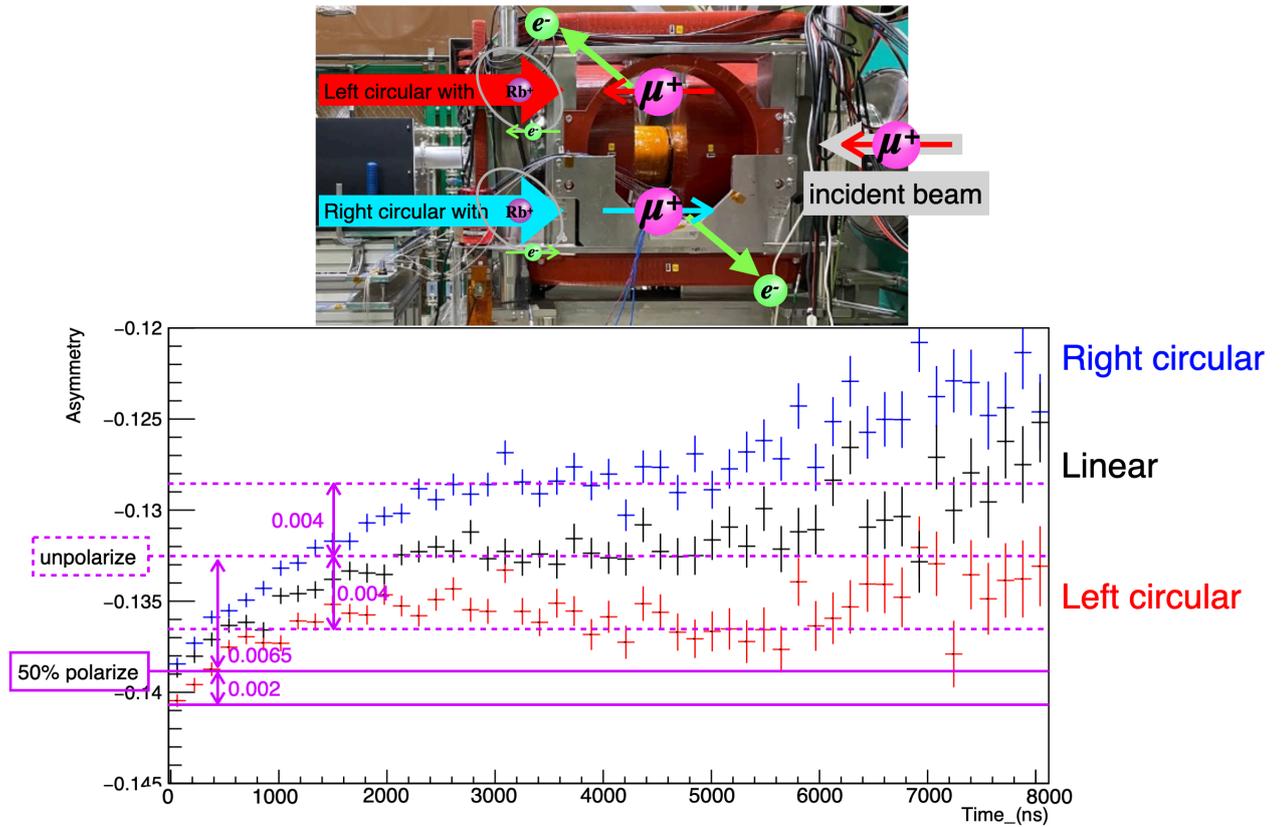


図 5.15: Rb セルを 200 度に加熱した状態で μ^+ を入射した際の測定結果。 μ^+ はスピンと平行な方向に崩壊陽電子を放出しやすいので、レーザーの偏光と Asymmetry の増減の関係は反転する。

初期偏極率、到達偏極率と Asymmetry の対応から $Asymmetry = 0.014P(t) - 0.13$ と仮定し、Rb と ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の衝突レート f を粗く掃引しながら MC シミュレーションを行った。各レーザー偏光に対し、

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{Asymmetry^{\text{EXP}} - Asymmetry^{\text{simulation}}}{\delta^{\text{EXP}} \delta^{\text{simulation}}} \right)^2 \quad (5.32)$$

が最小であったシミュレーションの結果を図に示す。ここで、 $Asymmetry^{\text{EXP}}$, $Asymmetry^{\text{simulation}}$ は測定結果とシミュレーション結果の Asymmetry、 δ^{EXP} , $\delta^{\text{simulation}}$ は測定結果とシミュレーション結果の不確かさ。

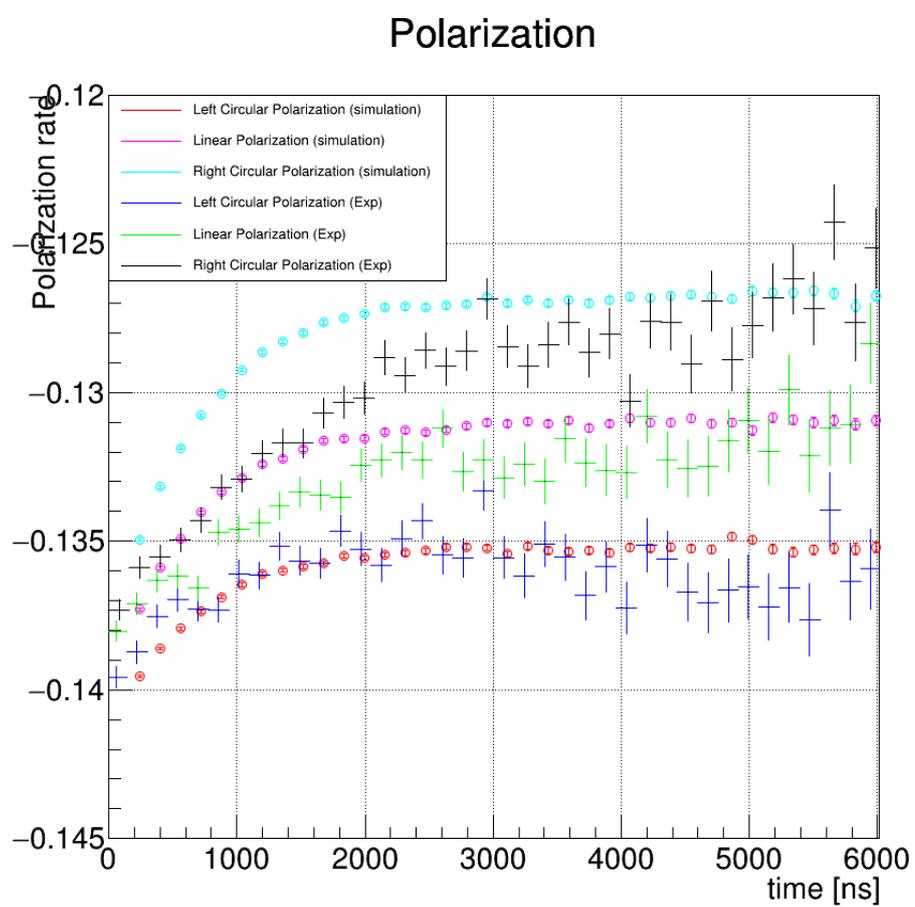


図 5.16: 左円偏光について χ^2 が最小値 6.2×10^9 となった、 $f = 3.0 \times 10^6$ の場合の結果

Polarization

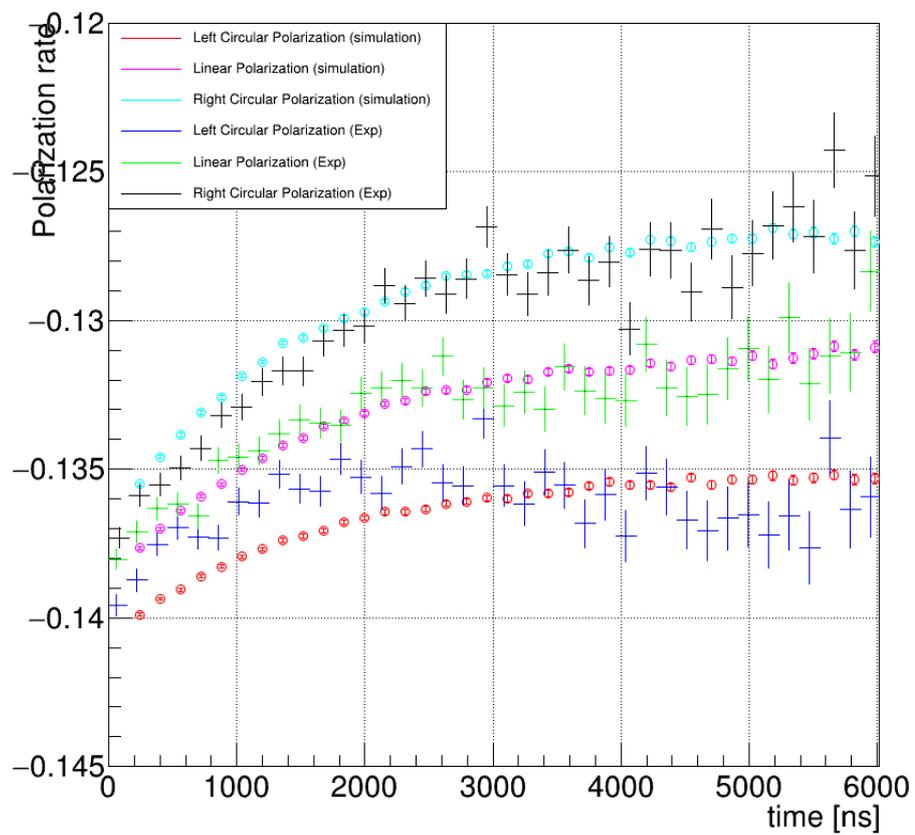


図 5.17: 直線偏光について χ^2 が最小値 4.8×10^9 となった、 $f = 1.3 \times 10^6$ の場合の結果

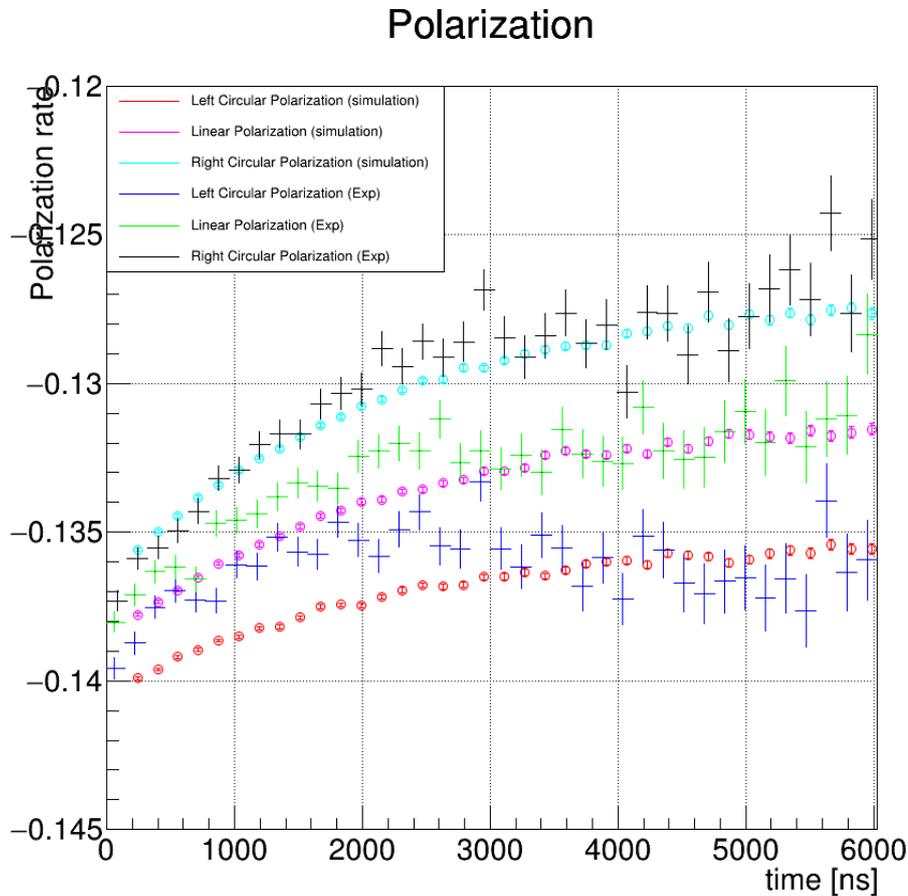


図 5.18: 右円偏光について χ^2 が最小値 2.3×10^{10} となった、 $f = 0.9 \times 10^6$ の場合の結果

シミュレーションから見積もられる f は、左円偏光の場合とそれ以外の場合で約 3 倍の差がある。原因の 1 つとしては、セル内部の温度の違いが考えられる。本測定に使用したガラスセルは封じ切りのため、内部のガス温度をモニターすることができない。セルの温度調整は、セル外壁の温度を基準に加熱用ヒーターの出力を制御して行っている。しかし実際にはレーザー光の吸収による加熱や温度勾配の存在のため、セル内のガス温度と外壁の温度には差が生じる。直線偏光のレーザーはセル内部まで到達しないため、入力レーザー光の偏光や偏光度によってはセルの内部温度には大きな差が生じる。セル内のガス温度が 160 度と 220 度の場合を比較すると、160 度の場合 f は 220 度の 35% 程度である。

5.4 HFS 分光への SEOP の組み込み

将来的に SEOP 装置は HFS 測定に組み込む。装置の性能向上のための取り組みはこれからも続けていくが、差し当たり SEOP の組み込みで測定精度はどの程度変化するかを推定を試みる。

SEOPを組み込んだHFS測定では、SEOPによるスピン状態の変化とRabi振動によるスピン状態の変化の双方が発生する。現状では2つの効果を組み合わせた状態遷移を解析的に取り扱えていないため、MCシミュレーションによってこれを推定する。本論文では以下の仮定に基づいてシミュレーションした。

2.3.2で求めた各状態の存在確率について、各状態の遷移確率を初期状態領で加重平均したものと捉え、以下のように取り扱う。

- 1: 1 ns ごとに粒子が崩壊するか判定する
- 2: 崩壊しない場合、アルカリ金属とのスピン交換をするか判定する
- 3: 崩壊する場合、ないしスピン交換をする場合、現在粒子がどの状態かを決定する
- 4: スピン交換した場合、以降の計算では現在の時刻を $t = 0$ としてスピン交換確率と各状態の存在確率を求める

Rbの最外殻電子が $|m_e = \uparrow\rangle$ に偏極している場合、SEOPによる状態の変化は図5.20のようになると想定している。Rbの偏極方向が $|m_e = \downarrow\rangle$ の場合は図5.21の通りである。

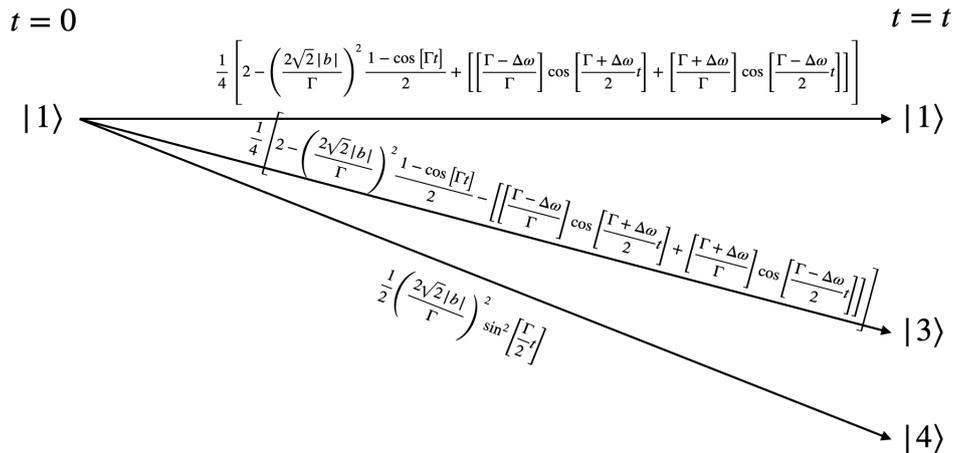


図 5.19: 時刻 $t = 0$ に状態 $|1\rangle$ だった場合に、 $t = t$ ではどの状態かを選択する確率を表した図

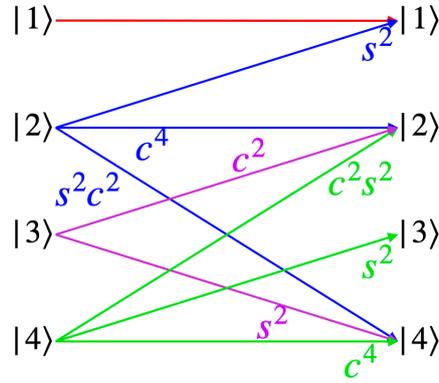


図 5.20: Rb が $|\uparrow\rangle$ に偏極している場合の、Rb と ${}^4\text{He}\mu^-$ の衝突による状態遷移のチャート

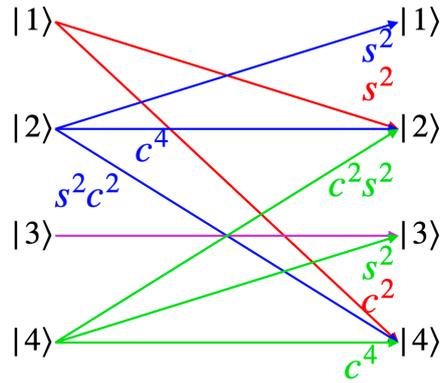


図 5.21: Rb が $|\downarrow\rangle$ に偏極している場合の、Rb と ${}^4\text{He}\mu^-$ の衝突による状態遷移のチャート

シミュレーションに際し、200 度で 6 気圧のヘリウム標的内での SEOP を想定する。温度 T における Rb と K の数密度は下式から計算できる [54]

$$[\text{Rb}] = m_{\text{Rb}} [\text{Rb}]_0 \quad (5.33)$$

$$[\text{K}] = m_{\text{K}} [\text{K}]_0 \quad (5.34)$$

$$[\text{Rb}]_0 = \left(\frac{7.25 \times 10^{16}}{T} \right) 10^{9.318 - \frac{4040}{T}} \text{ cm}^{-3} \quad (5.35)$$

$$[\text{K}]_0 = \left(\frac{7.25 \times 10^{16}}{T} \right) 10^{9.408 - \frac{4453}{T}} \text{ cm}^{-3} \quad (5.36)$$

ただし m_{Rb} 、 m_{K} はそれぞれ Rb、K のモル分率であり、 $m_{\text{Rb}} + m_{\text{K}} = 1$ 。単純化のため $m_{\text{Rb}} = 1$ とすれば、200 度では $[\text{Rb}] = 9.22191 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ となる。また Rb の熱速度は $v_{\text{Rb}} = 343.43 \text{ m/s}$ であり、 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の熱速度は $v_{{}^4\text{He}\mu^-e^-} = 1560.07 \text{ m/s}$ との相対速度は $\bar{v}_\alpha = 1.217 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。平

均自由行程は $l_{\text{Rb-He}} = 9.32 \text{ nm}$ となる。Barton によれば、Rb とのスピンの交換による ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の偏極の時間発展は以下で表される [48]

$$P_\mu = 1 - \exp[-t\beta_\alpha] \quad (5.37)$$

$$\beta_\alpha = g_\alpha \sigma_{\text{SE}} \bar{v}_\alpha [\text{Rb}] \quad (5.38)$$

β_α はスピンの交換レートを意味する。 g_α は無偏極を想定した場合の、衝突の際にスピン交換しうる粒子の割合と解釈できる。 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の場合、 $g_\alpha = \frac{1}{2}$ である。 σ_{SE} は Rb と ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ のスピン交換断面積であり、Barton の測定結果から $\sigma_{\text{SE}} = (4.47 \pm 0.67 \pm 0.82) \times 10^{-14} \text{ cm}^2$ である [48]。すなわち Rb と ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の衝突レート f は $f = \sigma_{\text{SE}} \bar{v}_\alpha [\text{Rb}] = 5.02 \text{ MHz}$ となる。5.3 から、セル全体にレーザーが照射されていると仮定して Rb の偏極率は 1 として扱う。また図 4.9, 4.10, 4.11 から、マイクロ波強度 $|b| = 500 \text{ kHz}$ 、 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ の初期偏極率は 5% とする。

以上の値を使用し、100 万個の ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子について MC シミュレーションした。ただし、 ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の位置やマイクロ波強度の分布は考慮していない。マイクロ波を印加した状態で、同時に SEOP した場合としない場合の偏極率の時間発展は図 5.22, 5.23 のようになった。比較のため、初期偏極率がミューオニウムと同等の 50% の場合についても図 5.24, 5.25 に示す。

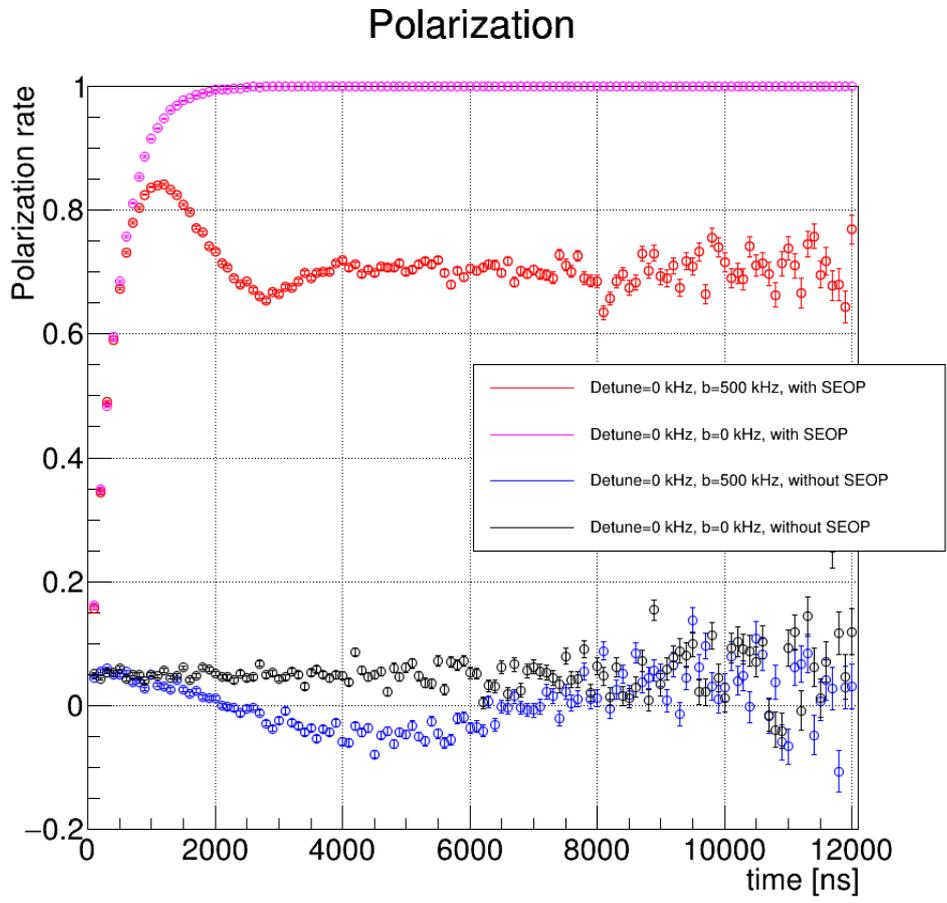


図 5.22: 初期偏極率 5%、 $\Delta\omega = 0$ kHz の場合のシミュレーション結果。

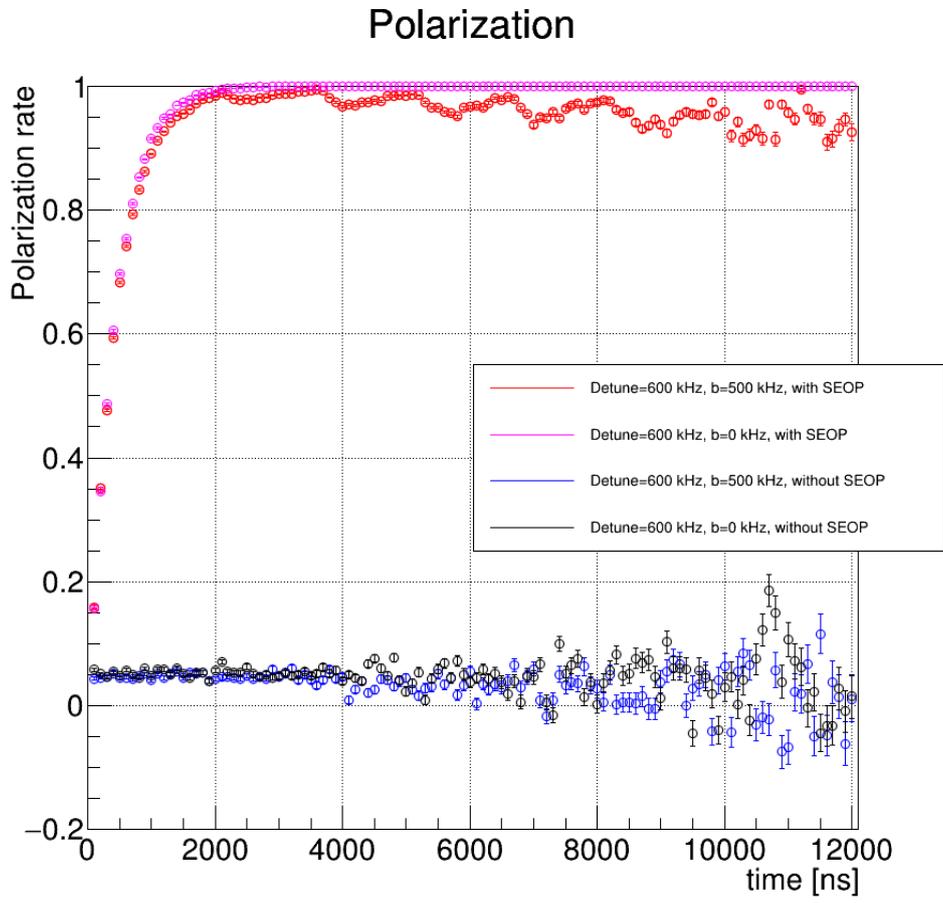


図 5.23: 初期偏極率 5%、 $\Delta\omega = 600$ kHz の場合のシミュレーション結果。

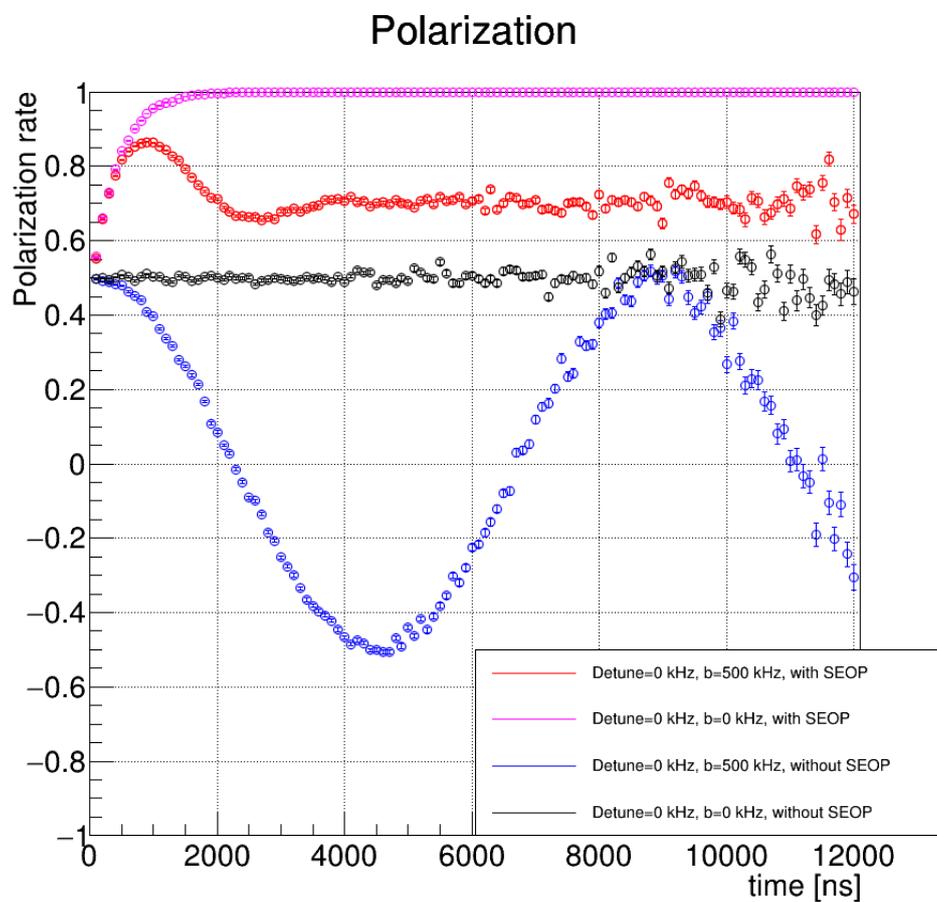


図 5.24: 初期偏極率 50%、 $\Delta\omega = 0$ kHz の場合のシミュレーション結果。

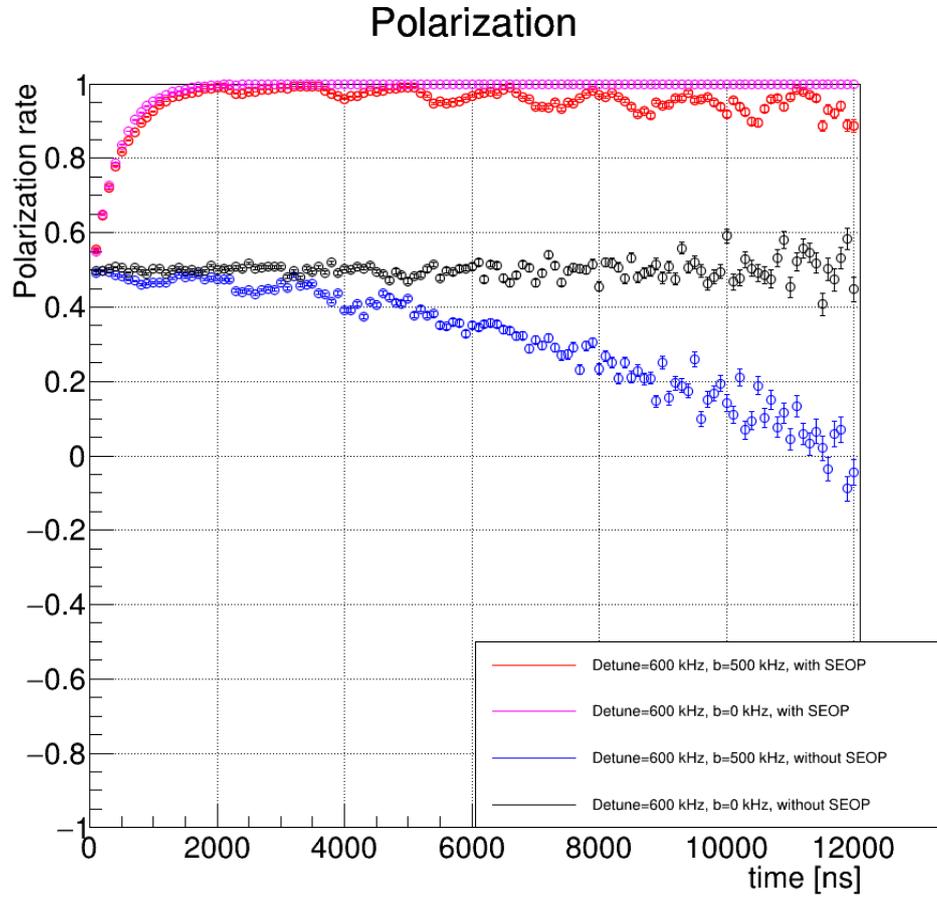


図 5.25: 初期偏極率 50%、 $\Delta\omega = 600$ kHz の場合のシミュレーション結果。

共鳴曲線は下式で表される。

$$S = \frac{\frac{\gamma d\Omega}{4\pi} A_2(y_0) \cos \theta \left[\int_{t_1}^{t_2} [P_z^{\text{ON}}(t) - P_z^{\text{OFF}}(t)] \exp(-\gamma t) dt \right]}{N_{\text{OFF}}} \quad (5.39)$$

$\frac{\gamma d\Omega}{4\pi} A_2(y_0) \cos \theta$ は検出機によって決まる定数であり、時刻 t_1 から t_2 の間に $|m_\mu = \uparrow\rangle$ の状態で崩壊した μ^- の数をそれぞれ N_\uparrow とすれば

$$\int_{t_1}^{t_2} P_{z0}(t) \exp[-\gamma t] dt = \frac{N_\uparrow - N_\downarrow}{N_\uparrow + N_\downarrow} \quad (5.40)$$

なので、

$$S \propto \frac{N_\uparrow^{\text{ON}} - N_\downarrow^{\text{ON}}}{N_\uparrow^{\text{ON}} + N_\downarrow^{\text{ON}}} - \frac{N_\uparrow^{\text{OFF}} - N_\downarrow^{\text{OFF}}}{N_\uparrow^{\text{OFF}} + N_\downarrow^{\text{OFF}}} \quad (5.41)$$

となる。シミュレーション結果をここに代入すれば、図 5.26,5.27 の共鳴曲線が得られる。ただし積分区間について、 $t_1 = 2000$ ns, $t_2 = 10000$ ns とした。

Simulation

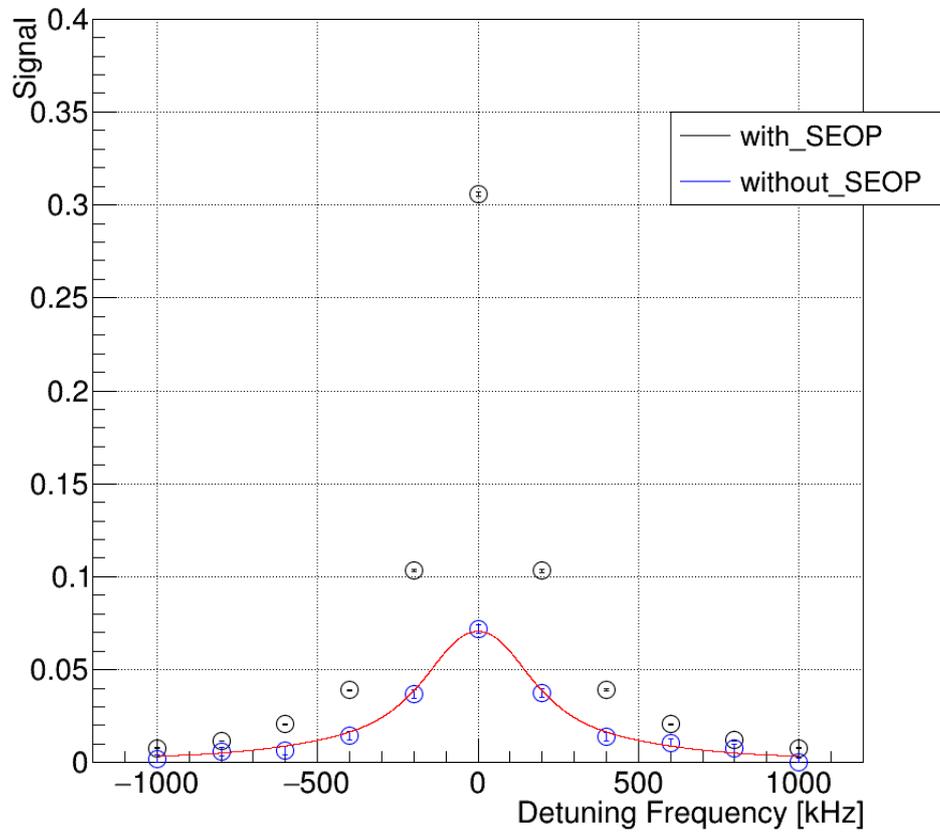


図 5.26: 初期偏極率 5% の場合の共鳴曲線。実線は共鳴曲線の理論式を 0.1 倍にスケールしたもの。初期偏極率のためスケールが必要となる。

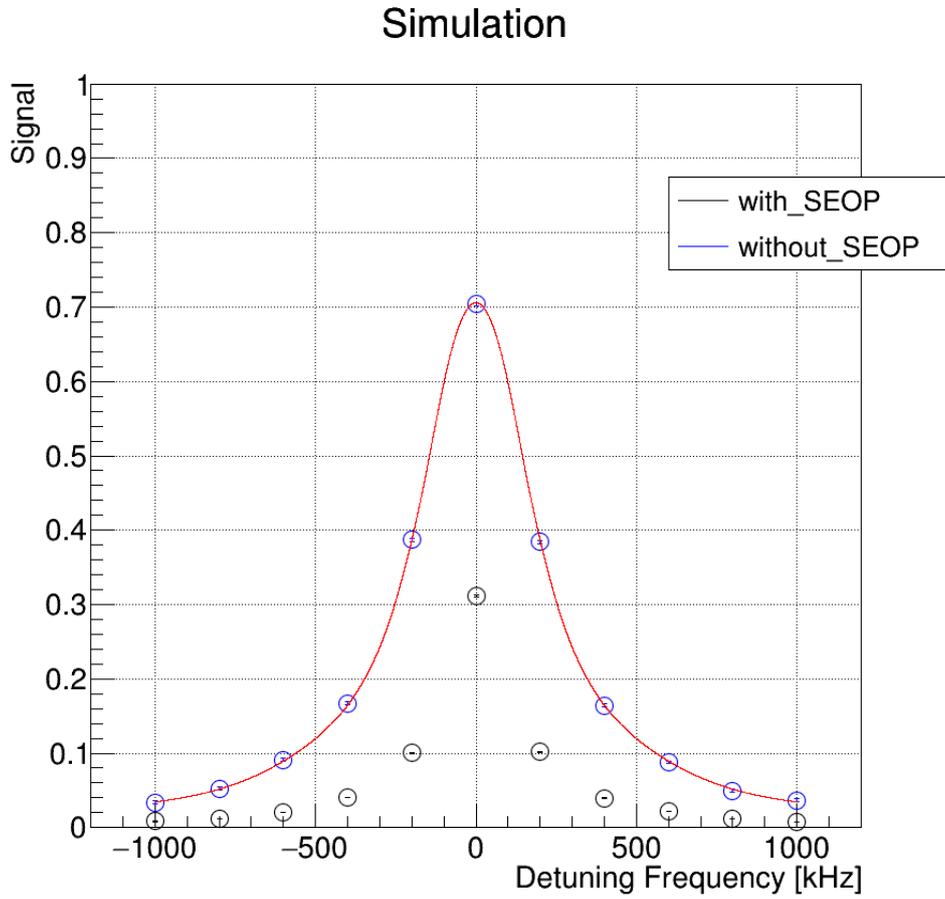


図 5.27: 初期偏極率 50% の場合の共鳴曲線。実線は共鳴曲線の理論式。初期偏極率が十分高い場合、信号強度は減少しうる。

図 5.26 と 5.27 を比べると、SEOP をしている場合に得られる信号強度は初期偏極率によらないことがわかる。一方で図 5.24, 5.27 からは、偏極率が十分に高くなると SEOP と Rabi 振動の効果は打ち消し合うことが示唆される。初期偏極率を 5% とし、Rb と ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の衝突レート f が 5.0 MHz の場合と 2.5 MHz の場合を比較したところ、図 5.28 の通り共鳴中心の信号強度は $f = 2.5$ MHz の場合の方が 40% 程度大きくなった。 f はセルの温度によって決定されるため、SEOP による利得を最大化するためには HFS 測定中の温度管理が重要になる。

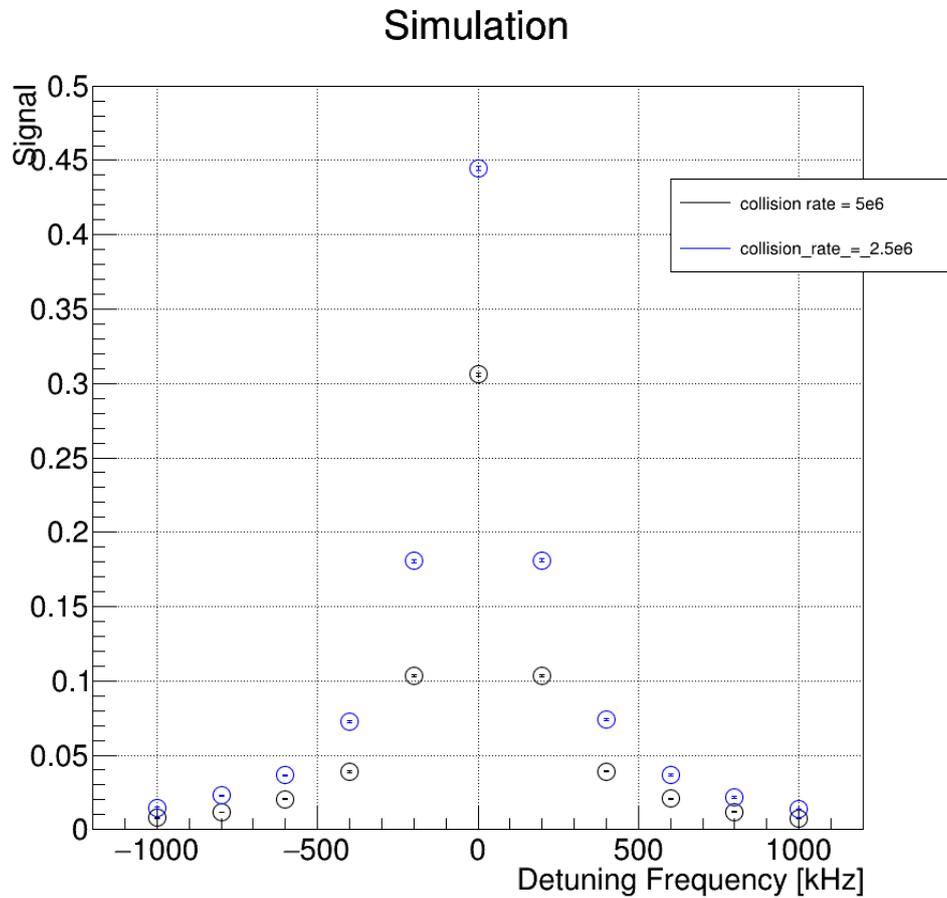


図 5.28: $f = 2.5$ MHz と $f = 5.0$ MHz の場合の比較。 $f = 2.5$ MHz の場合の方が中心強度が大きい。

4.6にも現れている通り、共鳴中心の信号強度を A 、統計量を N とすると測定精度は $A \times \sqrt{N}$ に比例する。したがって SEOP の組み込みによって ${}^4\text{He}\mu^-e^-$ -HFS の測定精度は 6 倍以上改善すると期待できる。

2022 年から運用開始された J-PARC MLF MUSE の大強度ビームライン H-Line は、D-Line の 10 倍の強度のビームを供給する [46][47]。高磁場の下で測定する場合、崩壊電子はより検出器に集中するためさらに統計量は増加する。加えて Nishimura らによって開発された Rabi 振動分光法を適用すると統計精度をさらに 3 倍向上できる [8]。SEOP とこれらを複合した場合の到達精度の予測を表 5.3 に示す。

	現在	将来
ビーム強度	D-Line 1.0×10^6	H-Line 1.0×10^7
偏極率	4.5%	100%
信号強度	0.07	0.44
測定期間	10 days	100 days
解析手法	Resonance Curve	Rabi Oscillation
測定環境	ゼロ磁場	高磁場
測定精度	20 kHz	0.03 kHz

表 5.3: 現状の測定精度と、予想される将来の測定精度。

以上の通り、SEOP の組み込みと H-Line の利用、高磁場での測定、Rabi 振動分光法の適用によって $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子の HFS は ~ 7 ppb、負ミューオンの磁気モーメントは ~ 70 ppb の統計精度に達すると予想される。系統的不確かさについては、測定圧力領域を拡大して最大の要因である 2 次の圧力依存性を決定することで統計精度と同等以下に低減可能である。マイクロ波強度とガス温度についても装置の改善によって安定性を向上し、系統的な不確かさを低減する。

統計精度は SEOP 条件の最適化によってさらに向上する可能性もある。ただし SEOP の効果と Rabi 振動が複合した場合の共鳴曲線については知見がなく、さらなる考察が必要である。

5.4.1 金属製セル

HFS 測定でも SEOP にガラスセルを使用する場合、ガラスで停止した μ^- はバックグラウンドとなる。D1 Area での再偏極実験では 90% もの μ^- がガラスで停止していたため、再偏極による効果よりも統計量の減少の影響の方が大きくなりうる。加えてマイクロ波キャビティ内にガラスセルが存在することでマイクロ波強度分布や共鳴周波数が受ける影響など、考慮しなければならない要素も増大する。さらに、標的ガス圧を変化させるためにはセルを新しく作成しなければならず、ガラス加工精度によって系統的な不確かさが生じてしまう。

これらの問題をまとめて解決するために、アルカリ金属と反応しない金属を探索し、マイクロ波キャビティとしての機能を兼ね備えた SEOP セルを作成するという手段が考えられる。ガラスに比べて金属は形状の自由度や圧力への耐性が大きいものが多い。また原子番号が大きいので束縛された μ^- の寿命も短く、 $^4\text{He}\mu^-e^-$ 原子由来の信号とバックグラウンドの分離が容易である。ガス交換用の機構やマイクロ波導入用の機構をあらかじめ用意しておけば、ガス圧やマイクロ波についての問題も解決できる。一方でレーザー入射窓を取り付ける必要があり、その方法や加熱による破壊の可能性についてよく検討しなければならない。またアルカリ金属は容易に酸化してしまうためガスのリークが大きな問題になる。

第6章 Conclusion

我々は、正負ミューオン質量の比較による高精度な CPT 対称性の検証のため、ミュオニックヘリウム原子の超微細構造を高磁場の下で精密分光して負ミューオンの質量と磁気モーメントの決定精度を 100 倍以上向上することを目指している。ミュオニックヘリウム原子の超微細構造の精密分光に必要な要件としては測定手法の確立、Rabi 振動の直接解析、大強度ミューオンビームの利用、ミュオニックヘリウム原子の再偏極が挙げられる。

本研究では第一に、マイクロ波による状態遷移を利用した手法でミュオニックヘリウム原子の超微細構造をゼロ磁場の下分光し、以下の通りに決定した。

$$\Delta\nu_{4\text{He}\mu^-e^-}^{\text{MuSEUM}} (0 \text{ atm}, 0^\circ\text{C}) = 4\,464\,980 (20) \text{ kHz} (4.5 \text{ ppm})$$

不確かさの主要因は統計的な原因であり、系統的な不確かさは < 1kHz である。この値は世界記録であり、我々は精密分光の手法を確立したと言える。

ミュオニックヘリウム原子の生成は Auger 遷移や Stark 混合を伴い、ミューオンの偏極率を低下させる。同条件でのミュオニウム超微細構造の測定との比較から、本実験で生成したミュオニックヘリウム原子の偏極率は 5%程度と予想される。偏極率は測定精度に大きく影響する要因であり、精密分光のためにはミュオニックヘリウム原子の再偏極が求められる。本研究では第二に、SEOP によってミュオニックヘリウム原子を再偏極する装置を J-PARC で開発し、偏極率 30%程度までの再偏極を実現した。これはパルスミューオンビームを使用したミュオニックヘリウム原子再偏極の世界初の例でもある。

大強度ミューオンビームについては 2022 年から運用を開始した J-PARC MUSE H-Line を利用する予定であり、Rabi 振動の直接解析はミュオニウム超微細構造の精密分光に取り組んでいる MuSEUM コラボレーションによって実現済みである。したがって本研究によってミュオニックヘリウム原子の超微細構造の精密分光に必要な要素が揃った。SEOP によるミュオニックヘリウム原子の再偏極実験の結果を元とした MC シミュレーションによれば、これらを組み合わせた測定では 70 ppb 程度の測定精度が期待される。MuSEUM コラボレーションが計画している H-Line でのミュオニウム HFS の精密分光と合わせれば、CPT 対称性を現状より二桁高いオーダーで検証可能となる。

謝辞

本研究はJ-PARCのユーザープログラムにより、Materials and Life Science Experimental Facilityを利用して行われた(Proposal No. 2020B0333, 2021B0169, 2022A0159, 2022A0208, 2022B0314)。また本研究は、JST次世代研究者挑戦的研究プログラムJPMJSP2125の財政支援を受けたものです。この場を借りて「東海国立大学機構融合フロンティア次世代研究事業」にお礼申し上げます。

研究に際し様々なサポートをしてくださった名古屋大学の清水裕彦教授、北口雅暁准教授、奥平琢也助教、多田紘規、KEKの下村浩一郎教授、Patrick Strasser 講師、神田聡太郎助教、西村昇一郎特別助教、岩井遼斗日本学術振会特別研究員、東京大学の鳥居寛之准教授をはじめ、MuSEUM コラボレーションに所属する皆様への感謝の念に堪えません。本研究は皆様がいなければ遂行できませんでした。特に Strasseer 講師には研究の様々な点について多大なご協力をいただきました。また奥平助教はレーザー装置の開発と仕様について全面的にサポートしてくださいました。神田助教と西村特別助教にはデータ解析やシミュレーション、実験装置の準備といった点で多くをご教授くださいました。

KEKの幸田章宏教授と竹下聡史研究機関講師にビームラインの使用の際、ビームの調整にご協力くださいました。KEKの大石裕特別准教授と河村成肇特別准教授にはMLFでのレーザー使用のための申請についてご協力いただき、お二方のおかげで実験の許可を得ることができました。レーザー装置の開発では、KEKの猪野隆講師の豊富な知見から様々なアドバイスをいただくと共に、ガラスセルの発注とガスの封入を一手に担っていただきました。またJAEAの奥隆之研究主幹にお借りしたテストベンチのおかげで装置を完成することができました。このほか様々な方のご助力のおかげで本博士論文をまとめることができました。深く感謝しております。

最後に、このような魅力的な研究に携わる機会をくださった清水教授と下村教授に心よりお礼申し上げます。

Appendix

A Breit equation

A.1 電磁場での荷電粒子の運動

電磁ポテンシャルを $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ とすると、質量 m 、電荷 q の荷電粒子が真空電磁場内を運動する場合の相対論的な運動方程式の空間成分は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \gamma q \left[\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right] \quad (\text{A.1})$$

また時間成分は、

$$\frac{dE}{d\tau} = q \mathbf{E} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) \quad (\text{A.2})$$

ただし τ は固有時間で、

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt = \frac{1}{\gamma} dt$$

四元ベクトル

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad p^\mu = m_0 u^\mu \quad (\text{A.3})$$

を用いれば、

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = \gamma \begin{pmatrix} \frac{q}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\ q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$= q \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 & -\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2 & -\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3 \\ \partial_1 A_0 + \partial_0 A_1 & 0 & \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 & -\partial_3 A_1 + \partial_1 A_3 \\ \partial_2 A_0 + \partial_0 A_2 & -\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1 & 0 & \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_0 + \partial_0 A_3 & \partial_3 A_1 - \partial_3 A_1 & -\partial_2 A_3 + \partial_3 A_2 & 0 \end{pmatrix} \eta_{\nu\lambda} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

となる。ただし

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

また \mathbf{I} を単位行列として

$$A_\mu = \eta_{\nu\mu} A^\nu \quad (\text{A.9})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi/c & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$= \begin{pmatrix} -\phi/c & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

なので、空間成分は

$$m_0 \gamma \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \left[\left(-\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \text{rot } \mathbf{A} \right] \quad (\text{A.12})$$

であり、ベクトル公式から

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{A} \right) - \mathbf{A} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right)$$

また生成・消滅演算子を用いた \mathbf{A} の表式から

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \right) \mathbf{A}$$

である。よって (A.12) は

$$m_0 \gamma \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \left[-\text{grad } \phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{A} \right) \right] \quad (\text{A.13})$$

となる。

(A.13) を

$$\frac{d}{dt} \left(m_0 \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + q\mathbf{A} \right) = -\nabla \left[q\phi - q \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{A} \right) \right] \quad (\text{A.14})$$

と変形し、 $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ として Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (\text{A.15})$$

と比較すると

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = m_0 \gamma \dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[q\phi - q \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{A} \right) \right] \quad (\text{A.17})$$

なので

$$L = \frac{1}{2} m_0 \gamma \dot{\mathbf{r}}^2 - q(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{A.18})$$

となる。

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = m_0 \gamma \dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A} \quad (\text{A.19})$$

を用いると、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L \\ &= \frac{1}{2} m_0 \gamma \dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} + q(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{1}{2} m_0 \gamma \dot{\mathbf{r}}^2 + q\phi \quad (\text{A.21})$$

となる。(A.19) を用いて (A.21) を Legendre 変換すれば

$$H = \frac{1}{2} m_0 \gamma \dot{\mathbf{r}}^2 + q\phi \quad (\text{A.22})$$

$$= \frac{m_0 \gamma}{2} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi \quad (\text{A.23})$$

を得る。また、

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L \\ &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_0 c^2}{\gamma} + q(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$= (\mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_0 c^2}{\gamma} + q\phi \quad (\text{A.25})$$

とすれば

$$\mathbf{p} = m_0 \gamma \dot{\mathbf{r}} + q \mathbf{A} \quad (\text{A.26})$$

と

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2}}{m_0 c} \quad (\text{A.27})$$

から

$$H = (\mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_0 c^2}{\gamma} + q \phi \quad (\text{A.28})$$

$$= c \sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2} + q \phi \quad (\text{A.29})$$

を得る。

A.2 電磁場中の荷電粒子が従うディラック方程式

外場のない状態で荷電粒子が従うディラック方程式は

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (c \hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2) \psi \quad (\text{A.30})$$

ここに電磁ポテンシャルを導入する場合、(A.23) から $i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - q \phi$ 、 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q \mathbf{A}$ と置き換えれば良いので

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (c \hat{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q \mathbf{A}) + \hat{\beta} m_0 c^2 + q \phi) \psi \quad (\text{A.31})$$

ここで、 c は光速、 q は荷電粒子の電荷、 m_0 は荷電粒子の静止質量、 E はエネルギー固有値、 ψ は固有関数。また

$$\hat{\mathbf{p}} = -i \hbar \nabla \quad (\text{A.32})$$

であり、スピン 1/2 の粒子では

$$\hat{\alpha}_i = \sigma_i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

である。(A.31) の解 ψ を、2 成分波動関数 ψ_+ 、 ψ_- を用いて $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ と置くと、

$$E(\mathbf{p}) = + \sqrt{m_0^2 c^4 + (c \mathbf{p})^2} \quad (\text{A.35})$$

として

$$E(\mathbf{p})\psi_+ = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})\psi_- + (m_0c^2 + q\phi)\psi_+ \quad (\text{A.36})$$

$$E(\mathbf{p})\psi_- = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})\psi_+ + (-m_0c^2 + q\phi)\psi_- \quad (\text{A.37})$$

となる。外場が十分弱く、 $q\phi \ll m_0c^2$ 、 $q\mathbf{A} \ll \mathbf{p}$ とできる場合、

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{E(\mathbf{p}) + m_0c^2} \quad (\text{A.38})$$

とすれば

$$\psi_+ = \Gamma(\mathbf{p})\psi_- \quad (\text{A.39})$$

$$\psi_- = -\Gamma(\mathbf{p})\psi_+ \quad (\text{A.40})$$

なので

$$(m_0c^2\beta + c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\psi^\pm = \pm E(\mathbf{p})\psi^\pm \quad (\text{A.41})$$

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \Gamma(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \psi_+ \quad (\text{A.42})$$

$$\psi^- = \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}) \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \psi_- \quad (\text{A.43})$$

を得る。

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{2E(\mathbf{p})} [E(\mathbf{p}) \pm (m_0c^2\beta + c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})] \quad (\text{A.44})$$

$$\Lambda_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{2E(\mathbf{p})} [E(\mathbf{p}) \mp (m_0c^2\beta + c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})] \quad (\text{A.45})$$

とすれば

$$\Lambda_\pm(\mathbf{p})\psi^\pm = \psi^\pm \quad (\text{A.46})$$

$$\Lambda_\pm(\mathbf{p})\psi^\mp = 0 \quad (\text{A.47})$$

となる。この Λ_\pm は CASIMIR projection operator と呼ばれる演算子である。また、(A.31) の解は

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \psi_+ + \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}) \\ 1 \end{pmatrix} \psi_- \quad (\text{A.48})$$

となる。

また $E(\mathbf{p}) > 0$ の場合、(A.37) から、

$$\psi_- = \Gamma(\mathbf{p}) \psi_+ \quad (\text{A.49})$$

非相対論の領域として $p \ll m_0 c$ の場合を考えると

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{m_0^2 c^4 + (c\mathbf{p})^2} \quad (\text{A.50})$$

$$\approx m_0 c^2 + \frac{\mathbf{p}}{2m} + \dots \quad (\text{A.51})$$

$$\approx m_0 c^2 \quad (\text{A.52})$$

と近似できるので、(A.36) から

$$E(\mathbf{p}) \psi_+ \approx \frac{1}{2m_0 c} ((\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}))(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})) + m_0 c^2 + q\phi) \psi_+ \quad (\text{A.53})$$

ここで、Pauli 行列について

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I_2 + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{A.54})$$

なので

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})) (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})) \kappa = \left[(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 + \sum_{ijk=x,y,z} i\epsilon_{ijk} \sigma_k \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial i} - qA_i \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial j} - qA_j \right) \right] \kappa$$

右辺第二項について、

$$\begin{aligned} & \sum_{ijk=x,y,z} i\epsilon_{ijk} \sigma_k \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial i} - qA_i \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial j} - qA_j \right) \kappa \\ &= \sum_{ijk=x,y,z} i\epsilon_{ijk} \sigma_k \left(-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial i} \frac{\partial}{\partial j} + iq\hbar \left[\frac{\partial}{\partial i} A_j + A_i \frac{\partial}{\partial j} \right] + q^2 A_i A_j \right) \kappa \\ &= i\boldsymbol{\sigma} \left(-\hbar^2 \nabla \times \nabla \kappa + iq\hbar \left[\frac{\partial}{\partial i} (A_j \kappa) + A_i \frac{\partial}{\partial j} \kappa \right] + q^2 A_i A_j \kappa \right) \\ &= i\boldsymbol{\sigma} \left(-\hbar^2 \nabla \times \nabla \kappa + iq\hbar [\nabla \times (\mathbf{A}\kappa) + \mathbf{A} \times \nabla \kappa] + q^2 \mathbf{A} \times \mathbf{A} \kappa \right) \end{aligned}$$

$\nabla \times \nabla \kappa = \text{rot grad } \kappa = 0$ 、また同じベクトル同士の外積は 0 となるので

$$iq\hbar [\nabla \times (\mathbf{A}\kappa) + \mathbf{A} \times \nabla \kappa] = iq\hbar [(\nabla \times \mathbf{A}) \kappa + (\nabla \kappa) \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \kappa]$$

であり、 $\mathbf{A} \times \nabla = -\nabla \times \mathbf{A}$ なので結局

$$E(\mathbf{p}) \psi_+ \approx \frac{1}{2m_0} \left((\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 + m_0 c^2 + q\phi - q\hbar \boldsymbol{\sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) \right) \psi_+ \quad (\text{A.55})$$

$$= \frac{1}{2m_0} \left((\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 + m_0 c^2 + q\phi - q\hbar \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B} \right) \psi_+ \quad (\text{A.56})$$

となり、Pauli 方程式が得られる。(A.56) の第 4 項はスピンと磁場の相互作用を意味する。スピン

演算子を

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.57})$$

とすれば

$$\frac{q\hbar}{2m_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = g \frac{q}{2m_0} \hat{S} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.58})$$

はスピンと磁場の相互作用を意味する。磁場中の磁気モーメントのエネルギーの式

$$E = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.59})$$

と対比すれば

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{q}{2m_0} \hat{S} \quad (\text{A.60})$$

は粒子の磁気モーメントに相当することがわかる。(A.60)中の g は g 因子と呼ばれ、Pauli方程式では常に2となる。実際には電子の g 因子は2.002 319 304 362 56(35)、ミューオンの g 因子は2.002 331 8418(13)であり、2とはわずかに異なる[14]。このズレは異常磁気能率と呼ばれ、QEDや弱い相互作用、強い相互作用の効果によって生じる。

A.3 Liénard-Wiechert ポテンシャル

ここからは自由に運動する荷電粒子について考える。Maxwell方程式と $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ から

$$\nabla \mathbf{E} = \nabla \left(-\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) \quad (\text{A.61})$$

$$= \frac{\rho(t, \mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (\text{A.62})$$

Lorentz ゲージの下では、 $\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ なので

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{\rho(t, \mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (\text{A.63})$$

とできる。位置 \mathbf{r}_j にいる電荷 q_j の粒子 j について考えると、電荷密度 $\rho_j(t, \mathbf{r})$ は

$$\rho_j(t, \mathbf{r}) = q_j \delta^3(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) \quad (\text{A.64})$$

なので、

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi = -\frac{q_j}{\varepsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) \quad (\text{A.65})$$

となる。遅延 Green 関数 (Retarded Green function)

$$G(t, \mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right) & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (\text{A.66})$$

は

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(t, \mathbf{r}) = -\delta(t, \mathbf{r}) \quad (\text{A.67})$$

を満たすので、これを使えば

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \int d^3 \mathbf{r}' dt' G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_j(t', \mathbf{r}') \quad (\text{A.68})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\rho_j(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) d^3 \mathbf{r}' dt' \quad (\text{A.69})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_j\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (\text{A.70})$$

のように遅延ポテンシャルが導かれる。 \mathbf{r}_j は時間に依存するので、 $t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ として

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_j\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (\text{A.71})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q_j \delta^3(\mathbf{r}_j(t_r) - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (\text{A.72})$$

$$= \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\delta^3(\mathbf{r}_j(t') - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t_r) dt' d^3 \mathbf{r}' \quad (\text{A.73})$$

$$= \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')|} dt' \quad (\text{A.74})$$

このとき $t_r(t', \mathbf{r}_j(t')) = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')|}{c}$ であり、 $x = x_i$ に i 番目の 0 点を持つ関数 $f(x)$ についての恒等式

$$\delta(f(x)) \equiv \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_i}} \quad (\text{A.75})$$

を用いれば

$$\delta(t' - t_r) = \frac{\delta(t' - t_r)}{\left. \frac{d}{dt'} (t' - t_r) \right|_{t'=t_r}} \quad (\text{A.76})$$

$$= \frac{\delta(t' - t_r)}{\left. \frac{d}{dt'} \left(t' - \left[t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')| \right] \right) \right|_{t'=t_r}} \quad (\text{A.77})$$

$$= \frac{\delta(t' - t_r)}{\left. \left(1 - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')) \cdot \left(\frac{d}{dt'} \mathbf{r}_j(t') \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')|} \right) \right|_{t'=t_r}} \quad (\text{A.78})$$

なので、

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')|} dt' \quad (\text{A.79})$$

$$= \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')| \left[\left(1 - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')) \cdot \left(\frac{d}{dt'} \mathbf{r}_j(t') \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')|} \right) \right]} \delta(t' - t_r) dt' \quad (\text{A.80})$$

$$= \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')| \left[\left(1 - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')) \cdot \left(\frac{d}{dt'} \mathbf{r}_j(t') \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')|} \right) \right]} \Big|_{t'=t_r} \quad (\text{A.81})$$

$$= \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')) \cdot \left(\frac{d}{dt'} \mathbf{r}_j(t') \right)} \Big|_{t'=t_r} \quad (\text{A.82})$$

粒子 j の速度を $\mathbf{v}_j = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j$ とすれば、(A.65) の解は

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{v}_j} \Big|_{t'=t_r} \quad (\text{A.83})$$

のようになる。Maxwell 方程式から

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{A.84})$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.85})$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (\text{A.86})$$

なので

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \quad (\text{A.87})$$

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \quad (\text{A.88})$$

よって

$$-\left[\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{A.89})$$

ローレンツゲージの下では

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.90})$$

なので

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{A.91})$$

電流密度 \mathbf{j} は

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r}) \frac{d}{dt} \mathbf{r} \quad (\text{A.92})$$

なので、 ϕ と同様にして解けば

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{q_j \mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| - \frac{1}{c}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{v}_j} \Big|_{t'=t_r} \quad (\text{A.93})$$

$$= \frac{q_j}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| - \frac{1}{c}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{v}_j} \Big|_{t'=t_r} \quad (\text{A.94})$$

を得る。(A.83)と(A.94)はLiénard-Wiechertポテンシャルと呼ばれ、点電荷の運動が生む古典的な電磁場を表す。

A.4 Darwin Lagrangian

(A.83)と(A.94)は式中に遅延時間

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')|}{c} \quad (\text{A.95})$$

を含んでいる。

$$\tau = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t')|}{c} \quad (\text{A.96})$$

とすると、 $\tau \ll t$ ならば $t' = t_r$ のとき、

$$\begin{aligned} c^2 \tau^2 &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t - \tau))^2 \\ &\approx \left(\mathbf{r} + \left[-\mathbf{r}_j(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \tau - \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \Big|_t \tau^2 + \dots \right] \right)^2 \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))^2 + 2\tau \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right] + \tau^2 \left[\left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \Big|_t \right] - \dots \end{aligned}$$

これを解けば

$$\tau \approx \frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t] \pm c |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \Big|_t \right]}}{c^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \Big|_t \right] \right]}$$

$\tau > 0$ なので

$$\tau \approx \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| + \frac{1}{c^2} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right] + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}{2c^3} \left[\frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \Big|_t \right]$$

となる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t - \tau)| &= c\tau \\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t - \tau)) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_{t-\tau} &\approx (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j - \left[\left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \right)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \right] \tau \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_j \right| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{v}_j \Big|_{t'=t_r} \\
&= c \left[1 - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \right)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \right] \right] \tau \\
&= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \left[1 + \frac{1}{2c^2} \left[\frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j|_t]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} - \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right)^2 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \Big|_t \right] \right]
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{v}_j \Big|_{t'=t_r}} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \frac{1}{2c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \left[\left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \Big|_t - \frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j|_t]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \right]
\end{aligned}$$

また

$$\mathbf{v}_j(t - \tau) = \mathbf{v}_j + \frac{d}{dt} \mathbf{v}_j \Big|_t \tau$$

これを (A.83) と (A.94) に代入すると、相対論の 2 次までのオーダーでは

$$\begin{aligned}
\phi(t, \mathbf{r}) &= \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \frac{1}{2c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \left[\left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j \Big|_t \right)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j \Big|_t - \frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j|_t]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \right] \right] \\
\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &\approx \frac{q_j \mathbf{v}_j}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}
\end{aligned}$$

となる。(A.18) にこれを代入すると、

$$L = -\frac{m_0 c^2}{\gamma} - q(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{A.97})$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{m_0 c^2}{\gamma} - \frac{qq_j}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \frac{1}{2c^2} \left[\frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j - 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} - \frac{((\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \right] \right) \\
&\quad (\text{A.98})
\end{aligned}$$

ここで、ラグランジアンに x, y, z, t の関数 Ω の微小変位 $\Delta\Omega$ で与えられる項を加えることを考える。

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \Delta\Omega = \frac{d}{dt} \Omega \quad (\text{A.99})$$

を満たす限り

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{d}{dt} \Omega - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{d}{dt} \Omega = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \dot{\mathbf{r}} \cdot \Delta\Omega - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{d}{dt} \Omega \quad (\text{A.100})$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \Omega - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{d}{dt} \Omega \quad (\text{A.101})$$

$$= 0 \quad (\text{A.102})$$

なので、 $\frac{d}{dt}\Omega$ は運動方程式には影響しない。これを利用し、(A.98) に運動方程式に影響しない項

$$\frac{d}{dt}\Omega = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dt} \frac{q_1 q_2}{2c^2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (\text{A.103})$$

$$= -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2 [(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2] - [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2] [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \right] \quad (\text{A.104})$$

を加え、

$$L = -\frac{m_0 c^2}{\gamma} - \frac{q q_j}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} - \frac{1}{2c^2} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \frac{((\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}) ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \right] \right) \quad (\text{A.105})$$

とする。二粒子系を考えるため、(A.105) で $m_0 \rightarrow m_1$, $q \rightarrow q_1$, $\gamma \rightarrow \gamma_1$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_1$, $j = 2$ と書き換え粒子 2 の運動エネルギー $-\frac{m_2 c^2}{\gamma_2}$ を加えれば

$$L = -\frac{m_1 c^2}{\gamma_1} - \frac{m_2 c^2}{\gamma_2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2c^2} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1) ((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right] \right) \quad (\text{A.106})$$

となり、各粒子について対称なラグランジアンが得られる。 $-\frac{m_2 c^2}{\gamma_2}$ は時間にのみ依存するので、これも運動方程式には影響しない。

また (A.106) は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1} L - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2} L - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} L = 0 \quad (\text{A.107})$$

を満たす。一方で、(A.106) は c^{-2} のオーダーまでの近似である。したがって

$$-\frac{m_j c^2}{\gamma_j} = -m_j c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}_j^2}{c^2}} \quad (\text{A.108})$$

$$\approx -m_j c^2 + \frac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 + \frac{1}{8c^2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^4 \quad (\text{A.109})$$

$m_j c^2$ は定数なので、ラグランジアンから省いても影響はない。これらから、任意の外場 (ϕ, \mathbf{A}) 中の任意の数の粒子の運動を表すラグランジアンとして

$$L = -\sum m_j c^2 + \sum \frac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 + \sum \frac{1}{8c^2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^4 - \sum q_i \phi + \sum q_i \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - \sum \sum \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} - \frac{1}{2c^2} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{((\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j) ((\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \cdot \dot{\mathbf{r}}_k)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3} \right] \right) \quad (\text{A.110})$$

が得られる。

(A.110) からハミルトニアンを求める。正準運動量を

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \quad (\text{A.111})$$

とすれば、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L \quad (\text{A.112})$$

である。 \mathbf{p}_i は \mathbf{r}_i に対応する運動量なので、 $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_i/m_i$ と置き換えれば

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum m_i c^2 + \sum \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} - \sum \frac{\mathbf{p}_i^4}{8m_i^3 c^2} + \sum q_i \phi - \sum \frac{q_i}{m_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_i \\ & + \sum \sum \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \frac{1}{2c^2 m_i m_j} \left[\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \frac{((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p}_i)((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

となる。

A.5 Breit equation

(A.113) について、(A.109) と逆の近似をすれば

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \approx & \sum \sqrt{m_i^2 c^4 + (c\mathbf{p}_i)^2} + \sum q_i \phi - \sum \frac{q_i}{m_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_i \\ & + \sum \sum \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \frac{1}{2c^2 m_i m_j} \left[\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \frac{((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p}_i)((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

とできる。

(A.114) を用いて 2 粒子系の Dirac 方程式を立てると

$$\left[\sum \left(c\hat{\alpha}_i \cdot \mathbf{p}_i + m_i c^2 \hat{\beta}_i + q_i \phi_i - q_i c \mathbf{A}_i \cdot \hat{\alpha}_i \right) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left(1 - \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j + \frac{(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i)(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}_j)}{r_{12}^2} \right] \right) \right] \psi \quad (\text{A.115})$$

$$= E\psi \quad (\text{A.116})$$

ここで、

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (\text{A.117})$$

$$\mathbf{p}_i = -i\hbar \nabla_i \quad (\text{A.118})$$

また

$$\boldsymbol{\pi}_i = \mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}_i \quad (\text{A.119})$$

とすれば (A.116) は

$$\left[\sum \left(c\hat{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\pi}_i + m_i c^2 \hat{\beta}_i + q_i \phi_i \right) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left(1 - \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j + \frac{(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i)(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}_j)}{r_{12}^2} \right] \right) \right] \psi = E\psi \quad (\text{A.120})$$

となる。

(A.120) の解 ψ は粒子 1,2 それぞれについて 4 通りずつ解を持つ、16 成分の波動関数となる。粒子 i の解 ψ_i を

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \psi_i^+ \\ \psi_i^- \end{pmatrix} \quad (\text{A.121})$$

とすれば、 ψ は ψ_1 と ψ_2 のテンソル積であり

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^+ \\ \psi_1^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_2^+ \\ \psi_2^- \end{pmatrix} \quad (\text{A.122})$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_1^+ \psi_2^+ & \psi_1^+ \psi_2^- \\ \psi_1^- \psi_2^+ & \psi_1^- \psi_2^- \end{pmatrix} \quad (\text{A.123})$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_{++} & \psi_{+-} \\ \psi_{-+} & \psi_{--} \end{pmatrix} \quad (\text{A.124})$$

。ここで、 ψ_i^\pm は 2 成分の波動関数であり、 $\psi_{\pm\pm}$ は $\psi_1^{\pm\pm}$ と $\psi_2^{\pm\pm}$ のテンソル積。ここから

$$\begin{aligned} & \left[E - 2(m_1 + m_2)c^2 - \sum q_i \phi_i - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \right] \psi_{++} \\ & = c [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}_1 \psi_{-+} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}_2 \psi_{+-}] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{2r_{12}} \left[\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{r_{12}^2} \right] \psi_{--} \end{aligned} \quad (\text{A.125})$$

ここで、

$$\hat{R}_i = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}_i \quad (\text{A.126})$$

$$V = e_1 \phi_1 + e_2 \phi_2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (\text{A.127})$$

$$\hat{M} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{2r_{12}} \left[\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{r_{12}^2} \right] \quad (\text{A.128})$$

とすれば (A.125) は

$$[E - (m_1 + m_2)c^2 - V] \psi_{++} = c [\hat{R}_1 \psi_{-+} + \hat{R}_2 \psi_{+-}] + \hat{M} \psi_{--} \quad (\text{A.129})$$

同様にすると

$$[E - (m_1 - m_2)c^2 - V] \psi_{+-} = c [\hat{R}_1 \psi_{--} + \hat{R}_2 \psi_{++}] + \hat{M} \psi_{-+} \quad (\text{A.130})$$

$$[E + (m_1 - m_2)c^2 - V] \psi_{-+} = c [\hat{R}_1 \psi_{++} + \hat{R}_2 \psi_{--}] + \hat{M} \psi_{+-} \quad (\text{A.131})$$

$$[E + (m_1 + m_2)c^2 - V] \psi_{--} = c [\hat{R}_1 \psi_{+-} + \hat{R}_2 \psi_{-+}] + \hat{M} \psi_{++} \quad (\text{A.132})$$

のように 16 通りの方程式が得られる。Pauli 近似をするとこれらは

$$\left[\frac{\pi_1^2}{2m_1} + \frac{\pi_2^2}{2m_2} - V \right] \psi_{++} = c [\hat{R}_1 \psi_{-+} + \hat{R}_2 \psi_{+-}] + \hat{M} \psi_{--} \quad (\text{A.133})$$

$$[2m_2c^2 - V] \psi_{+-} = c [\hat{R}_1 \psi_{--} + \hat{R}_2 \psi_{++}] + \hat{M} \psi_{-+} \quad (\text{A.134})$$

$$[2m_1c^2 - V] \psi_{-+} = c [\hat{R}_1 \psi_{++} + \hat{R}_2 \psi_{--}] + \hat{M} \psi_{+-} \quad (\text{A.135})$$

$$[2(m_1 + m_2)c^2 - V] \psi_{--} = c [\hat{R}_1 \psi_{+-} + \hat{R}_2 \psi_{-+}] + \hat{M} \psi_{++} \quad (\text{A.136})$$

(A.134) と (A.135) から、

$$\mathcal{O}(mc) \psi_{\pm\mp} = \mathcal{O}(mv) [\psi_{++} + \psi_{--}] \quad (\text{A.137})$$

であり、 ψ_{+-} と ψ_{-+} は ψ_{++} の $\frac{v}{c}$ 倍のオーダーである。(A.136) は

$$\mathcal{O}(mc) \psi_{--} = \mathcal{O}(mv) [\psi_{+-} + \psi_{-+}] + \mathcal{O}(1) \psi_{++} \quad (\text{A.138})$$

なので ψ_{--} は ψ_{+-} , ψ_{-+} よりもさらに高次で、 $(\frac{v}{c})^2$ のオーダーとなる。

$$H_1 = c\hat{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p}_1 + m_1c^2\hat{\beta}_1 \quad (\text{A.139})$$

$$H_2 = c\hat{\alpha}_2 \cdot \mathbf{p}_2 + m_2c^2\hat{\beta}_2 \quad (\text{A.140})$$

$$V_i = q_i [\phi(\mathbf{r}_i) - \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i)] \quad (\text{A.141})$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r_{12}} \left[1 - \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j + \frac{(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i)(\mathbf{r}_{12} \cdot \boldsymbol{\alpha}_j)}{r_{12}^2} \right] \right] \quad (\text{A.142})$$

とすれば、Dirac 方程式は

$$[E - H_1 - H_2\phi_2] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = [V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (\text{A.143})$$

となる。両辺を Fourier 変換して運動量を変数にすれば、左辺は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3} \int [E - H_1 - H_2] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1] \exp[-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \\ &= [E - H_1 - H_2] \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1] \exp[-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \right) \\ &= [E - H_1 - H_2] \Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^3} \int [V_1(\mathbf{k}) + V_2(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1] \exp[-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\int q_1 [\varphi(-\mathbf{k}) - \alpha_1 \mathcal{A}(-\mathbf{k})] \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1] d^3\mathbf{k} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1] \exp[-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\int q_2 [\varphi(-\mathbf{k}) - \alpha_2 \mathcal{A}(-\mathbf{k})] \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2] d^3\mathbf{k} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1] \exp[-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\int U(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d^3\mathbf{k} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1] \exp[-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \\
&= \int d^3\mathbf{k} [\mathcal{V}_1(-\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) + \mathcal{V}_2(-\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) + U(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k})]
\end{aligned}$$

ただし、フーリエ変換後の ϕ, \mathbf{A} に $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ をかけたものをそれぞれ φ, \mathcal{A} として

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1] \exp[-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \\
\mathcal{V}_i(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{q_i}{(2\pi)^{3/2}} \int (\phi(\mathbf{r}_i) - \alpha_i \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i)) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i] d^3\mathbf{r}_i \\
&= q_i [\varphi(\mathbf{k}) + \alpha_i \mathcal{A}(\mathbf{k})] \\
U(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d^3\mathbf{r}_{12} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{2r_{12}} \left[\alpha_i \cdot \alpha_j + \frac{(\mathbf{r}_{12} \cdot \alpha_i)(\mathbf{r}_{12} \cdot \alpha_j)}{r_{12}^2} \right] \right] \exp[-i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d^3\mathbf{r}_{12} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{k^2} \left[1 - \left[\alpha_i \cdot \alpha_j - \frac{(\mathbf{k} \cdot \alpha_i)(\mathbf{k} \cdot \alpha_j)}{k^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
& [E - H_1 - H_2] \Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [\mathcal{V}_1(-\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) + \mathcal{V}_2(-\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) + U(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k})]
\end{aligned} \tag{A.144}$$

ここで (A.45) を用いて運動量の異なる波動関数を射影した場合について、4つの演算子 $I_{++}, I_{-+}, I_{+-}, I_{--}$ を以下のように定義する

$$\Lambda_+(\mathbf{p}_1) \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} I_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \tag{A.145}$$

$$\Lambda_-(\mathbf{p}_1) \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}_1) \\ 1 \end{pmatrix} I_{-+}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \tag{A.146}$$

$$\Lambda_+(\mathbf{p}_1) \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} I_{+-}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (\text{A.147})$$

$$\Lambda_-(\mathbf{p}_1) \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}_1) \\ 1 \end{pmatrix} I_{--}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (\text{A.148})$$

このとき

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{2E(\mathbf{p})} [E(\mathbf{p}) + (m_0c^2\beta + c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})] \quad (\text{A.149})$$

$$\Lambda_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{2E(\mathbf{p})} [E(\mathbf{p}) - (m_0c^2\beta + c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})] \quad (\text{A.150})$$

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{E(\mathbf{p}) + m_0c^2} \quad (\text{A.151})$$

$$(m_0c^2 + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\Gamma(\mathbf{p})) \psi_+ = E(\mathbf{p}) \psi_+ \quad (\text{A.152})$$

$$(-m_0c^2\Gamma(\mathbf{p}) + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \psi_+ = E(\mathbf{p}) \Gamma(\mathbf{p}) \psi_+ \quad (\text{A.153})$$

$$\left(m_0c^2 + \frac{c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{E(\mathbf{p}) + m_0c^2} \right) \psi_+ = E(\mathbf{p}) \psi_+ \quad (\text{A.154})$$

$$\left(\frac{c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{E(\mathbf{p}) + m_0c^2} \right) \psi_+ = (E(\mathbf{p}) - m_0c^2) \psi_+ \quad (\text{A.155})$$

$$c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \psi_+ = (E(\mathbf{p}) - m_0c^2)(E(\mathbf{p}) + m_0c^2) \psi_+ \quad (\text{A.156})$$

なので、 I_{++} について

$$\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[E(\mathbf{p}_1) + \left(m_0c^2 + c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2} \right) \right] = I_{++} \quad (\text{A.157})$$

$$\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) - m_0c^2) \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2} + c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \right] = \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1}{E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2} I_{++} \quad (\text{A.158})$$

の2式が得られる。これを解けば

$$I_{++} = \frac{(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2)(E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2) + c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_2)}{2E(\mathbf{p}_1)(E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2)} \quad (\text{A.159})$$

$$= \frac{(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2)(E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2) + c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)) + c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)}{2E(\mathbf{p}_1)(E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2)} \quad (\text{A.160})$$

$$= \frac{(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2)(E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2) + c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)) + (E(\mathbf{p}_1) - m_0c^2)(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2)}{2E(\mathbf{p}_1)(E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2)} \quad (\text{A.161})$$

$$= \frac{(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2)(E(\mathbf{p}_2) + E(\mathbf{p}_1)) + c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1))}{2E(\mathbf{p}_1)(E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2)} \quad (\text{A.162})$$

$$= 1 + \frac{(E(\mathbf{p}_1) - m_0c^2)(E(\mathbf{p}_2) - E(\mathbf{p}_1)) + c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1))}{2E(\mathbf{p}_1)(E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2)} \quad (\text{A.163})$$

となる。また I_{-+} については

$$\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[E(\mathbf{p}_1) - \left(m_0c^2 + c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2} \right) \right] = -\frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1}{E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2} I_{-+} \quad (\text{A.164})$$

$$\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2) \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2} - c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \right] = I_{-+} \quad (\text{A.165})$$

なので

$$I_{-+} = \frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2) \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2} - c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \right] \quad (\text{A.166})$$

$$= \frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[\frac{(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2)}{E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2} c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2 - c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \right] \quad (\text{A.167})$$

となる。同様にすれば

$$I_{--}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = I_{++} \quad (\text{A.168})$$

$$I_{+-}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -I_{-+}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (\text{A.169})$$

が得られる。

$\boldsymbol{\alpha}$ の射影 $\boldsymbol{\alpha}_{++}, \boldsymbol{\alpha}_{-+}, \boldsymbol{\alpha}_{+-}, \boldsymbol{\alpha}_{--}$ も

$$\Lambda_+(\mathbf{p}_1) \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}_2) \end{pmatrix} = \Lambda_+(\mathbf{p}_1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\Gamma(\mathbf{p}_2) \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (\text{A.170})$$

$$\Lambda_-(\mathbf{p}_1) \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}_2) \end{pmatrix} = \Lambda_-(\mathbf{p}_1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\Gamma(\mathbf{p}_2) \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}_1) \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{-+}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (\text{A.171})$$

$$\Lambda_+(\mathbf{p}_1) \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \Lambda_+(\mathbf{p}_1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma}\Gamma(\mathbf{p}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\mathbf{p}_1) \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{+-}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (\text{A.172})$$

$$\Lambda_-(\mathbf{p}_1) \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \Lambda_-(\mathbf{p}_1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma}\Gamma(\mathbf{p}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathbf{p}_1) \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{--}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (\text{A.173})$$

と定義する。 $\boldsymbol{\alpha}_{++}$ について

$$\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) + m_0c^2) \boldsymbol{\sigma} \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0c^2} + c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \boldsymbol{\sigma} \right] = \boldsymbol{\alpha}_{++} \quad (\text{A.174})$$

$$\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) - m_0 c^2) \boldsymbol{\sigma} + c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \boldsymbol{\sigma} \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0 c^2} \right] = \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1}{E(\mathbf{p}_1) + m_0 c^2} \boldsymbol{\alpha}_{++} \quad (\text{A.175})$$

であり、

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - i[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.176})$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) \boldsymbol{\sigma} + i[\mathbf{a} \times \boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) - i[\mathbf{a} \times \boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{a} \quad (\text{A.177})$$

なので、

$$\boldsymbol{\alpha}_{++} = \frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) + m_0 c^2) \boldsymbol{\sigma} \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0 c^2} + c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (\text{A.178})$$

$$= \frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \boldsymbol{\sigma} + \frac{(E(\mathbf{p}_1) + m_0 c^2)}{E(\mathbf{p}_2) + m_0 c^2} c\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) \right] \quad (\text{A.179})$$

$$= \frac{c}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[\hat{\mathbf{p}}_1 - i[\mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\sigma}] + \frac{(E(\mathbf{p}_1) + m_0 c^2)}{E(\mathbf{p}_2) + m_0 c^2} [\mathbf{p}_2 + i[\mathbf{p}_2 \times \boldsymbol{\sigma}]] \right] \quad (\text{A.180})$$

また $\boldsymbol{\alpha}_{-+}$ について

$$\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) - m_0 c^2) \boldsymbol{\sigma} \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0 c^2} - c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \boldsymbol{\sigma} \right] = -\frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1}{E(\mathbf{p}_1) + m_0 c^2} \boldsymbol{\alpha}_{++} \quad (\text{A.181})$$

$$\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) + m_0 c^2) \boldsymbol{\sigma} - c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \boldsymbol{\sigma} \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0 c^2} \right] = \boldsymbol{\alpha}_{++} \quad (\text{A.182})$$

なので、

$$\boldsymbol{\alpha}_{-+} = \frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) + m_0 c^2) \boldsymbol{\sigma} + c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \boldsymbol{\sigma} \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2}{E(\mathbf{p}_2) + m_0 c^2} \right] \quad (\text{A.183})$$

$$= \frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} \left[(E(\mathbf{p}_1) + m_0 c^2) \boldsymbol{\sigma} + \frac{c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2)}{E(\mathbf{p}_2) + m_0 c^2} \right] \quad (\text{A.184})$$

同様にすれば

$$\boldsymbol{\alpha}_{+-} = \boldsymbol{\alpha}_{-+} \quad (\text{A.185})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{--} = -\boldsymbol{\alpha}_{++} \quad (\text{A.186})$$

が得られる。Pauli 近似 $p_1, p_2 \ll m_0 c$ を考えると

$$I_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \approx 1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1))}{(2m_0 c)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(m_0 c)^4}\right) \quad (\text{A.187})$$

$$= 1 + \frac{1}{(2m_0 c)^2} [\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + i[\mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)] \boldsymbol{\sigma}] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(m_0 c)^4}\right) \quad (\text{A.188})$$

$$= 1 + \frac{1}{(2m_0 c)^2} [\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2] \boldsymbol{\sigma}] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(m_0 c)^4}\right) \quad (\text{A.189})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{++} \approx \frac{1}{2m_0c} [\mathbf{p}_1 - i[\mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{p}_2 + i[\mathbf{p}_2 \times \boldsymbol{\sigma}]] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(m_0c)^3}\right) \quad (\text{A.190})$$

$$= \frac{1}{2m_0c} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + i[(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \boldsymbol{\sigma}]] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(m_0c)^3}\right) \quad (\text{A.191})$$

$$= \frac{1}{2m_0c} [2\mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + i[(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \boldsymbol{\sigma}]] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(m_0c)^3}\right) \quad (\text{A.192})$$

以上から、(A.144) に CASIMIR 射影演算子

$$\Lambda_+^1(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)} [E(\mathbf{p}_1) + (m_1c^2\beta_1 + c\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p}_1)] \quad (\text{A.193})$$

$$\Lambda_+^2(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{2E(\mathbf{p}_2)} [E(\mathbf{p}_2) + (m_2c^2\beta_2 + c\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{p}_2)] \quad (\text{A.194})$$

を作用させると、

$$\begin{aligned} & (E - E(\mathbf{p}_1) - E(\mathbf{p}_2)) \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ &= q_1 \int d^3\mathbf{k} [\varphi(-\mathbf{k}) I_{++}^1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \boldsymbol{\alpha}_{++}^1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 + \mathbf{k})] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) \\ &+ q_2 \int d^3\mathbf{k} [\varphi(-\mathbf{k}) I_{++}^2(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \boldsymbol{\alpha}_{++}^2(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k})] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{k^2} [I_{++}^1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) I_{++}^2(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) - \mathcal{B}] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{A.195})$$

$$\mathcal{B} = \boldsymbol{\alpha}_{++}^1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) \boldsymbol{\alpha}_{++}^2(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{++}^1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\alpha}_{++}^2(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k})}{k^2} \quad (\text{A.196})$$

となる。 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(2m_{i,j}c)^2}\right)$ のオーダーまで展開すると

$$\begin{aligned} & (E - E(\mathbf{p}_1) - E(\mathbf{p}_2)) \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ &= \left(E - m_1c^2 - m_2c^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} - \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\mathbf{p}_1^4}{8m_1^3c^2} + \frac{\mathbf{p}_2^4}{8m_2^3c^2} \right) \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ &= q_1 \int d^3\mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]}{2m_1c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) \\ &+ q_2 \int d^3\mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{2m_2c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{k^2} \left[\left(1 + \frac{-\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} - i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1c)^2} \right) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2c)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]}{2m_1c} \frac{2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{2m_2c} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \frac{((2\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]) \cdot \mathbf{k}) ((2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]) \cdot \mathbf{k})}{4m_1 m_2 c^2 k^2} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
\approx & q_1 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]}{2m_1 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) \\
& + q_2 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{2m_2 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{(2\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]) \cdot (2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2])}{4m_1 m_2 c^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{((2\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]) \cdot \mathbf{k}) ((2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]) \cdot \mathbf{k})}{4m_1 m_2 c^2 k^2} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
= & q_1 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]}{2m_1 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) \\
& + q_2 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{2m_2 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{(2\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]) \cdot (2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2])}{4m_1 m_2 c^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{((2\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) \mathbf{k}) ((2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \mathbf{k})}{4m_1 m_2 c^2 k^2} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
= & q_1 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]}{2m_1 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) \\
& + q_2 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{2m_2 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{k} \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) - \mathbf{k}^2 + 2i(\mathbf{p}_1 \cdot [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2] - \mathbf{p}_2 \cdot [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]) + [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1] \cdot [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{4m_1 m_2 c^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{4(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}) + 2\mathbf{k}^2(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}) - 2\mathbf{k}^2(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}) - \mathbf{k}^4}{4m_1 m_2 c^2 k^2} \right] \\
& \quad \left. \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
= & q_1 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]}{2m_1 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_2 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{2m_2 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4m_1 m_2 c^2} \left(4 \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k})}{k^2} \right] + 2i (\mathbf{p}_1 \cdot [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2] - \mathbf{p}_2 \cdot [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + k^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \right) \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
& = q_1 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} + i [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]}{2m_1 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) \\
& + q_2 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + i [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{2m_2 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4m_1 m_2 c^2} \left(4 \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k})}{k^2} \right] + 2i ([\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + k^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \right) \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k})
\end{aligned}$$

クーロンゲージ $\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ では $\mathcal{A} \cdot \mathbf{k} = 0$ なので、

$$\begin{aligned}
& \left(E - m_1 c^2 - m_2 c^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} - \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\mathbf{p}_1^4}{8m_1^3 c^2} + \frac{\mathbf{p}_2^4}{8m_2^3 c^2} \right) \\
& = q_1 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_1 + i [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_1]}{2m_1 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}, \mathbf{p}_2) \\
& + q_2 \int d^3 \mathbf{k} \left[\varphi(-\mathbf{k}) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) - \mathcal{A}(-\mathbf{k}) \frac{2\mathbf{p}_2 + i [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_2]}{2m_2 c} \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} + i [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4m_1 m_2 c^2} \left(4 \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k})}{k^2} \right] + 2i ([\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + k^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \right) \right] \Psi_{++}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{k})
\end{aligned} \tag{A.197}$$

ここで、任意の関数 $f(\mathbf{r})$ について以下が成り立つ。

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} \mathcal{F}(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \tag{A.198}$$

$$= \int d^3 \mathbf{k} \mathcal{F}(\mathbf{k}) \exp[-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}] \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{q} \Psi(\mathbf{q}) \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}] \quad (\text{A.199})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{k} \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{r}' f(\mathbf{r}') \exp[i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}] \right] \exp[-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}] \quad (\text{A.200})$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{q} \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{r}' \psi(\mathbf{r}') \exp[-i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{q}] \right] \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}] \quad (\text{A.201})$$

$$= f(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.202})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} \mathbf{p} [\mathcal{F}(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k})] \quad (\text{A.203})$$

$$= \frac{-i\hbar}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} \nabla \mathcal{F}(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \quad (\text{A.204})$$

$$= \frac{-i\hbar}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} ([\nabla \mathcal{F}(\mathbf{k})] \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \mathcal{F}(\mathbf{k}) [\nabla \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k})]) \quad (\text{A.205})$$

$$= -i\hbar ([\nabla f(\mathbf{r})] \psi(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r}) [\nabla \psi(\mathbf{r})]) \quad (\text{A.206})$$

$$= -i\hbar \nabla f(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.207})$$

$$= \mathbf{p} f(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.208})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} \mathbf{k} [\mathcal{F}(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k})] \quad (\text{A.209})$$

$$= \frac{-i\hbar}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} \nabla_{\mathbf{k}} [\mathcal{F}(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k})] \quad (\text{A.210})$$

$$= \frac{-i\hbar}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} \left[[\nabla \mathcal{F}(\mathbf{k})] \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \mathcal{F}(\mathbf{k}) \left[\nabla \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left(\frac{\partial(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \right) \right] \right] \quad (\text{A.211})$$

$$= \frac{-i\hbar}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} [[\nabla \mathcal{F}(\mathbf{k})] \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \mathcal{F}(\mathbf{k}) [\nabla \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) (1 - 1)]] \quad (\text{A.212})$$

$$= \frac{-i\hbar}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \exp[i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \int d^3 \mathbf{k} [\nabla \mathcal{F}(\mathbf{k})] \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \quad (\text{A.213})$$

$$= -i\hbar [\nabla f(\mathbf{r})] \quad (\text{A.214})$$

$$= [\mathbf{p} f(\mathbf{r})] \quad (\text{A.215})$$

$$= [\mathbf{p} f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \mathbf{p}] \quad (\text{A.216})$$

ただし

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{r} f(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.217})$$

したがって、電場、磁場をそれぞれ $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ とすると

$$\varphi(\mathbf{k}) [\mathbf{p} \times \mathbf{k}] \boldsymbol{\sigma} \rightarrow i\hbar [\mathbf{p} \times [-\text{grad } \phi(\mathbf{r})]] \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.218})$$

$$= i\hbar [\mathbf{p} \times \mathcal{E}(\mathbf{r})] \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.219})$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}] \rightarrow -i\hbar [\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})] \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.220})$$

$$= -i\hbar \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.221})$$

となる。また、

$$\frac{1}{k^2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \rightarrow i\hbar \mathbf{p} \cdot \left[-\text{grad } \frac{1}{r} \right] \quad (\text{A.222})$$

$$\frac{1}{k^2} [\mathbf{p} \times \mathbf{k}] \rightarrow i\hbar \left[-\mathbf{p} \times \left[\text{grad } \frac{1}{r} \right] \right] \quad (\text{A.223})$$

である。 \mathbf{k} を含む項について、

$$\int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.224})$$

について、 $k_1 = k \sin \theta \cos \phi$ 、 $k_2 = k \sin \theta \sin \phi$ 、 $k_3 = k \cos \theta$ とすれば $d^3 \mathbf{k} = k^2 \sin \theta$ なので

$$\int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_{-\pi}^\pi d\phi \exp[ikr \cos \theta] \sin \theta \quad (\text{A.225})$$

$t = \cos \theta$ とすれば $dt = -\sin \theta d\theta$ なので

$$\int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = \int_0^\infty dk \int_{-\pi}^\pi d\phi \int_1^{-1} -dt \exp[ikrt] \quad (\text{A.226})$$

$$= \int_0^\infty dk \int_{-\pi}^\pi d\phi \left[\frac{1}{ikr} \exp[ikrt] \right]_{t=-1}^{t=1} \quad (\text{A.227})$$

$$= \int_0^\infty dk \int_{-\pi}^\pi d\phi \frac{1}{ikr} [\exp[ikr] - \exp[-ikr]] \quad (\text{A.228})$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dk \frac{1}{ikr} [\exp[ikr] - \exp[-ikr]] \quad (\text{A.229})$$

$u = kr$ と置くと、 $dk = \frac{1}{r} du$ なので

$$\int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = 2\pi \int_0^\infty dk \frac{1}{ikr} [\exp[ikr] - \exp[-ikr]] \quad (\text{A.230})$$

$$= \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty du \frac{\exp[iu] - \exp[-iu]}{iu} \quad (\text{A.231})$$

$$= \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty du \frac{2 \sin[u]}{u} \quad (\text{A.232})$$

$$= \frac{2\pi}{r} \int_{-\infty}^\infty du \frac{\sin[u]}{u} \quad (\text{A.233})$$

$$= \frac{2\pi^2}{r} \quad (\text{A.234})$$

加えて、これを利用すれば

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = i \int d^3 \mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.235})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{2\pi^2}{r} \right] = -2\pi^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A.236})$$

から

$$\int d^3 \mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = 2\pi^2 i \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A.237})$$

が得られる。さらに、任意のベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して

$$\int d^3 \mathbf{k} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b})}{k^4} \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = \int d^3 \mathbf{k} \left(-i \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k^4} \right) \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.238})$$

$$= \int d^3 \mathbf{k} \left(-i \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(-\frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \frac{1}{k^2} \right] \right) \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.239})$$

$$= \frac{i}{2} \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \int d^3 \mathbf{k} \left(\mathbf{b} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \frac{1}{k^2} \right] \right) \exp [-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.240})$$

$$= \frac{i}{2} \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(\left[\left(\frac{\mathbf{b}}{k^2} \right) \right]_{k=-\infty}^{k=\infty} - \int d^3 \mathbf{k} \frac{\mathbf{b}}{2k^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \right] \right) \quad (\text{A.241})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.242})$$

$$= \pi^2 \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{r} \quad (\text{A.243})$$

$$= \pi^2 \left[\left(a_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial r_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial r_3} \right) \left(\frac{b_1 r_1}{r} + \frac{b_2 r_2}{r} + \frac{b_3 r_3}{r} \right) \right] \quad (\text{A.244})$$

$$= \frac{\pi^2}{r^3} \sum [a_i (b_i [r_j^2 + r_k^2] - r_i (b_j r_j + b_k r_k))] \quad (\text{A.245})$$

$$= \frac{\pi^2}{r^3} \sum [a_i (b_i [r_i^2 + r_j^2 + r_k^2] - r_i (b_i r_i + b_j r_j + b_k r_k))] \quad (\text{A.246})$$

$$= \frac{\pi^2}{r^3} [r^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})] \quad (\text{A.247})$$

$$= \frac{\pi^2}{r} \left[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] \quad (\text{A.248})$$

同様に

$$\int d^3 \mathbf{k} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b})}{k^2} \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = \int d^3 \mathbf{k} \left(-i \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.249})$$

$$= -i \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \int d^3 \mathbf{k} \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \quad (\text{A.250})$$

$$= -i \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(2\pi^2 i \mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (\text{A.251})$$

$$= 2\pi^2 \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (\text{A.252})$$

$$= \frac{2\pi^2}{r^5} \sum [a_i (b_i [-2r_i^2 + r_j^2 + r_k^2] - 3r_i (b_j r_j + b_k r_k))] \quad (\text{A.253})$$

$$= \frac{2\pi^2}{r^5} [r^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})] \quad (\text{A.254})$$

$$= \frac{2\pi^2}{r^3} \left[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3 \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] \quad (\text{A.255})$$

(A.255) は原点が特異点であり、値が定まらない。(発散するのか 0 になるのかもわからないのが問題っぽい)。 $r = 0$ における値を定義するために、(A.255) に有限かつ原点で連続な関数 $f(\mathbf{r})$ をかけ、原点周りの半径 ϵ の微小球体内で空間積分した場合を考える。

$$X(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} \left[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3 \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] \quad (\text{A.256})$$

$$= \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (\text{A.257})$$

$$= - \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{1}{r} \quad (\text{A.258})$$

なので、 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ としたときに有限な項のみ考えると

$$\int_{\epsilon} X(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = - \int_{\epsilon} f(\mathbf{r}) \left[\sum a_i b_j \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} \right] \frac{1}{r} d^3 \mathbf{r} \quad (\text{A.259})$$

$$= -f(0) \int_{\epsilon} \left[\sum a_i b_j \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} \right] \frac{1}{r} d^3 \mathbf{r} \quad (\text{A.260})$$

積分領域を考えると奇関数の寄与は 0 なので

$$\int_{\epsilon} X(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = -f(0) \int_{\epsilon} \left[a_1 b_1 \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + a_2 b_2 \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + a_3 b_3 \frac{\partial^2}{\partial r_3^2} \right] \frac{1}{r} d^3 \mathbf{r} \quad (\text{A.261})$$

$\frac{1}{r}$ は球対称な関数なので、 $a_i b_i$ を内積の平均値に置き換えれば

$$\int_{\epsilon} X(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = -\frac{f(0)}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \int_{\epsilon} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3 \mathbf{r} \quad (\text{A.262})$$

$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\mathbf{r})$ なので

$$\int_{\epsilon} X(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} f(0) \int \delta^3(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (\text{A.263})$$

$$= \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \int f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (\text{A.264})$$

$$= \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} f(0) \quad (\text{A.265})$$

よって

$$\int_{\epsilon} f(\mathbf{r}) \left[X(\mathbf{r}) - \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \delta^3(\mathbf{r}) \right] d^3\mathbf{r} = 0 \quad (\text{A.266})$$

すなわち

$$X(\mathbf{r}) - \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \delta^3(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & (r < \epsilon) \\ \frac{1}{r^3} \left[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3 \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] & (r > \epsilon) \end{cases} \quad (\text{A.267})$$

これらを利用して (A.197) を位置空間に逆フーリエ変換すれば以下を得る

$$\begin{aligned} & \left(E - m_1 c^2 - m_2 c^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} - \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\mathbf{p}_1^4}{8m_1^3 c^2} + \frac{\mathbf{p}_2^4}{8m_2^3 c^2} \right) \psi_{++}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ &= q_1 \left[\phi(\mathbf{r}_1) - \frac{i\hbar \mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_1) - \hbar [\mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_1)] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2} - \frac{2\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{2m_1 c} \right] \psi_{++}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ &+ q_2 \left[\phi(\mathbf{r}_2) - \frac{i\hbar \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_2) - \hbar [\mathbf{p}_2 \times \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_2)] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2} - \frac{2\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{p}_2 + \hbar \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2m_2 c} \right] \psi_{++}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ &+ \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{i\hbar \mathbf{p}_1 \cdot \left[-\text{grad}_1 \frac{1}{r_{12}} \right] - \hbar \left[\mathbf{p}_1 \times \left[-\text{grad}_1 \frac{1}{r_{12}} \right] \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{(2m_1 c)^2 r_{12}^3} - \frac{i\hbar \mathbf{p}_2 \cdot \left[-\text{grad}_2 \frac{1}{r_{12}} \right] - \hbar \left[\mathbf{p}_2 \times \left[-\text{grad}_2 \frac{1}{r_{12}} \right] \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{(2m_2 c)^2 r_{12}^3} \right. \\ &\quad - \frac{1}{4m_1 m_2 c^2} \left(4 \left[\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r} - \frac{1}{2r_{12}} \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^2} \right] \right) \\ &\quad \left. - 2\hbar \left(\left[\mathbf{p}_1 \times \left[-\text{grad}_1 \frac{1}{r_{12}} \right] \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \left[\mathbf{p}_2 \times \left[-\text{grad}_2 \frac{1}{r_{12}} \right] \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \right) + 4\pi (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^3(\mathbf{r}_{12}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta^3(\mathbf{r}_{12}) + \left(X_{\sigma}(\mathbf{r}) - \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta^3(\mathbf{r}_{12}) \right) \right] \psi_{++}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (\text{A.268}) \end{aligned}$$

$$X_{\sigma}(\mathbf{r}) - \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta^3(\mathbf{r}_{12}) = \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ \frac{1}{r^3} \left[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] & (r \neq 0) \end{cases}$$

ただし、

$$\text{grad}_2 \frac{1}{r} = -\text{grad}_1 \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r^3}$$

これを整理すれば、以下の Dirac-Coulomb-Breit ハミルトニアンが得られる。

$$W \psi_{++}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_5 + \mathcal{H}_6) \psi_{++}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (\text{A.269})$$

$$W = E - m_1 c^2 - m_2 c^2 \quad (\text{A.270})$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + q_1 \phi(\mathbf{r}_1) + q_2 \phi(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} \quad (\text{A.271})$$

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mathbf{p}_1^4}{8m_1^3 c^2} - \frac{\mathbf{p}_2^4}{8m_2^3 c^2} \quad (\text{A.272})$$

$$\mathcal{H}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{2m_1 m_2 c^2} \frac{1}{r_{12}} \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^2} \right] \quad (\text{A.273})$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{2m_1 m_2 c^2} \frac{1}{r_{12}} \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{\sum_{i,j} r_i^{12} r_j^{12} p_i^1 p_j^2}{r_{12}^2} \right] \quad (\text{A.274})$$

$$\mathcal{H}_3 = \frac{q_1 \hbar}{2m_1 c} \left[\frac{[\mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_1)] + [\mathbf{p}_1 \times [-\text{grad}_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}]]}{2m_1 c} - \frac{2 [\mathbf{p}_2 \times [-\text{grad}_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}]]}{2m_2 c} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (\text{A.275})$$

$$+ \frac{q_2 \hbar}{2m_2 c} \left[\frac{[\mathbf{p}_2 \times \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_2)] + [\mathbf{p}_2 \times [-\text{grad}_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}]]}{2m_2 c} - \frac{2 [\mathbf{p}_1 \times [-\text{grad}_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}]]}{2m_1 c} \right] \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (\text{A.276})$$

$$\mathcal{H}_4 = -i\hbar \left[\frac{q_1}{(2m_1 c)^2} \left[\mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{p}_1 \cdot \left[-\text{grad}_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \right] \right] \right. \quad (\text{A.277})$$

$$\left. + \frac{q_2}{(2m_2 c)^2} \left[\mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_2) + \mathbf{p}_2 \cdot \left[-\text{grad}_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \right] \right] \right] \quad (\text{A.278})$$

$$\mathcal{H}_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4m_1 m_2 c^2} \left[-\frac{8\pi}{3} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^3(\mathbf{r}_{12}) + \frac{1}{r_{12}^3} \left[\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^2} \right] \right] \quad (\text{A.279})$$

$$\mathcal{H}_6 = -\left[\frac{q_1 \hbar}{2m_1 c} \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{q_1 \hbar}{2m_2 c} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right] - 2 \left[\frac{q_1 \hbar}{2m_1 c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{p}_1 + \frac{q_1 \hbar}{2m_2 c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{p}_2 \right] \quad (\text{A.280})$$

ただし、 \mathcal{H}_5 の []' の項は $r \neq 0$ でのみ評価し、 $r = 0$ では 0 として扱う。これらのハミルトニアンはそれぞれ、

\mathcal{H}_0 : 非相対論的な運動

\mathcal{H}_1 : 運動エネルギーの相対論的な補正

\mathcal{H}_2 : 電子が生成する磁場の遅延に起因する、古典的な相対論効果の補正

\mathcal{H}_3 : スピンと起動角運動量の相互作用

\mathcal{H}_4 : 電場との相互作用

\mathcal{H}_5 : 2 粒子のスピン-スピン相互作用

\mathcal{H}_6 : スピンと磁場の相互作用

を表す。

$$V_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \phi(\mathbf{r}_i) + \frac{q_j}{r_{12}} \quad (\text{A.281})$$

とすれば、

$$\mathcal{H}_3 = \frac{q_1 \hbar}{2m_1 c} \left[\frac{[\mathbf{p}_1 \times [-\text{grad}_1 V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]]}{2m_1 c} - \frac{2[\mathbf{p}_2 \times [-\text{grad}_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}]]}{2m_2 c} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (\text{A.282})$$

$$+ \frac{q_2 \hbar}{2m_2 c} \left[\frac{[\mathbf{p}_2 \times [-\text{grad}_2 V_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]]}{2m_2 c} - \frac{2[\mathbf{p}_1 \times [-\text{grad}_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}]]}{2m_1 c} \right] \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (\text{A.283})$$

$$\mathcal{H}_4 = i\hbar \left[\frac{q_1}{(2m_1 c)^2} [\mathbf{p}_1 \cdot [-\text{grad}_1 V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]] + \frac{q_2}{(2m_2 c)^2} [\mathbf{p}_2 \cdot [-\text{grad}_2 V_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]] \right] \quad (\text{A.284})$$

と書くこともできる。

B Breit-Rabi equation

静磁場 \mathbf{B} 中の基底状態のミューオニウムや基底状態のミューオニックヘリウム原子のスピンのハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = h\Delta\nu \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + \mu_B^e g_J \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} - \mu_B^\mu g'_\mu \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{B.1})$$

である。ここで h はプランク定数、 $h\Delta\nu$ は超微細構造、 \mathbf{I} 、 \mathbf{J} はそれぞれミューオンと電子のスピンの演算子、 μ_B^e 、 μ_B^μ は電子、ミューオンの磁気モーメントの大きさ、 g_J 、 g'_μ は束縛状態の電子、ミューオンの g 因子である。第一項は電子とミューオンの超微細相互作用、第二項と第三項はゼーマン効果を意味する。 \mathcal{H} は全スピン演算子 $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ とその z 成分 $\text{hat}F_z$ と交換する。 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ を仮定し、電子、ミューオンのスピンをそれぞれ m_J 、 m_I とすれば

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (m_I, m_J) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ h\Delta\nu + 2(\mu_B^e g_J - \mu_B^\mu g'_\mu) B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h\Delta\nu - 2(\mu_B^e g_J + \mu_B^\mu g'_\mu) B_0 & 2h\Delta\nu & 0 \\ 0 & 2h\Delta\nu & -h\Delta\nu + 2(\mu_B^e g_J + \mu_B^\mu g'_\mu) B_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h\Delta\nu - 2(\mu_B^e g_J - \mu_B^\mu g'_\mu) B_0 \end{pmatrix}$$

\mathcal{H} , \mathbf{F} , $\text{hat}F_z$ の同時固有状態 $|F, m_F = m_I + m_J\rangle$ の固有値 E を求めるために \mathcal{H} を対角化する。 \mathcal{H} の固有値 λ は

$$\lambda = \frac{h\Delta\nu}{4} \pm \frac{1}{2} (g_S \mu_B + g_\mu \mu_\mu) B_0, \quad -\frac{h\Delta\nu}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(h\Delta\nu)^2 + ((g_S \mu_B - g_\mu \mu_\mu) B_0)^2}$$

であり、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の4通り。ただし、

$$x = \frac{(g_{S\mu B} + g_{\mu\mu\mu})}{h\Delta\nu} B_0$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \left[1 \mp \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]$$

$$c^2 = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]$$

固有ベクトルを並べた行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が逆行列 P^{-1} を持つためには

$$\det P = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

$$\neq 0$$

でなければならない。このとき余因子を用いて P^{-1} を考えると

$$P^{-1} = \frac{1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} (b_1 c_2 - b_2 c_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2+2} c_2 & (-1)^{2+3} c_1 & 0 \\ 0 & (-1)^{3+2} b_2 & (-1)^{3+3} b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{4+4} (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{pmatrix}$$

であり、

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} c_2 &= -b_1 \\ b_2 &= c_1 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 \mp \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

(複号同順) とすれば

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき

$$P\mathcal{H}P^{-1} = \frac{\hbar\Delta\nu}{4} \begin{pmatrix} 1+2x-4\mu_B^\mu g_\mu' B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(b^2+c^2)+2x(c^2-b^2)+4bc & 2(c^2-b^2)-4xbc & 0 \\ 0 & 2(c^2-b^2)-4xb_1c_1 & -(b^2+c^2)-2x(c^2-b^2)-4bc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2x-4\mu_B^\mu g_\mu' B_0 \end{pmatrix}$$

これが対角行列になるのは、 $bc > 0$ の場合

$$b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2}$$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2}$$

$bc < 0$ の場合

$$b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2}$$

$$c = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2}$$

(複号同順)。よって

$$P\mathcal{H}P^{-1} = \frac{\hbar\Delta\nu}{4} \begin{pmatrix} 1+2x-4\mu_B^\mu g'_\mu B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 \pm 2\sqrt{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \mp 2\sqrt{1+x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2x-4\mu_B^\mu g'_\mu B_0 \end{pmatrix}$$

この対角行列はエネルギー固有値を意味し、固有状態との対応を考えれば

$$P\mathcal{H}P^{-1} \begin{pmatrix} |F, m_F\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |0, 0\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar\Delta\nu}{4} \begin{pmatrix} 1+2x-4\mu_B^\mu g'_\mu B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2\sqrt{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2\sqrt{1+x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2x-4\mu_B^\mu g'_\mu B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |F, m_F\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |0, 0\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \end{pmatrix}$$

となる。

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} = \mathcal{H}P^{-1}P \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{H}P^{-1} \begin{pmatrix} |F, m_F\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |0, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \end{pmatrix}$$

なので、改めて

$$x = \frac{(g_S \mu_B + g_\mu \mu_\mu) B_0}{h \Delta \nu}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^{1/2}$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} |F, m_F\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |0, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

$|F, m_F\rangle$ を並べ替え、

$$\begin{pmatrix} |F, m_F\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |0, 0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & -s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

$$= P' \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

とすると

$$P'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & c \\ 0 & c & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned} & P' (\mathcal{H}_{\text{HFS}} + \mathcal{H}_{B_z}) \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= P' (\mathcal{H}_{\text{HFS}} + \mathcal{H}_{B_z}) P'^{-1} \begin{pmatrix} |F, m_F\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |0, 0\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar \Delta \nu}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2x - 4\mu_B^\mu g'_\mu B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2\sqrt{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2x - 4\mu_B^\mu g'_\mu B_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - 2\sqrt{1+x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |F, m_F\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |0, 0\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |0, 0\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。これを整理すれば Breit-Rabi 方程式

$$E_{F=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2},m_F} = -\frac{h\Delta\nu}{4} - m_F\mu_B^\mu g'_\mu B_0 \pm \frac{h\Delta\nu}{2} \sqrt{1 + 2m_F x + x^2} \quad (\text{B.2})$$

が得られる。ただし、ミュオニックヘリウムの場合は磁気モーメントの向きがミュオニウムの場合と逆なので $\Delta\nu$ と μ_B^μ をそれぞれ $-\Delta\nu$ と $-\mu_B^\mu$ に置き換える必要がある。

B.1 more general case

原子核のスピンが $\frac{1}{2}$ ではない場合にも基底状態では Breit-Rabi 方程式が成り立つ。原子核のスピンを \mathbf{I} 、磁気モーメントを μ_I とすれば、ハミルトニアンは以下のように書ける。

$$\mathcal{H} = h\Delta\nu \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + \mu_B^e g_J \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} - \frac{\mu_I}{I} \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{B.3})$$

(B.3) の第一項は、昇降演算子 I_\pm, J_\pm を用いれば以下のように書き換えることができる。

$$\mathcal{H}_{\text{HFS}} = h\Delta\nu \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \quad (\text{B.4})$$

$$= h\Delta\nu \left(I_z J_z + \frac{I_+ J_- + I_- J_+}{2} \right) \quad (\text{B.5})$$

ただし、演算子 \mathbf{O} に対して昇降演算子 O_\pm は以下のように定義される。

$$O_\pm = O_x \pm iO_y \quad (\text{B.6})$$

したがって \mathcal{H}_{HFS} は $m_F = m_I + m_J$ の値を変えず、第二項により m_F の同じ状態が混合される。よって、ハミルトニアンを m_F で並べると以下ようになる

$$\mathcal{H}_{\text{HFS}} + \mathcal{H}_z = \begin{pmatrix} (m_I, m_J) = (I, \frac{1}{2}) & (I, -\frac{1}{2}) & (I-1, \frac{1}{2}) & \cdots & (-I, \frac{1}{2}) & (-I, -\frac{1}{2}) \\ \frac{h\Delta\nu I}{2} + (\frac{g_J \mu_B^e}{2} - \mu_I) B_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{H}_{m_F=I-\frac{1}{2},(00)} & \mathcal{H}_{I-\frac{1}{2},(01)} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{H}_{I-\frac{1}{2},(10)} & \mathcal{H}_{I-\frac{1}{2},(11)} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathcal{H}_{-I+\frac{1}{2},(01)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathcal{H}_{-I+\frac{1}{2},(11)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{h\Delta\nu I}{2} - (\frac{g_J \mu_B^e}{2} - \mu_I) B_z \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{m_F=M-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{h\Delta\nu M}{2} - \frac{g_J \mu_B^e}{2} B_z - \frac{\mu_I}{I} M B_z & h\Delta\nu \frac{\sqrt{(I+M)(I-M+1)} \sqrt{(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}))(\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+1)}}{2} \\ h\Delta\nu \frac{\sqrt{(I-(M-1))(I+(M-1)+1)} \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}}{2} & \frac{h\Delta\nu(M-1)}{2} + \frac{g_J \mu_B^e}{2} B_z - \frac{\mu_I}{I} (M-1) B_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\Delta\nu M}{2} - \frac{g_J\mu_B^e}{2}B_z - \frac{\mu_I}{I}MB_z & \hbar\Delta\nu\sqrt{\frac{(I+M)(I-M+1)}{2}} \\ \hbar\Delta\nu\sqrt{\frac{(I-M+1)(I+M)}{2}} & \frac{A(M-1)}{2} + \frac{g_J\mu_B^e}{2}B_z - \frac{\mu_I}{I}(M-1)B_z \end{pmatrix}$$

$$(M = I, I-1, \dots, -(I-1))$$

これを以下のように、 2×2 の部分行列でまとめる

$$(\mathcal{H}_{HFS} + \mathcal{H}_z) \begin{pmatrix} |m_I, m_J\rangle \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ |M, -\frac{1}{2}\rangle \\ |M-1, \frac{1}{2}\rangle \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{H}_{M-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} |M, -\frac{1}{2}\rangle \\ |M-1, \frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

こうすれば B と同様にして $|M, -\frac{1}{2}\rangle$ と $|M-1, \frac{1}{2}\rangle$ の固有エネルギーを求めることができ、以下の一般の場合の Breit-Rabi 方程式が得られる。

$$E_{F=m_F \pm \frac{1}{2}, m_F} = -\frac{\hbar\Delta\nu}{4} - \frac{\mu_I}{I}m_FB_z \pm \frac{1}{2}\sqrt{(h\Delta\nu)^2 \left(I + \frac{1}{2}\right)^2 + 2h\Delta\nu \left(g_J\mu_B^e + \frac{\mu_I}{I}\right)m_FB_z + \left(g_J\mu_B^e + \frac{\mu_I}{I}\right)^2 B_z^2} \quad (\text{B.8})$$

関連図書

- [1] Weiwen Liu, Malcom G Boshier, Satish Dhawan, O Van Dyck, Patrick Egan, Xiang Fei, M Grosse Perdekamp, VW Hughes, Markus Janousch, Klaus Jungmann, et al. High precision measurements of the ground state hyperfine structure interval of muonium and of the muon magnetic moment. *Physical review letters*, Vol. 82, No. 4, p. 711, 1999.
- [2] Ivano Beltrami, B Aas, W Beer, G De Chambrier, PFA Goudsmit, Th v Ledebur, HJ Leisi, W Ruckstuhl, WW Sapp, G Strassner, et al. New precision measurements of the muonic 3d52- 2p32 x-ray transition in 24mg and 28si: Vacuum polarisation test and search for muon-hadron interactions beyond qed. *Nuclear Physics A*, Vol. 451, No. 4, pp. 679–700, 1986.
- [3] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, J. Bijnens, T. Blum, M. Bruno, I. Caprini, C.M. Carloni Calame, M. Cè, G. Colangelo, F. Curciarello, H. Czyż, I. Danilkin, M. Davier, C.T.H. Davies, M. Della Morte, S.I. Eidelman, A.X. El-Khadra, A. Gérardin, D. Giusti, M. Golterman, Steven Gottlieb, V. Gülpers, F. Hagelstein, M. Hayakawa, G. Herdoíza, D.W. Hertzog, A. Hoecker, M. Hoferichter, B.-L. Hoid, R.J. Hudspith, F. Ignatov, T. Izubuchi, F. Jegerlehner, L. Jin, A. Keshavarzi, T. Kinoshita, B. Kubis, A. Kupich, A. Kupść, L. Laub, C. Lehner, L. Lellouch, I. Logashenko, B. Malaescu, K. Maltman, M.K. Marinković, P. Masjuan, A.S. Meyer, H.B. Meyer, T. Mibe, K. Miura, S.E. Müller, M. Nio, D. Nomura, A. Nyffeler, V. Pascalutsa, M. Passera, E. Perez del Rio, S. Peris, A. Portelli, M. Procura, C.F. Redmer, B.L. Roberts, P. Sánchez-Puertas, S. Serednyakov, B. Shwartz, S. Simula, D. Stöckinger, H. Stöckinger-Kim, P. Stoffer, T. Teubner, R. Van de Water, M. Vanderhaeghen, G. Venanzoni, G. von Hippel, H. Wittig, Z. Zhang, M.N. Achasov, A. Bashir, N. Cardoso, B. Chakraborty, E.-H. Chao, J. Charles, A. Crivellin, O. Deineka, A. Denig, C. DeTar, C.A. Dominguez, A.E. Dorokhov, V.P. Druzhinin, G. Eichmann, M. Fael, C.S. Fischer, E. Gámiz, Z. Gelzer, J.R. Green, S. Guellati-Khelifa, D. Hatton, N. Hermansson-Truedsson, S. Holz, B. Hörz, M. Knecht, J. Koponen, A.S. Kronfeld, J. Laiho, S. Leupold, P.B. Mackenzie, W.J. Marciano, C. McNeile, D. Mohler, J. Monnard, E.T. Neil, A.V. Nesterenko, K. Ottnad, V. Pauk, A.E. Radzhabov, E. de Rafael, K. Raya, A. Risch, A. Rodríguez-Sánchez, P. Roig, T. San José, E.P. Solodov, R. Sugar, K. Yu. Todyshev, A. Vainshtein, A. Vaquero Avilés-Casco, E. Weil, J. Wilhelm, R. Williams, and A.S. Zhevlakov. The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model. *Physics*

Reports, Vol. 887, pp. 1–166, 2020. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model.

- [4] D. P. Aguillard, T. Albahri, D. Allspach, A. Anisenkov, K. Badgley, S. Baeßler, I. Bailey, L. Bailey, V. A. Baranov, E. Barlas-Yucel, T. Barrett, E. Barzi, F. Bedeschi, M. Berz, M. Bhattacharya, H. P. Binney, P. Bloom, J. Bono, E. Bottalico, T. Bowcock, S. Braun, M. Bressler, G. Cantatore, R. M. Carey, B. C. K. Casey, D. Cauz, R. Chakraborty, A. Chapelain, S. Chappa, S. Charity, C. Chen, M. Cheng, R. Chislett, Z. Chu, T. E. Chupp, C. Claessens, M. E. Convery, S. Corrodi, L. Crottozzi, J. D. Crnkovic, S. Dabagov, P. T. Debevec, S. Di Falco, G. Di Sciascio, B. Drendel, A. Driutti, V. N. Duginov, M. Eads, A. Edmonds, J. Esquivel, M. Farooq, R. Fatemi, C. Ferrari, M. Fertl, A. T. Fienberg, A. Fioretti, D. Flay, S. B. Foster, H. Friedsam, N. S. Froemming, C. Gabbanini, I. Gaines, M. D. Galati, S. Ganguly, A. Garcia, J. George, L. K. Gibbons, A. Gioiosa, K. L. Giovanetti, P. Girotti, W. Gohn, L. Goodenough, T. Gorringer, J. Grange, S. Grant, F. Gray, S. Hacıomeroglu, T. Halewood-Leagas, D. Hampai, F. Han, J. Hempstead, D. W. Hertzog, G. Hesketh, E. Hess, A. Hibbert, Z. Hodge, K. W. Hong, R. Hong, T. Hu, Y. Hu, M. Iacovacci, M. Incagli, P. Kammel, M. Kargiantoulakis, M. Karuza, J. Kaspar, D. Kawall, L. Kelton, A. Keshavarzi, D. S. Kessler, K. S. Khaw, Z. Khechadorian, N. V. Khomutov, B. Kiburg, M. Kiburg, O. Kim, N. Kinnaird, E. Kraegeloh, V. A. Krylov, N. A. Kuchinskiy, K. R. Labe, J. LaBounty, M. Lancaster, S. Lee, B. Li, D. Li, L. Li, I. Logashenko, A. Lorente Campos, Z. Lu, A. Lucà, G. Lukicov, A. Lusiani, A. L. Lyon, B. MacCoy, R. Madrak, K. Makino, S. Mastroianni, J. P. Miller, S. Miozzi, B. Mitra, J. P. Morgan, W. M. Morse, J. Mott, A. Nath, J. K. Ng, H. Nguyen, Y. Oksuzian, Z. Omarov, R. Osofsky, S. Park, G. Pauletta, G. M. Piacentino, R. N. Pilato, K. T. Pitts, B. Plaster, D. Počanić, N. Pohlman, C. C. Polly, J. Price, B. Quinn, M. U. H. Qureshi, S. Ramachandran, E. Ramberg, R. Reimann, B. L. Roberts, D. L. Rubin, L. Santi, C. Schlesier, A. Schreckenberger, Y. K. Semertzidis, D. Shemyakin, M. Sorbara, D. Stöckinger, J. Stapleton, D. Still, C. Stoughton, D. Stratakis, H. E. Swanson, G. Sweetmore, D. A. Sweigart, M. J. Syphers, D. A. Tarazona, T. Teubner, A. E. Tewsley-Booth, V. Tishchenko, N. H. Tran, W. Turner, E. Valetov, D. Vasilkova, G. Venanzoni, V. P. Volnykh, T. Walton, A. Weisskopf, L. Welty-Rieger, P. Winter, Y. Wu, B. Yu, M. Yucel, Y. Zeng, and C. Zhang. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.20 ppm, 2023.
- [5] M Abe, S Bae, G Beer, G Bunce, H Choi, S Choi, M Chung, W Da Silva, S Eidelman, M Finger, et al. A new approach for measuring the muon anomalous magnetic moment and electric dipole moment. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2019, No. 5, p. 053C02, 2019.
- [6] GW Bennett, B Bousquet, HN Brown, G Bunce, RM Carey, P Cushman, GT Danby, PT Debevec, M Deile, H Deng, et al. Measurement of the negative muon anomalous magnetic moment to 0.7 ppm. *Physical review letters*, Vol. 92, No. 16, p. 161802, 2004.

- [7] S Kanda, Y Fukao, Y Ikedo, K Ishida, M Iwasaki, D Kawall, N Kawamura, KM Kojima, N Kurosawa, Y Matsuda, et al. New precise spectroscopy of the hyperfine structure in muonium with a high-intensity pulsed muon beam. *Physics Letters B*, Vol. 815, p. 136154, 2021.
- [8] S Nishimura, HA Torii, Y Fukao, TU Ito, M Iwasaki, S Kanda, K Kawagoe, D Kawall, N Kawamura, N Kurosawa, et al. Rabi-oscillation spectroscopy of the hyperfine structure of muonium atoms. *Physical Review A*, Vol. 104, No. 2, p. L020801, 2021.
- [9] Ce Zhang, Hideaki Hara, Takahiro Hiraki, Yutaka Ikedo, Yasutaka Imai, Katsuhiko Ishida, Saeid Kamal, Naritoshi Kawamura, Akihiro Koda, Yajun Mao, Takahiko Masuda, Tsutomu Mibe, Yasuhiro Miyake, Yuki Miyamoto, Yu Oishi, Masashi Otani, Patrick Strasser, Koichiro Shimomura, Kazuhito Suzuki, Satoshi Uetake, Takayuki Yamazaki, Shinsuke Yamamoto, Koji Yoshimura, and Mitsuhiko Yoshida. *Simulation Study of Laser Ionization of Muonium by 1S-2S Excitation for the Muon $g-2$ EDM Experiment at J-PARC*. 2019.
- [10] Satoshi Uetake, Kazuhito Suzuki, Takahiro Hiraki, and Mitsuhiko Yoshida. ミューオニウム精密レーザー分光実験@J-PARC, 第 39 巻, pp. 170–181. 2021.
- [11] Paolo Crivelli. The mu-mass (muonium laser spectroscopy) experiment. *Hyperfine Interactions*, Vol. 239, No. 1, p. 49, 2018.
- [12] SG Karshenboim and VG Ivanov. The g factor in a light two-body atomic system: a determination of fundamental constants to test qed. *Canadian journal of physics*, Vol. 80, No. 11, 2002.
- [13] SG Karshenboim and VG Ivanov. Two-body corrections to the g factors of the bound muon and nucleus in light muonic atoms. *The European Physical Journal D*, Vol. 73, No. 210, 2019.
- [14] Eite Tiesinga, Peter J Mohr, David B Newell, and Barry N Taylor. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, Vol. 50, No. 3, p. 033105, 2021.
- [15] Michael I Eides. Hyperfine splitting in muonium: Accuracy of the theoretical prediction. *Physics Letters B*, Vol. 795, pp. 113–116, 2019.
- [16] Savely G. Karshenboim and Evgeny Yu. Korzinin. Theoretical prediction for the muonium hyperfine-structure interval and its accuracy. *Phys. Rev. A*, Vol. 103, p. 022805, Feb 2021.
- [17] DE Casperson, TW Crane, VW Hughes, PA Souder, RD Stambaugh, PA Thompson, H Orth, G Zu Putlitz, HF Kaspar, HW Reist, et al. A new high precision measurement of the muonium hyperfine structure interval δv_1 . *Physics Letters B*, Vol. 59, No. 4, pp. 397–400, 1975.

- [18] DT Aznabayev, AK Bekbaev, and VI Korobov. The hyperfine structure of the ground state in the muonic helium atoms. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, Vol. 15, pp. 236–239, 2018.
- [19] AA Krutov and AP Martynenko. Ground-state hyperfine structure of the muonic helium atom. *Physical Review A*, Vol. 78, No. 3, p. 032513, 2008.
- [20] H Orth, K-P Arnold, PO Egan, M Gladisch, W Jacobs, J Vetter, W Wahl, M Wigand, VW Hughes, and G zu Putlitz. First observation of the ground-state hyperfine-structure resonance of the muonic helium atom. *Physical Review Letters*, Vol. 45, No. 18, p. 1483, 1980.
- [21] Christopher John Gardner, A Badertscher, W Beer, PR Bolton, PO Egan, M Gladisch, M Greene, VW Hughes, DC Lu, FG Mariam, et al. Precise measurement of the hyperfine-structure interval and zeeman effect in the muonic helium atom. *Physical Review Letters*, Vol. 48, No. 17, p. 1168, 1982.
- [22] Edwin E. Salpeter Hans A. Bethe. *Quantum mechanics of one-and two-electron atoms*. Springer Berlin, Heidelberg, 1957.
- [23] Gil Paz. An introduction to nrqed. *Modern Physics Letters A*, Vol. 30, No. 26, p. 1550128, 2015.
- [24] C.J. Gardner. Precise measurement of the hyperfine-structure interval and zeeman effect in the muonic helium atom. *Ph.D.Thesis of Yale University*, 1983.
- [25] Peter J Mohr and Barry N Taylor. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998. *Reviews of modern physics*, Vol. 72, No. 2, p. 351, 2000.
- [26] Sunil D Lakdawala and Peter J Mohr. Perturbation-theory calculation of hyperfine structure in muonic helium. *Physical Review A*, Vol. 29, No. 3, p. 1047, 1984.
- [27] K-N Huang and VW Hughes. Theoretical hyperfine structure of muonic helium. *Physical Review A*, Vol. 20, No. 3, p. 706, 1979.
- [28] E.Borie. On the hyperfine structure of neutral muonic helium. *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei*, Vol. 291, pp. 107–112, 1979.
- [29] RJ Drachman. A new global operator for two-particle delta functions. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, Vol. 14, No. 16, p. 2733, 1981.
- [30] Alexei M Frolov. The hyperfine structure of the ground states in the helium-muonic atoms. *Physics Letters A*, Vol. 376, No. 37, pp. 2548–2551, 2012.
- [31] Krzysztof Pachucki. Hyperfine structure of muonic helium. *Physical Review A*, Vol. 63, No. 3, p. 032508, 2001.

- [32] R. L. Workman and Others. Review of Particle Physics. *PTEP*, Vol. 2022, p. 083C01, 2022.
- [33] R Bayes, JF Bueno, A Hillairet, Yu I Davydov, P Depommier, W Faszer, CA Gagliardi, A Gaponenko, DR Gill, A Grossheim, et al. Experimental constraints on left-right symmetric models from muon decay. *Physical Review Letters*, Vol. 106, No. 4, p. 041804, 2011.
- [34] Hiroyuki A. TORII. Laser spectroscopy of antiprotonic helium atomcules -collisional shift and broadening of resonance lines-. *Ph.D.Thesis of Tokyo University*, 1997.
- [35] T Crane, D Casperson, P Crane, P Egan, VW Hughes, R Stambaugh, PA Thompson, and G zu Putlitz. Observation of a quadratic term in the hfs pressure shift for muonium and a new precise value for muonium $\delta \nu$. *Physical Review Letters*, Vol. 27, No. 8, p. 474, 1971.
- [36] PA Souder, TW Crane, VW Hughes, DC Lu, H Orth, HW Reist, MH Yam, and G Zu Putlitz. Formation of the muonic helium atom. *Physical Review A*, Vol. 22, No. 1, p. 33, 1980.
- [37] KS Tanaka, M Iwasaki, O Kamigaito, S Kanda, N Kawamura, Y Matsuda, T Mibe, S Nishimura, N Saito, N Sakamoto, et al. Development of microwave cavities for measurement of muonium hyperfine structure at j-parc. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2021, No. 5, p. 053C01, 2021.
- [38] Hughes. V W and Putlitz. G Z. Muonium has not yet decayed, Aug 1984.
- [39] M. Gladish, 1983.
- [40] Donald J Arseneau, Donald G Fleming, Yongle Li, Jun Li, Yury V Suleimanov, and Hua Guo. Rate coefficient for the $4\text{He}\mu^+ \text{CH}_4$ reaction at 500 k: Comparison between theory and experiment. *The Journal of Physical Chemistry B*, Vol. 120, No. 8, pp. 1641–1648, 2016.
- [41] S Nishimura. Study of time differential muon spin resonance method for muonium hyperfine splitting measurement with a high-rate capable detector. *Ph.D.Thesis of Tokyo University*, 2018.
- [42] K M Kojima, T Murakami, Y Takahashi, H Lee, S Y Suzuki, A Koda, I Yamauchi, M Miyazaki, M Hiraishi, H Okabe, S Takeshita, R Kadono, T Ito, W Higemoto, S Kanda, Y Fukao, N Saito, M Saito, M Ikeno, T Uchida, and M M Tanaka. New μ sr spectrometer at j-parc muse based on kalliope detectors. *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 551, No. 1, p. 012063, dec 2014.
- [43] S Kanda. Direct measurement of muonium ground state hyperfine splitting with high-intensity pulsed muon beam. *Ph.D.Thesis of Tokyo University*, 2017.
- [44] ES Ensberg and CL Morgan. Pressure shift of the hydrogen hyperfine frequency by krypton and xenon. *Physics Letters A*, Vol. 28, No. 2, pp. 106–107, 1968.

- [45] P. Strasser, S. Fukumura, R. Iwai, S. Kanda, S. Kawamura, M. Kitaguchi, S. Nishimura, S. Seo, H. M. Shimizu, K. Shimomura, H. Tada, and H. A. Torii. Improved measurements of muonic helium ground-state hyperfine structure at a near-zero magnetic field, 2023.
- [46] Naritoshi Kawamura, Masaharu Aoki, Jacob Doornbos, Tsutomu Mibe, Yasuhiro Miyake, Fumiaki Morimoto, Yohei Nakatsugawa, Masashi Otani, Naohito Saito, Yoshihiro Seiya, et al. New concept for a large-acceptance general-purpose muon beamline. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2018, No. 11, p. 113G01, 2018.
- [47] Takayuki Yamazaki, Naritoshi Kawamura, Koichiro Shimomura, Yasuhiro Miyake, Yu Oishi, Taihei Adachi, Patrick Strasser, Akihiro Koda, Hiroshi Fujimori, Takahiro Yuasa, et al. New beamlines and future prospects of the j-parc muon facility. In *EPJ Web of Conferences*, Vol. 282, p. 01016. EDP Sciences, 2023.
- [48] AS Barton, P Bogorad, GD Cates, H Mabuchi, H Middleton, NR Newbury, R Holmes, J McCracken, PA Souder, J Xu, et al. Highly polarized muonic he produced by collisions with laser optically pumped rb. *Physical review letters*, Vol. 70, No. 6, p. 758, 1993.
- [49] M Ab Bouchiat, TR Carver, and CM Varnum. Nuclear polarization in he 3 gas induced by optical pumping and dipolar exchange. *Physical Review Letters*, Vol. 5, No. 8, p. 373, 1960.
- [50] T Okudaira, T Oku, T Ino, H Hayashida, H Kira, K Sakai, K Hiroi, S Takahashi, K Aizawa, H Endo, et al. Development and application of a 3he neutron spin filter at j-parc. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 977, p. 164301, 2020.
- [51] Matthew D Rotondaro and Glen P Perram. Collisional broadening and shift of the rubidium d1 and d2 lines ($52s12 \rightarrow 52p12, 52p32$) by rare gases, h2, d2, n2, ch4 and cf4. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 57, No. 4, pp. 497–507, 1997.
- [52] Greg A Pitz, Andrew J Sandoval, Tiffany B Tafoya, Wade L Klennert, and David A Hostutler. Pressure broadening and shift of the rubidium d1 transition and potassium d2 transitions by various gases with comparison to other alkali rates. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 140, pp. 18–29, 2014.
- [53] G Reifenröther, E Klempt, and Rolf Landua. Cascade of muonic helium atoms. *Physics Letters B*, Vol. 191, No. 1-2, pp. 15–20, 1987.
- [54] Earl Babcock, Ian Nelson, Steve Kadlecck, Bastiaan Driehuys, LW Anderson, F William Hersman, and Thad G Walker. Hybrid spin-exchange optical pumping of h e 3. *Physical review letters*, Vol. 91, No. 12, p. 123003, 2003.