別紙４

報告番号	※　　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Some results on cluster algebra theory and its application
(団代数の理論とその応用に関するいくつかの結果)

氏　　名　　松下　浩大

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は二つの部分から構成されている。

まず、始めの部分は、階数 2 のアフィン型の団散乱図（cluster scattering diagram）の整合関係式の五角形関係式を用いた証明である。団散乱図には構造群 G が付随している。構造群 G は、ある種の無限次元の Lie 代数に Baker-Campbell-Hausdorff の公式で積の構造が入ったものである。階数 n の団散乱図は、n 次元ベクトル空間の中に余次元 1 の凸錐が複数おかれているものであり、それぞれの凸錐には群 G の元が付随している。そのような群の元が付随した凸錐を壁（wall）という。団散乱図の中に曲線がおかれると、その曲線が壁と交差するたびにその壁に付随する群の元をかけてゆくことによって、群の元が定まる。これを道順序積（path-ordered-product）という。ただし、壁には向きが決まっており、逆向きに交差するときには逆元をかける。ループに対する道順序積が単位元になるときに、その団散乱図は整合的（consistent）であるという。階数 2 の団散乱図は 2 次元平面内に原点から延びる半直線が複数おかれている。整合的であるかどうかは原点周りでのループに関する道順序積が単位元になるかで決まる。このときに要求される群 G の関係式を団散乱図の整合関係式と呼ぶ。この整合的な団散乱図式は、団代数の理論における重要な予想であった F 多項式の係数の正値性や c ベクトルの符号同一性を解決するのに使われた。

群 G は dilogarithm element と呼ばれる特別な元から生成されており、それらの元の間には五角形関係式という関係式が存在する。本論文の前半では、五角形関係式を用いて、ランク 2 のアフィン型の散乱図に対する整合関係式を証明した。ランク 2

のアフィン型の散乱図は、無限個の壁を持つ整合的な散乱図の内で最も基本的なものである。このアフィン型の整合関係式自体はすでに知られており、団代数の変異を用いた証明や箙の表現論を用いて証明されていたが、五角形関係式を用いた証明はこれまでになかった。

本論文の後半では、一般化団代数を用いて、マルコフ方程式と呼ばれるある種のディオファントス方程式を一般化して、その正の整数解をすべて決定した。まず、マルコフ方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

の正の整数解を団代数の変異を用いて次々と構成することができるということはよく知られていた。団代数は団変数という元の族から生成される可換環であり、団変数同士は特別な代数的な関係で結ばれている。その関係は初期シードという n 個の団変数と箙（一般には行列）の組から、その情報を用いて、別の n 個の団変数と箙の組を作る操作（シード変異）を繰り返すことによって定義されている。団代数の重要な性質として、どの団変数も初期シードの n 個の団変数に関する整数係数のローラン多項式で表示できるという非自明な現象（ローラン現象）が知られている。それを用いれば、初期シードの n 個の団変数にそれぞれ 1 を代入すれば、すべての団変数は整数値をとることになる。このことから、(1, …, 1) を解に持ち、変異によって解が解に変換されるような方程式に対して、整数解を次々と作ることができる。また、団変数の変異の性質からそのようにして得られる解はすべて正であるということが分かる。

本論文ではマルコフ方程式に類似した新たなディオファントス方程式の族

$$x^2 + y^2 + z^2 + k_1 yz + k_2 zx + k_3 zx = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz$$

を構成し、それらに対してすべての正の整数解を求めた。その構成には一般化団代数を用いた。一般化団代数も、団代数と同じく、シードの変異によって次々と構成される変数の族から生成される可換環である。ただし、団代数に比べて団変数の変異の定義式が複雑になっている。それでも、団代数と同じくローラン現象が成立しているため、一般化団代数の変異によって、正の整数解を次々と構成することができる。また、同じ手法を用いて、別のディオファントス方程式の族

$$x^2 + y^4 + z^4 + k\, y^2 z^2 + 2\, x\, y^2 + 2\, x\, z^2 = (7 + k)\, x\, y^2 z^2$$

も構成し、同じくすべての正の整数解を決定した。