

学位論文

AdS₃ 時空上の南部後藤開弦の運動における乱流現象

名古屋大学大学院理学研究科
素粒子宇宙物理学専攻

木太久 稜

2024年3月25日

要旨

一般相対性理論では時空の曲がりによって重力の作用が説明され、この時空の曲がりにはアインシュタイン方程式に従う。アインシュタイン方程式は非線形偏微分方程式であり、それに伴う非線形現象がしばしば重力系の時間発展に重要な影響を及ぼす。本論文ではそのような非線形現象によって引き起こされる、(漸近)Anti-de Sitter(AdS) 時空中での乱流的現象に注目する。ここで AdS 時空とは最大対称空間で負の宇宙項を持つアインシュタイン方程式の解であり、漸近 AdS 時空とは遠方で AdS 時空に漸近する解の総称である。(漸近)AdS 時空はそこでの重力理論と遠方境界における量子場の理論の双対性が指摘されて以降、素粒子理論、超弦理論、重力理論の分野で特に注目されるようになり、今でも関連する様々な研究が行われている。また近年、AdS 時空中での重力を伴う場のダイナミクスにおいて、非線形相互作用に由来する一種の不安定性の存在が示唆され、この現象を理解するための研究が重力理論の研究者を中心に進められている。ここで注目されている不安定性とは、AdS 時空に対して有限のエネルギーを伴う摂動を加えたとき、それがどれほど小さな振幅であっても、十分時間が経てば、大きな波数を持ったモードが励起され、最終的にブラックホールが形成されるというものである。この不安定性が生じる一般的条件や、その動的過程の後の可能な終状態については未だ完全に明らかとなっておらず、盛んに研究が続けられている。非線形なダイナミクスによってエネルギーが大きなスケールから小さなスケールに流れる様子は乱流現象におけるエネルギーカスケードと類似しており、しばしば AdS 時空中での乱流現象と呼ばれるため、本論文でもこの呼称を用いる。

AdS 時空中における乱流現象の発現において、必要となる重要な要素として、本来 AdS 時空の持つ、場や粒子を有限領域に閉じ込める効果と、考える場の非線形相互作用が挙げられる。しかしこの乱流現象がどれほど一般的に発現するかといった普遍性は未だ未解明であり、非線形相互作用のある、異なる系を用いて解析することは、AdS 時空中における乱流現象の理解を一步進めることにつながると考えられる。そこで、本論文では AdS 時空中で非線形な運動方程式に従い、比較的扱いやすいダイナミクスを持ったオブジェクトとして南部後藤開弦の運動を解析することとした。簡単のため背景時空を $2+1$ 次元 AdS 時空 (AdS_3) とし、その中で有限の長さを持った南部後藤開弦の運動を数値計算によって解析した。開弦の場合、端点で境界条件を課す必要があるが、本論文では以下の 2 つの異なる境界条件について調べた。その一つは自由端境界条件であり、もう一つは端点が動径方向には固定されており、角度方向にだけ自由に動ける境界条件である。端点が自由端の場合は先行研究によって無限個の保存量が存在することが知られており、可積分であることから乱流的現象が生じないと予想されるが、もう一つの境界条件では保存量の存在が明らかでなく、乱流的現象がみられる可能性がある。

ここでは、まっすぐな弦が定常回転する、Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) 弦と呼ばれる解を用いて初期条件を構成した。GKP 解は本論文で考えている両方の境界条件を満たしており、この弦に摂動を加え、それぞれの境界条件の下での運動を見ることで、境界条件による弦の運動の違いを調べた。数値シミュレーションを用いて弦の運動を数値計算した結果、自由端境界条件の場合、小スケールの揺らぎが増幅されることはなく、GKP 解に対して比較的長波長の揺らぎが重ねあわされた運動が続いた。一方、端点が動径方向の運動にのみ制限されている場合は小スケールの揺らぎが増幅し、それに伴い開弦が複雑に折れ曲がり、ランダムな運動が見られた。また、エネルギースペクトルでは端点が自由に動ける場合はほぼ時間変化がなかったが、端点が動径座標一定面に固定されている場合はエネルギーカスケードによって大きな波数を持ったモードが励起される様子が見られた。

以上のように、本論文における解析から、 AdS_3 時空中の南部後藤開弦の運動における乱流現象の発現には、境界条件が深く関わっていることが明らかとなった。これは一般の AdS 時空における乱流現象においても境界条件が重要となる可能性を示唆する結果と言える。

目次

第 1 章	導入	3
1.1	背景と動機	3
1.2	方法と結果	6
1.3	構成	6
1.4	記法	7
第 2 章	Anti-deSitter 時空	8
2.1	AdS 時空の導入	8
2.2	AdS 時空の座標	9
2.3	閉じ込め	10
2.4	漸近 AdS ブラックホール時空	13
2.5	AdS 不安定性	16
第 3 章	弦の運動	28
3.1	弦の運動方程式	28
3.2	弦のエネルギー運動量テンソル	29
3.3	カスプ	29
3.4	AdS ₃ 時空中での弦の運動	31
3.5	AdS 境界に端点が固定された弦の運動	41
第 4 章	AdS ₃ 時空上の有限の長さを持った弦の運動	44
4.1	AdS ₃ 時空上を運動する南部後藤弦の運動方程式	44
4.2	エネルギーと角運動量	46
4.3	Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) 弦	47
4.4	初期条件	48
4.5	運動	48
4.6	初期値鋭敏性	49
4.7	乱流	50

第 5 章	結論	56
付録 A	弦の運動方程式の導出	59
付録 B	主カイラル模型の運動方程式の導出	62
付録 C	弦の非線形摂動	64
付録 D	数値計算の詳細	68
D.1	ダブルヌル座標	68
D.2	境界での時間発展	69
D.3	数値誤差	71
D.4	エネルギーと角運動量の数値的な保存の確かめ	72
付録 E	M_a, M_b	73

第1章

導入

1.1 背景と動機

本学位論文において、著者が自らあげた研究成果は第4章、第5章で述べられており、重力相互作用そのものを直接扱ったものではないが、その動機は重力系における非線形相互作用の理解にあるため、まずは一般相対性理論についての一般的な説明から始める。

地球に住む我々は経験的に質量のある物体が地面に落ちることを知っている。このことは、ニュートンの運動方程式を考えると、物体に地面へ向かう向きの力が働いていることを意味する。この力を我々は重力と呼ぶ。この重力が電磁気的な力や近接力と大きく異なる点はその力の大きさが質量(慣性質量)に比例しているように見えることである。つまり、重力の強さを特徴づける質量(重力質量)と物体の慣性の大きさを特徴づける質量が比例するということが観測的な事実として存在するのである。アインシュタインはこの観測的事実を原理(等価原理)として採用し、一般相対性理論を着想するに至った。一般相対性理論は発表から100年以上経った今も、観測との明らかな矛盾が見つかっておらず、我々の宇宙において重力の関与する現象を非常によく説明する。

等価原理には、その条件によっていくつかの種類があるが、今日において強い等価原理と呼ばれているものは、重力下で行われる如何なる局所的な(重力も含んだ)実験もその結果は重力の存在に依存しない、というものである。ここで「局所的」とは系全体に及ぼされている重力の潮汐力が無視できるほど考えている実験系が小さな領域で閉じていることを意味する。例えば、地表に立っている我々は物体が下に向かって加速されるように見えるが、これは我々が地表から上向きに力を受けて加速していると解釈すると、重力ではなく、非慣性系に乗っている我々から見た慣性力とみなすことができる。このように等価原理は、任意の時空点近傍での重力は慣性系から一様な加速度で運動している系の慣性力と区別できないことを意味している。等価原理の下ではあらゆる物体が、その個々の性質に依らず、まったく同様に重力の作用を受ける。これを自然な形で説明しようとしたとき、重力を個々の物体間に働く力ではなく、時空の性質そのものに由来するものであると考えるのは非常に尤もらしい解釈である。一般相対性理論では等価原理を満たすために重力は時空の曲がりによって生じると考える。時

空の曲がりには線素 ds^2 , 或いは計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって表され, 一般に

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

と書かれる.

さて, 重力が時空の曲がりによって説明されるのならば, 時空の曲がりを生む源が何かを説明する必要がある. 万有引力の法則と等価原理はあらゆる物質が同様に重力相互作用を行うことを示唆しており, あらゆる物質が重力の源となると考えて良いだろう. つまり, 物質の存在そのものが重力場を生み出し, その重力場によって物質の運動が影響を受けるのである. この重力場と物質分布の関係を与える基礎方程式がアインシュタイン方程式であり, しばしば以下のように書かれる:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\mu\nu}^\gamma - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\gamma}^\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha, \quad (1.3)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right), \quad (1.4)$$

ここで右辺の $T_{\mu\nu}$, G_N はそれぞれ物質分布によって与えられるエネルギー運動量テンソル, 重力定数で左辺の $R_{\mu\nu}$, R はそれぞれリッチテンソル, リッチスカラーと呼ばれる計量の微分を用いて表される量, また Λ は宇宙定数である.

この式からもわかるように, アインシュタイン方程式は非線形偏微分方程式であり, しばしば重力系では非線形現象がその系の時間発展に重要な役割を果たすことがある. 本論文では特に, (漸近)Anti-de Sitter(AdS) 時空中での非線形現象に着目する.

AdS 時空は負の宇宙定数を持つ真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) のアインシュタイン方程式の解で, 最大対称空間となっている. 漸近 AdS 時空は遠方において漸近的に AdS 時空に近づく時空の総称である. 負の宇宙項を持つ漸近 Anti-deSitter(AdS) 時空は 1998 年の $AdS_5 \times S^5$ 上の Type IIB 超弦理論と 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ super Yang-Mills (SYM) 理論 [1] の双対性の発見以来多くの注目を浴びており, この対応あるいは類似の拡張された対応は広く AdS/CFT 対応と呼ばれている. AdS/CFT 対応は, 適切な極限をとると, 漸近 AdS 時空上の古典重力理論と強結合系の場の理論の対応を与える. これにより, しばしばある一方の理論で求めるのが困難な量をもう一方の理論で代わりに求めることができる場合がある. ただし, AdS/CFT 対応は完全に証明されたものではなく, 様々な状況での検証が今も続けられている.

AdS/CFT 対応を考える上で AdS 時空の動的安定性は非常に重要な要素と言える. AdS 時空が線形摂動に対して安定であることは古くから知られていたが [2] 非線形性を取り入れた目立った解析は 2011 年までなされて来なかった. そのような中, 2011 年に Bizon と Rostworowski の論文 [3] において, 負の宇宙項を持つ 3 + 1 次元アインシュタイン無質量実スカラー理論を用いて, 球対称系の動的数値解析を行った. そこで彼らは, 初期に与える摂動の振幅がどんなに小さくても, 十分時間が経つとブラックホールが形成されるという傾向を発見した. 現在この現象は AdS 時空の非線形動的なある種の不安定性であると解釈され, AdS

不安定性と呼ばれている。また, AdS 不安定性は大きなスケールから小さなスケールへのエネルギーのカスケード的な流れであるエネルギーカスケードによって引き起こされていると考えられている [3]。これによって, エネルギーが十分小さな領域に局在化することができ, どれほど小さい摂動でもブラックホールを形成できるのである。このエネルギーカスケードは流体力学における乱流現象においてしばしば観測されるものと類似であり, AdS 時空中における乱流現象と呼ばれることもある。本論文においてもこれに従い, エネルギーカスケードが起こる場合を単に乱流と呼ぶことがある。AdS 時空中の乱流が生じるためには, 漸近 AdS 時空中の共形時間的境界によって場が反射され, 有限時間に場が戻ってくるという性質 (閉じ込め) と [4] 異なる空間スケールのモードがエネルギーのやり取りをするために運動方程式の非線形性が重要であると考えられる。

文献 [3] の研究の後, 数値計算を用いた解析だけでなく, 非線形摂動解析も含めて, AdS 不安定性に関する研究が多くなされた [5–8]。ただし, AdS 不安定性は未だに一般的な状況で示されたわけではなく, それが起こるための条件がどのようなものであるかはわかっていない。また, エネルギーカスケードが起きたとしても, その終状態が必ずしもブラックホール形成となるかどうかはわかっておらず, その性質の解明のために様々な角度からの検証が必要とされている。ここではエネルギーカスケードを伴う AdS 不安定性がどのくらい普遍的な現象なのか, その発現に関わる要素は何かという点に注目しよう。例えば, もともとの AdS 不安定性は無質量スカラー場の重力相互作用における非線形性が重要な役割を果たしていたが, 非線形ダイナミクスを起こす要因が重力相互作用である必要はあるのか, エネルギーカスケードが起きるために, 重力相互作用というのがどこまで本質的に重要なのかを見るためには, (漸近)AdS 時空中において別の非線形ダイナミクスを調べることが重要となる。その一つとして, AdS 時空中を運動する南部後藤開弦を考えることができる。AdS 時空中を運動する南部後藤開弦の運動は非線形であることが知られており, そこでの乱流の研究は [9–11] で行われている。それらはいずれも開弦の両端が AdS 時空中の共形時間的境界に位置している場合であり, エネルギーカスケードを伴う乱流的現象が確認されている。また, 本論文の付録 C において明らかにしたように, 端点の端が AdS 境界上にある真っ直ぐな弦を背景解として, 非線形摂動解析を行った結果, 無質量スカラー場に見られる AdS 不安定性と同様の性質を持つことがわかった。本研究では特に, 乱流の発現が開弦の端点に課される境界条件によってどのように変化するかを詳しく調べることを目的とする。

本研究において境界条件に対する依存性に注目するもう一つの動機は, AdS 時空中の弦の運動における可積分性についての先行研究にある。弦の運動は無限次元自由度を持っており, そこでの可積分性とは無限個の保存量が存在する性質である。例えば, 閉弦の運動は可積分系であることが知られている [11]。開弦の場合, 保存量の存在は境界条件に依存し, 状況によってその可積分性が変わることが先行研究 [11] で明らかとなった。保存量は場の運動を制限すると考えられる。ゆえに保存量が多くなるにつれ, その運動は規則的になると期待できる。乱流は一般に乱雑な流れを生むことから, 保存量が多く, より規則的な運動に制限される可積分系では乱流は起きにくいと考えられる。逆に乱流的現象が観測されれば, その系が非可積分で

あることを強く示唆する結果と言える。本研究では先行研究 [11] で可積分性が明らかとなっていない境界条件の場合について数値解析を行い、乱流的現象の有無を調べることで可積分な場合との比較を通して、系の可積分性についての示唆を得るとともに、境界条件が乱流的現象の発現にどのように影響するかを調べる。

1.2 方法と結果

著者が自らあげた主な研究成果は第 4 章, 第 5 章で述べられており, そこで用いられた方法と結果をまとめる。

本研究では AdS_3 時空を運動する南部後藤開弦の運動に対して二つの異なる境界条件の下でシミュレーションを行い, その動的振る舞いを調べる。与える境界条件は文献 [11] で可積分系と示された自由端の場合と, 端点が動径方向には固定されており, 角度方向にだけ自由に動ける境界条件である。

この 2 つの境界条件による運動の違いを見るために, まっすぐな弦が定常回転する Gubser-Klebanov-Polyakov(GKP) 弦 [12] と言われる解に初期に摂動を加え, その後の運動を数値的に調べる。ここで, GKP 弦は上記の二つの境界条件をいずれも満たしており, 摂動についても同様に二つの境界条件を満たすものを考える。

結果として, 自由端の場合はエネルギーカスケードを伴う乱流的現象を見ることができなかった。一方で端点の動径方向の運動のみが制限されている場合には適切な波数分解を行った上でエネルギーカスケードが確認され, 乱流的現象が確認された。これらは AdS_3 時空を運動する弦の運動において乱流現象の発現が境界条件に依存することを意味する。また, 上で述べた可積分系と乱流の関係から, 端点の動径方向の運動のみが制限されると非可積分系になるという示唆を得たことになる。

1.3 構成

本学位論文において著者の研究の結果は第 4.5 節から第 4.7 節, また付録 C に与えられている。第 2 章から第 3 章までは本章で述べた本研究の背景をより詳しく知るための概説である。第 2 章では AdS 時空の基本的な性質と AdS 不安定性を紹介し, 第 3 章において弦の基本的な性質から AdS 時空上の閉弦と開弦の可積分性について概説する。また AdS_3 時空上を運動する無限の長さを持った弦の運動について文献 [11] に基づき紹介した後, 第 4 章で著者の研究である AdS_3 時空上の有限の長さを持った弦の運動を紹介する。

第 4 章では冒頭に本論文で扱う境界条件を述べた後に, 第 4.1 節で数値計算で使う運動方程式を紹介し, 第 4.2 節でエネルギーと角運動量を定義する。第 4.3 節で, 本論文で扱う境界条件をいずれも満たし, 背景解として用いる GKP 解を導入する。第 4.4 節で具体的な初期摂動の与え方を解説し, 第 4.5 節でそれぞれの境界条件が課された弦の定性的な振る舞いを概観する。より詳しい解析として, 第 4.6 節で弦の端点の運動に対してカオス性を測るために初期値

鋭敏性を調べる。第 4.7 節ではエネルギースペクトルや角運動量スペクトルからエネルギーや角運動量のカスケードを調べることで乱流的現象を見る。第 5 章は結論である。付録 C では著者が行った非線形摂動の解析を紹介し、それ以外の付録は各対応する章を読む際に助けとなる計算を紹介したものとなる。

1.4 記法

この論文の記法は主に文献 [13] に準ずる。まず, ; はターゲット時空の添え字に対する共変微分, | は弦の世界面上の共変微分である。また, 微分を単に , で表すこともある。第 3 章ではターゲット時空の添え字をギリシャ文字, 弦の世界面の座標の添え字を英字で表す。2 階テンソル $A_{\alpha\beta}$ に対して $A_{(\alpha\beta)}$ は対称化された 2 階テンソルを表す。即ち, $A_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})$ である。 d は時空の空間次元を表すとする。また計量を空間的にとる。即ち $3+1$ 次元のミンコフスキー計量 $\eta^{\alpha\beta}$ はデカルト座標で $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ である。他には光速 c を 1 とし, アインシュタインテンソルを $G_{\alpha\beta}$ で表す。特に断らない限りはアインシュタインの縮約を用いている。

第2章

Anti-deSitter 時空

ここでは Anti-deSitter(AdS) 時空を導入する. この時空は負の宇宙定数 $\Lambda (< 0)$ を持った真空のアインシュタイン方程式:

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.1)$$

の解で最大対称空間となっている. AdS 時空での場や粒子, 弦の運動や幾何学量は特に AdS/CFT 対応 [1, 12, 14–17] の文脈で注目され研究されている. AdS 時空は対称性の高い時空であり, AdS 時空が持つ対称性の生成子の数はミンコフスキー時空が持つポアンカレ対称性の生成子の数と同じである. しかし, AdS 時空はミンコフスキー時空とは異なり共形な時間的境界を持つ時空であり, そこで場の運動を解くときには一般に境界条件を課さなければならない. 境界条件は理論との整合性から決まることがあり, しばしば反射境界条件が課され, そのときの場の運動は有限領域に閉じ込められたときと類似している. すなわち, 境界に向かう波は反射され有限時間で戻ってくるができる. この性質が AdS 不安定性を引き起こす一つの要因になっていると考えられている.

2.1 AdS 時空の導入

[18] の第 2.5 節に基づいて AdS 時空を紹介する. $d + 1$ 次元 AdS 時空は $d + 2$ 次元のミンコフスキー時空

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{-1}^2 + \sum_{i=1}^d dX_i^2 \quad (2.2)$$

の双曲面

$$-X_0^2 - X_{-1}^2 + \sum_{i=1}^d X_i^2 = -\ell^2 \quad (2.3)$$

として得ることができる. ℓ は AdS 半径と呼ばれ, 宇宙定数 Λ との関係は $\Lambda = -\frac{(d-1)(d-2)}{2\ell^2}$ で与えられる. (2.3) から $d + 1$ 次元 AdS 時空の等長変換群は $d + 2$ 次元ミンコフスキー時空のローレンツ群であることが分かり, $SO(2, d)$ である. この等長変換群の生成子の数は

$d+2$ 次元ミンコフスキー時空の持つポアンカレ群の生成子の数 $d+1$ は $d = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$ と同じである。

双曲面 (2.3) の無限遠 (いずれかの $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ で $|X^i| \rightarrow \infty$) を AdS 境界という。AdS 境界は時空の空間無限遠であるが、Minkowski 時空の場合とは異なり、場の運動を考えると、AdS 境界上での場の情報は重要である。

2.2 AdS 時空の座標

[18] の第 2.5 節に基づいて AdS 時空の座標系について幾つか紹介する。

2.2.1 Global AdS 座標

μ_i を $\sum_{i=1}^{d-1} \mu_i^2 = 1$ を満たす方向余弦, $t \in [-\pi, \pi)$, $r \in [0, \infty)$ とし双曲面 (2.3) を

$$X_0 + iX_{-1} = \ell e^{it/\ell} \sqrt{1 + \frac{r^2}{\ell^2}}, \quad X_i = \mu_i r, \quad (2.4)$$

と媒介変数表示すると線素は

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)} + r^2 \sum_{i=0}^{d-1} d\mu_i^2 \quad (2.5)$$

となるが, $d\Omega_{d-1}^2$ を $(d-1)$ 次元球面の線素とすると $\sum_{i=1}^{d-1} d\mu_i^2 = d\Omega_{d-1}^2$ より

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (2.6)$$

と表せる。(2.6) は $\ell \rightarrow \infty$ ではミンコフスキー時空になることが分かる。上の t は $X_0 X_{-1}$ 平面の角度でありその範囲は $-\pi \leq t < \pi$ であったが、普遍被覆という操作を行って t の範囲を $-\infty < t < \infty$ とする。こうすると AdS 時空に時間的な閉曲線が存在しなくなる。(2.6) の動径座標をコンパクト化 ($r = \ell \tan x$, $t \rightarrow t/\ell$) するとこの座標系での線素は

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 x} (-dt^2 + dx^2 + \sin^2 x d\Omega_{d-1}^2) \quad (2.7)$$

である。このとき、AdS 境界は $x = \pi/2$ にあり、その形状は $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ で円筒である。この計量は共形変換をして $\frac{\ell^2}{\cos^2 x}$ を外すと空間部分が半分の静的アインシュタイン宇宙になり [18], $x = \pi/2$ の面はその接方向に時間方向を持っていることから、AdS 境界は共形時間的境界と呼ばれる。

2.2.2 Poincare 座標

双曲面 (2.3) を

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2z}(z^2 + \ell^2 + |\mathbf{x}|^2 - t^2), & X_{-1} &= \frac{\ell t}{z}, & X_i &= \frac{\ell x_i}{z} \quad (i = 1, \dots, d-2), \\ X_{d-1} &= \frac{1}{2z}(z^2 - \ell^2 + |\mathbf{x}|^2 - t^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

と媒介変数表示すると AdS 時空の線素は

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(-dt^2 + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} + dz^2) \quad (2.9)$$

と共形平坦な形になり, $t, z, x^i, i = 1, \dots, d$ は $t \in (-\infty, \infty), z \in (0, \infty), x^i \in (-\infty, \infty)$ の範囲を動く. また, AdS 境界は $z = 0$ に位置しており, 形状は \mathbb{R}^d である. 線素 (2.9) は $z = 0$ だけでなく, $z = \infty$ でも特異的になるが, この面をポアンカレホライズンという. このホライズンは座標特異点であり, ポアンカレ座標が AdS 時空全体を覆っていないことに由来するものである. AdS 時空においてポアンカレ座標が覆っている領域は図 2.1 に示してある. 前の節で AdS 時空の等長変換群は $SO(2, d)$ であることを確認したが, ポアンカレ座標系ではその等長変換を比較的単純な形で表現でき次のようになる: t, \mathbf{x} の並進変換, $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ としたときのローレンツ変換 $x^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu x^\nu$, スケール変換 $t \rightarrow \lambda t, \mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}, z \rightarrow \lambda z$, そして AdS 時空の特殊共形変換 [19]:

$$z \rightarrow \frac{z}{1 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} A}, \quad x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu A}{1 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} A}, \quad A \equiv z^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad (2.10)$$

ここで b^μ は定数ベクトルである. また, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = -x^0 b^0 + \sum_{i=1}^d x^i b^i$ であり $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ は \mathbf{x}, \mathbf{b} をそれぞれ b, x に変えたものである. これらが局所的に AdS 時空の等長変換全てを表していることは, 生成子の数の総和が $d + {}_{d-1}C_2 + (d-1) + 1 + d = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$ となり, AdS 時空の等長変換群の生成子の数と一致していることから分かる.

2.3 閉じ込め

ここでは AdS 時空の性質を理解するために AdS 時空上の運動が動径方向のみに制限されているテスト粒子を考える. そのために最初にテスト粒子の基本事項について紹介しておく.

テスト粒子の運動

ここでの内容は [13] の第 1.3, 1.5 節に基づく. テスト粒子の運動は時空中で曲線を描く. よって 1 つのパラメータ λ で特徴づけられる. テスト粒子が運動している時空の座標を x^α とすると, 質量 m が 0 でないテスト粒子の作用は以下のように与えられる:

$$S = -m \int d\lambda \sqrt{-u'^\alpha u'_\alpha}, \quad u' \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad (2.11)$$

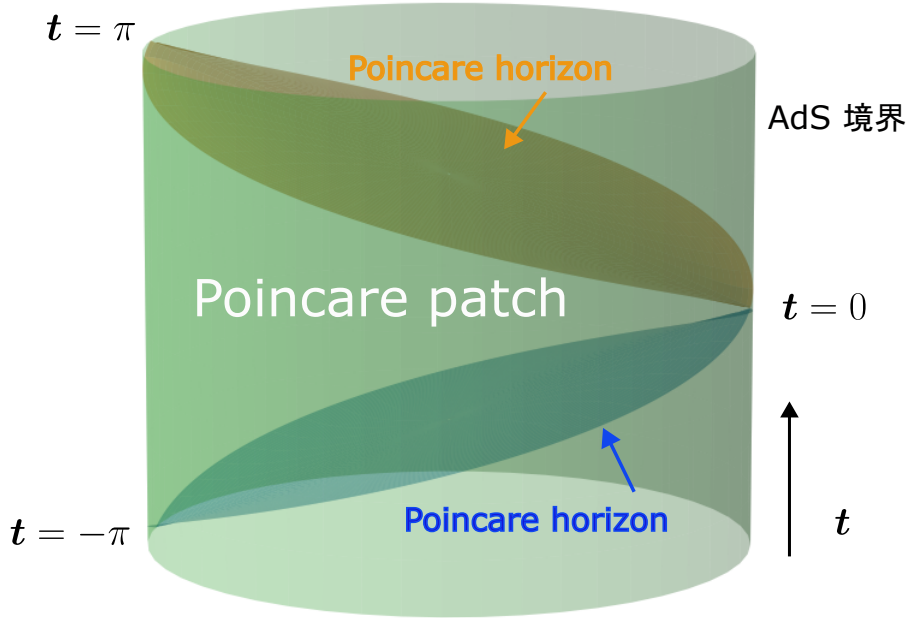


図 2.1: Global AdS 時空中のポアンカレパッチ: オレンジと青の曲面はポアンカレホライズンでその間の領域をポアンカレ座標ははっている. [9] の Figure 2 を参考にして作った.

この作用を x^α で変分を取ることによってテスト粒子の運動方程式:

$$\frac{du'^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u'^\gamma u'^\beta = \kappa(\tau') u'^\alpha, \quad u'^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad (2.12)$$

が得られ, 測地線方程式という. 曲線のパラメータを固有時 τ

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 1 \quad (2.13)$$

にとると (2.12) は

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma u^\beta = 0, \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (2.14)$$

となる. 今まで質量のある粒子について考えてきたが, 質量のない粒子の運動, 例えば光の運動も (2.14), (2.12) で表される. 特に測地線方程式が (2.14) となるパラメータを質量の有無に関わらずアフィンパラメータと呼ぶ. 測地線は $u'^\alpha u'_\alpha$ の符号に応じて時間的測地線 ($u'^\alpha u'_\alpha < 0$), 光的測地線 ($u'^\alpha u'_\alpha = 0$), ここでは紹介しなかったが空間的測地線 ($u'^\alpha u'_\alpha > 0$) と呼ばれる. また, 時間的測地線と光的測地線をまとめて因果的測地線と呼ぶ. 最後に測地線上の保存量について紹介する. またこれ以降の議論は測地線のパラメータをアフィンパラメータと取った場合にしか成り立たない. 時空に対称性があるとそれに付随して $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$ を満たすキリングベクトル $\xi = \xi^\alpha \partial_\alpha$ が存在する. このキリングベクトル ξ を用いて測地線の保存量 q を $q = \xi_\alpha u^\alpha$ と構成できる. それは

$$\frac{dq}{d\tau} = u'^\alpha_{;\beta} u'^\beta \xi_\alpha + u'^\alpha \xi_{\alpha;\beta} u'^\beta = 0 \quad (2.15)$$

が成立するからである. ここで中辺の 1 項目では測地線方程式 (2.14) を使い 2 項目ではキリング方程式 $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$ を使った. この事を踏まえて AdS 時空の粒子の運動を考える.

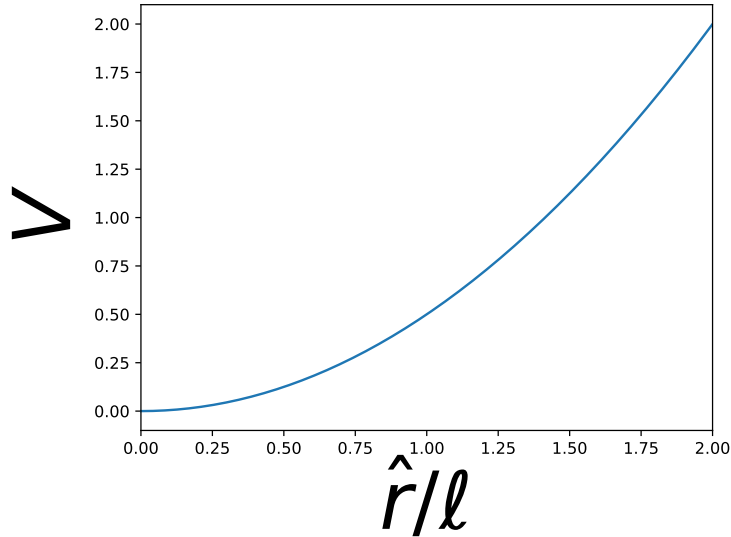


図 2.2: ポテンシャル $V(\hat{r})$. また範囲 $0 \leq \hat{r}/\ell \leq 2$ でプロットしている.

AdS 時空上の粒子の運動

曲線のパラメータをアフィンパラメータにとった因果的測地線を考える. 動径方向にのみ運動する場合, 粒子の運動は AdS₂ 時空中での運動と同じである. 以下, 粒子に質量 m がある場合とない場合に分けて考える.

(I) $m \neq 0$

アフィンパラメータを固有時 (2.13) にとったときを考える. AdS₂ 時空の計量は (2.6) より,

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\hat{r}^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{\hat{r}^2}{\ell^2}} d\hat{r}^2 \quad (2.16)$$

となる. ここで \hat{r} は r の範囲を拡張したもので $\hat{r} \in (-\infty, \infty)$ である. このとき, AdS 時空 (2.16) がキリングベクトル $\xi_{(t)} = \partial_t$ を持っているから単位質量当たりのエネルギー \tilde{E} :

$$\tilde{E} \equiv -u^\alpha \xi_{(t)\alpha} = -u_t = \left(1 + \frac{\hat{r}^2}{\ell^2}\right) u^t, \quad (2.17)$$

は保存する. 今, 曲線のパラメータを固有時にとっているので E は

$$E^2 = \left(\frac{d\hat{r}}{d\tau}\right)^2 + 1 + \frac{\hat{r}^2}{\ell^2} \quad (2.18)$$

と表せる. よってこのときの“ポテンシャル” V は $V = \frac{\hat{r}^2}{2\ell^2}$ となる. 図 2.2 に V の様子を示す. 式 (2.18) からわかるように粒子の運動は調和振動子と同じ運動をする. また, u^t は任意の \hat{r} で発散することなく有限の正の値を持つ. ゆえにこれからどんな速度で粒子を発射しても有限時間 t で再び同じ場所に戻ってくることが分かる. 即ち, 粒子の運動は有限領域に閉じ込められているのである.

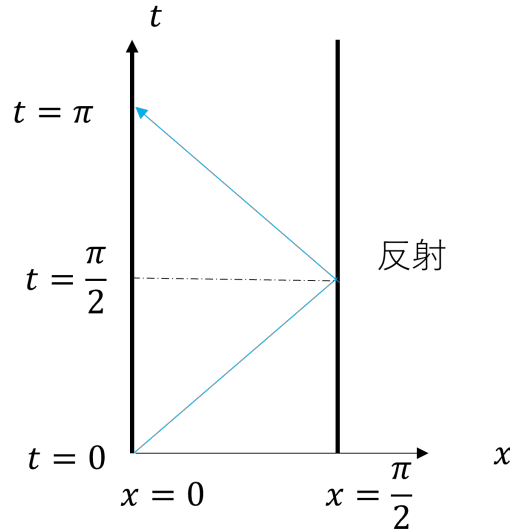


図 2.3: AdS 境界で反射境界条件が課されたときの光の運動

(II) $m = 0$

このとき, 線素が (2.7) となる座標系 (t, x) を考える. $u^\alpha u_\alpha = 0$ より, $\frac{dx}{dt}$ は

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 \quad (2.19)$$

である. $t = 0$ の時に $x = 0$ とすると $x = \pi/2$ となる t は $t = \pi/2$ と有限である. つまり有限の時間で光が AdS 境界に達するのである. これは AdS 時空中の光の運動は境界条件を与えないと決まらないということを意味する. しかし, 理論との整合性から AdS 境界でしばしば反射境界条件が課され (図 2.3 を参照), 有限時間で再び同じ場所に戻ることができる.

以上のように, 粒子の運動は質量の有無に関わらず有限時間で反射されるという意味で有限の大きさを持った箱の中での運動と類似する. このことは物質場でも同じで, しばしば大きさが有限の箱に閉じ込められた場合と類似する運動を行う.

2.4 漸近 AdS ブラックホール時空

この節では球対称漸近 AdS ブラックホール時空を考える. この時空は AdS/CFT 対応において有限温度の CFT を考える上で重要である. また, 漸近 AdS ブラックホールを考えることで漸近平坦な Schwarzschild ブラックホールでは見ることのできなかつた熱力学的性質を見ることができる. 具体的には, 漸近平坦な場合と異なり, $d \geq 3$ ではブラックホールの質量に対して温度が単調にはならないということである. まず, $d \geq 3$ の場合を紹介し, その後に $d = 2$ を紹介する. $d \geq 3$ の場合は文献 [18] の第 15.4 節, $d = 2$ の場合は文献 [20] に準ずる.

2.4.1 $d \geq 3$

$d \geq 3$ の場合の漸近 AdS ブラックホールは Schwarzschild-AdS ブラックホールと呼ばれ、 $\ell \rightarrow \infty$ で Schwarzschild ブラックホールになるものである。その線素は動径座標を面積半径 r にとると、

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad f(r) = 1 + \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{w_d M G_N}{r^{d-2}}, \quad w_d = \frac{8\pi}{(d-2)\Omega_{d-1}},$$

$$\Omega = \frac{2(\pi)^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})},$$
(2.20)

と書ける。 $M = 0$ のときにこの時空は AdS 時空 (2.6) になる。また、後のために動径座標をコンパクト化 ($r = \ell \tan x$, $t \rightarrow t/\ell$, $M_{\text{Sch}} = w_d G_N M / \ell^{d-2}$) すると、線素は

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 x} (-A(t, x)dt^2 + A(t, x)^{-1}dx^2 + \sin^2 x d\Omega_{d-1}^2), \quad A(t, x) = 1 - \frac{2M_{\text{Sch}}(\cos x)^d}{(\sin x)^{d-2}}$$
(2.21)

となる。

このブラックホールのホライズンは $f(r) = 0$ を満たす最も大きい $r = r_+$ に位置し、 r_+ は M の増加関数である。温度 T は $t \rightarrow i\tau$ として $r = r_+$ で円錐特異点が生じないという条件から、

$$T = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dr_+}{\ell^2} + \frac{d-2}{r_+} \right)$$
(2.22)

と求まり、このグラフは図 2.4(縦軸は規格化された逆温度 $1/(\ell T)$ で書いてあることに注意) のようになる。これから、 T は r_+ の単調関数ではなく同じ温度を与える $r_+(M)$ が 2 つあることが分かる。また、温度の最小値を与える r_+ は $\frac{dT}{dr_+} = 0$ より $r_+ = r_0 \equiv \ell \sqrt{\frac{d-2}{d}}$ であり、そのときの温度は $T_{\min} = \frac{\sqrt{d(d-2)}}{2\pi\ell}$ である。 $r_+ < r_0$ では漸近平坦な Schwarzschild ブラックホールと同様に M の増加とともに T も減少する。一方、 $r_+ > r_0$ では漸近平坦な場合と異なり質量が増加するとともに T が増加する。これは比熱が正であることを意味し、熱力学的に安定である。 $r_+ < r_0$ のブラックホールを小さなブラックホールといい、 $r_+ > r_0$ のブラックホールを大きなブラックホールという。 AdS/CFT 対応で有限温度 T の CFT を考えたい場合安定性の観点から、 $T > T_{\min}$ のときは大きなブラックホールを考え、 $T < T_{\min}$ では熱的な AdS 時空を考える。

2.4.2 $d = 2$

$d = 2$ の場合、漸近 AdS ブラックホールは BTZ ブラックホール [21] と呼ばれその線素は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad f(r) = \frac{r^2}{\ell^2} - M$$
(2.23)

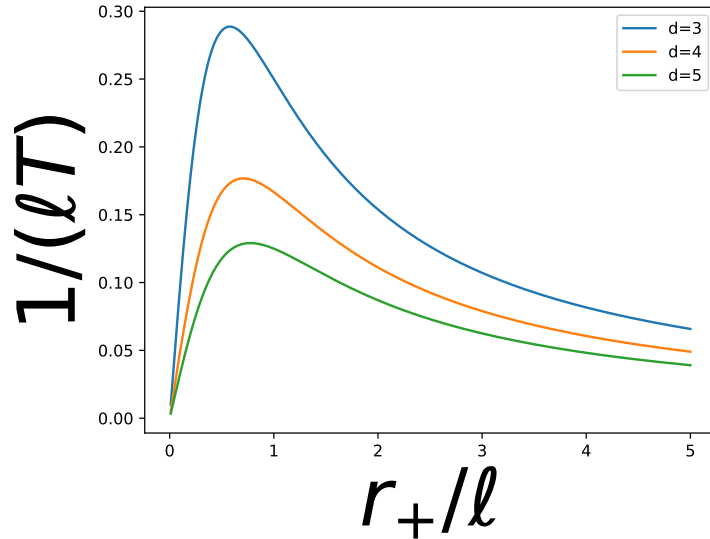


図 2.4: $d \geq 3$ のときの規格化された逆温度 $1/(\ell T)$ と r_+/ℓ の関係.

と与えられる [20]. ここで簡単のため, より一般的な表式に含まれる角運動量パラメータは 0 とした. ホライズンの動径座標 r_+ は $r_+ = \ell\sqrt{M}$ であり, 温度 T は

$$T = \frac{r_+}{2\pi\ell^2} \quad (2.24)$$

となる. これから分かるように温度は r_+ , そして M の単調増加関数である. よって, 比熱は正であり熱力学的に安定である.

実はホライズンの外側の線素を適当な座標系を取ることによって AdS_3 時空の線素に変換することができる [14]. 具体的には

$$\begin{aligned} X \pm Y &= \ell \sqrt{\frac{r^2 - r_+^2}{r^2}} e^{(\phi \pm \frac{t}{\ell}) \frac{r_+}{\ell}}, \\ z &= \frac{\ell r_+}{r} e^{\frac{\phi r_+}{\ell}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

とすれば線素は

$$ds^2 = \ell^2 \frac{-dT^2 + dX^2 + dz^2}{z^2} \quad (2.26)$$

と表され, AdS_3 時空のポアンカレ座標の線素 (2.9) と同じである.

$d \geq 3$ のときと同様に動径座標をコンパクト化 ($x = \ell \tan x$, $t \rightarrow t/\ell$, $M \rightarrow (M + \ell^2)/\ell^2$) すると線素は

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 x} (-A(t, x) dt^2 + \frac{dx^2}{A(t, x)} + \sin^2 x d\phi^2), \quad A(t, x) = 1 - M \cos^2 x \quad (2.27)$$

となる.

2.5 AdS 不安定性

AdS 時空はこれまで見てきたように閉じ込めの性質があり、ミンコフスキー時空の安定性で重要であった無限遠への永続的なエネルギー拡散が起こらない。AdS 時空の安定性の非線形項を取り入れた研究は長い間目立ったものはなかったが、2011 年に AdS 時空の不安定を示唆する研究が行われた [3]。この節では文献 [3–5] に基づいて AdS 不安定性について見ていく。

2.5.1 $d = 3$ の場合

文献 [3] は球対称性を課して、負の宇宙項を持つ $3 + 1$ 次元アインシュタイン無質量実スカラー場理論を考えた。この理論の運動方程式は $8\pi G_N = 2$ とすると、

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi &= 0, \\ G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} &= 2T_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.28)$$

であり、 $T_{\alpha\beta}$ はスカラー場のエネルギー運動量テンソルで以下のように与えられる:

$$T_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \nabla^\gamma \phi \nabla_\gamma \phi. \quad (2.29)$$

時空の線素を

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 x} (-A(t, x) e^{-2\delta(t, x)} dt^2 + A(t, x)^{-1} dx^2 + \sin^2 x d\Omega_2^2) \quad (2.30)$$

と置く。 $\delta = 0$, $A = 1$ のとき、式 (2.30) は AdS₄ 時空 (2.7) ($d = 3$) となる。 $\dot{} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$, $' \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ として Π , Φ を $\Pi \equiv \dot{\phi} e^\delta / A$, $\Phi \equiv \phi'$ と定義するとスカラー場の運動方程式 (2.28) やそれらの定義から

$$\dot{\Phi} = (Ae^{-\delta}\Pi)', \quad \dot{\Pi} \equiv \frac{1}{\tan^2 x} (Ae^{-\delta}\Phi \tan^2 x)' \quad (2.31)$$

と運動方程式が求まり、またアインシュタイン方程式 (2.28) から

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1 + 2 \sin^2 x}{\sin x \cos x} (1 - A) - \sin x \cos x A (\Phi^2 + \Pi^2), \\ \delta' &= -\cos x \sin x (\Phi^2 + \Pi^2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

と拘束条件が得られる。次に時空の質量 M を定義する。漸近 AdS ブラックホール 時空 (2.21) での質量 M_{Sch} は

$$M_{\text{Sch}} = \frac{\sin x}{2 \cos^3 x} (1 - A) \quad (2.33)$$

と表されており、ここでも質量 M を同様に、

$$M = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} m(t, x), \quad m(t, x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} (1 - A) \quad (2.34)$$

と定義する. M は (2.32) より

$$M = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx \tan^2 x A (\Pi^2 + \Phi^2) \quad (2.35)$$

と書くことができる. (2.28) から場が中心 ($x = 0$) でテイラー展開できることを課すと

$$A(t, x) = 1 + \mathcal{O}(x^2), \quad \delta(t, x) = \mathcal{O}(x^2), \quad \phi(t, x) = \phi(t) + \mathcal{O}(x^2) \quad (2.36)$$

となる. ここで $t \rightarrow f(t)$ の座標変換を使って $\delta(t, 0) = 0$ とした. これは $A(t, 0) = 1$ より $x = 0$ にいる観測者の固有時が t と一緒になることを課すものである. AdS 境界 ($x = \frac{\pi}{2}$) 付近での振る舞いも同様に, 場が $x = \frac{\pi}{2}$ で展開できることと質量 M (2.35) が有限であることを課すと

$$\begin{aligned} A(t, x) &= 1 - 2M \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6\right), \\ \delta(t, x) &= \delta_0(t) + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6\right), \\ \phi(t, x) &= \phi_3(t) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

と求まる. ここで, A の表式に M が現れることは (2.34) から分かる. また, (2.37) から ϕ の境界条件はディレクレ境界条件となっており, ϕ は境界で固定端反射されると考えられる. (2.37) が成り立つとき, M の時間微分は 0 となる. それは (2.34) より

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\sin x}{2 \cos^3 x} \dot{A}, \quad (2.38)$$

また, アインシュタイン方程式 $G_x^t = 2T_x^t$ より

$$\dot{A} = -A^2 \cos x \sin x e^{-\delta} \Pi \Phi \quad (2.39)$$

となるから, $\frac{dM}{dt}$ は

$$\frac{dM}{dt} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} 2 \tan^2 x A^2 e^{-\delta} \Pi \Phi \quad (2.40)$$

と表され, (2.37) を使うと $\frac{dM}{dt} = 0$ が示せるからである. 文献 [3] では初期条件を

$$\Phi(0, x) = 0, \quad \Pi(0, \pi) = \frac{2\epsilon}{\pi} \exp\left(-\frac{4 \tan^2 x}{\pi^2 \sigma^2}\right) \quad (2.41)$$

の形で与えて $\sigma = 1/16$ とし ϵ を変えながら数値計算した. 彼らはブラックホールの形成を見かけのホライズン ($A = 0$, 外向きに進む光の膨張率が 0 になるところ^{*1}) の発生によって判断した. 図 2.5 に摂動の振幅の大きさ ϵ と見かけのホライズンが最初に形成されたときの動径座標 $x = x_H$ との関係を示す. 図 2.5 では幾つかの系列があるように見え, また, 小さな ϵ

^{*1} 例えば, [13] の第 5. 1. 7 項参照

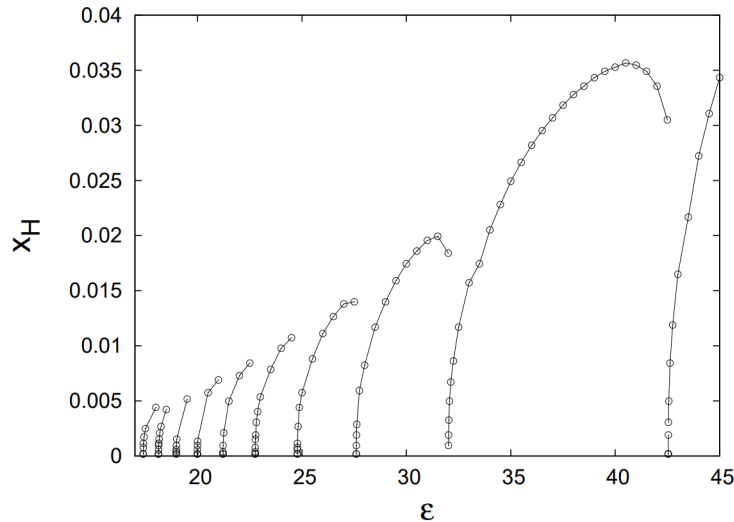


図 2.5: 見かけのホライズン x_H と振幅 ϵ の関係. 出典 [3].

でもブラックホールが形成されることが分かる. 幾つかある系列を ϵ が大きい方から第 1 の系列, 第 2 の系列, 等と呼ぶことにする. まず, 第 1 の系列, 即ち $(\epsilon \geq \epsilon_1 \simeq 42.5)^{*2}$ で何が起きているかを説明する. 第 1 の系列では初期に与えたスカラー場のエネルギー密度が大きく, 遠方に拡散することなくすぐに自己重力でブラックホールを形成する. これはミンコフスキー時空に同じ摂動を加えたときでも生じる現象である. ミンコフスキー時空の場合, $\epsilon < \epsilon_1$ ではブラックホールが形成されない. なぜならば崩壊する代わりにエネルギーが無窮遠へと拡散してしまい, 再び中心に戻ってくることはないからである. しかし, 今の場合, $\epsilon < \epsilon_1$ でもブラックホールが形成されている. このとき何が起きているのだろうか? ミンコフスキー時空との違いは場の運動は空間無限遠である AdS 境界で有限の座標時間 t で反射され, 再び中心に戻ってくることである. これによって, ミンコフスキー時空の場合で生じる永続的なエネルギーの拡散が起きない. 反射された後, スカラー場は再び集まるがこのときより密に集まることができる. 第 2 の系列 $32 \simeq \epsilon_2 \leq \epsilon \leq \epsilon_1$ では 1 回 AdS 境界でスカラー場が反射され, ブラックホールを形成している. 第 3, 第 4 等の系列は 2 回, 3 回等反射され, ブラックホールが形成されている (図 2.6). 文献 [3] は数値計算で解析を行っているため任意の ϵ に対しての結果を得ることはできない. しかし, 上で確認された事は

AdS $_{d+1}$ ($d \geq 3$) 時空上の AdS 不安定性 :

「AdS $_{d+1}$ 時空は任意の大きさを持つ (多くのクラスの) 摂動によってブラックホールが形成されるという意味で不安定である [4]」

*2 ここで 42.5 という数字はグラフから読み取った.

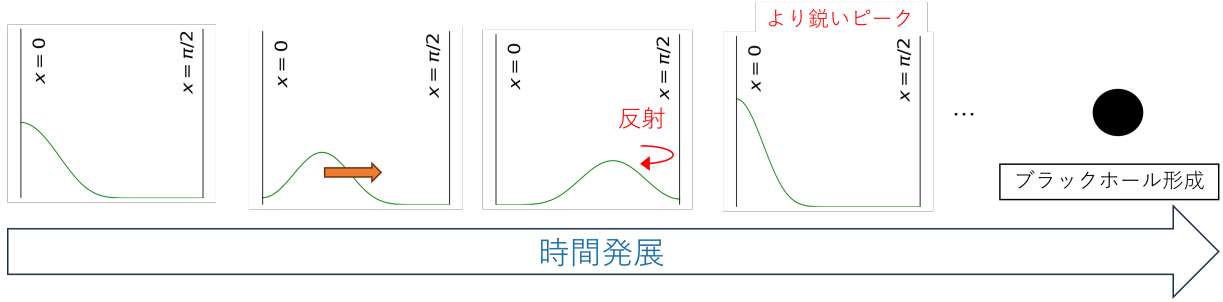


図 2.6: 第 2 以上の系列でブラックホールが形成される様子.

ということ示唆する. 文献 [3] ではこの原因を明らかにするために摂動解析を行った. 即ち, 場を

$$\phi(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{2i+1} \phi_{2i+1}(t, x), \quad (2.42)$$

$$A(t, x) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{2i} A_{2i}(t, x), \quad \delta(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^{2i} \delta_{2i}(t, x) \quad (2.43)$$

と展開することで非線形摂動の解析を行った. ここで ϕ が ϵ の奇数の項, また A, δ が ϵ の偶数の項でしか展開されない理由は次の通りである. まず, アインシュタイン方程式とスカラー場の運動方程式 (2.28) が ϕ を $-\phi$ に変える変換で不変である. スカラー場の初期条件を ϵ の一次のみで与えた場合の解を $\phi = \phi(t, x, \epsilon)$ とすると $\phi(t, x, -\epsilon)$ の初期条件は $-\phi(t, x, \epsilon)$ と等しい. ゆえに $-\phi(t, x, \epsilon)$ は解なので解の一意性が成り立つとすると $\phi(t, x, -\epsilon) = -\phi(t, x, \epsilon)$ である. よってこの式を ϵ で展開すれば ϕ の ϵ の偶数項は 0 となることがわかる. またアインシュタイン方程式 (2.28) より, 計量は ϵ の偶数項しか持たないことが分かるので (2.43) と書ける. 以下では ϵ の各次数で得られる式を見ていく. また, この項の残りではアインシュタイン縮約を用いない.

まず ϵ の 1 次は (2.28) より

$$\ddot{\phi}_1 + L\phi_1 = 0, \quad L \equiv -\frac{1}{\tan^2 x} \partial_x (\tan^2 x \partial_x) \quad (2.44)$$

となる. 境界条件 (2.36), (2.37) の下での演算子 L に関する固有値問題

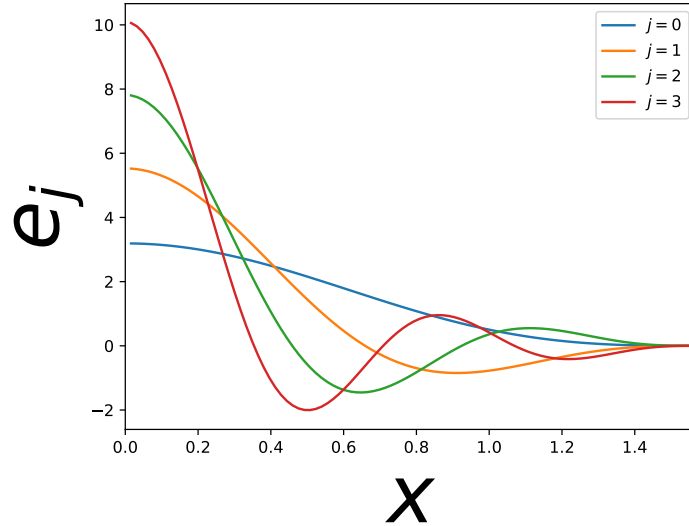
$$L e_j = w_j^2 e_j \quad (2.45)$$

は

$$e_j = d_j (\cos x)^3 {}_2F_1(j+3, -j, 3/2; \sin^2 x), \quad w_j = (2j+3) \quad (2.46)$$

と解ける (図 2.7 参照). ここで ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; \delta)$ はガウスの超幾何関数であり, また, d_j は

$$d_j = 4 \sqrt{\frac{(j+1)(j+2)}{\pi}} \quad (2.47)$$

図 2.7: e_j の形状

である. 内積 (\cdot, \cdot) を

$$(f, g) = \int_0^{\pi/2} \tan^2 f(x)g(x) \quad (2.48)$$

と定義すると $\{e_j\}_{j=0, \dots}$ は正規直交関数系をなしている. ϕ_1 は $\{e_j\}_{j=0, \dots}$ を使って

$$\phi_1(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cos(\omega_j t + B_j) e_j \quad (2.49)$$

と展開される. これから分かるように ϕ_1 は振動解の線形和なので線形摂動ではこの時空は安定である. 次に ϵ の 2 次の方程式から A_2, δ_2 が

$$A_2(t, x) = \frac{\cos^3 x}{\sin x} \int_0^x dy \tan^2 y (\dot{\phi}_1(t, y)^2 + \phi_1'(t, y)^2), \quad (2.50)$$

$$\delta_2(t, x) = - \int_0^x dy \cos y \sin y (\phi_1'(t, y)^2 + \dot{\phi}_1(t, y)^2) \quad (2.51)$$

と求まる. 最後に ϵ の 3 次について考える. このとき得られる方程式は

$$\ddot{\phi}_3 + L\phi_3 = -(\dot{A}_2 + \dot{\delta}_2)\dot{\phi}_1 - (A_2' + \delta_2')\phi_1' - 2(A_2 + \delta_2)\ddot{\phi}_1 \quad (2.52)$$

である. ϕ_3 を $\{e_j\}_{j=0, \dots}$ を使って

$$\phi_3 = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(t) e_j \quad (2.53)$$

と展開し, c_j についての方程式を求めると $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ を使って

一般に

$$\ddot{c}_j + w_j^2 c_j = \sum_{w_l \pm w_m \pm w_n = \pm w_j} S_{l,\pm m,\pm n} A_l A_m A_n \cos((w_l \pm w_m \pm w_n)t + B_l \pm B_m \pm B_n) + (\text{非共鳴項}) \quad (2.54)$$

と書ける. $S_{l,\pm m,\pm n}$ は定数である. (非共鳴項) は振動数が $\pm w_j$ と一致しない項をまとめて表したものであり, c_j に対する寄与は微小なものである. これを見るために, 例えば (非共鳴項) を D, θ を定数として $D \cos(w_k t + \theta)$, $k \neq j$ とすると c_j は

$$c_j = \frac{D}{w_j^2 - w_k^2} \cos(w_k t + \theta) \quad (2.55)$$

と求められ, 任意の t で小さいままである. しかし共鳴項は, 例えば A, θ を定数として $A \cos(w_j t + \theta)$ とすると

$$c_j = \frac{At}{2w_j} \sin(w_j t + \theta) \quad (2.56)$$

と求まり, c_j の大きさを時間 t に比例して増大させる. 以上を踏まえると $\phi^{(j)} = (e_j, \phi)$ は

$$\begin{aligned} \phi^{(j)} &= \epsilon A_j \cos(w_j t + B_j) + \epsilon^3 c_j \\ &= \epsilon A_j \cos(w_j t + B_j) \\ &+ \epsilon^3 \left(\sum_{w_l \pm w_m \pm w_n = \pm w_j} \frac{S_{l,\pm m,\pm n} t}{2w_j} A_l A_m A_n \sin((w_l \pm w_m \pm w_n)t + B_l \pm B_m \pm B_n) + (\text{非共鳴項}) \right) \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^5) \end{aligned} \quad (2.57)$$

となる. ϵ^3 の項において共鳴項である 1 項目は j 以外のモードからの寄与も含む. この項の存在は異なるモードからの励起, 言い換えるとエネルギーが流れていることを示唆する. しかし, 全ての共鳴項が意味のある励起を担うわけではない. 例えば (2.57) の ϵ^3 の項に $A \sin(w_j t + B_j)$ があったとしよう. このとき, $\phi^{(j)}$ の ϵ^1 の項とこの項に注目すると

$$\epsilon A_j \cos(w_j t + B_j) + \epsilon^3 A t \sin(w_j t + B_j) = \epsilon A_j \cos\left(\left(w_j - \frac{\epsilon^2 A}{A_j}\right)t + B_j\right) + \mathcal{O}(\epsilon^5) \quad (2.58)$$

となり, 振動数に繰り込める. このような項は振動数の変化のみにしか寄与せずモード間のエネルギーのやり取りにはそれほど寄与しない. 一方 (2.57) の共鳴項で w_j の振動数シフトで消せない項が一般には存在し, そのような項が j モードを大きく励起させる可能性がある. では文献 [3] に戻って具体的に ϕ_1 の形を決めてどうなるか見てみよう. まず, $(\phi, \dot{\phi})|_{t=0} = (\epsilon e_0, 0)$ として c_j を求めてみる. すると $\phi_1 = e_0 \cos(3t)$ で, 共鳴項は $j = 0$ モードにしか現れない. よって, $j = 0$ のモードに着目してその ϵ^3 の項を求めると $c_0 = -\frac{153}{4\pi} t \sin 3t$ となるが, この項は ϵ^1 の項の振動数に

$$\phi^{(0)} = \epsilon \cos(3t) - \epsilon^3 \frac{153}{4\pi} t \sin 3t \simeq \epsilon \cos\left(\left(3 + \frac{153}{4\pi} \epsilon^2\right)t\right) \quad (2.59)$$

と繰り込める. したがって, 摂動は大きくなる. 一方, 2つのモードの重ね合わせ $(\phi, \dot{\phi})|_{t=0} = (\epsilon(e_0 + e_1), 0)$ のとき, 即ち $\phi_1 = \epsilon(e_0 \cos(3t) + e_1 \cos(5t))$ のとき, 共鳴項が $j = 2$ に出現する. ϕ_1 には $j = 2$ のモードは存在しなかったためこの項は一般に振動数に繰りこめない. したがって, 今の場合, $j = 0, 1$ モードから $j = 2$ モードへのエネルギーの流れがあると期待できるのである.

これから, 実際に各モードのエネルギーのやり取りを見ていく. そのために各モードのエネルギー E_n を以下のように定義する:

$$E_j = \Pi_j^2 + w_j^{-2} \Phi_j^2, \quad (2.60)$$

ここで

$$\Phi_j = (e'_j, \sqrt{A}\Phi), \quad \Pi_j = (e_j, \sqrt{A}\Pi) \quad (2.61)$$

である. Φ_j を e'_j で展開している理由は Φ は ϕ の x 微分だからである. また, $(e'_j, e'_i) = w_i^2 \delta_{ij}$ である. それは

$$(e'_j, e'_i) = \int_0^{\pi/2} dx e'_j e'_i \tan^2 x = [e_j e'_i \tan^2 x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \tan^2 x e_j L e'_i = w_j^2 (e_i, e_j) = w_j^2 \delta_{ij} \quad (2.62)$$

と示すことができる. E_j を (2.60) のように定義すると

$$M = \sum_{j=0}^{\infty} E_j \quad (2.63)$$

となる. $j = 0$ から $j = k$ モードのエネルギーがエネルギーの総和に占める割合を Σ_k , 即ち

$$\Sigma_k = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^k E_j \quad (2.64)$$

と定義する.

図 2.8 は初期条件が 2つのモードの重ね合わせで与えられた場合 $(\phi, \dot{\phi})|_{t=0} = (\epsilon(\frac{1}{d_0} e_0 + \frac{1}{d_1} e_1), 0)$ の Σ_k の時間変化を示している. 時間が経つにつれ k が小さい Σ_k の値が減少していることが分かる. これは j が小さいモードから大きいモードへとエネルギーの流れがあることを意味している. j がより大きいモードほど空間的により細かい振動を示し, 中心での値も大きくなる (図 2.7). 結果として小さい領域でのエネルギーの集中が起きており, これがブラックホール形成, すなわち AdS 不安定性の要因の一つと考えられる. この大きなスケールから小さなスケールへのエネルギーの流れは, 乱流現象においてしばしばみられ, エネルギーカスケードと呼ばれているため, AdS 時空におけるエネルギーカスケードを伴う類似の現象を AdS 乱流と言い表すことがある. 本論文でもこのような表現を用いることにする. まとめると, AdS 不安定性においてはエネルギーが空間的に小さなスケールに集中することが本質的であり, それを担っているのが乱流現象であると考えられる.

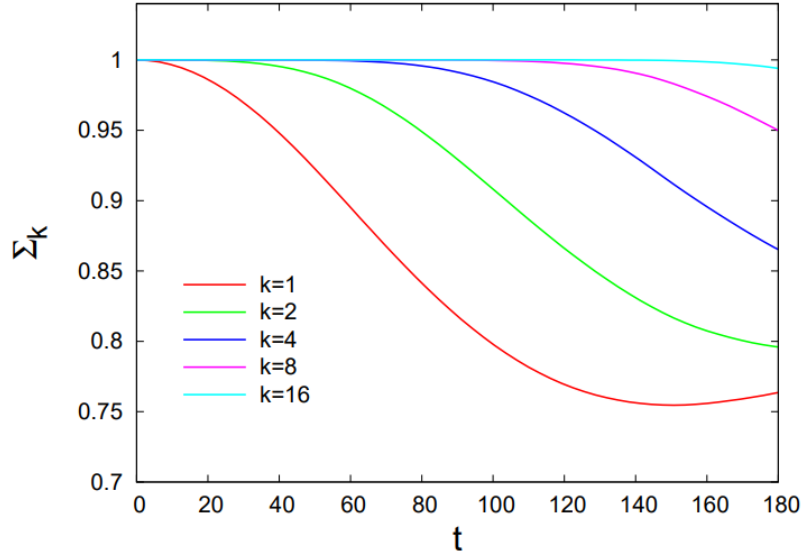


図 2.8: Σ_k の時間発展の様子. $\epsilon = 0.088$ としている. 出典 [3].

2.5.2 $d = 2$ の場合

今までは $d \geq 3$ の話であった. $d = 2$ ではどうだろうか? $d = 2$ でのブラックホール解は BTZ ブラックホールと呼ばれ線素は (2.27) で与えられたが, $M = -1$ のとき AdS₃ 時空になる. 即ち AdS₃ 時空と BTZ ブラックホールの間には質量のギャップがあり, これから, AdS₃ 時空への微小な摂動はブラックホールを形成できない. しかし, この場合でも乱流を見ることができるのである. それを文献 [5] に基づいてみていく.

文献 [5] では $d = 3$ のときと同様に AdS₃ 時空に無質量実スカラー場を加えることを考えた. 今, 運動方程式は (2.28) において, アインシュタイン方程式の $T_{\alpha\beta}$ の係数を 2 から 1 に変えたものを用いる. また, 時空の線素を

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 x} (-A(t, x)e^{-2\delta(t, x)} dt^2 + A(t, x)^{-1} dx^2 + \sin^2 x d\psi^2) \quad (2.65)$$

とおく. ここで ψ は周期的座標で $\psi \sim \psi + 2\pi$ である. $\Pi \equiv A^{-1}e^{\delta}\dot{\phi}$, $\Phi \equiv (\phi)'$ と定義するとこれらの運動方程式は

$$\dot{\Phi} = (Ae^{-\delta}\Pi)', \quad \dot{\Pi} = \frac{1}{\tan x} (Ae^{-\delta}\Phi)' \quad (2.66)$$

となり, また, A, δ は以下の拘束条件

$$A' = 2 \tan x (1 - A) - \cos x \sin x A (\Phi^2 + \Pi^2), \quad (2.67)$$

$$\delta' = -\sin x \cos x (\Phi^2 + \Pi^2) \quad (2.68)$$

を満たす. 他に使う式はアインシュタイン方程式 $G_x^t = T_x^t$ から導かれる

$$\dot{A} = -2A^2 \Pi \Phi \sin x \cos x \quad (2.69)$$

である. 質量 M を

$$M = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} m(t, x), \quad m(t, x) = \frac{1 - A}{\cos^2 x} \quad (2.70)$$

と定義すると (2.67) により

$$m'(t, x) = \tan x A(\Pi^2 + \Phi^2) \quad (2.71)$$

となるので M は

$$M = \int_0^{\pi/2} dy \tan y A(t, y) (\Pi(t, y)^2 + \Phi(t, y)^2) \quad (2.72)$$

と書くことができる.

さて, $d = 3$ のときと同じように正則性^{*3}と $t \rightarrow f(t)$ の座標変換の自由度を使うと中心付近 $x \simeq 0$ では

$$A = 1 + \mathcal{O}(x^2), \quad \delta(t, x) = \mathcal{O}(x^2), \quad \phi(t, x) = f(t) + \mathcal{O}(x^2) \quad (2.73)$$

と展開され, AdS 境界付近 $x \simeq \pi/2$ では正則性と質量 M (2.72) が有限であることを課すことにより

$$\begin{aligned} A &= 1 - M \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right), \quad \delta = \delta(t) + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right), \\ \phi(t, x) &= f_\infty(t) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

と表せられる. これから (2.69) を使うと M が保存することが分かる. $A(t, x) = 0$ が見かけのホライズンであるが, 今の場合 $A(t, x)$ が $M < 1$ のとき時間発展で 0 にならないことを背理法で示す. ある時間 $t = t_0$ で初めて $A(t, x)$ が $A(t, x) = 0$ となったしよう. そのときの x を $x = x_h$ とする. A は連続で, また境界で $A(t, \pi/2) > 0$ であるから区間 $I = (x_h, \pi/2)$ で $A(t, x) > 0$ である. よって (2.71) よりこの区間 I で $m' \geq 0$ である. 一方 $x = x_h$ で m は (2.70) より $m(t, x_h) = \frac{1}{\cos^2 x} \geq 1$ である. ゆえに $M \geq \frac{1}{\cos^2 x_h} \geq 1$ となるがこれは $M < 1$ 矛盾する. これから見かけのホライズンが時間発展とともに形成されないことが分かった.

次に乱流的振る舞いを調べるためにスカラー場を固有関数系に展開することを考えよう. そのためにまず線形摂動方程式を考える. スカラー場の方程式を線形化すると

$$\ddot{\phi} + L\phi = 0, \quad L \equiv -\frac{1}{\tan x} (\tan x \phi')' \quad (2.75)$$

となる. 境界条件 (2.73), (2.74) の下での演算子 L の固有値 w_j とそれに対応する固有関数 e_j は

$$w_j = (2j + 2), \quad e_j = 2\sqrt{j + 1} \cos^2 x P_j^{(0,1)}(\cos 2x) \quad (2.76)$$

と求まる. $j \geq 0$ で $P_j^{(0,1)}(\cos 2x)$ は Jacobi の多項式である. 内積 (\cdot, \cdot) を $(f, g) = \int_0^{\pi/2} dx \tan x f(x) g(x)$ と定義すれば $\{e_j\}_{j=0, \dots}$ は正規直交関数系になる. 即ち $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

*3 今回の場合は原点で円錐特異点がないことを課す. これより $A(t, 0) = 1$ となる.

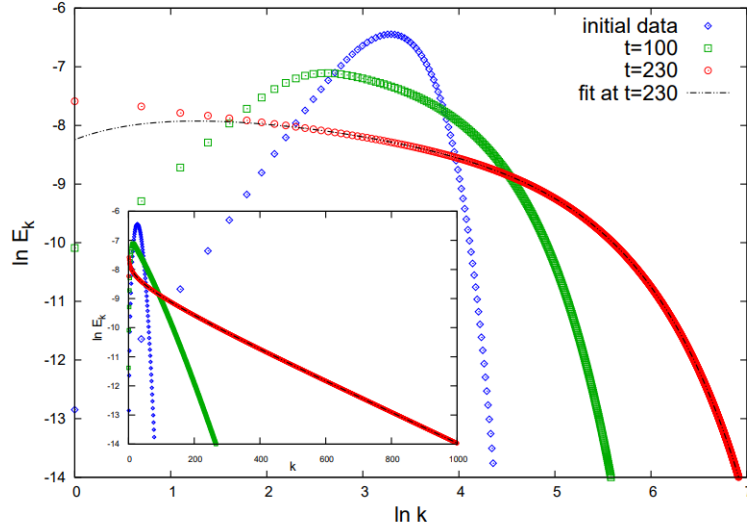


図 2.9: 異なる時刻でのエネルギースペクトルの様子. $\epsilon = 0.3$ としている. 小さい図は線形-log プロットである. 出典 [5].

が成り立つ. また, その微分も $(e'_n, e'_m) = w_n^2 \delta_{nm}$ を満たす. さて, j モードのエネルギー E_j を $\Phi_j = (\Phi, e'_j)$, $\Pi_j = (\Pi, e_j)$ を用いて $d = 3$ と同じように定義する, 即ち $E_j = \Pi_j^2 + w_j^{-2} \Phi_j^2$ とする. このとき, $M = \sum_{j=0}^{\infty} E_j$ が成り立つ. 文献 [5] では初期条件を

$$\phi(0, x) = \epsilon \exp\left(-\frac{\tan^2 x}{\sigma^2}\right), \quad \dot{\phi}(0, x) = 0 \quad (2.77)$$

と与えて数値計算を行った. 以下では $\sigma = \frac{1}{32}$ である. 図 2.9 に異なる時間でのエネルギースペクトルを示す. 見てわかるように時間が経つにつれ, 特定の領域にあるモードのエネルギーが減少し, j が小さいモードのエネルギーが増加しているが, j が大きいモードのエネルギーも増加しているのでエネルギーカスケードが起きている.

[5] は解の解析性の時間変化を解析帯方法 (analyticity strip method) を使って求めた. これは解を複素平面まで拡張した時に, 実軸から最も近い特異点の実軸からの距離を求めるものである. この距離を解析半径 $\rho(t)$ という. 解析半径は $k \gg 1$ で

$$E_K = C(t) k^{-\beta(t)} \exp(-2\rho(t)k) \quad (2.78)$$

とエネルギースペクトルをフィッティングすることにより求まる. 図 2.10 は ρ の時間変化を示している. 図 2.10 から ρ は時間の増加とともに指数的に減少しているが 0 にはならないことが分かる. これはエネルギーカスケードは起きているが解は任意の時間で滑らかであることを意味する. また, $\rho = \exp(-t/T)$ としたとき $T \propto \epsilon^2$ と振る舞うことも文献 [5] で示唆された.

また, 乱流現象を見る別の指標として Sobolev ノルム \dot{H}_2

$$(\dot{H}_2)^2 = \int_0^{\pi/2} dx \phi''(t, x)^2 \quad (2.79)$$

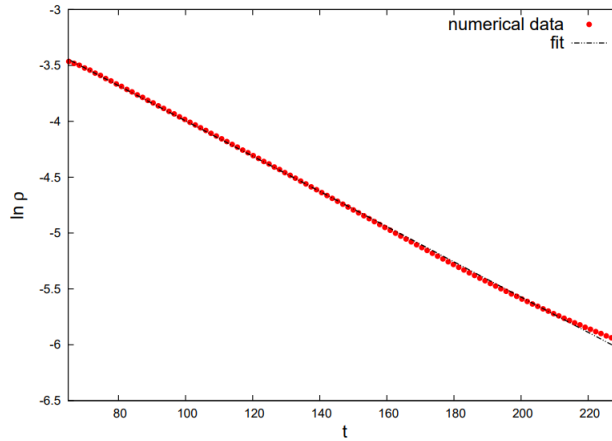


図 2.10: 解析半径 $\rho(t)$ の時間変化. 出典 [5].

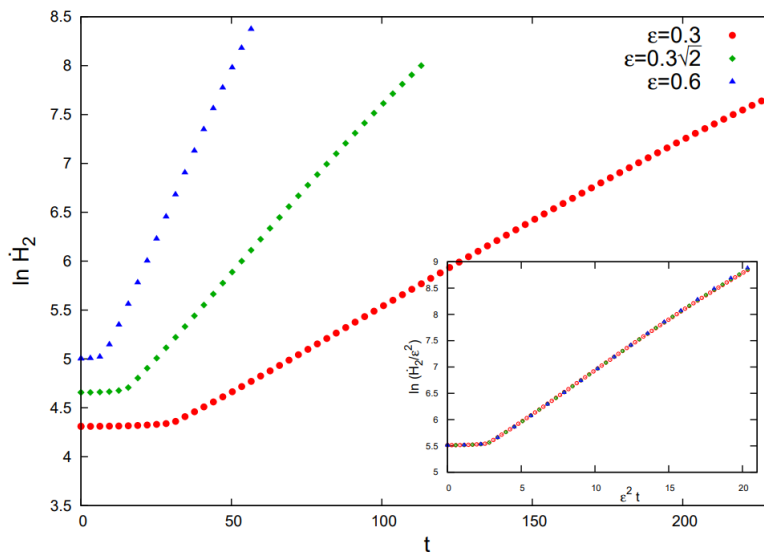


図 2.11: \dot{H}_2 の時間変化. 出典 [5].

が考えられる. 図 2.11 を見て分かるように \dot{H}_2 はある時間から指数的に増加していることが分かる. これは場の空間変化が時間発展とともにより大きくなっていることを意味する.

このように解析半径 ρ が指数的に減少し, \dot{H}_2 が指数的に増加することから 3 次元でも乱流現象が起きていると結論付けられる. 以上から 3 次元での AdS 不安定性についてまとめると以下のようなになる [4]:

AdS₃ 時空上の AdS 不安定性 :

「AdS₃ 時空上の十分小さくて, 滑らかな摂動は常に滑らかだが, 解析半径 ρ が時間の増加とともに指数的に減少する [4]」

以上は数値計算による AdS 時空の不安性解析についての紹介である. しかし, 数値計算では ϵ が非常に小さいところを調べるのは困難である. それは不安定性が確認されるまでの

時間が $1/\epsilon^2$ で増加すると期待されるからである [6]. そこで, その後の研究では 2 時間形式 (Two-Time Formalism) 等非線形摂動を用いた解析が試みられている [6]. 一方で, 安定な摂動を探す試みもなされており, その一つの例がこの章で見た初期に一つのモードのみを与えるというものがあった [3]. 他にも, 安定な摂動を探すという方向の研究としては [22] がある.

第 3 章

弦の運動

この章では南部後藤弦について紹介する。弦が運動する時空はターゲット時空と呼ばれる。時空中の粒子の軌跡は曲線であったが、弦の軌跡は時空中で 2 次元曲面を描き、世界面と呼ばれる。よって、弦の運動は 2 つの座標 σ^a , $a = 0, 1$ で表される。後で見るように南部後藤弦の運動では世界面の面積が極値をとる。AdS 時空中を運動する南部後藤弦の運動ではその可積分性がよく研究されており、例えば、AdS₃ 時空上の南部後藤閉弦の運動は可積分系であるが [11], 開弦の運動になると、保存量の存在が境界条件に依存することが知られている。この章では南部後藤弦についての基本的事項をまとめた後、最後に AdS₃ 時空上を運動する南部後藤開弦の運動を調べた研究 [11] を紹介する。

3.1 弦の運動方程式

南部後藤弦の作用は μ をテンションとして次のように与えられる ([23] の第 6.1 節参照):

$$S_{NG} = -\mu \int d\sigma^2 \sqrt{-h}, \quad h \equiv \det(h_{ab}), \quad (3.1)$$

ここで h_{ab} は誘導計量で以下のように与えられる:

$$h_{ab} \equiv g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial \sigma^b}. \quad (3.2)$$

このように南部後藤弦の作用は世界面の面積で与えられ、その運動では世界面が極値面になる。南部後藤弦の方程式は作用 (3.1) の変分を取ると

$$x_{|ab}^\alpha h^{ab} = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha x_{,a}^\beta x_{,b}^\gamma h^{ab} \quad (3.3)$$

と運動方程式が導かれる (導出については付録 A を参照)。このように弦の運動方程式は一般に非線形偏微分方程式である。

3.2 弦のエネルギー運動量テンソル

弦の作用 (3.1) をターゲット時空中の積分で書き直すと

$$S_{NG} = -\mu \int dx^{d+1} d\sigma^2 \sqrt{-h} \delta^{(d+1)}(x - x(\sigma)) \quad (3.4)$$

である. これを $g_{\mu\nu}$ で変分すると

$$\delta S_{NG} = -\frac{\mu}{2} \int dx^{d+1} \sqrt{-g} \int d\sigma^2 \sqrt{-h} h^{ab} x_{,a}^\mu x_{,b}^\nu \delta g_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

となり, エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は

$$T^{\mu\nu} \sqrt{-g} = -2 \frac{\partial S_{NG}}{\partial g_{\mu\nu}} = \mu \int d\sigma^2 \sqrt{-h} h^{ab} x_{,a}^\mu x_{,b}^\nu \delta^{d+1}(x - x(\sigma)) \quad (3.6)$$

と与えられる. このエネルギー運動量テンソルは保存則:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3.7)$$

を満たし, 時空がキリングベクトル ξ^μ を持つときエネルギー運動量テンソルを使って保存流を

$$q^\mu \equiv T^{\mu\nu} \xi_\nu \quad (3.8)$$

と定義できる. q^μ が保存流であることは以下のように示せる:

$$q^\mu_{;\mu} = T^{\mu\nu}_{;\mu} \xi_\nu + T^{\mu\nu} \xi_{\nu;\mu} = T^{(\mu\nu)} \xi_{(\nu;\mu)} = 0, \quad (3.9)$$

ここで二つ目の等式で (3.7) を, 三つ目の等式でキリングベクトルが満たす方程式を使った.

3.3 カスプ

ここでは弦のカスプと呼ばれる形状について [23] に基づいて紹介する. ここでは弦の座標は (τ, σ) と表し, また, i, j は 1, 2, 3 をとるとする. ターゲット時空を 3+1 次元のミンコフスキー時空にとり, 閉弦の場合を考える ($\sigma \sim \sigma + 2\pi$). ターゲット時空の線素は

$$ds^2 = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.10)$$

である. この節では $x^0 = t$, また $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ である. まず初めに弦の座標 (τ, σ) を静的ゲージと呼ばれる次の形にとる:

$$t = \tau, \quad h_{\tau\tau} = -h_{\sigma\sigma}, \quad h_{\tau\sigma} = 0. \quad (3.11)$$

このとき弦の運動方程式は $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ より簡単になって線形波動方程式

$$\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'' = 0, \quad (3.12)$$

になる. ここで, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ であり, $\dot{} = \frac{\partial}{\partial \tau}$, $' = \frac{\partial}{\partial \sigma}$ である. また, 拘束条件として

$$h_{\tau\sigma} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' = 0, \quad (3.13)$$

$$h_{\tau\tau} = -h_{\sigma\sigma} \rightarrow 1 - \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' \quad (3.14)$$

が課されている. (3.13), (3.14) をそれぞれ τ で微分すると

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' + \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}' = 0, \quad (3.15)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}' \cdot \dot{\mathbf{x}}' = 0 \quad (3.16)$$

が得られる. (3.15) の左辺は (3.14) を σ で微分して得られる式を使うことにより $(\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'') \cdot \mathbf{x}'$ となり, さらに運動方程式 (3.12) を使うことで 0 になることが示せる. また, (3.16) の左辺も (3.13) を σ で微分して得られる式を使うことにより同様に 0 になることが示せる. よって初期条件を拘束条件 (3.13), (3.14) を満たすように与えればその後の運動でも満たされるのである. さて, (3.12) はよく知られているように任意の関数 $\mathbf{x}_+(t)$, $\mathbf{x}_-(t)$ を用いて

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_+(t + \sigma) + \mathbf{x}_-(t - \sigma) \quad (3.17)$$

と解ける. これらは拘束条件 (3.13) より

$$|\dot{\mathbf{x}}_+(t + \sigma)|^2 = |\dot{\mathbf{x}}_-(t - \sigma)|^2 \quad (3.18)$$

が成り立つ. これから, $\sigma = 0$ とすれば \mathbf{x}_+ と \mathbf{x}_- の微分の絶対値は等しい. 次に, 拘束条件 (3.14) と先ほど得られた (3.18) を使うと

$$|\dot{\mathbf{x}}_+(t + \sigma)| = \frac{1}{2} \quad (3.19)$$

となる. よって関数 $\dot{\mathbf{x}}_+(t + \sigma)$, $\dot{\mathbf{x}}_-(t - \sigma)$ は半径 $\frac{1}{2}$ の 2 次元球面上を運動する. ここで弦の運動量 \mathbf{P} を考える. ミンコフスキー時空には並進対称性 $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \text{const}$ があるため, それに付随したキリングベクトル $\xi_{(a)}^\mu = \delta_a^\mu$ が存在する. よって (3.8) を空間積分することで, 運動量 \mathbf{P} は

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mu \int_0^{2\pi} d\sigma \dot{\mathbf{x}}(t, \sigma) \\ &= \mu \int_0^{2\pi} d\sigma (\mathbf{x}'_+(t + \sigma) - \mathbf{x}'_-(t - \sigma)) \\ &= \mu(\mathbf{x}_+(t + 2\pi) - \mathbf{x}_+(t)) - \mu(\mathbf{x}_-(t + 2\pi) - \mathbf{x}_-(t)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

となる. ここで $\mathbf{x}(t, \sigma) = \mathbf{x}(t, \sigma + 2\pi)$ より,

$$\mathbf{x}_+(t + 2\pi) + \mathbf{x}_-(t - 2\pi) = \mathbf{x}_+(t) + \mathbf{x}_-(t) \quad (3.21)$$

から運動量 \mathbf{P} は

$$\mathbf{P} = 2\mu(\mathbf{x}_+(t + 2\pi) - \mathbf{x}_+(t)) = 2\mu(\mathbf{x}_-(t) - \mathbf{x}_-(t - 2\pi)) \quad (3.22)$$

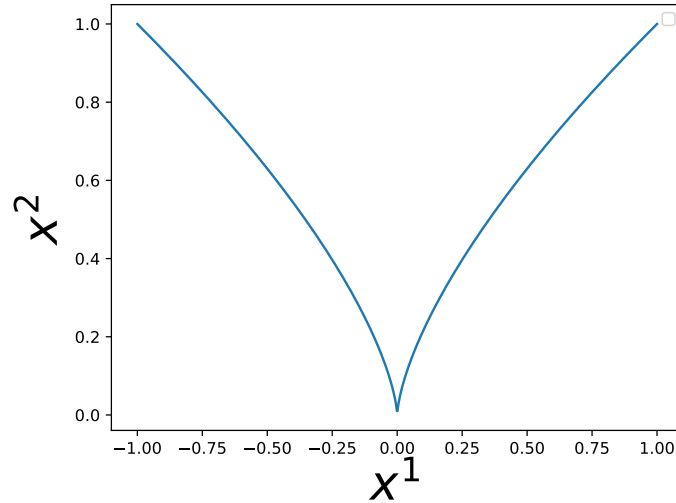


図 3.1: $x^2 = (x^1)^{2/3}$ のグラフ. [23] の Fig6.1 を参考に作成.

と表せる. この運動量 \mathbf{P} が 0 の座標系を考えると

$$\mathbf{x}_+(t + 2\pi) - \mathbf{x}_+(t) = \mathbf{x}_-(t) - \mathbf{x}_-(t - 2\pi) = 0 \quad (3.23)$$

が成り立ち, $\mathbf{x}_+(t)$, $\mathbf{x}_-(t)$ は周期 2π の周期関数となる. よって

$$\int_0^{2\pi} dt \dot{\mathbf{x}}_+(t) = 0, \quad \int_0^{2\pi} dt \dot{\mathbf{x}}_-(t) = 0 \quad (3.24)$$

である. (3.24), (3.19) と (3.18) から $\dot{\mathbf{x}}_+(t + \sigma)$ と $\dot{\mathbf{x}}_-(t - \sigma)$ はある時 $t = t_0$, ある場所 $\sigma = \sigma_0$ で等しくなり, $\dot{\mathbf{x}}(t_0, \sigma_0) = 2\dot{\mathbf{x}}_+(t_0 + \sigma_0)$ でこの大きさは (3.19) から 1 となる. よって $t = t_0$, $\sigma = \sigma_0$ で弦は光の速度で動く. $\tau = \tau_0$, $\sigma \sim \sigma_0$ での弦の形状を調べるために \mathbf{x} を σ で展開して考える. また, 簡単化のため $\tau_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$ とし, ミンコフスキー時空の並進対称性と回転対称性を使って $\mathbf{x}(0, 0) = 0$, $\dot{\mathbf{x}}(0, 0) = (1, 0, 0)$ とする. このとき, $\dot{\mathbf{x}}_+(0, 0) = \dot{\mathbf{x}}_-(0, 0) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ で (3.19) を使うと $\ddot{\mathbf{x}}_+(0, 0)$, $\ddot{\mathbf{x}}_-(0, 0)$ の x^1 成分は 0 であることが示せる. よって $\mathbf{x}(0, \sigma)$ は $\sigma \sim 0$ で

$$x^1(0, \sigma) = (\ddot{x}_+^1 - \ddot{x}_-^1)\sigma^3 + \mathcal{O}(\sigma^4), \quad (3.25)$$

$$x^2(0, \sigma) = (\ddot{x}_+^2 + \ddot{x}_-^2)\sigma^2 + \mathcal{O}(\sigma^3), \quad (3.26)$$

$$x^3(0, \sigma) = (\ddot{x}_+^3 + \ddot{x}_-^3)\sigma^2 + \mathcal{O}(\sigma^3) \quad (3.27)$$

と一般に展開できる. ゆえに $x^1 x^2$ 平面で考えると (3.25), (3.26) の右辺の第 1 項目はそれぞれ一般に 0 でないのでその形状 $x^2 \propto (x^1)^{2/3}$ となり尖がった形になる (図 3.1). この尖がった形状をカuspという.

3.4 AdS₃ 時空中での弦の運動

この節では [11, 24] に基づいて, AdS 時空中の弦の運動, 特に保存量についてまとめる. AdS₃ 時空上の弦の運動を 2 + 2 次元ミンコフスキー時空で考える. AdS₃ 時空は 2 + 2 次元

ミンコフスキー時空の双曲面

$$-X_0^2 - X_3^2 + X_1^2 + X_2^2 = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = -\ell^2 \quad (3.28)$$

として表されるのであった (2.3). ここで $\mu, \nu = -1, \dots, 2$ である. また, 弦の運動は 2 次元曲面であるから共形平坦な座標系をとることができ, それを (u, v) とする. このとき,

$$h_{uu} = h_{vv} = 0 \quad (3.29)$$

である. この式 (3.29) はピラソロ拘束条件またはダブルヌル拘束条件と呼ばれる. このとき AdS 時空上の弦の作用はラグランジアン未定乗数 λ を使って

$$\begin{aligned} S &= \mu \int dudv (h_{uv} - \lambda (X^\mu X_\mu + \ell^2)) \\ &= \mu \int dudv (X_{,u}^\mu X_{\mu,v} - \lambda (X^\mu X_\mu + \ell^2)) \end{aligned} \quad (3.30)$$

と表せる. ここで ∂_u, ∂_v が両方未来方向を向いている事から $h_{uv} < 0$ であることを使った. すると, 弦の運動方程式は

$$X_{,uv}^\mu = -\lambda X^\mu, \quad (3.31)$$

となる. λ は (3.31) の両辺に X_μ を掛けて (3.28) を使うと

$$\lambda = \frac{1}{\ell^2} X_\mu X_{,uv}^\mu \quad (3.32)$$

となる.

拘束条件 (3.29) は閉弦の場合 (境界がない場合), $\tau \equiv u - v = \text{一定面}$ で満たされていれば, その後の運動でも満たされることを示そう. これを示すためには $h_{uu,v}, h_{vv,u}$ が 0 であることを示せば良い. h_{uu} については以下のように示される:

$$h_{uu,v} = X_{,u}^\mu X_{\mu,uv} = -\lambda X_{,u}^\mu X_\mu = 0, \quad (3.33)$$

ここで (3.28) を u で微分して得られる式:

$$X^\mu X_{\mu,u} = 0 \quad (3.34)$$

と運動方程式 (3.31) を使った. $h_{vv,u} = 0$ も同様に示すことができる. よって, h_{uu}, h_{vv} は初期面 $\tau = \text{一定}$ で満たされればその後の運動でも満たされる. 開弦の場合 (境界がある場合) は拘束条件 (3.29) が初期面 $\tau = \text{一定}$ とその弦の境界で満たされれば, その後の運動でも満たされることが示せる.

3.4.1 保存量

第 3.2 節で弦の運動において時空の対称性に付随した保存量が存在することを見た. AdS₃ 時空は $SO(2, 2)$ の等長変換群を持っている. この対称性に付随する保存量を考えよう. ここ

では弦の座標を $\tau = u - v$, $\sigma = u + v$ にとって考える. このとき作用 (3.30) はミンコフスキー計量 $\eta_{\tau\tau} = -\eta_{\sigma\sigma} = -1$, $\eta_{\tau\sigma} = 0$ を用いて

$$S = \frac{\mu}{2} \int d\tau d\sigma (\eta^{ab} X_{,a}^{\mu} X_{\mu,b} - \lambda (X^{\mu} X_{\mu} + \ell^2)) \quad (3.35)$$

と表される. なお, $a, b = \tau, \sigma$ である. すると作用 (3.35) はローレンツ変換 $X'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} X^{\beta}$ の下で不変である. ローレンツ変換の微小変換は, $\omega_{[\alpha\beta]} = \omega_{\alpha\beta}$, また $M_{\mu\nu}$ をローレンツ変換の生成子

$$(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} - \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} \quad (3.36)$$

とすると

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} (M_{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha}, \quad |\omega^{\mu\nu}| \ll 1, \quad (3.37)$$

と書ける. また, $M_{\mu\nu}$ は交換関係

$$[M_{\mu\nu}, M_{\mu'\nu'}] = \eta_{\mu\mu'} M_{\nu\nu'} + \eta_{\nu\nu'} M_{\mu\mu'} - \eta_{\nu'\mu} M_{\nu\mu'} - \eta_{\mu'\nu} M_{\mu\nu'} \quad (3.38)$$

を満たす.

X^{α} の変換は

$$X^{\alpha} \rightarrow X'^{\alpha} = X^{\alpha} + \frac{1}{2} \omega^{\gamma\delta} (M_{\gamma\delta})_{\beta}^{\alpha} X^{\beta} \quad (3.39)$$

なので, ネーターの定理から

$$\omega^{\mu\nu} \eta^{ab} \partial_a (-\mu X_{\alpha,b} (M_{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} X^{\beta}) = 0 \quad (3.40)$$

が成り立つ. ゆえに保存流 $j_{\mu\nu a}$ は

$$j_{\mu\nu a} \equiv -\mu X_{\alpha,a} (M_{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} X^{\beta} \quad (3.41)$$

となる.

$L_i, \bar{L}_i (i = 1, 2, 3)$ を以下のように $M_{\mu\nu}$ の線形結合を取ったものとして,

$$L_0 = \frac{M_{03} - M_{12}}{2}, \quad L_1 = \frac{M_{02} - M_{13}}{2}, \quad L_2 = \frac{M_{01} + M_{23}}{2}, \quad (3.42)$$

$$\bar{L}_0 = -\frac{M_{03} + M_{12}}{2}, \quad \bar{L}_1 = \frac{M_{23} - M_{01}}{2}, \quad \bar{L}_2 = \frac{M_{13} + M_{02}}{2} \quad (3.43)$$

と定義すると, L_i, \bar{L}_i は交換関係

$$[L_0, L_1] = -L_2, \quad [L_0, L_2] = L_1, \quad [L_1, L_2] = L_0, \quad (3.44)$$

$$[\bar{L}_0, \bar{L}_1] = -\bar{L}_2, \quad [\bar{L}_0, \bar{L}_2] = \bar{L}_1, \quad [\bar{L}_1, \bar{L}_2] = \bar{L}_0, \quad (3.45)$$

$$[L_i, \bar{L}_j] = 0 \quad (3.46)$$

を満たす. つまり, L_i, \bar{L}_i は $SL(2, R)$ の生成子の交換関係を満たす. ゆえに, この弦は対称性 $SO(2, 2) \simeq SL(2, R)_L \times SL(2, R)_R$ を持つ. L_i, \bar{L}_j に付随する保存流 J_{ia}, I_{ja} は (3.41) の

$j_{\mu\nu a}$ を使って

$$J_{0a} = \frac{j_{03a} - j_{12a}}{2}, \quad J_{1a} = \frac{j_{02a} - j_{13a}}{2}, \quad J_{2a} = \frac{j_{01a} + j_{23a}}{2}, \quad (3.47)$$

$$I_{0a} = -\frac{j_{03a} + j_{12a}}{2}, \quad I_{1a} = \frac{j_{23a} - j_{01a}}{2}, \quad I_{2a} = \frac{j_{13a} + j_{02a}}{2} \quad (3.48)$$

となる.

3.4.2 主カイラル模型

AdS₃ 時空上の南部後藤弦の運動は主カイラル模型によって記述される. 主カイラル模型はそのターゲット時空が群で内部座標は2次元である. この模型は可積分性がよく研究された模型である. 以下では主カイラル模型において Lax 接続が存在することを示した後, ビラソロ拘束条件が課された南部後藤弦の作用が主カイラル模型の作用と一致することを示し, 弦の運動において無限個の保存量が構成できることを見る.

主カイラル模型の運動

主カイラル模型は群 G に値を取る場 $g \in G$ の模型であり, その作用は

$$S = -\frac{1}{2} \int d\sigma^2 \eta^{ab} \text{Tr}(g^{-1} g_{,a} g^{-1} g_{,b}) = -\frac{1}{2} \int d\sigma^2 \eta^{ab} \text{Tr}(J_a J_b) = -\frac{1}{2} \int d\sigma^2 \eta^{ab} \text{Tr}(I_a I_b) \quad (3.49)$$

で与えられる. ここで η_{ab} は 1+1 次元のミンコフスキー計量であり, J_a, I_a は

$$J_a \equiv g^{-1} g_{,a}, \quad I_a \equiv -g_{,a} g^{-1} \quad (3.50)$$

である. 以下 $g \in SL(2, R)$ として考える. g の運動方程式は作用の変分から

$$\partial^a J_a = 0, \text{ or } \partial^a I_a = 0 \quad (3.51)$$

と導かれ (付録 B 参照), J_a, I_a は保存流となっている. 作用 (3.49) は大域的な変換:

$$g \rightarrow g_L g g_R \quad (3.52)$$

の下で不変であるから, その対称性に付随する保存流が存在する. $g \rightarrow g g_R$ の対称性に対する保存則は, 運動方程式の導出の途中で出てくる δg を含んだ表面項がバルクの項と一致するため (付録 B 参照) 運動方程式と同じく $\partial^a J_a = 0$ であり, また $g \rightarrow g_L g$ に対する保存則も (3.52) と同じである.

Lax 接続

ここでまず簡単に Lax 接続を [25] の 2.6 節に基づいて紹介する. 1+1 次元の場の理論を考える. 時空の座標を (τ, σ) と表したとき, Lax 接続 A_a , $a = \tau, \sigma$ は

$$A_{\tau, \sigma} - A_{\sigma, \tau} + [A_\tau, A_\sigma] = 0 \quad (3.53)$$

を満たすものとして定義される. この A_a の各成分は一般に正方行列である. そこで A_a をゲージ接続と考えるとそれに付随する共変微分 D_a は $D_a = \partial_a - A_a$ と与えられ, 曲率 R_{ab} は $R_{ab} = [D_a, D_b]$ と定義されるが, (3.53) を使うと $R_{ab} = 0$ となる. このことから, (3.53) はゼロ曲率条件と呼ばれる. 空間が周期的 ($\sigma \sim \sigma + 2\pi$) である場合, 以下で定義されるモノドロミー行列 Q :

$$Q = P \exp\left(\int_0^{2\pi} d\sigma A_\sigma\right) \quad (3.54)$$

のトレースが保存することが示せる. ここで P は経路順序積である. A_a が任意のパラメータ λ (スペクトルパラメータ) を持っていれば, Q を λ で展開することで, その展開係数は保存量となり, 無限個の保存量を得ることができる.

さて, 主カイラル模型に戻ってみると, J_a, I_a がその定義から以下のゼロ曲率条件*1

$$\partial_a J_b - \partial_b J_a + [J_a, J_b] = 0, \quad \partial_a I_b - \partial_b I_a + [I_a, I_b] = 0 \quad (3.55)$$

を満たすことがわかる. 座標をダブルヌル座標 $(+, -)$ に取り, $\eta_{++} = \eta_{--} = 0$, $\eta_{+-} = -1/2$ として, スペクトルパラメータ λ を含む $\mathcal{L}_\pm, \bar{\mathcal{L}}_\pm$ を

$$\mathcal{L}_\pm = \frac{J_\pm}{1 \pm \lambda}, \quad \bar{\mathcal{L}}_\pm = \frac{I_\pm}{1 \pm \lambda} \quad (3.56)$$

と定義すると, \mathcal{L}_\pm はゼロ曲率条件

$$\begin{aligned} & \partial_+ \mathcal{L}_- - \partial_- \mathcal{L}_+ + [\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-] \\ &= \frac{1}{1 - \lambda^2} (\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + [J_+, J_-] + \lambda(\partial_+ J_- + \partial_- J_+)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

を満たす. ここで 2 行目から 3 行目は (3.51) と (3.55) を使った. よって \mathcal{L}_\pm は Lax 接続であり, $\bar{\mathcal{L}}$ も同様に Lax 接続であることが示せる. このスペクトルパラメータ λ の入った Lax 接続を用いることで, 空間が周期的な場合, モノドロミー行列から無限個の保存量が作れる.

3.4.3 南部後藤弦と主カイラル模型の関係

$g \in SL(2, R)$ を $\bar{t}, \bar{r}, \bar{\theta}$ を用いて以下のようにで媒介変数表示する:

$$g = \exp(\bar{t}(\tau, \sigma)T^0) \exp(\bar{r}(\tau, \sigma)T^2) \exp(\bar{\theta}(\tau, \sigma)T^1), \quad (3.58)$$

ここで T^0, T^1, T^2 は $SL(2, R)$ の生成子でパウリ行列 $\sigma_j, j = 1, 2, 3$ を使って

$$T^0 = \frac{i}{2}\sigma_1, \quad T^1 = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad T^2 = \frac{1}{2}\sigma_3 \quad (3.59)$$

*1 このゼロ曲率条件は (3.53) で $A_a \rightarrow -A_a$ としたものである. しかし, この場合も同様にモノドロミー行列を構成できる.

と表せる. これらは

$$[T^0, T^1] = -T^2, \quad [T^1, T^2] = T^0, \quad [T^2, T^0] = -T^1 \quad (3.60)$$

を満たし, $\text{Tr } T^A = 0$, また規格化条件は

$$\text{Tr}(T^A T^B) = \gamma^{AB}, \quad \gamma^{AB} = \frac{1}{2} \text{diag}(-1, 1, 1) \quad (3.61)$$

である. γ_{AB} を γ^{AB} の逆行列, 即ち $\gamma_{AB} = 2 \text{diag}(-1, 1, 1)$ と定義し, 以下, 大文字のローマ字に関する添え字の上げ下げはこの γ_{AB} で行う. $dJ \equiv g^{-1} dg$ とすると

$$dJ = (d\bar{t} \cosh \bar{r} \cosh \bar{\theta} - d\bar{r} \sinh \bar{\theta}) T^0 + (d\bar{t} \sinh \bar{r} + d\bar{\theta}) T^1 + (-d\bar{t} \cosh \bar{r} \sinh \bar{\theta} + d\bar{r} \cosh \bar{\theta}) T^2. \quad (3.62)$$

よって

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}(dJ dJ) = \frac{1}{4} (-\cosh^2 \bar{r} d\bar{t}^2 + d\bar{r}^2 + (\sinh \bar{r} d\bar{t} + d\bar{\theta})^2) \quad (3.63)$$

となる. これから主カイラル模型の作用 (3.49) は

$$S = \int d\sigma^2 \eta^{ab} \frac{1}{4} (-\bar{t}_{,a} \bar{t}_{,b} \cosh^2 \bar{r} + \bar{r}_{,a} \bar{r}_{,b} + (\bar{t}_{,a} \sinh \bar{r} + \bar{\theta}_{,a})(\bar{t}_{,b} \sinh \bar{r} + \bar{\theta}_{,b})) \quad (3.64)$$

と表される. 一方, (2.3) において

$$X^0 + iX^3 = \frac{\ell}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\bar{t}}{2}} \left(\cosh \left(\frac{\bar{\theta} + \bar{r}}{2} \right) + i \cosh \left(\frac{\bar{\theta} - \bar{r}}{2} \right) \right), \quad (3.65)$$

$$X^1 + iX^2 = \frac{\ell}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\bar{t}}{2}} \left(\sinh \left(\frac{\bar{\theta} + \bar{r}}{2} \right) + i \sinh \left(\frac{\bar{\theta} - \bar{r}}{2} \right) \right) \quad (3.66)$$

とすると AdS_3 時空の線素は

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{4} (-\cosh^2 \bar{r} d\bar{t}^2 + (d\bar{t} \sinh \bar{r} + d\bar{\theta})^2 + d\bar{r}^2) \quad (3.67)$$

となり, ビラソロ拘束条件 (3.29) の下での弦の作用は

$$S = \mu \int dudv (-\cosh^2 \bar{r} t_{,u} t_{,v} + (\bar{t}_{,u} \sinh \bar{r} + \bar{\theta}_{,u})(\bar{t}_{,v} \sinh \bar{r} + \bar{\theta}_{,v}) + \bar{r}_{,u} \bar{r}_{,v}) \quad (3.68)$$

となる. これは (3.64) と係数を除いて同じである. ゆえにビラソロ拘束条件が課された AdS_3 時空上の弦の運動は主カイラル模型で記述される. よって, このような弦の運動には Lax 接続が存在し, 周期境界条件が課された場合, つまり閉弦に対しては保存量が無限個構成できる.

以下 AdS_3 時空の座標を (2.3) において次のように導入する:

$$\begin{aligned} X^0 + iX^3 &= \frac{1+r^2}{1-r^2} e^{it}, \\ X^1 + iX^2 &= \frac{2r}{1-r^2} e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

この座標系では, AdS₃ の線素は

$$ds^2 = -\ell^2 \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right)^2 dt^2 + \frac{4\ell^2}{(1-r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2) \quad (3.70)$$

と表される. すると, Lax 接続 $J_a = J_{aA} T^A$ の J_{aA} は

$$J_{0a} = \frac{-(1+r^2)^2 t_{,a} + 4r^2 \theta_{,a}}{2(1-r^2)}, \quad (3.71)$$

$$J_{1a} + iJ_{2a} = \frac{e^{-i(t+\theta)} (r(1+r^2)(t_{,a} - \theta_{,a}) - i(1-r^2)r_{,a})}{(1-r^2)^2} \quad (3.72)$$

であり, また I_{aA} は

$$I_{0a} = \frac{(1+r^2)^2 t_{,a} + 4r^2 \theta_{,a}}{2(1-r^2)}, \quad (3.73)$$

$$I_{1a} + iI_{2a} = \frac{e^{i(t-\theta)} (-ir(1+r^2)(t_{,a} + \theta_{,a}) + (1-r^2)r_{,a})}{(1-r^2)^2} \quad (3.74)$$

と具体的に書き下すことができる.

3.4.4 閉弦

閉弦の場合 $\sigma \sim \sigma + 2\pi$ と周期境界条件が課されている. よってモノドロミー行列 Q :

$$Q = P \exp \left(- \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{L}_\sigma \right) \quad (3.75)$$

のトレース $\text{Tr} Q$ を λ について $\lambda \rightarrow \infty$ で展開することによって無限個の保存量が得られる. 以下, 具体的に保存量の一つ求めてみよう,

\mathcal{L}_σ は

$$\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_- = \frac{1}{\lambda^2} (J_\sigma - \lambda J_\tau) \quad (3.76)$$

と表されるので, $|1/\lambda| \ll 1$ で展開すると

$$-\mathcal{L}_\sigma = -J_\tau \frac{1}{\lambda} + J_\sigma \frac{1}{\lambda^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda^3} \right). \quad (3.77)$$

これを (3.75) に代入することで

$$Q = 1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\sigma J_\tau(\tau, \sigma) + \frac{1}{\lambda^2} \left(\int_0^{2\pi} J_\sigma(\tau, \sigma) + \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^\sigma d\sigma' J_\tau(\tau, \sigma) J_\tau(\tau, \sigma') \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda^3} \right) \quad (3.78)$$

となる. よって非自明な保存量の一つは (3.78) のトレースを取って $1/\lambda^2$ の項から

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^\sigma d\sigma' J_{A\tau}(\tau, \sigma) J_\tau^A(\tau, \sigma') \quad (3.79)$$

と求まる.

3.4.5 開弦

開弦の場合は一般に周期境界条件が課されないので閉弦の場合に述べた方法から無限個の保存量の存在が示せない。しかし、境界条件によっては無限個の保存量が作れることが知られている [11]。ここでは [11] の結果を紹介する。また弦の端点を $\sigma = \pm \frac{\pi}{2}$ とする。弦の端点でディレクレもしくはノイマン境界条件を課するとき、その課し方として $2^3 = 8$ 通りある。以降、ディレクレ (ノイマン) 境界条件は $D(N)$ と表す。例えば、 t, r, θ それぞれにノイマン境界条件、ディレクレ境界条件、ノイマン境界条件を課するとき、その境界条件を (N, D, N) と記す。[11] は以下の条件が端点で満たされる場合を考えた:

$$(a) \quad J_+^A = R^A_B J_-^B, \quad (3.80)$$

$$(b) \quad I_+^A = R^A_B I_-^B, \quad (3.81)$$

$$(c) \quad J_+^A = R^A_B I_-^B \quad \text{and} \quad J_-^A = R^A_B I_+^B. \quad (3.82)$$

ここで R^A_B は

$$R^A_B = R^A_B, \quad R^A_C R_B^C = \delta^A_B \quad (3.83)$$

を満たす。また他の条件として、代数の構造を変えない条件を持つ。即ち、交換関係 $[T^A, T^B] = f^{AB}_C T^C$ を満たす生成子 T^A を R^A_B で $T'^A = R^A_B T^B$ と変換しても同じ交換関係が成り立つ:

$$[T'^A, T'^B] = f^{AB}_C T'^C. \quad (3.84)$$

α を $\alpha(T^A) = R^A_B T^B$ を満たす線形演算子と定義すると条件 (a), (b), (c) は α を用いて

$$(a) \quad J_+ = \alpha(J_-), \quad (3.85)$$

$$(b) \quad I_+ = \alpha(I_-), \quad (3.86)$$

$$(c) \quad J_+ = \alpha(I_-) \quad \text{and} \quad J_- = \alpha(I_+) \quad (3.87)$$

と書ける。これは $\mathcal{L}_\tau, \mathcal{L}_\sigma$ で見ると

$$(a) \quad \mathcal{L}_\tau(\tau, \sigma; \lambda) = \alpha(\mathcal{L}_\tau(\tau, \sigma; \lambda)), \quad \mathcal{L}_\sigma(\tau, \sigma; \lambda) = -\alpha(\mathcal{L}_\sigma(\tau, \sigma; -\lambda)), \quad (3.88)$$

$$(b) \quad \bar{\mathcal{L}}_\tau(\tau, \sigma; \lambda) = \alpha(\bar{\mathcal{L}}_\tau(\tau, \sigma; -\lambda)), \quad \bar{\mathcal{L}}_\sigma(\tau, \sigma; \lambda) = -\alpha(\bar{\mathcal{L}}_\sigma(\tau, \sigma; -\lambda)), \quad (3.89)$$

$$(c) \quad \mathcal{L}_\tau(\tau, \sigma; \lambda) = \alpha(\bar{\mathcal{L}}_\tau(\tau, \sigma; -\lambda)), \quad \mathcal{L}_\sigma(\tau, \sigma; \lambda) = -\alpha(\bar{\mathcal{L}}_\sigma(\tau, \sigma; -\lambda)) \quad (3.90)$$

となる。ここで、これらの式は弦の端点 ($\sigma = \pm \frac{\pi}{2}$) で評価されていることに注意する。

条件 (a), (b), (c) が満たされるとき、モノドロミー行列 (3.75) の代わりになるものが作れ

る。それを紹介するために以下の量を導入する:

$$M(\tau, \sigma_2, \sigma_1; \lambda) = P \exp\left(-\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \mathcal{L}_\sigma(\tau, \sigma; \lambda)\right), \quad (3.91)$$

$$\bar{M}(\tau, \sigma_2, \sigma_1; \lambda) = P \exp\left(-\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \bar{\mathcal{L}}_\sigma(\tau, \sigma; \lambda)\right), \quad (3.92)$$

$$M'(\tau, \sigma_2, \sigma_1; \lambda) = P \exp\left(-\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \alpha(\mathcal{L}_\sigma(\tau, \sigma; \lambda))\right), \quad (3.93)$$

$$\bar{M}'(\tau, \sigma_2, \sigma_1; \lambda) = P \exp\left(-\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \alpha(\bar{\mathcal{L}}_\sigma(\tau, \sigma; \lambda))\right). \quad (3.94)$$

$$(3.95)$$

ここで (3.91) で $\sigma_2 = 2\pi$, $\sigma_1 = 0$ とすると $M(\tau, 2\pi, 0; \lambda) = Q$ となる。これらを用いて、モノドロミー行列 (3.75) の代わりに保存量を生成するものはそれぞれ以下のように構成できる:

$$(a) \quad M_a(\tau, \lambda) = M'(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda) M(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda), \quad (3.96)$$

$$(b) \quad M_b(\tau, \lambda) = \bar{M}'(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda) \bar{M}(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda), \quad (3.97)$$

$$(c) \quad M_c(\tau, \lambda) = \bar{M}'(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda) M(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda). \quad (3.98)$$

ここで $M'(\tau, -\pi/2, \pi/2; -\lambda)$ 等, σ_2 が σ_1 より小さいものについては一旦積分の上限と下限をそれぞれ適当な記号, 例えば x_1, x_2 とかにし, $x_1 > x_2$ と考え, 経路順序積 P を外したあとに x_1, x_2 に具体的な値を代入して計算する。例えば $M'(\tau, 0, \pi; -\lambda)$ は

$$\begin{aligned} & M'(\tau, 0, \pi; -\lambda) \\ &= 1 - \int_{\pi}^0 d\sigma \alpha(\mathcal{L}_\sigma(\tau, \sigma; -\lambda)) + \int_{\pi}^0 d\sigma \int_{\pi}^{\sigma} d\sigma' \alpha(\mathcal{L}_\sigma(\tau, \sigma; -\lambda)) \alpha(\mathcal{L}_{\sigma'}(\tau, \sigma'; -\lambda)) + \dots \end{aligned} \quad (3.99)$$

と計算される。

例として条件 (a)(3.80) が満たされるとき, $M_{(a)}$ が保存することを示そう。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} M\left(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda\right) \\ &= -\mathcal{L}_\tau\left(\tau, \frac{\pi}{2}; \lambda\right) M\left(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda\right) + M\left(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda\right) \mathcal{L}_\tau\left(\tau, -\frac{\pi}{2}; \lambda\right), \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} M'\left(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda\right) \\ &= -\alpha\left(\mathcal{L}_\tau\left(\tau, -\frac{\pi}{2}; -\lambda\right)\right) M'\left(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda\right) + M'\left(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda\right) \alpha\left(\mathcal{L}_\tau\left(\tau, \frac{\pi}{2}; -\lambda\right)\right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

より,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} M_a(\tau, \lambda) \\
&= -\alpha(\mathcal{L}_\tau(0; \lambda)) M' \left(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda \right) M \left(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda \right) \\
&+ M' \left(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda \right) M \left(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda \right) \mathcal{L}_\tau(0; \lambda) \\
&= \left[M' \left(\tau, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; -\lambda \right) M \left(\tau, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}; \lambda \right), \mathcal{L}_\tau(0; \lambda) \right]
\end{aligned} \tag{3.102}$$

となる. ここで2行目から3行目に移るとき (a) の時の条件 (3.88) を使った. よって $\text{Tr } M_a$ は保存量となり, 閉弦のときと同じように $\lambda = \infty$ 周りで M_a を $1/\lambda$ について展開すれば無限個の保存量を求めることができる. M_a を $1/\lambda$ で展開したときの $\mathcal{O}(1/\lambda^2)$ では

$$M_a^{(2)} = 2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma' (J_{At}(\tau, \sigma) J_t^A(\tau, \sigma')) \right) \tag{3.103}$$

となる.

今までは M_a について考えてきたが, M_b も $J_{Aa} \rightarrow I_{Aa}$ に変えることで同様に示せる. また M_b を M_a と同様に $1/\lambda$ で展開して, $\mathcal{O}(1/\lambda^2)$ の項から得られる保存量は

$$M_b^{(2)} = 2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma' (I_{At}(\tau, \sigma) I_t^A(\tau, \sigma')) \right) \tag{3.104}$$

である.

[11] では条件 (a), (b), (c) が (N, N, N), (N, N, D) と $r = 0$ の (N, D, N) のとき, 満たされることが示された. ここでは (N, N, N) の場合に条件 (a) が満たされることを見よう. $\sigma' = \sigma \pm \frac{\pi}{2}$ と定義し t, r, θ を境界 $\sigma = \mp \frac{\pi}{2}$ で

$$t(\tau, \sigma) = T(\tau) + \mathcal{O}(\sigma'^2), \quad r(\tau, \sigma) = R(\tau) + \mathcal{O}(\sigma'^2), \quad \Theta(\tau, \sigma) = \theta(\tau) + \mathcal{O}(\sigma'^2) \tag{3.105}$$

と展開する. ここで境界条件 (N, N, N) を使った. すると, J_{Aa} は境界 $\sigma = \mp \frac{\pi}{2}$ で (3.71), (3.72) を使って

$$J_{0\tau}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = \frac{-(1 + R^2)T_{,\tau} + 4R^2\Theta_{,\tau}}{2(1 - R^2)}, \tag{3.106}$$

$$J_{1\tau}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) + iJ_{2\tau}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = \frac{e^{-i(T+\Theta)}(R(1 + R^2)(T_{,\tau} - \Theta_{,\tau}) - i(1 - R^2)R_{,\tau})}{(1 - R^2)^2}, \tag{3.107}$$

$$J_{0\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = J_{1\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) + iJ_{2\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = 0 \tag{3.108}$$

となる. ゆえに, J_+, J_- は境界 $\sigma = \pm \frac{\pi}{2}$ で

$$J_{0+}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = J_{0\tau}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) + J_{0\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = J_{0\tau}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = J_{0\tau}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) - J_{0\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = J_-(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) \tag{3.109}$$

を満たす. ゆえに, これは条件 (a)(3.80) で $R^A_B = \delta^A_B$ としたものである. また同様に $I_{0\sigma} = 0$ も言えるので条件 (b) も満たす. よって (N, N, N) では無限個の保存量が存在し可積分系である.

3.5 AdS 境界に端点が固定された弦の運動

この節では AdS_3 時空中を運動する, 端点が AdS 境界に固定された弦の運動を考える. この節は [11] を紹介したものとなっている. 端点での境界条件は θ に関しては $\theta = \text{定数}$ を課す. また t に関しては, 今の場合, 運動方程式から $t_{,\sigma} = 0$ が導かれる. [11] ではまず, AdS 境界に位置する定常な弦を考えた. *2 この解は $\theta = 0$ 軸に対して対称な解であり $\theta \geq 0$ では座標系 (3.69) の r と $z = \frac{1-r^2}{1+r^2}$ の関係が付いている z を用いて

$$\begin{aligned}\theta(\phi) &= \frac{\sqrt{1-z_0^2}}{z_0} (\phi - \Pi(z_0^2; \text{sn}(\phi; i\sqrt{1-z_0^2})) - F_0 + \Pi_0), \\ \frac{z}{z_0} &= \text{sn}(\phi; i\sqrt{1-z_0^2}).\end{aligned}\tag{3.110}$$

と与えられる. ここで z_0 は $\theta = 0$ となるときの z の値で, $\Pi(z_0^2; \text{sn}(\phi; i\sqrt{1-z_0^2}))$ は第三種楕円積分で $\text{sn}(\phi; i\sqrt{1-z_0^2})$ は Jacobi の楕円関数である. また, F_0, Π_0 は完全楕円積分で $F_0 = F(1; i\sqrt{1-z_0^2})$, $\Pi_0 = \Pi(z_0^2; 1; i\sqrt{1-z_0^2})$ である. ϕ は $0 \leq \phi \leq F_0$ をとる. $\theta \leq 0$ では ϕ の範囲は $F_0 \leq \phi \leq 2F_0$ として $\tilde{\phi} = 2F_0 - \phi$ とすると

$$\begin{aligned}\theta(\phi) &= -\frac{\sqrt{1-z_0^2}}{z_0} (\tilde{\phi} - \Pi(z_0^2; \text{sn}(\tilde{\phi}; i\sqrt{1-z_0^2})) - F_0 + \Pi_0), \\ \frac{z}{z_0} &= \text{sn}(\tilde{\phi}; i\sqrt{1-z_0^2})\end{aligned}\tag{3.111}$$

となる. 弦の座標 (τ, σ) を共形平坦にとると, t, θ は

$$t = \frac{2F_0 z_0}{\pi} \tau, \quad \phi = \frac{2F_0}{\pi} \sigma.\tag{3.112}$$

と表せる. 今から “極座標” (r, θ) の代わりに “デカルト” 座標を導入する. 即ち, (r, θ) と以下のような関係が付いている (x, y) を用いる:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.\tag{3.113}$$

このとき, 線素は

$$ds^2 = -\ell^2 \left(\frac{1+|\mathbf{x}|^2}{1-|\mathbf{x}|^2} \right)^2 dt^2 + \frac{4\ell^2}{(1-|\mathbf{x}|^2)^2} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}\tag{3.114}$$

*2 真っ直ぐな弦に関する非線形摂動解析は付録 C を参照.

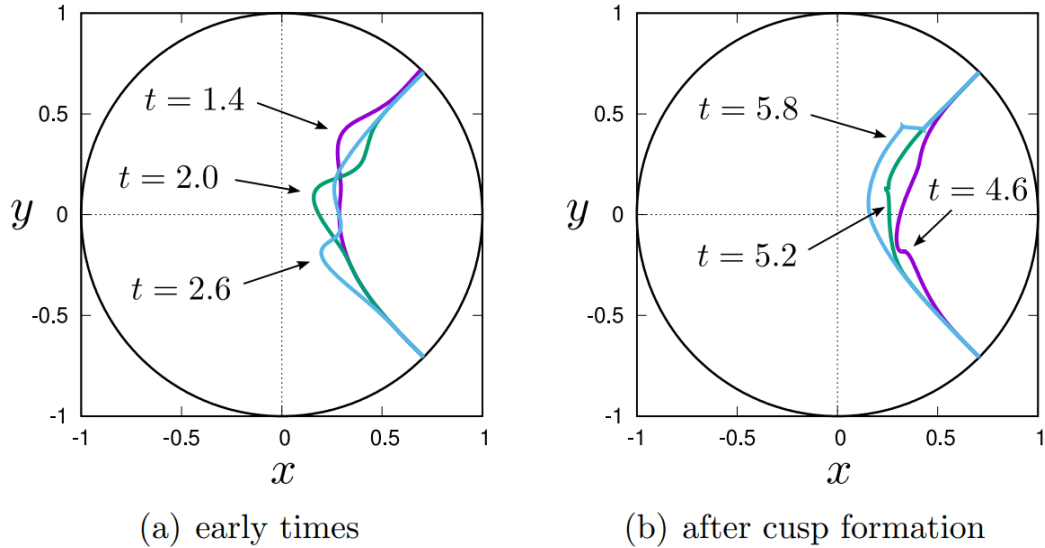


図 3.2: 弦の発展の様子. $\theta_b = \frac{\pi}{4}$, $\Delta t = 2$ で $\epsilon = 0.08$. 出典 [11]

である. ここで $\boldsymbol{x} = (x, y)$ であり, また $|\boldsymbol{x}| < 1$ である. [11] では (3.110), (3.111) で表わされる解を境界から揺らして摂動を加えた. その揺らし方は,

$$\alpha(t) = \begin{cases} \exp\left(2\left(\frac{\Delta t}{t-\Delta t} - \frac{\Delta t}{t} + 1\right)\right) & 0 < \tau < \Delta\tau \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (3.115)$$

として

$$\theta(t, 0) = \theta_b + \epsilon\alpha(t) \quad (3.116)$$

と与えられた. ここで θ_b は (3.110) で $\theta_b = \lim_{\phi \rightarrow 0} \theta$ としたものである. 摂動 (3.116) は C^∞ 関数であり, もう一つの端点では $\theta(\tau, \pi) = 0$ である. 図 3.2 に弦の運動の様子が示されている. 摂動を加えてから徐々に波が鋭くなり, カスプの対が生成されていることが分かる (図 3.2(b)).

これからエネルギーの流れをみるために, エネルギースペクトルを以下のように定義する. まず, 非摂動解 (3.110), (3.111) と (3.112) を $\varphi = \sigma/\pi$ として $(t, \bar{x}(\varphi), \bar{y}(\varphi))$ と表す. 次に, 非摂動解の単位法線ベクトル $(n_x, n_y) = (\bar{y}'/|\boldsymbol{x}'|, -\bar{x}'/|\boldsymbol{x}'|)$ (ここで $' \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi}$) を用いて以下のように表される弦:

$$x(t, \varphi) = \bar{x}(\varphi) + \xi(t, \varphi)n_x, \quad y(t, \varphi) = \bar{y}(\varphi) + \xi(t, \varphi)n_y \quad (3.117)$$

を考えると, 弦の運動方程式から ξ に関する偏微分方程式が得られる. 一般の弦の解は式 (3.117) で表せないが, 非摂動解から僅かにしか異なる弦は表されると考えられる. $\xi(t, \varphi)$ の方程式において, $|\xi(t, \varphi)| \ll 1$ とし, ξ の非線形項を無視すると ξ に関する線形摂動方程式が得られる. その空間演算子の固有関数を e_n とすると, $\{e_n\}_{n=1, \dots}$ は以下で定義される内積 (\cdot, \cdot)

$$(f, g) = \int_0^1 \frac{8z_0 F_0 d\varphi}{(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2} f(\varphi)g(\varphi) \quad (3.118)$$

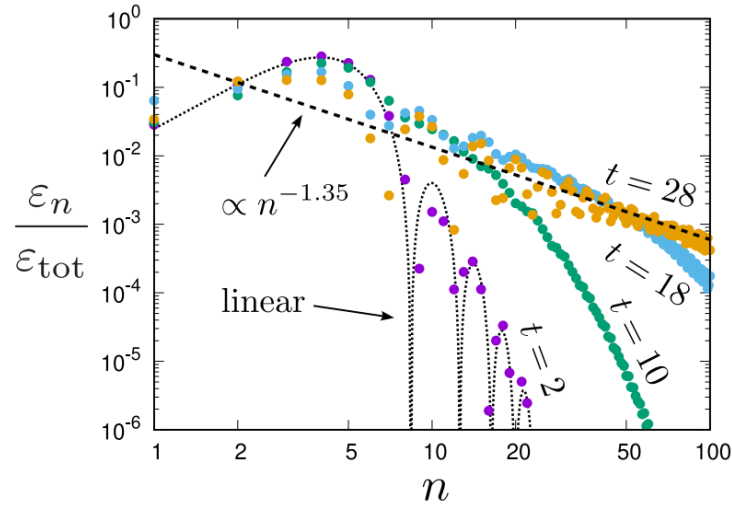


図 3.3: エネルギースペクトルの時間変化. $\theta_b = \pi/4$, $\epsilon = 0.01$ で $\Delta t = 2$. ϵ_{tot} は線形摂動理論での全エネルギー. 出典 [11].

で正規直交関数系 $((e_i, e_j) = \delta_{ij})$, であり, また, n が大きくなるにつれ, その固有関数の固有値は単調に増加する. ξ を $\{e_n\}_{n=1, \dots}$ によって

$$\xi(t, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e_n \quad (3.119)$$

と展開し, エネルギースペクトルを

$$\epsilon_n = (\dot{c}_n)^2 + w_n^2 c_n^2 \quad (3.120)$$

と定義する. この量は ξ が線形摂動方程式に従うとすると時間変化しないが, ξ が十分大きくなり ξ の運動方程式において非線形項が効いてくると時間変化するようになる.

図 3.3 は $\theta_b = \pi/4$, また摂動の振幅 ϵ を $\epsilon = 0.01$, 摂動をかけた時間 Δt を $\Delta t = 2$ としたときのエネルギースペクトルの時間変化を表している. これから分かるように時間が経つにつれ高波数モードが励起されべき的になることが分かる.

第 4 章

AdS₃ 時空上の有限の長さを持った弦の運動

この章では、本論文の目的である弦の乱流における境界条件の影響についての研究を著者の論文 [26] から紹介する。[26] では AdS₃ 時空上を運動する有限の長さを持った南部後藤開弦の運動を二つの異なる境界条件の下で、数値的に調査している。考えた境界条件は以下の 2 つである (図 4.1 参照):

(A) 全ての座標にノイマン境界条件を課した場合 (N, N, N):

$$t_{,\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = 0, \quad r_{,\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \theta_{,\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = 0, \quad (4.1)$$

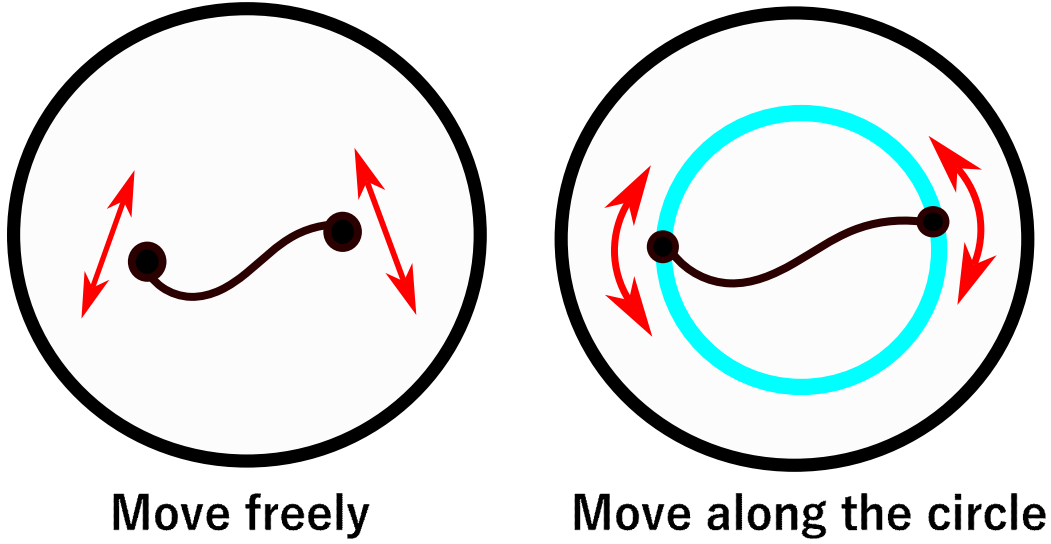
(B) 動径座標 r にディレクレ境界条件を課しそれ以外の座標 t, θ にノイマン境界条件を課した場合 (N, D, N):

$$t_{,\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = 0, \quad r(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = r_0, \quad \theta_{,\sigma}(\tau, \pm \frac{\pi}{2}) = 0. \quad (4.2)$$

第 3.4.5 項で見たように (A) の場合は可積分系である。一方 (B) は、文献 [11] で可積分性を明らかにすることができなかつた系である。乱流の発生が非可積分であることの十分条件ではないが、第 1 章で述べたように、可積分系では一般に乱流が見られないと期待できるため、逆に数値的に乱流が見られれば、その系は非可積分系であることが示唆される。数値計算の結果から系が非可積分系であることを示唆する過去の研究としては [17, 27–32] がある。

4.1 AdS₃ 時空上を運動する南部後藤弦の運動方程式

文献 [11] は座標系 (t, r, θ) (3.69) で解析が行われたが、この座標系は (3.69) から分かるように通常の極座標系と同様に $r = 0$ が座標特異点となっており、数値計算に適していない。そのために座標系 (3.114) で考える。ただし、ここでは x の代わりに $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ を使う。弦



(A): (N, N, N)

(B): (N, D, N)

図 4.1: それぞれの境界条件に対する弦の運動

の座標を (u, v) とすると誘導計量 h_{ab} は

$$\begin{aligned}
 h_{uu} &= - \left(\frac{1 + |\boldsymbol{\chi}|^2}{1 - |\boldsymbol{\chi}|^2} \right)^2 t_{,u}^2 + \frac{4}{(1 - |\boldsymbol{\chi}|^2)^2} |\boldsymbol{\chi}_{,u}|^2, \\
 h_{vv} &= - \left(\frac{1 + |\boldsymbol{\chi}|^2}{1 - |\boldsymbol{\chi}|^2} \right)^2 t_{,v}^2 + \frac{4}{(1 - |\boldsymbol{\chi}|^2)^2} |\boldsymbol{\chi}_{,v}|^2, \\
 h_{uv} &= - \left(\frac{1 + |\boldsymbol{\chi}|^2}{1 - |\boldsymbol{\chi}|^2} \right)^2 t_{,v} t_{,u} + \frac{4}{(1 - |\boldsymbol{\chi}|^2)^2} \boldsymbol{\chi}_{,u} \cdot \boldsymbol{\chi}_{,v}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

で与えられる. 座標 (u, v) をダブルヌル座標 (3.29) に取ると弦の南部後藤作用 (3.1) は

$$S = \mu \int dudv \left(- \left(\frac{1 + |\boldsymbol{\chi}|^2}{1 - |\boldsymbol{\chi}|^2} \right)^2 t_{,v} t_{,u} + \frac{4}{(1 - |\boldsymbol{\chi}|^2)^2} \boldsymbol{\chi}_{,u} \cdot \boldsymbol{\chi}_{,v} \right) \tag{4.4}$$

となり, 弦の運動方程式は

$$\begin{aligned}
 t_{,uv} &= \frac{-4}{(1 - |\boldsymbol{\chi}|^2)(1 + |\boldsymbol{\chi}|^2)} ((\boldsymbol{\chi}_u \cdot \boldsymbol{\chi}) t_{,v} + (\boldsymbol{\chi}_v \cdot \boldsymbol{\chi}) t_{,u}), \\
 \boldsymbol{\chi}_{,uv} &= - \frac{1}{(1 - |\boldsymbol{\chi}|^2)} (2(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}_{,u}) \boldsymbol{\chi}_{,v} \\
 &\quad - 2(\boldsymbol{\chi}_{,u} \cdot \boldsymbol{\chi}_v) \boldsymbol{\chi} + 2(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}_{,v}) \boldsymbol{\chi}_{,u} + (1 + |\boldsymbol{\chi}|^2) t_{,u} t_{,v} \boldsymbol{\chi})
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

と求められる. また, 拘束条件 (3.29) として

$$\begin{aligned}
 h_{uu} &= - \left(\frac{1 + |\boldsymbol{\chi}|^2}{1 - |\boldsymbol{\chi}|^2} \right)^2 t_{,u}^2 + \frac{4}{(1 - |\boldsymbol{\chi}|^2)^2} |\boldsymbol{\chi}_{,u}|^2 = 0, \\
 h_{vv} &= - \left(\frac{1 + |\boldsymbol{\chi}|^2}{1 - |\boldsymbol{\chi}|^2} \right)^2 t_{,v}^2 + \frac{4}{(1 - |\boldsymbol{\chi}|^2)^2} |\boldsymbol{\chi}_{,v}|^2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

が課されている. 拘束条件 (4.6) は u, v が未来方向を向いている, つまり, $t_u, t_v > 0$ のとき,

$$t_{,u} = \frac{2}{(1+|\chi|^2)}|\chi_{,u}|, \quad t_{,v} = \frac{2}{(1+|\chi|^2)}|\chi_{,v}| \quad (4.7)$$

と解ける. 弦の座標はダブルヌル座標 (3.29) という条件だけでは決まらない. u, v をそれぞれ変換する自由度が残っている: $u \rightarrow f(u), v \rightarrow f(v)$. この自由度を使って弦の境界を $u - v = \pm \frac{\pi}{2}$ とする.

実は (4.5) をそのまま解こうとすると数値的に不安定であることが [9] で報告されており, この不安定性をなくすためには運動方程式の $t_{,u}, t_{,v}$ を (4.7) を使って消去すればよい [9]. すると, 運動方程式 (4.5) は

$$\begin{aligned} t_{,uv} &= \frac{-8}{(1-|\chi|^2)(1+|\chi|^2)^2} ((\chi_u \cdot \chi)|\chi_{,v}| + (\chi_v \cdot \chi)|\chi_{,u}|), \\ \chi_{,uv} &= -\frac{2}{1-|\chi|^4} (2|\chi_{,u}||\chi_{,v}|\chi + \\ &\quad (1+|\chi|^2)((\chi \cdot \chi_{,u})\chi_{,v} + (\chi \cdot \chi_{,v})\chi_{,u} - (\chi_{,u} \cdot \chi_{,v})\chi)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

となり, これを用いて数値計算を行う. また, 同時に拘束条件 (4.6) も満たさなければならないが, 拘束条件は第 3.4 節で述べたように境界と初期面で満たされればその後の運動でも満たされる. このため, 拘束条件を満たすように初期条件を与えれば, 境界条件が拘束条件と整合的である限り, 数値精度の範囲で拘束条件が満たされることになる. 逆に, 拘束条件 (4.6) がどのくらい満たされているかを数値計算の精度チェックに用いることができる. 数値計算の具体的な実行の仕方は付録 D を参照.

4.2 エネルギーと角運動量

この節ではエネルギー E と角運動量 J を導入する. そのために弦の座標を

$$\tau = u + v, \quad \sigma = u - v \quad (4.9)$$

と (τ, σ) に取り替える. このとき, $-\infty < \tau < \infty$ で $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ である. 対称性を見やすくするために, AdS₃ 時空の座標を (t, r, θ) (3.69) に取ろう. すると, 弦の作用 (4.4) は

$$\begin{aligned} S &= \frac{\mu}{2} \int d\tau d\sigma \left(-\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 (t_{,\tau}t_{,\tau} - t_{,\sigma}t_{,\sigma}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{(1-r^2)^2} ((r_{,\tau}r_{,\tau} - r_{,\sigma}r_{,\sigma}) + r^2(\theta_{,\tau}\theta_{,\tau} - \theta_{,\sigma}\theta_{,\sigma})) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる. よって, t, θ の共役運動量 p_t, p_θ は

$$p_t = \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 t_{,\tau}, \quad p_\theta = \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2 \theta_{,\tau} \quad (4.11)$$

である. ここで μ は簡単化のため省略した. (4.10) には並進対称性 $t \rightarrow t + \text{定数}$, $\theta \rightarrow \theta + \text{定数}$ があり, これにより共役運動量 p_t, p_θ を積分した量, 即ちエネルギー E と角運動量 J

$$E = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma p_t, \quad J = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma p_\theta \quad (4.12)$$

の時間変化は

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left[\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 t_{,\sigma} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}, \quad (4.13)$$

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left[\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2 \theta_{,\sigma} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}, \quad (4.14)$$

となり, 境界での場の値にしかよらない. 本章で考える境界条件では $t_{,\sigma} = 0, \theta_{,\sigma} = 0$ なので E, J は保存する. また, p_t, p_θ を座標 (t, χ) で書くと

$$p_t = \left(\frac{1+|\chi|^2}{1-|\chi|^2}\right)^2 t_{,\tau}, \quad p_\theta = \chi \times p_\chi \quad (4.15)$$

となり, ここで p_χ は χ の共役運動量で

$$p_\chi \equiv \frac{\chi_{,\tau}}{(1-|\chi|^2)^2} \quad (4.16)$$

である.

4.3 Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) 弦

この節では弦の初期条件を与えるときに使う Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) 弦を紹介する [12]. GKP 解は元々は閉弦の解 ($-\pi \leq \sigma \leq \pi$) として与えられ, 座標系 (t, χ) では

$$t^{\text{GKP}}(\tau, \sigma) = \kappa\tau, \quad (4.17)$$

$$\chi_1^{\text{GKP}}(\tau, \sigma) + i\chi_2^{\text{GKP}}(\tau, \sigma) = \frac{\sqrt{1-k^2} - \text{dn}(\omega(k)\sigma + \mathbf{K}(k)|k^2)}{k \text{cn}(\omega(k)\sigma + \mathbf{K}(k)|k^2)} e^{i\omega(k)\tau}$$

と表せる. ここで $\text{dn}(x), \text{cn}(x)$ はヤコビの楕円関数で $K(k)$ は第一種完全楕円積分である. また $\omega(k)$ と κ は

$$\omega = \frac{2K(k)}{\pi}, \quad \kappa = \omega k \quad (4.18)$$

である. $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ に限ると開弦の解としても考えることができ, 原点を回転する剛体棒のような運動をする (図 4.2 参照). それは (4.17) から分かるように (χ_1, χ_2) 平面において弦の角度が σ によらないからである.

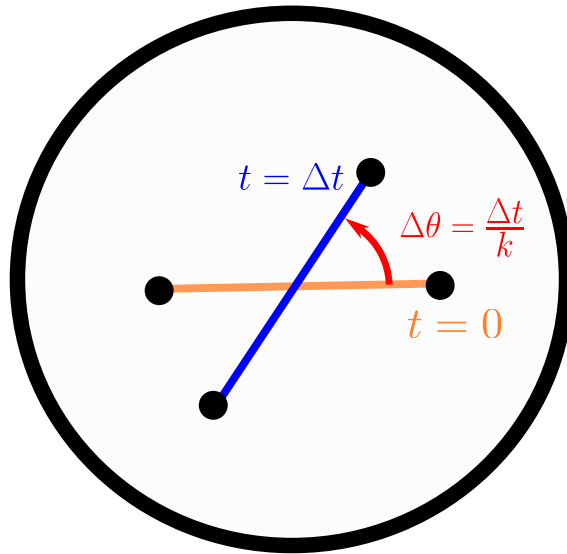


図 4.2: GKP 弦: 黒い円は AdS 境界.

4.4 初期条件

本研究では GKP 解に摂動を加え、二つの境界条件 (N, N, N), (N, D, N) による運動の違いをみる. GKP 解は (N, N, N) と (N, D, N) 両方の境界条件を満たす解であり、摂動も二つの境界条件をいずれも満たすものを考える. 具体的には初期条件を

$$t(0, \sigma) = 0, \quad \chi(0, \sigma) = \chi_{\text{GKP}}(0, \sigma), \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial \tau} = \frac{\partial \chi_{2\text{GKP}}}{\partial \tau} + \epsilon \exp(-\tan^2 \sigma) \quad (4.20)$$

と与える. ここで ϵ は微小なパラメータである. 残りの初期条件 $\partial_\tau t(0, \sigma)$, $\partial_\tau \chi_1(0, \sigma)$ は拘束条件 (4.7) を満たすように求める (D.2.3 参照). また, この初期条件から $r_0 = \chi_1(0, \frac{\pi}{2})$ である. 以下 $k = 0.5$ とする.

4.5 運動

まずは弦の運動を概観しよう. ここでは $\epsilon = 0.1$ とする. 図 4.3 に各時刻の弦の様子を示している. まず (N, N, N) を見ると, 弦はその形をあまり変えることなく運動している. 一方, (N, D, N) の場合, $0.0 \leq t \leq 4.0$ (図 4.3b) では初期の形状とあまり変わらないが, $11.0 \leq t \leq 13.4$ (図 4.3c) では収縮と膨張を繰り返す, $105.0 \leq t \leq 109.0$ (図 4.3d) ではクシャクシャになって不規則に運動する. このように弦の運動は (A) と (B) で大きな違いが見られる. そして (N, D, N) の不規則な運動はこの系が非可積分系であると期待させるものである.

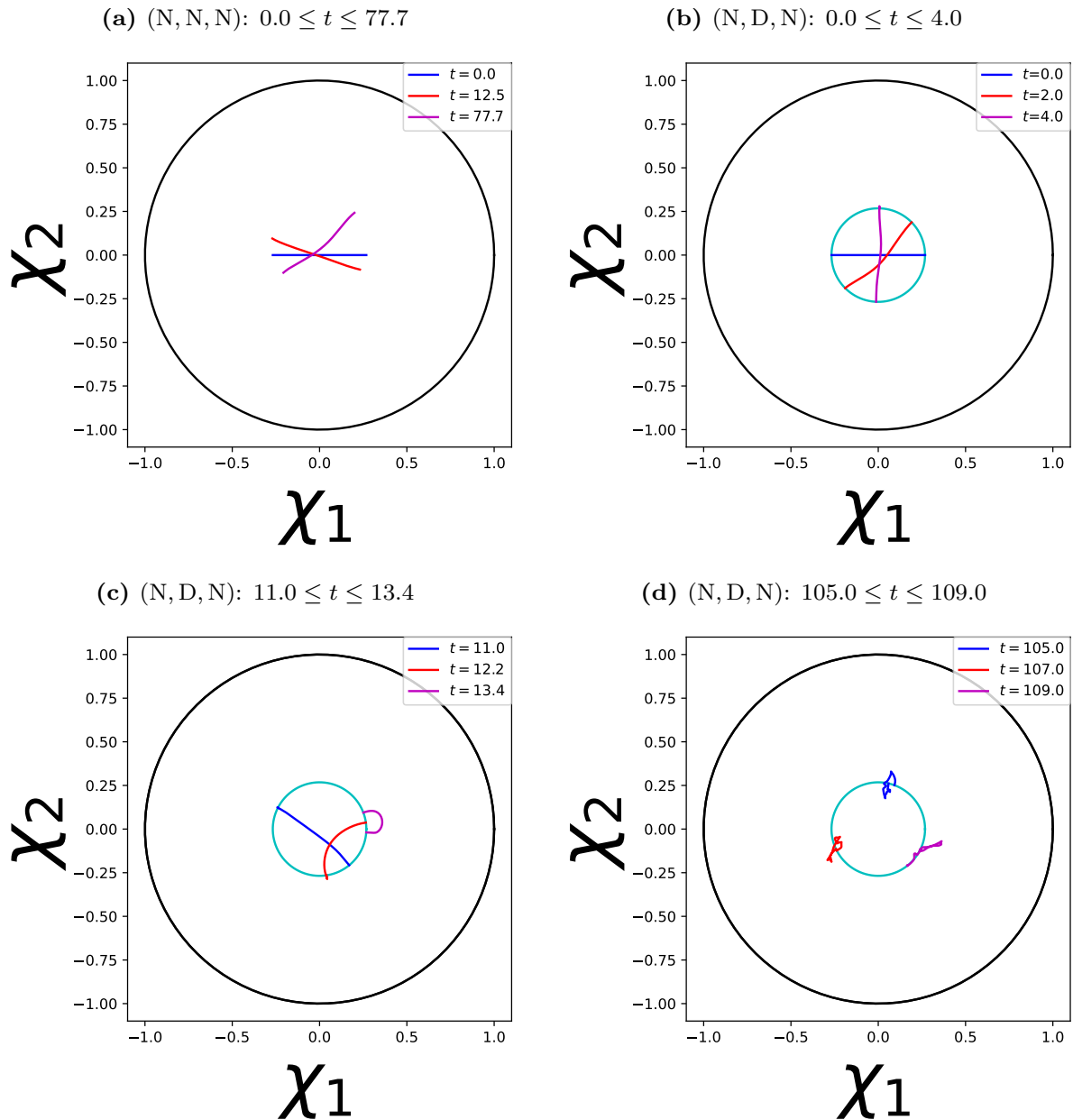


図 4.3: 弦の運動の様子: 実線は摂動を加えた時の解で破線は GKP 解を表している. また黒の円は AdS 境界である.

4.6 初期値鋭敏性

第 4.5 節において (N, D, N) では不規則な運動が見られた. これから, この系になんらかのカオス的な性質が期待できるだろう. そこで, 端点の運動に対して, 初期値鋭敏性を調べてみよう. 初期値鋭敏性とは初期条件の僅かな違いが時間とともに指数的に増加するという性質である. この初期値鋭敏性はリアプノフ指数 λ によって特徴づけられる. リアプノフ指数を定義するために簡単のため, 1 次元系の力学量 $X(t)$ を考えよう. $X(t)$ は常微分方程式

$\dot{X}(t) = f(t, X)$ に従っているとす。この微分方程式は初期条件を一つ与えれば解が決まる。そこで初期条件が ϵ で特徴づけられているとしその解を $X = X(t, \epsilon)$ と書こう。このとき、 $\delta X(t, \epsilon) \equiv |X(t, \epsilon) - X(t, 0)|$ とするとリアプノフ指数は

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \frac{\delta X(t, \epsilon)}{\delta X(0, \epsilon)} \quad (4.21)$$

と定義される ([33] の 4.4 節)。 τ が十分大きいところで $\delta X \propto e^{\lambda \tau}$ となるので $\lambda > 0$ のとき、軌道の差は指数関数的に増加して全く違う軌道になるため、この系には初期値鋭敏性があるという。一方、 $\lambda \leq 0$ のとき、初期値鋭敏性があるとは言わない。特に $\lambda < 0$ の場合、軌道 $X(t, 0)$ は安定である。

さて、初期値鋭敏性の有無を弦の端点 $\theta = \theta(\tau, -\frac{\pi}{2})$ の ϵ 依存性でみる。尚、ここでの解析は世界面の時間 τ で行なう。これまで θ の範囲は $\theta \in [-\pi, \pi)$ であったが、ここでは範囲を拡張して $\theta \in (-\infty, \infty)$ とする。拡張の仕方は n 回反時計回りに回ったら $\theta = \pi + 2n\pi$ 、反時計回りに回ったら $\theta = \pi - 2n\pi$ とする。

$\delta\theta_{-\pi/2}$ を

$$\delta\theta_{-\pi/2}(\tau, \delta\epsilon) = \left| \theta\left(\tau, -\frac{\pi}{2}\right) \Big|_{\epsilon=0.1+\delta\epsilon} - \theta\left(\tau, -\frac{\pi}{2}\right) \Big|_{\epsilon=0.1} \right| \quad (4.22)$$

とするとリアプノフ指数 (4.21) は

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{\delta\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \log \frac{|\delta\theta_{-\pi/2}(\tau, \delta\epsilon)|}{|\delta\theta_{-\pi/2}(0, \delta\epsilon)|} \quad (4.23)$$

となる。

リアプノフ指数 (4.23) を求めるとき、 τ が大きいところの振る舞いがより効いてくる。よって、本研究では $150 \leq \tau \leq 300$ のデータを使ってリアプノフ指数を求める。図 4.4, 図 4.5 は $\delta\theta_{-\pi/2}$ の時間発展をそれぞれ linear-log, log-log プロットで表している。 $\delta\theta_{-\pi/2} = \alpha + \lambda\tau$ とフィッティングすると $\lambda \sim 0.02$ と求めた (フィッティング曲線は図 4.4 において赤線で描かれている)。これは正なので初期値鋭敏性があることを示唆しているが、図 4.5 から分かるようにこの範囲では $\theta_{-\pi/2}$ の振る舞いはべき関数を用いても同様にフィットできる。実際、べき関数を用いて、 $\delta\theta_{-\pi/2} = \alpha + \beta \log \tau$ とフィッティングすると $\beta \sim 4.8$ と求まる (フィッティング曲線は図 4.5 において赤線)。どちらのフィッティングが優位であるかの定量的な判断をするには至っておらず、本研究においてべき的な振る舞いをするか、指数的な振る舞いをするかを定めることはできなかった。

4.7 乱流

次に異なる空間スケール間のエネルギーの流れを見る。乱流が生じているとき、大きいスケールから短いスケールへとエネルギーがカスケード的に流れる。その結果、十分発時間がたった後ではエネルギースペクトルの中間領域にべき則がしばしば見られる。通常の乱流で

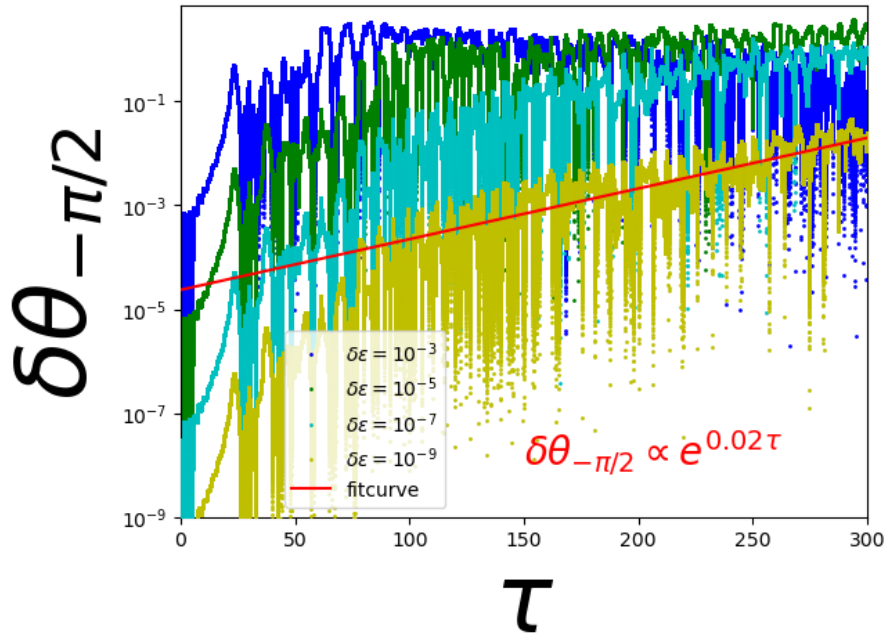


図 4.4: (N, D, N) において linear-log プロットでの $\delta\theta_{-\pi/2}$ の時間発展. $\delta\epsilon = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}, 10^{-9}$ である. また, フィッティングは $150 \leq \tau \leq 300$ で行った.

は散逸の効果によってあるスケールでパワーがなくなり, AdS 時空でのエネルギーカスケードにおいてもブラックホール形成が起こればそれによってエネルギーカスケードは終息する. 一方, 今考えているような散逸のない系ではエネルギーカスケードがどのスケールでも起きて, 時間が経つにつれ任意の高波数モードを励起されると考えられる [4]. この節では保存量であったエネルギーと角運動量に注目してエネルギーカスケードの様子を調べる. エネルギーと角運動量は弦の時間座標 τ で保存していたので, ここでは時間座標を τ として考え, $\epsilon = 0.1$ とする.

4.7.1 エネルギー

エネルギー E は p_t の積分として表されている. この p_t を使って各モードのエネルギーを定義したいが, $\sqrt{p_t}$ を単にフーリエ級数展開してその係数で各モードのエネルギーを定義するべきでない. その理由は, 開弦の場合 $\sqrt{p_t}$ が一般に周期的でなく, 端点における周期性の破れが原因となり. そのフーリエ係数が一般にべき的となるからである. もちろんこれは我々が見たい小さいスケールへのエネルギーの流れによって生じたものではない. これを避けるために, p_t の積分において以下のような座標変換をする:

$$\sigma = \frac{\pi}{2} \tanh(\tan \sigma'). \quad (4.24)$$

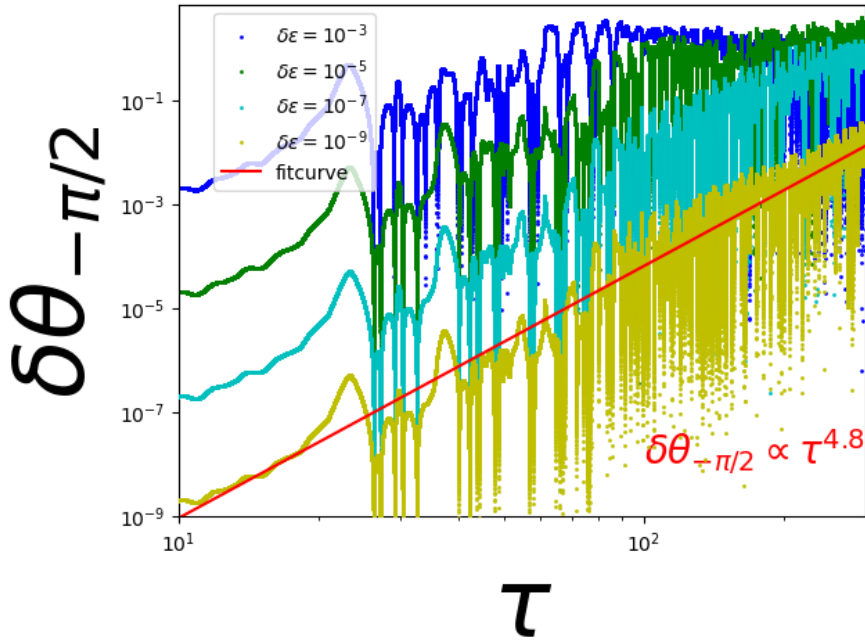


図 4.5: (N, D, N) において log-log プロットでの $\delta\theta_{-\pi/2}$ の時間発展. $\delta\epsilon = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}, 10^{-9}$ である. また, フィッティングは $150 \leq \tau \leq 300$ で行った.

このとき, E^{*1} の表式は

$$E = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma' \frac{p_t(\sigma(\sigma'))}{\cosh^2(\tan \sigma') \cos^2 \sigma'} \equiv \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma' p'_t(\sigma') \quad (4.25)$$

となり, $p'_t(\sigma')$ は

$$p'_t(\sigma') \equiv \frac{p_t(\sigma(\sigma'))}{\cosh^2(\tan(\sigma')) \cos^2(\sigma')} \quad (4.26)$$

である. このように定義した p'_t は境界で任意の回数 $l (\in \mathbb{N})$ の微分 $\frac{d^l p'_t(\sigma')}{d\sigma'^l}$ が 0 となる. つまり境界では周期的となり, 我々が見たい現象の解析に適している.

$\sqrt{p'_t}$ をフーリエ変換して

$$\begin{aligned} \sqrt{p'_t} &= \frac{C_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{2in\sigma'} + C_{-n} e^{-2in\sigma}) \\ &= \frac{C_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{2in\sigma'} + C_n^* e^{-2in\sigma}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

各モードのエネルギー E_n を

$$E_n = |C_n|^2 \quad (4.28)$$

と定義する. このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n = E \quad (4.29)$$

*1 E, J の数値的な保存の確かめは付録 D.4 参照.

が成立する [29]. さて, 今から (N, N, N), (N, D, N) のエネルギースペクトルについて見ていく. まず, (N, N, N) のエネルギースペクトルは $e_n = E_n/E$ として図 4.6a のようになった. この場合, エネルギースペクトルにほとんど変化がなくこれは無限個の保存量が存在することと整合的である.

次に, (N, D, N) のエネルギースペクトルを見ていく. (N, D, N) では後の時刻で急な変動が起こるようになる. そのためにエネルギースペクトルの時間平均 \bar{e}_j :

$$\bar{e}_j(\tau_0) = \frac{1}{2\Delta\tau} \int_{\tau_0-\Delta\tau}^{\tau_0+\Delta\tau} d\tau \frac{E_n(\tau)}{E} \quad (4.30)$$

をとる. このとき, エネルギースペクトルは図 4.6b のようになった. ここで $\Delta\tau = 4\pi$ としている. まず, $\tau_0 = 30.0$ では (N, N, N) と違いが明確にわからないほど似ているが, τ が増加するにつれ高波数モードが励起されている. そして $\tau = 285.0$ では $1 \leq n+1 \leq 40$ でべき則が見えている. このべき α を $\log(E_n/E) = -\alpha \log(n+1) + \beta$ と $1 \leq n+1 \leq 40$ でフィッティングして求めると $\alpha = 1.8 \pm 0.1$ と求まる. このように (N, D, N) では任意の高波数モードが時間が経つにつれ励起されているように見える. 一方 (N, N, N) では範囲 $0 \leq \tau \leq 300$ ではこのような振る舞いは見られなかった.

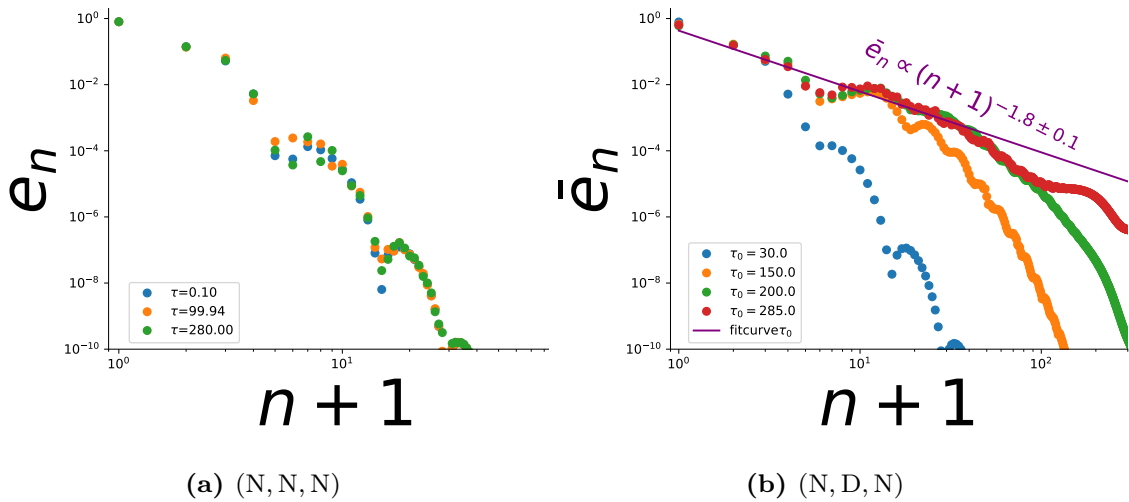


図 4.6: (N, N, N)(左 (a)) と (N, D, N) (右 (b)) のエネルギースペクトラム: (b) において, 紫色の直線は $\tau_0 = 285.0$ のデータを範囲 $1 \leq n+1 \leq 40$ でフィッティングした曲線.

4.7.2 角運動量

モードの角運動量 J_n を定義するために, エネルギーと同様に, 座標変換 (4.24) をする. このとき, J は

$$J = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sigma' \frac{\chi(\sigma(\sigma')) \times p_\chi(\sigma(\sigma'))}{\cosh^2(\tan(\sigma')) \cos^2(\sigma')} \quad (4.31)$$

となる. $\chi(\sigma(\sigma'))/(\cosh(\tan \sigma') \cos \sigma')$, $p_\chi(\sigma(\sigma'))/(\cosh(\tan \sigma') \cos \sigma')$ をフーリエ変換, 即ち

$$\frac{\chi}{\cosh(\tan \sigma') \cos(\sigma')} = \frac{\chi_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_n e^{2n\sigma'} + \chi_n^* e^{-2n\sigma'}), \quad (4.32)$$

$$\frac{p_\chi}{\cosh(\tan \sigma') \cos(\sigma')} = \frac{p_{\chi_0}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (p_{\chi_n} e^{2n\sigma'} + p_{\chi_n}^* e^{-2n\sigma'}) \quad (4.33)$$

を用いて各モードの角運動量 J_n を

$$J_0 = \chi_0 \times p_{\chi_0}, \quad J_n = \frac{1}{2} (\chi_n \times p_{\chi_n}^* + \chi_n^* \times p_{\chi_n}) = \text{Re} (\chi_n \times p_{\chi_n}^*) \quad (4.34)$$

と定義する. このとき,

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} J_n \quad (4.35)$$

が成り立つ [29]. 角運動量スペクトルを (図 4.7) に示す. ここで $j_n = |J_n/J|$ であり, また (N, D, N) での \bar{j}_n はエネルギースペクトルの時と同様に, j_n の時間平均:

$$\bar{j}_n = \frac{1}{2\Delta\tau} \int_{\tau_0 - \Delta\tau}^{\tau_0 + \Delta\tau} d\tau \left| \frac{J_n(\tau)}{J} \right| \quad (4.36)$$

である (エネルギースペクトルのときと同様に $\Delta\tau = 4\pi$ としている). 角運動量スペクトルは (N, N, N), (N, D, N) の両方とも, エネルギースペクトルと同様の振る舞いをしている. 即ち, (N, N, N) では角運動量スペクトルは時間発展とともにあまり変わらない. 一方, (N, D, N) は大きい n のモードが立ち, $\tau = 285.0$ で $1 \leq n+1 \leq 100$ でべき則が見えている. このべき α は $\log(|J_n/J|) = -\alpha \log(n+1) + \beta$ と $1 \leq n+1 \leq 100$ でフィッティングして求めると $\alpha = 2.1 \pm 0.1$ と求まる.

また, 角運動量に特有なこととして, τ が大きくなるにつれ, \bar{j}_1 が減少して \bar{j}_0 が増加していることが確認できる. これは自転による角運動量 J_1 が減少し, 軌道角運動量 J_0 が増加したと解釈でき, 第 4.5 節で, τ が大きくなるにつれて (例えば, $\tau \geq 105.0$) 原点を中心として公転をするようになったことに対応していると考えられる. つまり, これは自転の角運動量の一部が軌道角運動量に変換されたことを意味する.

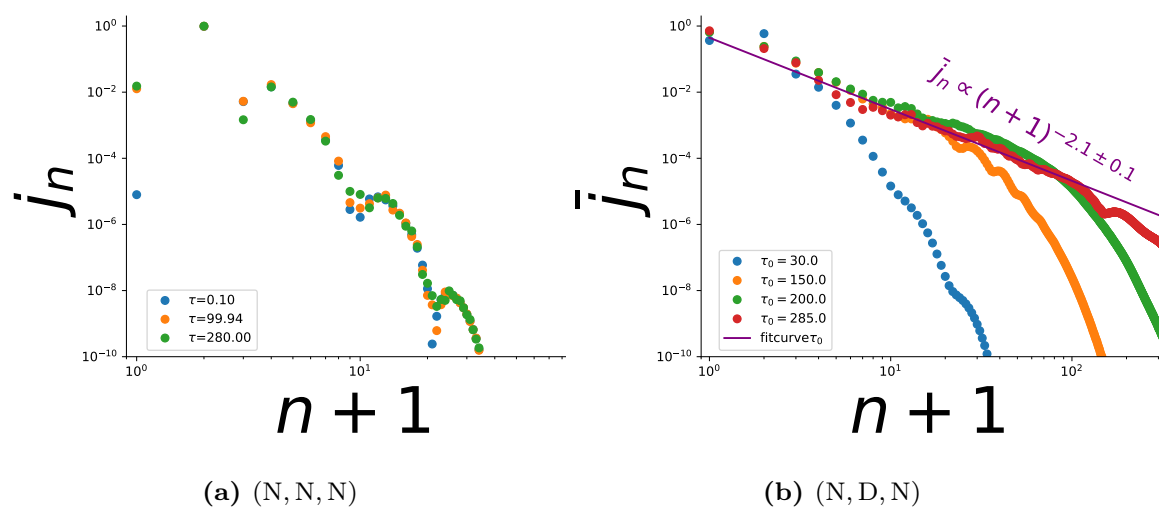


図 4.7: (N, N, N)(左) と (N, D, N)(右) の角運動量スペクトル: (b) において, (右 (b)) のエネルギースペクトラム: (b) において, 紫色の直線は $\tau_0 = 285.0$ のデータを範囲 $1 \leq n+1 \leq 100$ でフィッティングした曲線.

第 5 章

結論

本論文では AdS 時空上の乱流現象がどれくらい普遍的な現象なのかという問いに対する一つのアプローチとして、AdS 時空上の南部後藤弦の運動においてどのような状況で乱流的現象が見られるかを数値シミュレーションを用いて調べた。より具体的には AdS₃ 時空上を運動する有限の長さを持った南部後藤開弦の運動を数値的に研究した。開弦の運動は端点での境界条件が必要となる。本論文では端点が完全に自由端となっている場合と、動径方向にのみ固定され、角度方向には自由に動くことのできる境界条件の二つの場合について弦の運動を調べ、比較を行った。前者の場合は先行研究から無限個の保存量の存在が知られており、可積分系であることから予想されるように、弦の形状に大きな変化が生じることはなく、エネルギーと角運動量のスペクトルにも時間変化がほぼ見られなかった。一方、後者の場合は、数値シミュレーションの結果、不規則な運動が見られ、エネルギーと角運動量のスペクトルにおいて、高波数モードの励起を確認した。これは乱流に見られるエネルギーカスケードと類似の現象であり、AdS 時空中の南部後藤開弦の運動においても乱流的現象が発現することを示している。また、これらの結果は、先行研究において動径方向の運動のみ制限された境界条件に対しては、無限個の保存量の存在を確認できなかったことも整合的であり、この系が非可積分であることを示唆している。

これらの結果は AdS 時空上を運動する弦の乱流現象がその境界条件に依存することを意味する。AdS 不安定性においてはその AdS 境界が共形時間的境界であり、波が反射されて戻ってくるのが重要な要素の一つであったが、詳細な境界条件の違いが乱流的現象を伴う AdS 不安定性の発現にどのように影響するかは調べられていない。本論文の結果は境界条件の詳細が乱流的現象の発現に影響する可能性を示唆しており、今後の詳しい解析が期待される。

もう一つ、本研究結果から得られる示唆は、AdS 時空中における乱流的現象の発現において、重力相互作用は必ずしも必要でなく、それに代わる非線形相互作用が存在すれば、同様の乱流的現象が期待できるという点である。ただし、本研究においても背景が AdS 時空であることは重要な要素となっており、ミンコフスキー時空中での弦の運動では乱流的現象はみられない。

付録 C では、AdS 時空上の南部後藤開弦の運動を非線形摂動まで解析することで、無質量

スカラー場を用いた AdS 時空の不安定性と類似する結果を得ることができた。即ち、エネルギーカスケードが起きることや永年項の現れ方が AdS 時空と類似するという結果を得た。無限に伸びた弦の運動は、AdS/CFT 対応の観点から、AdS 境界における粒子の運動と対応がつくと考えられ、実用上より重要性が高い。今後、付録 C と同様に無限に長い弦の場合について、乱流的現象の有無を数値的に調べることは重要な研究対象となるだろう。

謝辞

柳 哲文講師, D1 の冬から突然だったのにも関わらず, 指導して頂きありがとうございました. 柳講師のおかげで博士課程を有意義なものにすることができました. 辻村潤氏, 柳講師を紹介していただきありがとうございました. 南部 保貞 准教授, M2 と D1 の時にお世話になりました. 浅見拓紀氏, D2 のときに一緒に共同研究をして頂きありがとうございました. 立教大学の石井 貴明 助教, 日本大学の村田 佳樹 准教授, 一緒に共同研究をしてくださりありがとうございました. また, QG 研の研究室の皆様にはお世話になりました. 感謝申し上げます. 最後に, 私の家族の支えなくしてはここまでこれませんでした. 感謝申し上げます.

本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2125 の財政支援を受けたものです. この場を借りて「東海国立大学機構融合フロンティア次世代研究事業」に御礼申し上げます.

付録 A

弦の運動方程式の導出

ここでは弦の運動方程式 (3.3) を導出する. その後に弦の運動方程式は外曲率が 0 であることと等価であることを見る. ここでの計算テクニックは [13] の第 3.4 節に基づく. また, 弦の運動方程式の導出において課される境界条件について, [34] の第 6.5 節に基づいて紹介する. まず, 弦の作用 (3.1) の x^α に関する変分を取ると

$$\delta S = -\mu \int d\sigma^2 \delta\sqrt{-h} \quad (\text{A.1})$$

となる. ここで $\delta\sqrt{-h} = \frac{-\delta h}{2\sqrt{-h}}$ がでてくるがこれは以下のように計算される ([13] の第 1.8 節): \mathbf{M} を $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$) の任意の正方行列とし, この行列に摂動を加えた行列 \mathbf{M}' を $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \delta\mathbf{M}$ と表す. ここで $\delta\mathbf{M}$ の任意の成分 δM_{ij} , $i, j = 0, \dots, n-1$ は $|\delta M_{ij}| \ll 1$ である. 以下 $\delta\mathbf{M}$ の 1 次までを考える. また行列式を $|\mathbf{M}|$ のように表す.

$$|(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})\mathbf{M}^{-1}| = |1 + \delta\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}| = 1 + \text{tr}(\delta\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}) = 1 + (\delta M)_{ij}(\mathbf{M}^{-1})_{ji}, \quad (\text{A.2})$$

一方, M' を $M' = |(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})| - |\mathbf{M}|$ とすると

$$|(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})\mathbf{M}^{-1}| = \frac{|(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})|}{|\mathbf{M}|} = \frac{|\mathbf{M}| + M'}{|\mathbf{M}|} = 1 + \frac{M'}{|\mathbf{M}|} \quad (\text{A.3})$$

となる. よって (A.2) と (A.3) を比べれば

$$M' = |\mathbf{M}|(\mathbf{M})_{ij}(\mathbf{M}^{-1})_{ji} \quad (\text{A.4})$$

が導ける. この式を使って $(M)_{ab} = h_{ab}$ とすると $\delta h = M'$ は

$$\delta h = h\delta h_{ab}h^{ba} \quad (\text{A.5})$$

となる. よって作用の変分 (A.1) は

$$\delta S = -\frac{\mu}{2} \int d\sigma^2 \sqrt{-h} \delta h_{ab} h^{ba} \quad (\text{A.6})$$

であるが, (3.2) を使って δx^α が見える形で書くと

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{\mu}{2} \int d\sigma^2 \sqrt{-h} h^{ab} \left(g_{\alpha\beta,\gamma} \delta x^\gamma x_{,a}^\alpha x_{,b}^\beta + 2g_{\alpha\beta} x_{,a}^\alpha \delta x_{,b}^\beta \right) \\ &= -\frac{\mu}{2} \int d\sigma^2 \left((g_{\alpha\beta} x_{,a}^\alpha h^{ab} \delta x^\beta \sqrt{-h})_{,b} \right. \\ &\quad \left. - \delta x^\beta (g_{\alpha\beta} x_{,a}^\alpha h^{ab} \sqrt{-h})_{,b} - \frac{\sqrt{-h}}{2} h^{ab} g_{\alpha\gamma,\beta} x_{,a}^\alpha x_{,b}^\gamma \right)\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

と表される. ここで全微分項は後で考えることにして, 3行目のみを考える. 3行目の第1項の微分を展開し, 時空のクリストッフエル記号 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ と世界面のクリストッフエル記号 Γ_{bc}^a を使えば

$$\delta S = \frac{\mu}{2} \int d\sigma^2 \sqrt{-h} \delta x^\beta \left(g_{\alpha\beta} x_{,ab}^\alpha h^{ab} + g_{\beta\beta'} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta'} x_{,a}^\alpha x_{,b}^\gamma h^{ab} - g_{\alpha\beta} x_{,c}^\alpha h^{ab} \Gamma_{ab}^c \right) \quad (\text{A.8})$$

よって

$$g_{\alpha\beta} x_{,ab}^\alpha h^{ab} + g_{\beta\beta'} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta'} x_{,a}^\alpha x_{,b}^\gamma h^{ab} - g_{\alpha\beta} x_{,c}^\alpha h^{ab} \Gamma_{ab}^c = 0. \quad (\text{A.9})$$

β を上に上げ β と α を入れ替えると

$$x_{,ab}^\alpha h^{ab} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha x_{,a}^\beta x_{,b}^\gamma h^{ab} - x_{,c}^\alpha h^{ab} \Gamma_{ab}^c = 0 \quad (\text{A.10})$$

となり, 共変微分の定義を使うと (3.3) が得られる.

さて, 次に (3.3) は外曲率 $K_{(i)a}^a$ が 0 であることと同値であることを見ていく. $d+1$ 次元のターゲット時空において, 世界面の法線ベクトルは $d+1-2=d-1$ 個ある. また, 世界面が時間的な曲面なので, それらは空間的なベクトルである. それらを正規直交化したものを $n_{(i)}^\alpha$, $i=1, \dots, d-1$ と記す. このとき, $n_{(i)}^\alpha n_{(j)\alpha} = \delta_{ij}$ である. この法線ベクトルと世界面の接ベクトル $x_{,a}^\alpha$ を使ってクロネッカーデルタ δ_β^α は

$$\delta_\beta^\alpha = n_{(i)}^\alpha n_{\beta(i)} + h^{ab} x_{,a}^\alpha x_{\beta,b} \quad (\text{A.11})$$

と書くことができる. これは時空の任意の点のベクトル A^α が $n_{(i)}^\alpha$ と $x_{,a}^\alpha$ で展開できて δ_β^α への作用と (A.11) の右辺への作用が等しいことから証明できる. さて (A.11) を使って (3.3) を

$$\delta_\beta^\alpha (x_{a;\gamma}^\beta h^{ab} x_{,b}^\gamma - \Gamma_{ab}^c x_{,c}^\beta h^{ab}) = (n_{(i)}^\alpha n_{\beta(i)} + h^{ed} x_{,e}^\alpha x_{\beta,d}) (x_{a;\gamma}^\beta h^{ab} x_{,b}^\gamma - \Gamma_{ab}^c x_{,c}^\beta h^{ab}) \quad (\text{A.12})$$

と書き換える. ここで

$$\Gamma_{abc} = x_{\gamma,a}^\gamma x_{,b;\beta}^\beta x_{,c}^\beta \quad (\text{A.13})$$

が成り立つことに注意する. これは $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ が下の添え字に対称であることから

$$\Gamma_{abc} = \Gamma_{acb} \quad (\text{A.14})$$

であり,

$$\Gamma_{abc} = x_{\gamma,a}^\gamma x_{,b;\beta}^\beta x_{,c}^\beta = h_{ab,c} - \Gamma_{bac} \quad (\text{A.15})$$

を使うと Γ_{abc} は h_{ab} を使った通常の形に書けることが示せるからである. すると,

$$\begin{aligned} & h^{ed} x_{,e}^\alpha x_{\beta,d} (x_{a;\gamma}^\beta h^{ab} x_{,b}^\gamma - \Gamma_{ab,c}^c x_{,c}^\beta h^{ab}) \\ &= h^{ed} \Gamma_{dab} x_{,e}^\alpha h^{ab} - h^{ed} x_{,e}^\alpha \Gamma_{dab} h^{ab} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

が成り立つ. ここで (A.15) を使った. よって, 式 (A.12) は $n_{(i)}^\alpha x_{\alpha,a} = 0$ を使って,

$$n_{(i)}^\alpha h^{ab} x_{,b}^\gamma n_{\beta(i)} x_{a;\gamma}^\beta = -n_{(i)}^\alpha h^{ab} x_{,b}^\gamma n_{\beta(i);\gamma} x_a^\beta \equiv -n_{(i)}^\alpha K_{(i)} \quad (\text{A.17})$$

となる. ここで外曲率 $K_{ab(i)}$ は

$$K_{ab(i)} \equiv n_{(i);\beta}^\alpha x_{\alpha,a} x_{,b}^\beta \quad (\text{A.18})$$

と定義され $K_{(i)} \equiv K_{ab(i)} h^{ab}$ である. よって運動方程式は $n_{(i)}^\alpha$ が一次独立なので

$$K_{(i)} = 0 \quad (\text{A.19})$$

と同値である. さて, (A.7) の第 1 項目を考える. このときに弦の 1 つの座標を τ , もう 1 つを σ と書き, τ を世界面の時間座標とする. また, τ の範囲を $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$ とする. このとき, (A.7) の第 1 項目を書き直すと

$$\begin{aligned} & \int d\sigma^2 \left(g_{\alpha\beta} x_{,a}^\alpha h^{ab} \delta x^\beta \sqrt{-h} \right) \\ &= \int d\sigma g_{\alpha\beta} x_{,a}^\alpha h^{a\tau} \delta x^\beta \sqrt{-h} \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} \\ &+ \int d\tau g_{\alpha\beta} x_{,a}^\alpha h^{a\sigma} \delta x^\beta \sqrt{-h} \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

となる. (A.20) の第 2 行目は通常の変分を考えるときと同様に $\tau = \tau_i, \tau_f$ で $\delta x^\alpha = 0$ であるから 0 である. 次に, (A.20) の第 3 行目を考える. この項は閉弦の場合周期境界条件が課されているので 0 である. 問題となるときは開弦の場合である. 開弦の場合, 境界条件を端点で課さなければならない. そのときに (A.20) の 3 行目が消えるということが境界条件の与え方に制限を与えるのである. 時空の計量が対角的で, 世界面の誘導計量が共形平坦であるとき, この項は以下の境界条件を課したときに 0 となる. それはノイマン境界条件

$$x_{,\sigma}^\alpha = 0 \quad (\text{A.21})$$

とディレクレ境界条件

$$\delta x^\alpha = 0, \quad (\text{A.22})$$

である [34]. ノイマン境界条件 (A.21) では自由に端点が動ける. 一方, ディレクレ境界条件の場合 (A.22) では端点は自由に動けない. このとき, 端点が動ける領域を D-ブレンという.

付録 B

主カイラル模型の運動方程式の導出

ここでは本文に記した主カイラル模型の運動方程式の導出について述べる. 作用 (3.49) の変分は

$$\delta S = - \int d\sigma^2 \eta^{ab} \text{Tr}(\delta g^{-1} g, a J_b + g^{-1} \delta g, a J_b) \quad (\text{B.1})$$

となる. ここでトレースの性質 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ を使って

$$\eta^{ab} \text{Tr}(\delta J_a J_b) + \eta^{ab} \text{Tr}(J_a \delta J_b) = \eta^{ab} \text{Tr}(\delta J_a J_b) + \eta^{ab} \text{Tr}(\delta J_b J_a) = 2\eta^{ab} \text{Tr}(\delta J_a J_b) \quad (\text{B.2})$$

であることを用いた. また δg^{-1} は

$$\delta(g^{-1}g) = \delta g^{-1}g + \delta g^{-1}g = 0 \rightarrow \delta g^{-1} = -g^{-1}\delta g g^{-1} \quad (\text{B.3})$$

であるから作用の変分 (B.1) は

$$\delta S = - \int d\sigma^2 \eta^{ab} \text{Tr}(-\delta g J_a J_b g^{-1} + \delta g, a J_b g^{-1}) \quad (\text{B.4})$$

と表される. ここで第 2 項に関して部分積分:

$$\begin{aligned} \delta g, a J_b g^{-1} &= (\delta g J_b g^{-1}), a - \delta g (J_b g^{-1}), a \\ &= (\delta g J_b g^{-1}), a - \delta g J_b, a g^{-1} + \delta g J_b g^{-1} g, a g^{-1} \\ &= (\delta g J_b g^{-1}), a - \delta g J_b, a g^{-1} + \delta g J_b J_a g^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

をすると (B.4) は

$$\delta S = - \int d\sigma^2 \eta^{ab} \text{Tr}((\delta g J_b g^{-1}), a - g^{-1} \delta g J_b, a) \quad (\text{B.6})$$

となり, 全微分の項は積分すると消えるので作用の変分は

$$\delta S = \int \sigma^2 \eta^{ab} \text{Tr}(g^{-1} \delta g J_{a,b}) \quad (\text{B.7})$$

と求まる. $g^{-1} \delta g$, $\eta^{ab} J_{a,b}$ は生成子 (3.59) を用いて $g^{-1} \delta g = \epsilon_A T^A$, $J_{a,b} = J_{Aa,b} T^A$ と展開できる. これを (B.7) に代入すると

$$\delta S = \int \sigma^2 \eta^{ab} \epsilon_A J_{Ba,b} \text{Tr}(T^A T^B) = \int d\sigma^2 \eta^{ab} \epsilon_A J_{Ba,b} \gamma^{AB} = \int d\sigma^2 \eta^{ab} \epsilon^A J_{Aa,b} \quad (\text{B.8})$$

と表される. ここで (3.61) を使った. よって δg が任意のとき $\epsilon^A = \gamma^{AB} \epsilon_B$ も任意なので

$$\eta^{ab} J_{Aa,b} = 0 \tag{B.9}$$

が導ける.

付録 C

弦の非線形摂動

ここでは AdS 時空上を運動する, 端点が AdS 境界に固定された南部後開藤弦の非線形摂動解析による解析を行う. また, 第 3.5 節で使っていたターゲット時空の座標系とは違う座標系を使う. それは

$$g_{\mu\nu}(t, x, y) = \ell^2 \begin{pmatrix} -(1+x^2+y^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x^2}{1+x^2+y^2} & -\frac{xy}{1+x^2+y^2} \\ 0 & -\frac{xy}{1+x^2+y^2} & 1 - \frac{y^2}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

である. この座標系は (2.6) を ℓ でリスケールしたデカルト座標系に移す ($lt = t$, $lx = r \cos \phi$, $ly = r \sin \phi$) と得られる. この時空において弦の方程式の解として以下のものがある

$$\begin{aligned} t &= \tau, \\ x &= \tan \sigma, \\ y &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

尚, σ は $\sigma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ であり, $\sigma = \pm\frac{\pi}{2}$ のとき AdS 境界に達する. この解は空間の原点を通る静的で無限に伸びた真っすぐな弦である [35]. これを非摂動解として扱う. さて, この弦の両端端を止めながら垂直方向に微小に揺らすことを考える (図 C.1). この揺らし方は y 方向への摂動と考えられる. また, このときの y の境界条件は固定端境界条件 $y(\tau, \pm\pi/2) = 0$ である. y を微小パラメータ ϵ を用いて展開すると

$$y = \epsilon y_1(\tau, \sigma) + \frac{1}{2} \epsilon^2 y_2(\tau, \sigma) + \frac{1}{6} \epsilon^3 y_3(\tau, \sigma) + \dots \quad (\text{C.3})$$

となる. これを弦の方程式に代入して ϵ の各次数で摂動方程式は求めていく.

まず ϵ の 1 次から y_1 は

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} y_1 + L y_1 = 0, \quad L \equiv -\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{2}{\cos^2 \sigma} \quad (\text{C.4})$$

を満たす. この式は 2 次元 AdS 時空の質量を持ったスカラー場と同じ方程式である. *1 演算

*1 (著者は赤木聡氏にこのことに気づかせてくれたことを感謝したい.)

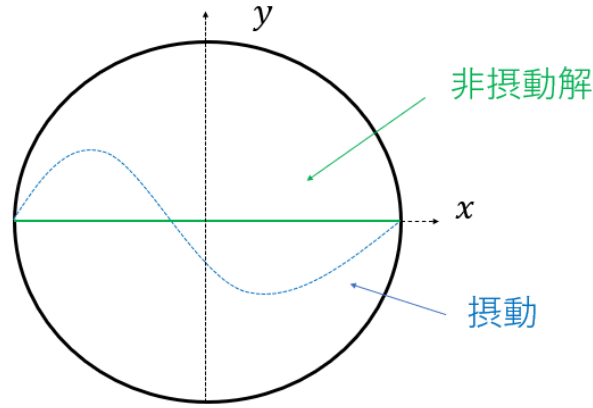


図 C.1: 非摂動解とそれに摂動加えた弦の様子.

子 L の固有関数 e_j :

$$Le_w = w^2 e_w \quad (\text{C.5})$$

を求めるために $e_w = \cos^2 \sigma g(\sigma)$, $z = \sin^2 \sigma$ とすると (C.5) は

$$z(1-z)g''(z) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)g'(z) - \alpha\beta g(z) = 0, \quad (\text{C.6})$$

$$\text{with } \gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha = -\frac{w-2}{2}, \quad \beta = \frac{w+2}{2}$$

という超幾何方程式になる. よってこれから (C.5) の解は

$$e_w = c_1 \sin \sigma \cos^2 \sigma {}_2F_1 \left(\frac{3-w}{2}, \frac{w+3}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 \sigma \right) + c_2 \cos^2 \sigma {}_2F_1 \left(\frac{2-w}{2}, \frac{w+2}{2}; \frac{1}{2}; \sin^2 \sigma \right) \quad (\text{C.7})$$

と求まる. ここで境界での振る舞い $\sigma \rightarrow \pm\pi/2$ を調べると

$$\left(c_1 \frac{\cos(\frac{\pi w}{2})}{w^2 - 1} + c_2 \frac{\sin(\frac{\pi w}{2})}{w} \right) \frac{1}{\sigma + \pi/2}, \quad (\text{C.8})$$

$$\left(c_1 \frac{\cos(\frac{\pi w}{2})}{w^2 - 1} - c_2 \frac{\sin(\frac{\pi w}{2})}{w} \right) \frac{1}{\sigma - \pi/2} \quad (\text{C.9})$$

となり, 固定端境界条件が満たされるためには前の係数が 0 になる必要がある. よって

$$c_1 \frac{\cos(\frac{\pi w}{2})}{w^2 - 1} = 0 \quad \text{and} \quad c_2 \frac{\sin(\frac{\pi w}{2})}{w} = 0 \quad (\text{C.10})$$

が満たされる必要があり, c_1, c_2 が 0 でないとき $w = 2m + 3$ もしくは $w = 2n$ である必要がある. ここで m は非負の整数, n は 1 以上の整数である. ゆえに式 (C.5) の境界条件を満たす固有関数は

$$e_w = \begin{cases} \frac{4\sqrt{(m+1)(m+2)}}{\sqrt{2\pi}} \sin \sigma \cos^2 \sigma {}_2F_1 \left(\frac{3-w}{2}, \frac{w+3}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 \sigma \right) & w = 2m + 3 \\ \frac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)\pi}} \cos^2(\sigma) {}_2F_1 \left(\frac{2-w}{2}, \frac{w+2}{2}; \frac{1}{2}; \sin^2 \sigma \right) & w = 2n \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

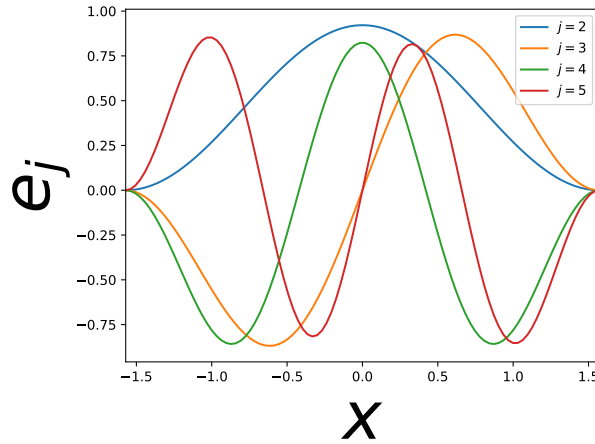


図 C.2: e_w の様子: 横軸が σ である. ここでは $w = 2, 3, 4, 5$ まで表している.

となる (図 C.2 参照). またこの e_w は

$$\cos^2(x) {}_2F_1(1-m, m+1; 1/2, \sin^2(x)) = \cos(2mx) + \frac{\tan(x) \sin(2mx)}{2m} \quad (\text{C.12})$$

$$\sin(x) \cos^2(x) {}_2F_1(-m, m+3; \frac{3}{2}, \sin^2(x)) = \frac{1}{4} \sec(x) \left(\frac{\sin(2(m+1)x)}{m+1} + \frac{\sin(2(m+2)x)}{m+2} \right) \quad (\text{C.13})$$

と表現することもできる. 内積を $(f, g) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx f(x)g(x)$ として定義すると $\{e_w\}_{w=2, \dots}$ は正規直交関数系をなす. これから y_1 は

$$y_1 = \sum_{m=2}^{\infty} A_m^1 \cos(m\tau + \theta_m) e_m \quad (\text{C.14})$$

と展開でき, 振動数が実なのでこの弦の線形摂動は安定である.

次に ϵ の 2 次について考える. この次数では y_2 についての式が導かれるが実は y_1 と同じになるのである. よって y_1 に繰り込める. よって以下 $y_2 = 0$ とする. ϵ の 3 次の式から y_3 は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 y_3}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 y_3}{\partial \tau^2} - 2 \sec^2 \sigma y_3 \\ &= \frac{1}{2} (y_1^2 (-2 \sin(2\sigma) y_{1,\sigma} + (\cos(2\sigma) - 2) y_{1,\sigma\sigma} + (\cos(2\sigma) + 2) y_{1,\tau\tau}) \\ &+ y_1 (\sin(2\sigma) (3y_{1,\sigma\sigma} - y_{1,\tau\tau}) y_{1,\sigma} + 2y_{1,\tau} (y_{1,\tau} - \sin(2\sigma) y_{1,\tau\sigma}) \\ &+ (4 \cos(2\sigma) - 2) y_{1,\sigma}^2) + \cos \sigma (4 \sin(\sigma) y_{1,\sigma}^3 + \cos \sigma (y_{1,\tau\tau} - 3y_{1,\sigma\sigma}) y_{1,\sigma}^2 \\ &+ \cos \sigma y_{1,\tau}^2 (y_{1,\sigma\sigma} - 3y_{1,\tau\tau}) + 4y_{1,\tau} y_{1,\sigma} (\cos \sigma y_{1,\tau\sigma} - \sin \sigma y_{1,\tau})) \\ &+ 2 \sec^2 \sigma y_1^3) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

を満たす.

AdS 永年項

さてここから y_1 を具体的に決めて y の 3 次の項でどのような共鳴項が現れたかの結果を述べる. y_1 を

$$y_1 = \sum_{i=2}^9 A_i^0 \cos(i\tau + \theta_i) e_i \quad (\text{C.16})$$

とすると $n = 10$ のところに例えば $A_9^0 A_3^0 A_2^0 \frac{12\sqrt{330}}{\pi} \cos(10\tau + \theta_9 + \theta_3 - \theta_2)$ という共鳴項があった. これから, 高波数モードへのエネルギーカスケードがある. また, $n \geq 10$ では共鳴項は存在しなかった. この他にも以下のことが観測された.

- 1 $(+ - -), (+ + +)$ は現れない. これは AdS 不安定性の場合と同じである [7].
- 2 偶と奇が混合したものしかモードの振幅のやり取りにつながらない.

しかし, これは y_1 を (C.16) と置いた時に観測されたもので更なる調査が必要とされる.

付録 D

数値計算の詳細

この付録では弦の運動を計算する際に使った数値計算手法について紹介する。この方法は [9, 10, 29] に準じ、また $h' = h/\sqrt{2}$ とする。

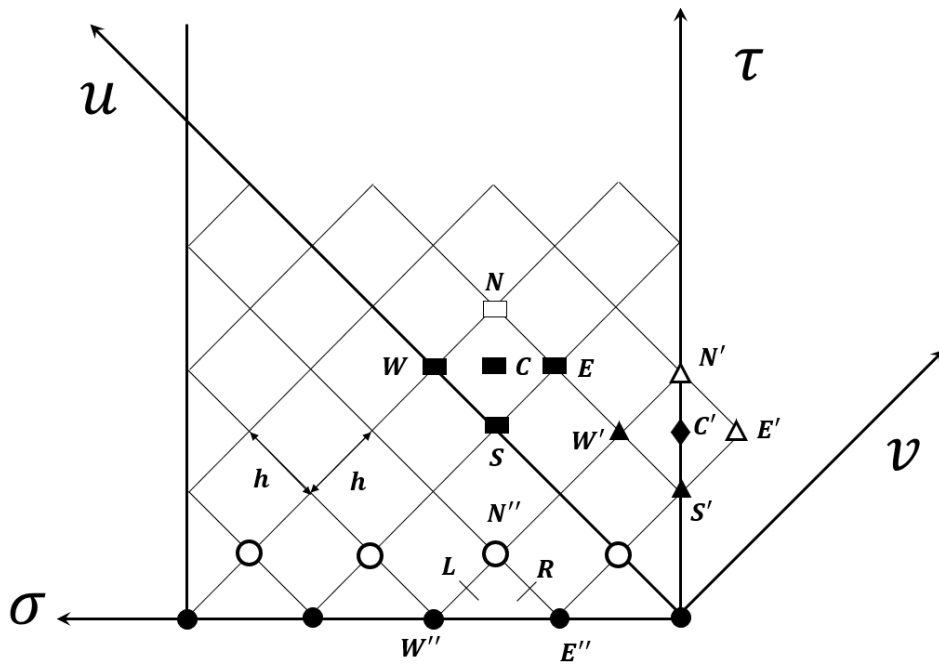


図 D.1: ダブルヌル座標による数値計算

D.1 ダブルヌル座標

図 D.1 において 5 点 N, E, W, S, C を考える。この、内 4 点 N, E, S, W の座標値 (u, v) は C を (u_C, v_C) としたとき、それぞれ $(u_C + h', v_C + h')$, $(u_C - h', v_C + h')$, $(u_C + h', v_C - h')$, $(u_C - h', v_C - h')$ となる。また、場を総じて ϕ と表し点 N, E, S, W, C での場の値を $\phi_N, \phi_E, \phi_S, \phi_W, \phi_C$ と表す。このとき、点 C での ϕ の u, v 微分は 2 次精度で

点 N, E, S, W の ϕ の値を使って

$$\phi_{,u}(u_C, v_C) = \frac{\phi_N - \phi_E + \phi_W - \phi_S}{2h}, \quad \phi_{,v}(u_C, v_C) = \frac{\phi_N - \phi_W + \phi_E - \phi_S}{2h} \quad (\text{D.1})$$

と表せる. また, 点 C での $\phi_{,uv}$ や ϕ_C は 2 次精度で

$$\phi_{,uv} = \frac{\phi_N - \phi_W - \phi_E + \phi_S}{h}, \quad \phi_C = \frac{\phi_E + \phi_W}{2} \quad (\text{D.2})$$

となる. 場 ϕ の方程式がある関数 f を使って

$$\phi_{,uv} = f(\phi, \phi_{,u}, \phi_{,v}) \quad (\text{D.3})$$

と表されたとする. 式 (D.1), (D.2) を (D.3) に代入することで式 (D.3) は 2 次精度で満たされる. またこのように, 2 次差分を使って運動方程式を書き換えたものを離散化された方程式と呼ぶことにする. 数値計算は以下のように行う: まず, ϕ_E, ϕ_S, ϕ_W はあらかじめ求めておく. そして離散化された方程式を使うことで ϕ_N を求める. この方法は 2 次精度である. χ については非線形な方程式を解かないといけない. このために, ニュートン法や予測子修正法 [36] を用いる.

D.2 境界での時間発展

ここでは場の境界での時間発展の仕方について述べる. 図 D.1 の 5 点 N', E', S', W', C' を考える. ここで, E' は仮想点である. 場を先ほどと同様にまとめて ϕ と書き N', E', S', W', C' での場の値を $\phi_{N'}, \phi_{E'}, \phi_{S'}, \phi_{W'}, \phi_{C'}$ と書く. 全体的な方針は以下の通りである: まずノイマン境界条件が課されている場に対しては $\phi_{,\sigma}$ は 2 次精度で

$$\phi(u_{C'}, v_{C'},)_{,\sigma} = \frac{\phi_{E'} - \phi_{W'}}{h'} = 0 \quad (\text{D.4})$$

と近似され, 仮想点の場を $\phi_{E'} = \phi_{W'}$ とする. 次に t 以外の場で残りの求まっていない点での値は式 (D.1), (D.2) を (D.3) に代入することで求める (ディレクレ境界条件を課された場は N' での値は分かっているが後で見ると t の N' の値を求めるためには仮想点 E' の値が必要となる. そのため, 運動方程式を使って E' の値を求める). 最後に t は拘束条件 (4.7) を使って求める. 以下に (N, N, N), (N, D, N) について詳細に述べる.

D.2.1 (N, N, N)

このとき, 全ての座標に対してノイマン境界条件が課されている. よって仮想点 E' での t , χ の値 $t_{E'}, \chi_{E'}$ は $t_{E'} = t_{W'}, \chi_{E'} = \chi_{W'}$ となる. χ_N は運動方程式を使って求める. 最後に $t_{N'}$ は拘束条件によって

$$t_{N'} = t_{S'} + \frac{2}{(1 + |\chi_{W'}|^2)} |\chi_{N'} - \chi_{S'}| \quad (\text{D.5})$$

と求まる.

D.2.2 (N, D, N)

簡単のため極座標 r, θ で考える. まず θ, t はノイマン境界条件が課されているので仮想点 E' での値は $\theta_{E'} = \theta_{W'}, t_{E'} = t_{W'}$ となる. また, r はディレクレ境界条件が課されているので $r_{N'} = r_{S'} = r_0$ である. 次に $\theta_{N'}, r_{E'}$ は運動方程式を使って求めるのだが $\theta_{N'}$ は θ の運動方程式が今の場合境界で $\theta_{,uv} = 0$ となっているので $\theta_{N'} = 2\theta_{W'} - \theta_{S'}$ と求まる. また $r_{E'}$ は運動方程式を使うと 2 次方程式となって, 簡単に求めることができる. 最後に $t_{N'}$ は拘束条件を使って,

$$t_{N'} = t_{S'} + \frac{\sqrt{(r_{W'} - r_{E'})^2 + r_0^2(\theta_{N'} - \theta_{S'})^2}}{(1 + r_0^2)} \quad (\text{D.6})$$

となる.

D.2.3 初期値の設定

ここでは [29] に基づいて初期値の構成の仕方を紹介する. 場の運動を決めるためには初期時刻 $\tau = 0$ で場の配位と速度を与えなければならない. しかし, 図 D.1 において $\tau = 0$ 面 (●) に場の配位を与える事はできても速度の情報まで与える事はできない. これに対してどうするかというと次の面 $\tau = h/\sqrt{2}$ (○) 面の場を与えられた速度で決めるのである. 拘束条件がない場合は速度を自由に与えることができるが, 本論文では, 拘束条件が満たされるようにするために次の手順で ○ での場の配位を決める. まず $\tau = 0$ (●) 面では初期条件による配位を与える. $\tau = h/\sqrt{2}$ 面 (○) での場の求め方を解説するために例として N''' での場を求めることを考える. L, R はそれぞれ N''' と W''' の中点, N''' と E''' の中点である. またそれぞれの点に対応する場を上と同じ記法で表す. L での ϕ の v 微分 $\phi_{v|L}$, R での ϕ の u 微分 $\phi_{u|R}$ は 2 次精度でそれぞれ

$$\phi_{v|L} = \frac{\phi_{N'''} - \phi_{W'''}}{h}, \quad \phi_{u|R} = \frac{\phi_{N'''} - \phi_{E'''}}{h} \quad (\text{D.7})$$

となる. また R, L での場の値 ϕ_R, ϕ_L は 2 次精度で

$$\phi_R = \frac{\phi_{N'''} + \phi_{E'''}}{2}, \quad \phi_L = \frac{\phi_{N'''} + \phi_{W'''}}{2} \quad (\text{D.8})$$

である. R で $h_{uu} = 0$ また $t_{E'''} = 0, t_{N'''} > 0$ より

$$t_{N'''} = 2 \frac{\sqrt{(\chi_{1N'''} - \chi_{1E'''})^2 + (\chi_{2N'''} - \chi_{2E'''})^2}}{1 + \frac{(\chi_{1N'''} + \chi_{1E'''})^2}{4} + \frac{(\chi_{2N'''} + \chi_{2E'''})^2}{4}}. \quad (\text{D.9})$$

同様に L で $h_{vv} = 0$, また $t_{W'''} = 0, t_{N'''} > 0$ より

$$t_{N'''} = 2 \frac{\sqrt{(\chi_{1N'''} - \chi_{1W'''})^2 + (\chi_{2N'''} - \chi_{2W'''})^2}}{1 + \frac{(\chi_{1N'''} + \chi_{1W'''})^2}{4} + \frac{(\chi_{2N'''} + \chi_{2W'''})^2}{4}} \quad (\text{D.10})$$

と求まる. (D.9) から (D.10) を引くことにより t_N を含まない式

$$\frac{\sqrt{(\chi_{1N''''} - \chi_{1E''''})^2 + (\chi_{2N''''} - \chi_{2E''''})^2}}{4 + (\chi_{1N''''} + \chi_{1E''''})^2 + (\chi_{2N''''} + \chi_{2E''''})^2} = \frac{\sqrt{(\chi_{1N''''} - \chi_{1W''''})^2 + (\chi_{2N''''} - \chi_{2W''''})^2}}{4 + (\chi_{1N''''} + \chi_{1W''''})^2 + (\chi_{2N''''} + \chi_{2W''''})^2} \quad (\text{D.11})$$

を得る. $\chi_{2N''''}$ は決めているので式 (D.11) は $\chi_{1N''''}$ の 1 変数方程式となる. よって 1 変数の Newton 法を使って $\chi_{1N''''}$ を求める. その後に式 (D.9) または式 (D.9) を使って $t_{N''''}$ を求める.

D.3 数値誤差

ここでは数値誤差を評価する量を [29] に基づいて導入し, 第 4 章で紹介した境界条件が (N, D, N) の弦の運動の数値シミュレーションの際の数値誤差を示す. まず, C_u, C_v を

$$C_u(\sigma) = (1 + |\chi|^2)^2 t_{,u}^2 - 4|\chi_u|^2, \quad C_v(\tau, \sigma) = (1 + |\chi^2|^2) t_{,v}^2 - 4|\chi_v|^2 \quad (\text{D.12})$$

と定義する. これらは式 (4.6) を使うと 0 になる. 次に C_u, C_v を規格化するために C_u, C_v の負の符号を正に変えた量を

$$\mathcal{N}_u(\sigma) = (1 + |\chi|^2)^2 t_{,u}^2 + 4|\chi_u|^2, \quad \mathcal{N}_v(\tau, \sigma) = (1 + |\chi^2|^2) t_{,v}^2 + 4|\chi_v|^2 \quad (\text{D.13})$$

と導入し, 数値誤差を測る量として C_{\max} を

$$C_{\max} = \frac{1}{2} \frac{C_u + C_v}{\mathcal{N}_u + \mathcal{N}_v} \quad (\text{D.14})$$

と定義する. 第 4 章で使った計算手法は 2 次精度なので誤差は計算グリッド数 N に対して $\mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$ と振る舞うと期待される. (N, D, N) を数値シミュレーションする際の数値誤差は図 D.2 のようになった. 図 D.2 から分かるように $C_{\max} \sim 1/N^2$ となっており期待通りである.

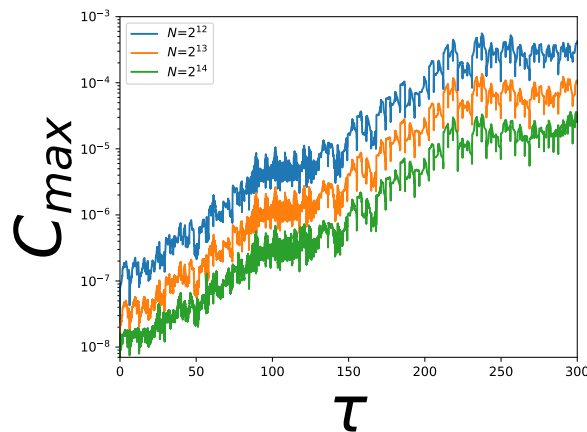


図 D.2: 異なるグリッド数 N での (N, D, N) の数値誤差. N は $N = 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}$.

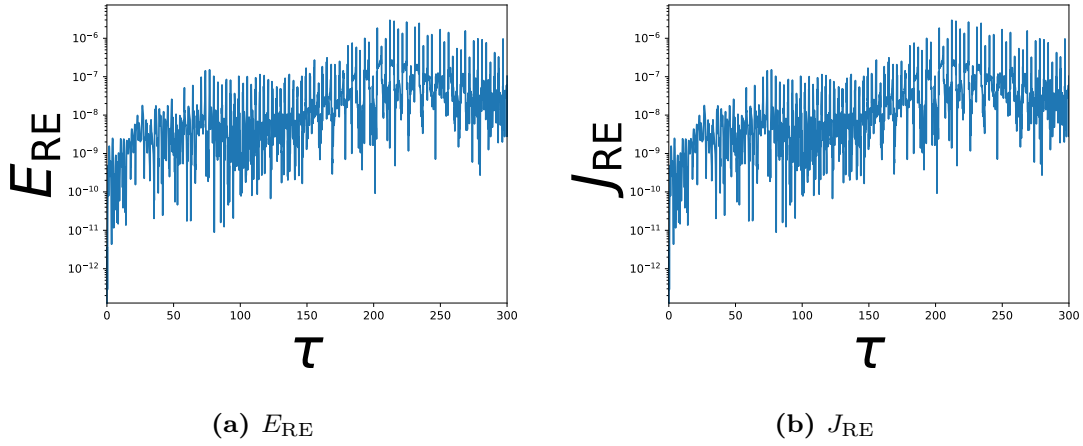


図 D.3: (N, D, N) での E_{RE} (左 (a)), J_{RE} (右 (b)) の時間依存性

D.4 エネルギーと角運動量の数値的な保存の確かめ

この付録ではエネルギー E (4.12) と角運動量 J (4.12) が (N, D, N) の場合に数値的に保存するか確かめる. 保存がどのくらい破れているか見るために相対誤差 E_{rot} , J_{rot} を

$$E_{RE} = \left| \frac{E(t) - E(0)}{E(0)} \right|, \quad J_{RE} = \left| \frac{J(t) - J(0)}{J(0)} \right| \quad (D.15)$$

と定義すると図 D.3 より保存の破れが 数値誤差 (図 D.2 参照) 程度であることが分かる. よって E , J は数値誤差の範囲で保存していると言える.

付録 E

M_a, M_b

この付録では (N, N, N) と同じ方法を用いて (N, D, N) で無限個の保存量が構成できないことを示す。これを示すためには $M_a(3.96)$, $M_b(3.97)$ を λ で展開して得られる保存量即ち $M_a^{(2)}(3.103)$, $M_b^{(2)}(3.104)$ が保存しないことを示せばよい。

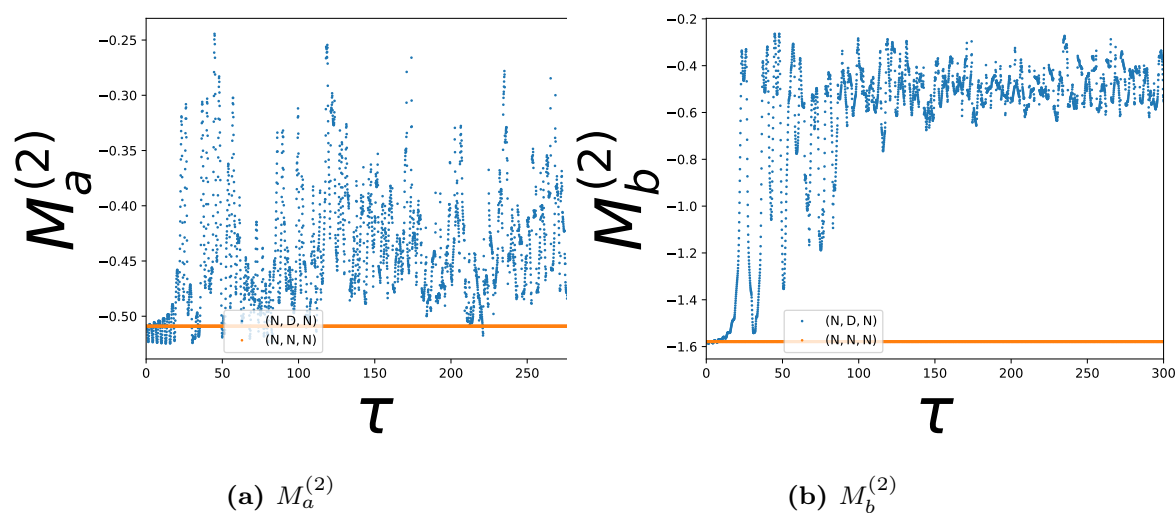


図 E.1: (N, N, N) と (N, D, N) での $M_a^{(2)}$ ((a)), $M_b^{(2)}$ ((b)) の時間依存性

図 E.1 にその結果を示す。(N, N, N) では保存しているが、(N, D, N) では時間とともに変化している。よって、(N, D, N) では (N, N, N) と同じ方法で無限個の保存量を構成できない。

参考文献

- [1] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 2, pp. 231–252, 1998.
- [2] L.F. Abbott and S. Deser. Stability of gravity with a cosmological constant. *Nuclear Physics B*, Vol. 195, No. 1, pp. 76–96, 1982.
- [3] Piotr Bizon and Andrzej Rostworowski. On weakly turbulent instability of anti-de Sitter space. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 107, p. 031102, 2011.
- [4] Piotr Bizoń. Is AdS stable? *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 46, No. 5, p. 1724, 2014.
- [5] Piotr Bizoń and Joanna Jałmużna. Globally regular instability of AdS_3 . *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 111, No. 4, p. 041102, 2013.
- [6] Piotr Bizoń, Maciej Maliborski, and Andrzej Rostworowski. Resonant Dynamics and the Instability of Anti-de Sitter Spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 115, No. 8, p. 081103, 2015.
- [7] Ben Craps, Oleg Evnin, and Joris Vanhoof. Renormalization group, secular term resummation and AdS (in)stability. *JHEP*, Vol. 10, p. 048, 2014.
- [8] Georgios Moschidis. A proof of the instability of AdS for the Einstein-massless Vlasov system. *Invent. Math.*, Vol. 231, No. 2, pp. 467–672, 2023.
- [9] Takaaki Ishii and Keiju Murata. Dynamical AdS strings across horizons. *JHEP*, Vol. 03, p. 035, 2016.
- [10] Takaaki Ishii and Keiju Murata. Turbulent strings in AdS/CFT. *JHEP*, Vol. 06, p. 086, 2015.
- [11] Takaaki Ishii, Keiju Murata, and Kentaroh Yoshida. Boundary driven turbulence on string worldsheet. *JHEP*, Vol. 01, p. 073, 2024.
- [12] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. A Semiclassical limit of the gauge / string correspondence. *Nucl. Phys. B*, Vol. 636, pp. 99–114, 2002.
- [13] Eric Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [14] Veronika E. Hubeny, Mukund Rangamani, and Tadashi Takayanagi. A Covariant holographic entanglement entropy proposal. *JHEP*, Vol. 07, p. 062, 2007.
- [15] Nelia Mann and Samuel E. Vazquez. Classical Open String Integrability. *JHEP*,

- Vol. 04, p. 065, 2007.
- [16] Iosif Bena, Joseph Polchinski, and Radu Roiban. Hidden symmetries of the AdS(5) x S**5 superstring. *Phys. Rev. D*, Vol. 69, p. 046002, 2004.
- [17] Leopoldo A. Pando Zayas and Cesar A. Terrero-Escalante. Chaos in the Gauge / Gravity Correspondence. *JHEP*, Vol. 09, p. 094, 2010.
- [18] Horatiu Nastase. *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, 2015.
- [19] David Eliecer Berenstein, Richard Corrado, Willy Fischler, and Juan Martin Maldacena. The Operator product expansion for Wilson loops and surfaces in the large N limit. *Phys. Rev. D*, Vol. 59, p. 105023, 1999.
- [20] Steven Carlip. The (2+1)-Dimensional black hole. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 12, pp. 2853–2880, 1995.
- [21] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 69, pp. 1849–1851, 1992.
- [22] Maciej Maliborski and Andrzej Rostworowski. Time-Periodic Solutions in an Einstein AdS–Massless-Scalar-Field System. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 111, p. 051102, 2013.
- [23] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, 7 2000.
- [24] Kentaroh Yoshida. *An introduction to Yang-Baxter deformation of 2D non-linear sigma model - Towards applications to AdS/CFT -*. Springer Nature, 2020.
- [25] 勇二佐藤. 弦理論と可積分性 : ゲージ-重力対応のより深い理解に向けて. SGC ライブラリ, No. 165. サイエンス社, 2021.
- [26] Takaaki Ishii, Ryo Kitaku, Keiju Murata, and Chul-Moon Yoo. Turbulence on open string worldsheets under non-integrable boundary conditions. 10 2023.
- [27] Pallab Basu, Diptarka Das, and Archisman Ghosh. Integrability Lost. *Phys. Lett. B*, Vol. 699, pp. 388–393, 2011.
- [28] Pallab Basu and Leopoldo A. Pando Zayas. Chaos rules out integrability of strings on AdS₅ × T^{1,1}. *Phys. Lett. B*, Vol. 700, pp. 243–248, 2011.
- [29] Takaaki Ishii, Keiju Murata, and Kentaroh Yoshida. Fate of chaotic strings in a confining geometry. *Phys. Rev. D*, Vol. 95, No. 6, p. 066019, 2017.
- [30] Shodai Kushiro and Kentaroh Yoshida. Chaotic string motion in a near pp-wave limit. *JHEP*, Vol. 01, p. 065, 2023.
- [31] Kamal L. Panigrahi and Manoranjan Samal. Chaos in classical string dynamics in $\hat{\gamma}$ deformed AdS₅ × T^{1,1}. *Phys. Lett. B*, Vol. 761, pp. 475–481, 2016.
- [32] Takaaki Ishii, Shodai Kushiro, and Kentaroh Yoshida. Chaotic string dynamics in deformed T^{1,1}. *JHEP*, Vol. 05, p. 158, 2021.
- [33] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2 edition,

- 2002.
- [34] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [35] A. L. Larsen and Norma G. Sanchez. New classes of exact multistring solutions in curved space-times. *Phys. Rev. D*, Vol. 51, pp. 6929–6948, 1995.
- [36] Ehud Eilon and Amos Ori. Adaptive gauge method for long-time double-null simulations of spherical black-hole spacetimes. *Phys. Rev. D*, Vol. 93, No. 2, p. 024016, 2016.